División de Ciencias Exactas, Ingeniería y Tecnología

Ingeniería en Logística y Transporte

2° Semestre

Asignatura: Álgebra Lineal

Unidad 2. Matrices

UnADM
Universidad Abierta y a Distancia de México

Contenido

Competencia específica

Emplea matrices para resolver problemas de distintas áreas mediante diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Presentación de la Unidad

Las matrices aparecen tanto en forma explícita como implícita en nuestras actividades, tanto cotidianas como profesionales. Por ejemplo, una lista de los alumnos de un grupo es una matriz; los gastos y entradas de una empresa también se pueden modelar con matrices; la presentación de una muestra de ADN o las celdas de un panel solar puede ser estudiada como un arreglo matricial.

En esta Unidad, conocerás la importancia de las matrices, las aplicaciones que tiene en nuestra vida cotidiana y en las diferentes áreas de estudio, y la forma en que nos pueden beneficiar. También podemos modelar un problema que surja en las empresas u organizaciones, planteando un sistema de ecuaciones.

El sistema de ecuaciones lineales lo podrás resolver por medio de una matriz, con el método de operaciones elementales de renglón, pero antes de conocer este método, es necesario que sepas cómo se realiza la suma y resta de matrices, el producto de un escalar por una matriz y el producto matricial; estas operaciones nos permiten comprender el método de operaciones elementales de renglón.

Asimismo, podrás resolver un sistema de ecuaciones lineales por medio del método de eliminación de Gauss o el método de Gauss-Jordan.

También en esta Unidad se abordará todo lo referente a las principales características y elementos de los que se compone una matriz; asimismo, conocerás los diferentes tipos de matrices que se utilizan en la actualidad, así como la forma que éstas tienen. En general, se darán los conceptos fundamentales de las matrices para poder continuar en los siguientes temas y con el desarrollo de las mismas.

2.1. Introducción a matrices

Una matriz es un arreglo de entradas organizadas en renglones y columnas.

El estudio de matrices es muy importante dentro de nuestra vida cotidiana; constantemente las utilizamos sin darnos cuenta de ello. Por ejemplo, una boleta de calificaciones es una matriz con los datos acomodados en filas y columnas, la lista de compras del mercado, el horario de clases, una cartilla de vacunación, etc., también son ejemplos de matrices.

Asignatura	Calificación 1er. Parcial	Calificación 2do. Parcial	Calificación examen final	Calificación Final
Contabilidad básica	8.00	8.00	8.00	8.00
Mercadotecnia I	6.70	6.21	8.40	7.00
Matemáticas financieras	8.00	10.00	9.00	9.00
Derecho cambiario internacional	NP	6.20	4.70	5.00
Derecho de los negocios	5.00	5.00	5.00	5.00
Macroeconomía	7.00	8.00	6.00	7.00
Metodología de la investigación	10.00	8.00	7.00	8.00
Ingles básico	7.00	8.00	8.00	7.00
	7.39	7.43	7.01	7.00

Alumno: Juárez Hidalgo Fabiola
Matricula: 253238

Grupo: unico
Turno: Matutino
Semestre: 1
Fecha: 10-Jul-06

		Inasistencias				Calificaciones			
Clave	Asignatura	1er Parcial	2° Parcial	Examen Final	Finales	Calificación 1er Parcial	Calificación 2° Parcial	Calificación Examen Final	Calificación Final
CUC-MER-01-01	Contabilidad Básica	0	2		**2**	8.00	8.00	8.00	8.00
CUC-MER-04-02	Mercadotecnia I	0	2	0	**2**	6.70	6.21	8.40	7.00
CUC-MER-01-03	Matemáticas Financieras	0	1	3	**4**	8.00	10.00	9.00	9.00
CUC-MER-04-04	Derecho Cambiario Internacional	10	3	2	**15**	NP	6.20	4.70	5.00
CUC-MER-01-04	Derecho de los Negocios I	2	0		**2**	5.00	5.00	5.00	5.00
CUC-MER-01-05	Macroeconomía	1	1	2	**4**	7.00	8.00	6.00	7.00
CUC-MER-01-07	Metodología de la Investigación	3	3	5	**11**	10.00	8.00	7.00	8.00
CUC-MER-01-08	Inglés Básico	0	0	0	**0**	7.00	8.00	8.00	7.00
		16	**12**	**12**	**40**	7.39	7.43	7.01	**7.00**

¿Sabías que…?

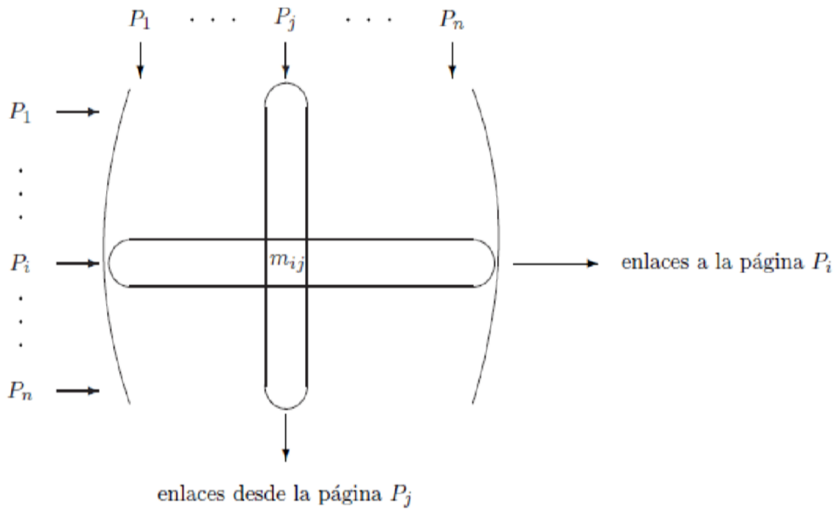
El buscador Google utiliza matrices para mostrar las páginas de búsqueda; de hecho, para que el servidor funcione se necesita álgebra lineal, teoría de grafos, y probabilidad. ¿Podrías explicar cómo el buscador Google atiende 200 millones de consultas diarias, aproximadamente, e indexa varios miles de millones de páginas web? ¿Qué papel juegan las matemáticas en este servidor?

Para que este servidor funcione, se necesita un criterio de ordenación; si se etiquetan con los símbolos $P_1, \dots, P_n$ cada una de las páginas de la red, se le puede asignar a cada P_j un número x_j, que representará su importancia. Estos números podrían ser, por ejemplo, números entre 0 y 1.

Supongamos que después de un censo de los sitios de la red, se construye la lista de páginas web, asignándole a cada una de ellas, de la manera que sea, una importancia. Esta lista queda a nuestra disposición para ser utilizada cada vez que realicemos una determinada consulta: las páginas seleccionadas se mostrarán en el orden que indique dicha lista, ¿cómo se construye esa lista?

Cuando se tratan con grafos, se recurre a los dibujos en el papel, en los que los vértices son puntos del plano; mientras que las aristas son flechas que unen esos puntos, conviene considerar una interpretación alternativa, en este caso por medio de matrices.

La dimensión de una matriz está dada como el número de filas por el número de columnas. Por ejemplo, el horario se trata de una matriz de dimensión 6X6, o bien de 5X5, si solo te fijas en las entradas y no en la información que proporcionan, mientras que la boleta de calificaciones es una matriz de 11X10, o bien de 9X8. La dimensión de una matriz también se conoce como el orden de la matriz.



Ahora bien, en la matriz que formamos, las filas y columnas van etiquetadas con los $P_1, \ldots, P_n$, y cuyas entradas son ceros y unos. La entrada m_{ij} de la matriz será un uno si es que hay un enlace de la página P_j a la página P_i; y un cero en caso contrario: Supongamos, por ejemplo, que la página P_1 es citada desde las páginas P_2, P_{25} y P_{256}, que P_2 sólo se cita desde P_1 y P_{256}, etc., mientras que, digamos, hay enlaces a la última página, P_n, desde P_1, P_2, P_3, P_{25} y P_{n-1}.

La página P_1 tiene tres enlaces, los cuales son: P_2, P_{25} y P_{256}; la página P_2 tiene dos enlaces, P_1 y P_{256}; la página P_n tiene cinco enlaces que son: P_1, P_2, P_3, P_{25} y P_{n-1}.
De acuerdo con esto, x_1 debería ser proporcional a 3, porque tiene tres enlaces; x_2 lo sería a 2, etc., mientras que x_n habría de ser proporcional a 5.

Pero ahora nuestra asignación $x_1, \ldots, x_n$ debe cumplir que $x_1 = K(x_2 + x_{25} + x_{256})$, $x_2 = K(x_1 + x_{256})$,
...$x_n = K(x_1 + x_2 + x_3 + x_{25} + x_{n-1})$, donde K es una constante de proporcionalidad. Nos encontramos así con un enorme sistema de ecuaciones cuyas soluciones son las posibles asignaciones de $x_1, \ldots, x_n$.

En este curso aprenderás a calcular las soluciones de una matriz, sin las cuales, como te podrás dar cuenta, no podría existir una herramienta tan valiosa como Google.

2.1.1. Renglones y columnas

Ya hemos trabajado a lo largo de la primera Unidad los conceptos referentes a los vectores; en esta Unidad, clasificaremos los vectores por su tipo, es decir, por renglón o por columna; de esta manera, tenemos la siguiente definición.

Definición

Un vector renglón de *n* componentes *u*, es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, .., u_n)$$

Con este tipo de vectores ya estamos familiarizados, ya que han sido los que utilizamos durante la primera Unidad.

Definición

Se define un vector columna de n componentes v, como un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

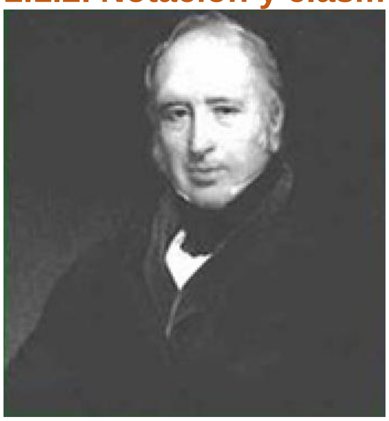
En ambos vectores (renglón o columna), u_1 se conoce como primera componente, v_2 se llama segunda componente, y así sucesivamente. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un vector columna, en el cual 3 es la primera componente, 5 la segunda componente, -7 la tercera componente y el 2 es la cuarta componente.

Mientras tanto, en el vector renglón (3, 5, -7, 2), 3 es la primera componente, 5 es la segunda, -7 es la tercera y 2 es la cuarta.

Este vector, tanto la columna como el renglón, se pueden utilizar, por ejemplo, para describir el ahorro de una persona al día; así, el vector puede expresarse como: ahorré 3 pesos el lunes, 5 pesos el martes, gasté 7 el miércoles, ahorré 2 el jueves.

Ahora que conocemos los vectores, estamos listos para dar a conocer otro concepto, en este caso, el de las matrices.

2.1.2. Notación y clasificación

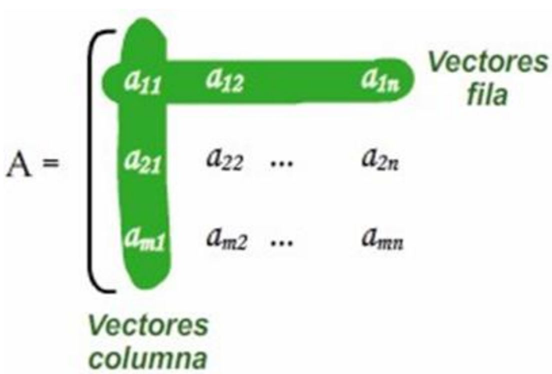


En 1858, Cayley introdujo la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas. Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales y derivadas parciales. Además de que son útiles para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, en las diferentes ingenierías, etc., y, como viste, también pueden aparecer en tus actividades cotidianas.

La utilización de matrices actualmente constituye una parte esencial de los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos, etc.

Notación que se utiliza para una matriz

Una matriz A de *m* x *n* (*m* por *n*) es un arreglo rectangular de *m por n* números dispuestos en *m* filas y *n* columnas, tal y como se muestra a continuación:



Los elementos que conforman una matriz, son los vectores fila y los vectores columna; entonces, cada fila de una matriz es precisamente un vector fila y cada columna de la misma, es un vector columna. Ahora ya podemos representar diferentes situaciones mediante matrices, de manera muy similar a cuando utilizábamos vectores, pero con más información. Por ejemplo, un estudiante obtuvo las siguientes calificaciones:

	Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3
Cálculo	8	9	9
Álgebra	9	7	9
Computación	10	9	10

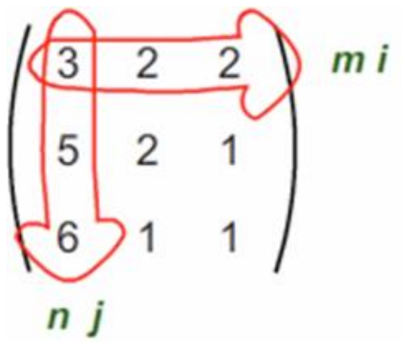
Si vamos a trabajar una tabla como la anterior que nos ofrece la información ordenada y clara, sería una pérdida de tiempo utilizarla sólo una ocasión, ya que se tiene que trazar. Sin embargo, con la ayuda de las matrices, una vez que tenemos establecido el orden, podemos representar la información tal y como sigue, una y otra vez.

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 9 & 7 & 9 \\ 10 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

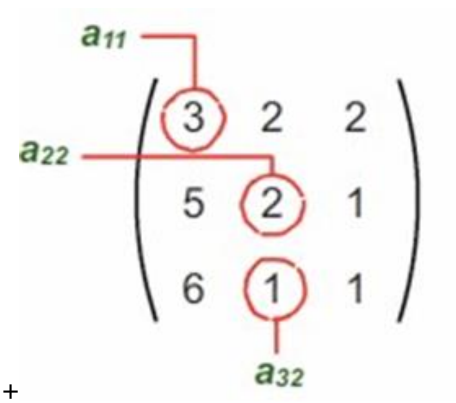
Esta, sería una forma más cómoda para continuar trabajando con los datos de la tabla. En algunos textos, para representar una matriz, se utilizan paréntesis cuadrados o bien corchetes; en este curso utilizaremos la notación de los paréntesis normales o, como algunos les llaman, paréntesis redondos.

Por otra parte, para establecer la cantidad de elementos que contiene una matriz, la nombraremos como matriz de *m* x *n*, donde m representará el número de filas y n el número de columnas.

Para referirnos a una matriz, vamos a utilizar datos similares a las coordenadas en un plano cartesiano, pero en lugar de utilizar un plano con eje *x* y eje *y*, utilizaremos la fila *i* y la columna *j*, en ese mismo orden; por ejemplo, supongamos que tenemos la siguiente matriz de 3 x 3:



El elemento a_{11} = 3 se ubica en la fila 1, columna 1, el elemento a_{22}=2, y en el a_{32} se encuentra el 1; de esta manera, cada elemento de la matriz se ubica mediante la fila en la que se encuentre, ordenadas de arriba hacia abajo, y en la columna, ordenadas de izquierda a derecha. Como puedes observar, no existen dos elementos distintos que tengan la misma posición dentro de una matriz.



+

A partir de las matrices, nos podemos dar cuenta de que un vector es precisamente una matriz que está formada únicamente por una fila o por una columna, dependiendo de qué tipo de vector sea.

A todas las matrices las vamos a representar mediante una letra mayúscula, así, tendremos a las matrices A, B, C, D, etc. Para hacer referencia a sus elementos, generalmente utilizaremos la notación de la misma letra pero con minúsculas y con dos subíndices, el primero de los cuales indica la fila y el segundo la columna; así, a_{ij} es el elemento que está en la fila i columna j. De esta manera, a_{34}, significa que el elemento que se encuentra en la fila 3 y columna 4.

De modo general, las matrices pueden clasificarse en matrices cuadradas y matrices no cuadradas; las matrices cuadradas tienen características especiales y son aquellas con las cuales trabajaremos durante todo el curso.

Todas las matrices, ya sean cuadradas o no, pueden escribirse en su forma escalonada reducida por renglones. Este tipo de matriz tiene las siguientes características.

a) Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero, es 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

Primer elemento igual a 1 de la fila

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Segundo elemento igual a 1 de la segunda fila

d) Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene cero en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama pivote para ese renglón.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Pivote que se ubica en la fila 3, columna 3 y es igual 1

Las siguientes matrices, son ejemplos de matrices escalonadas reducidas por renglones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Pivote que se ubica en la fila 3, columna 3 y es igual 1

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz cuadrada

Una matriz es cuadrada si tiene el mismo número de filas que de columnas, por ejemplo la matriz de las calificaciones de cálculo, álgebra y computación, tiene 3 filas y 3 columnas.

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 9 & 7 & 9 \\ 10 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Diagonal de la matriz

Los elementos que se encuentran en las posiciones donde el número de filas coincide con el de la columna, forman la diagonal de la matriz; en este ejemplo, las posiciones son $a_{11} = 8$, $a_{22} = 7$ y $a_{33} = 10$.

Una matriz que no es cuadrada tiene diferente número de filas y de columnas. Por ejemplo, el vector fila y el vector columna.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, .., u_n)$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

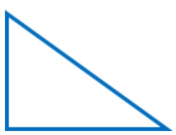
Una diagonal de una matriz es la que forman las entradas, comenzando por cualquiera de la primera columna, y dirigiéndose hacia abajo en forma escalonada.

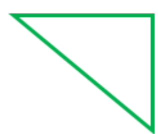
La diagonal principal de una matriz se define para matrices de nxn. Ésta es la diagonal que va desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha. Es decir, si tenemos una matriz cuadrada de nxn, la diagonal principal está formada por las entradas a_{ii}.

Dentro de las matrices cuadradas podemos encontrar diferentes tipos de matrices, como son:

Matriz triangular

Una matriz es triangular superior si es una matriz cuadrada y todos los elementos que se encuentran abajo de la diagonal principal son cero; en una matriz inferior sucede a la inversa, es decir, todos los elementos que se encuentran arriba de la diagonal principal son cero.





$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{9} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

La matriz A es **triangular superior** porque al construir un triángulo por arriba de la diagonal lo que queda abajo del triángulo son ceros (fíjate bien que no importa como sean las entradas que quedan dentro del triángulo, lo importante es que **debajo de él todas las entradas son ceros**).

La matriz B es **triangular inferior**, porque al construir un triángulo por debajo de la diagonal lo que queda arriba del triángulo son ceros (fíjate bien que no importa como sean las entradas que quedan dentro del triángulo, lo importante es que **arriba de él todas las entradas son ceros**).

Matriz diagonal

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada cuyas entradas no diagonales son todas cero (fíjate bien que no importa como sean las entradas que quedan en la diagonal, lo importante es que tanto arriba de la diagonal como debajo de la misma, las entradas son ceros).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

Matriz identidad

Es la matriz que en la diagonal principal solo tiene números uno y en los demás elementos, ceros. En la siguiente matriz se ilustra la definición.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz cero

Es la matriz cuyos elementos son todos cero, por ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz cero es tanto triangular superior, como triangular inferior, como diagonal.

Existen otros tipos especiales de matrices, las cuales daremos a conocer en el momento en que las utilicemos. Definimos las anteriores debido a que en todo momento las utilizaremos por ser las más básicas en álgebra lineal.

2.2. Operaciones con matrices

¿Sabías que…?

Las hojas de cálculo, como las de Excel, son arreglos matriciales que te permiten manipular datos numéricos. Habitualmente se utilizan para realizar bases de datos, informes, gráficas estadísticas y clasificación de datos. Con ellas es posible hacer cálculos complejos con fórmulas y funciones y dibujar distintos tipos de gráficas. Para ello, se utilizan operaciones entre celdas. Cada celda representa una entrada de la matriz.

Particularmente, Excel está compuesto por libros. Un libro es el archivo en que se trabaja y donde se almacenan los datos. Cada libro puede contener aproximadamente 250 hojas o carpetas. Cada hoja contiene aproximadamente 65.000 líneas y 256 columnas ordenadas numérica y alfabéticamente, respectivamente.

La variedad de aplicaciones de las matrices se presenta a nuestro alrededor, y si bien es cierto que en todo momento las utilizamos, también es cierto que con ellas realizamos diferentes operaciones, sin darnos cuenta.

Por ejemplo, en las situaciones más básicas, al realizar operaciones con los vectores, los cuales son matrices formadas por una columna o un renglón, al realizar la suma o resta de dos vectores columna o renglón, estamos realizando operaciones con matrices.

Otras situaciones en las que se utilizan matrices más complejas, sería la comparación de precios. Si queremos adquirir los útiles escolares y comparamos la lista de precios en diferentes papelerías, estaríamos haciendo una diferencia de precios en un arreglo rectangular, lo cual es precisamente una resta de matrices.

Si compramos uniformes escolares para 2 niños de kínder y otros 2 niños de primaria, al realizar la suma de los precios, estaríamos realizando una suma de matrices, ya que el uniforme se compone de calcetas, playera, short, pantalón. Si son 4 niños y todos van a la misma escuela y sus uniformes tienen el mismo precio, realizaríamos el producto del costo de las partes que componen el uniforme por 4 que es la cantidad de niños; a esta operación se le conoce como el producto de una matriz por un escalar.

También podemos encontrar aplicaciones más avanzadas. Por ejemplo, si estás realizando un estudio de contaminación en la ciudad, puedes realizar una matriz en la cual se indiquen los diferentes contaminantes que te interesa estudiar y sus niveles de concentración por zona. O puedes tener una matriz por zona y sumarlas para determinar el índice del contaminante en toda la ciudad.

Si vas a analizar el comportamiento de una bacteria en diferentes ambientes, o bien, bajo modificaciones genéticas manipuladas, te conviene realizar una matriz en la cual conserves tus datos. Por ejemplo, el nivel de afección de la bacteria en diferentes organismos vivos de acuerdo con la temperatura del ambiente. O bien, el poder de infección de acuerdo con la manipulación de un gene u otro.

O si imaginas que deseas averiguar cómo producir un combustible a partir de diferentes elementos naturales, puedes realizar un arreglo matricial en el cual pondrás las diferentes cantidades de cada elemento y su efectividad.

Ahora conoceremos las operaciones que se realizan con las matrices.

2.2.1. Suma y resta de matrices

En este subtema conoceremos la definición de la suma y resta de matrices, así como sus propiedades.

Suma de matrices

Sean A y B dos matrices de m x n; la suma de la matriz A y B es la matriz A + B de m x n; en el gráfico se puede apreciar la manera en que se suman cada uno de los elementos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Esto significa, que la matriz A + B de m x n se obtiene de sumar las componentes correspondientes de las matrices de m x n de A y B.

Se debe tener en cuenta que la suma entre dos matrices se puede realizar únicamente cuando ambas matrices tienen el mismo número de elementos o bien el mismo tamaño.

Por ejemplo, las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ son incompatibles bajo la suma, puesto que, al intentar realizar la suma, tendríamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos harían falta dos elementos, los cuales no posee la primera matriz; por lo tanto, no se pueden sumar.

Lo que podemos hacer en estos casos es aumentar en la matriz que sea más pequeña las filas o columnas necesarias para hacer ambas matrices de iguales dimensiones. Todos los elementos que se aumenten deberán ser iguales a cero.

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ más $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ quedará igual a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 5+2 \\ 3+1 & 7+6 \\ 1+9 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 13 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

En cambio, las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ sí se pueden sumar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & 6+1 \\ 8+6 & 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$$

Resta de matrices

Sean A y B dos matrices de m x n, la diferencia de A y B es una matriz de m x n, A – B dada por

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

Esto significa, que la matriz A – B de m x n se obtiene de restar las componentes de B, de las respectivas componentes de A.

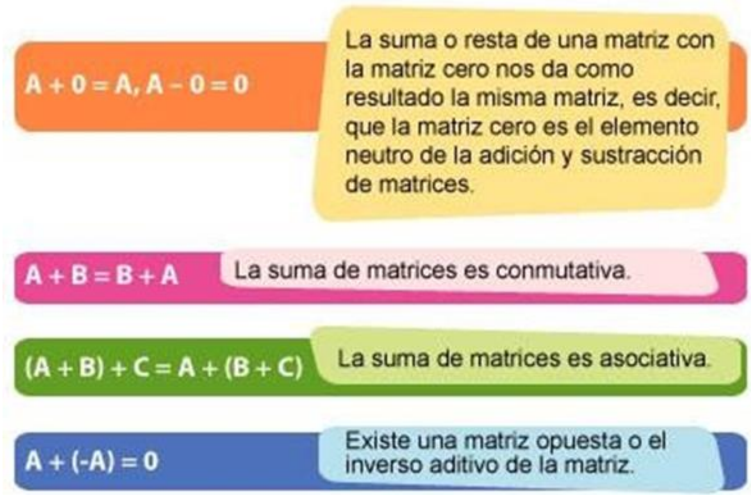
Al igual que para la suma de matrices, la diferencia se puede dar únicamente cuando las matrices que se están restando tienen el mismo número de elementos o bien que las matrices sean del mismo tamaño. Entonces, las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ no pueden restarse, ya que son incompatibles debido a que tienen diferente número de filas, en cambio, las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ sí pueden restarse, puesto que tienen el mismo número de filas y de columnas, si restamos la segunda de la primera, tenemos:

$$\begin{pmatrix}2 & 6\\ 8 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5 & 1\\ 6 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-5 & 6-1\\ 8-6 & 0-8\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & -8\end{pmatrix}$$

Como en el caso de la suma, puedes hacer las matrices del mismo tamaño agregando ceros. Reflexiona ¿Cómo quedarían las matrices $\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 6\\ 9 & 0\end{pmatrix}$ para restarse?

Propiedades de la suma y resta de matrices

Sean A, B y C tres matrices de m x n, entonces se verifican las siguientes propiedades.



**Las propiedades de la suma de las matrices son similares a las propiedades de los números reales.*

2.2.2. Producto de un escalar por una matriz

En el tema 2.2. se vieron las operaciones con matrices y se mencionó que éstas se utilizan, por ejemplo, si compramos uniformes escolares y se compone de calcetas, playera, short, pantalón. Si son 4 niños y sus uniformes tienen el mismo precio, realizaríamos el producto del costo de las partes que componen el uniforme por 4 que es la cantidad de niños.

Si, por ejemplo, sabes que el crecimiento de una cepa de bacterias es directamente proporcional a la temperatura del ambiente, entonces te servirá hacer una multiplicación de la matriz en donde tengas tus datos de crecimiento por bacteria, por un escalar que represente los grados de la temperatura.

Esta operación se le conoce como el producto de una matriz por un escalar. A continuación, se revisará de manera formal:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz m x n, αA está dada por:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, que αA es la matriz que se obtiene al multiplicar cada componente de A por α. Veamos el siguiente ejemplo.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; si multiplicamos a la matriz por los escalares 2 y 1/5 tenemos:

$$2A = \begin{pmatrix} 2(3) & 2(1) & 2(-5) \\ 2(0) & 2(7) & 2(2) \\ 2(1) & 2(6) & 2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -10 \\ 0 & 14 & 4 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(3) & \frac{1}{5}(1) & \frac{1}{5}(-5) \\ \frac{1}{5}(0) & \frac{1}{5}(7) & \frac{1}{5}(2) \\ \frac{1}{5}(1) & \frac{1}{5}(6) & \frac{1}{5}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -1 \\ 0 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

El producto de una matriz por un escalar nos aporta tres propiedades más, que se vinculan con las propiedades mencionadas en la suma y resta de matrices.

Sean A y B dos matrices y sean α y β dos escalares; entonces se verifican las siguientes propiedades.

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
  - Propiedad distributiva del producto por un escalar.
- $1A = A$
  - El escalar 1 al multiplicarse por una matriz es la misma matriz.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

2.2.3. Producto matricial

La multiplicación o producto matricial se realiza entre dos matrices o entre una matriz y un escalar, al igual que la multiplicación en aritmética. La multiplicación de matrices viene dada por un algoritmo, que permite calcular la multiplicación matricial, el cual es diferente del que se utiliza para multiplicar dos números. La diferencia es que la multiplicación de matrices no cumple con la propiedad conmutativa. A continuación, conoceremos la manera en que se realiza la multiplicación de matrices.

Sea A una matriz de m x n y sea B una matriz de n x p. El producto de A y B es una matriz C = A x B de m x p, donde los elementos c de C están determinados de la siguiente manera:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \text{ (renglón i de A)} \cdot \text{(renglón j de B)}$$

De este modo, cada elemento c de C queda determinado de manera única por el producto de un renglón de A con una columna de B.

Antes de realizar la multiplicación de matrices, comprobaremos si éstas son compatibles bajo la multiplicación; para esto, el número de columnas de la primera matriz debe de ser igual al número de filas de la segunda matriz, de lo contrario, el producto no se podrá realizar ya que las matrices serían incompatibles bajo la multiplicación.

Ejemplo del producto de matrices:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcula su producto.

A tiene 3 renglones y B tiene 3 columnas, de modo que dicha multiplicación de matrices puede realizarse.

El producto lo determinamos de la siguiente manera:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

El primer paso para multiplicar dos matrices es tomar la primera fila de la matriz A y la primera columna de la matriz B, con estos dos vectores realizaremos un producto escalar y el resultado será el elemento a_{11} de la nueva matriz y se continuará multiplicando la fila *i* por la columna j y el resultado será el elemento a_{ij} de la nueva matriz.

En el siguiente diagrama se ilustra la forma en que se multiplican dos matrices.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\,x\,B =$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(5)+(0)(2)+(5)(4) & (1)(7)+(0)(6)+(5)(3) & (1)(4)+(0)(1)+(5)(0) \\ (-3)(5)+(6)(2)+(2)(4) & (-3)(7)+(6)(6)+(2)(3) & (-3)(4)+(6)(1)+(2)(0) \\ (1)(5)+(4)(2)+(9)(4) & (1)(7)+(4)(6)+(9)(3) & (1)(4)+(4)(1)+(9)(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5+0+20 & 7+0+15 & 4+0+0 \\ -15+12+8 & -21+36+6 & -12+6+0 \\ 5+8+36 & 7+24+27 & 4+4+0 \end{pmatrix}$$

Entonces, tenemos que la matriz resultante del producto de las matrices A y B está dada por

$$A \times B = \begin{pmatrix} 25 & 22 & 4 \\ 5 & 21 & -6 \\ 49 & 58 & 8 \end{pmatrix}$$

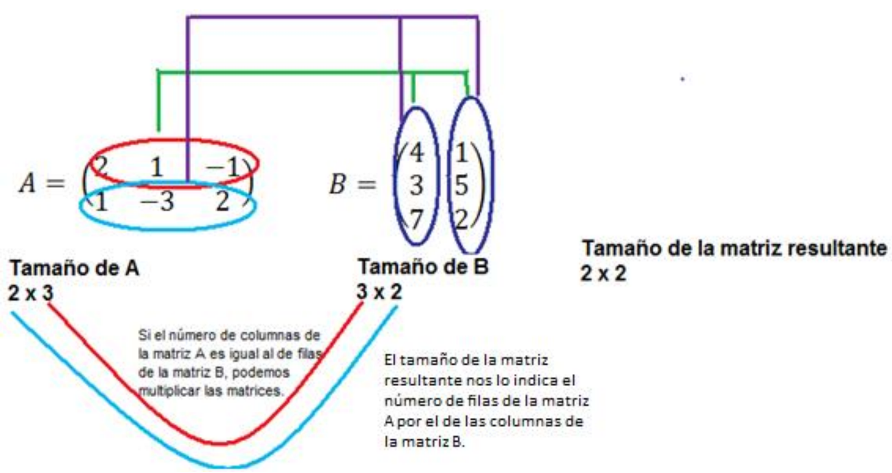
Debemos tener en cuenta que, si el número de filas de la primera matriz no coincide con el número de columnas de la segunda, entonces las matrices no se pueden multiplicar. Por esta misma razón, no es indispensable que las matrices sean cuadradas para que se pueda efectuar su producto.

A continuación, presentamos el producto de dos matrices que no son cuadradas; para ser más precisos, en este ejemplo realizaremos los productos por separado.

Ejemplo:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ de 2 x 3 y la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ de 3 x 2, calcula su producto.

Debido a que las matrices no son cuadradas, primero verificaremos si son o no compatibles bajo la multiplicación. Como la primera matriz es de 2 x 3 (dos filas, tres columnas) y la segunda es de 3 x 2(tres filas, dos columnas), sí se pueden multiplicar porque el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Además, podemos identificar el tamaño de la matriz resultante tomando el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda. De esta manera, el resultado será una matriz cuadrada de 2 x 2; esto lo resumimos mediante el siguiente esquema:



Ahora, realizaremos el producto de los elementos que se ilustran en el diagrama anterior:

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = (2)(4) + (1)(3) + (-1)(7) = 8 + 3 - 7 = 4$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = (2)(1) + (1)(5) + (-1)(7) = 2 + 5 - 7 = 0$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = (1)(4) + (-3)(3) + (2)(7) = 4 - 9 + 14 = 9$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = (1)(1) + (-3)(5) + (2)(2) = 1 - 15 + 4 = -10$$

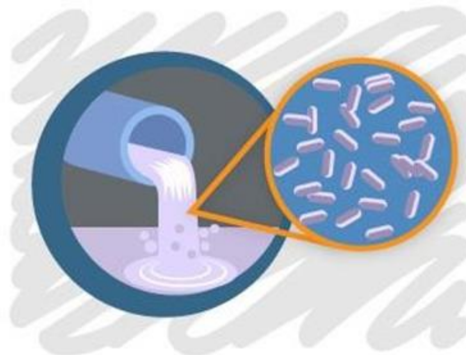
Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$$

Con esto se demuestra que al multiplicar dos matrices, no es necesaria que éstas sean cuadradas.

Un ejemplo de aplicación de las operaciones de matrices en investigación lo irás construyendo paso a paso en las siguientes secciones. Lo primero que debes hacer es representar los elementos de tu problema en forma matricial. Por ello, estudiaremos primero esto.

2.3. Representación matricial



En este tema se verá la representación de los sistemas de ecuaciones lineales por medio de una matriz; comúnmente nos encontramos con problemas que se pueden representar mediante un sistema de ecuaciones lineales; por ejemplo, la cantidad de personas que camina por una calle bajo ciertas condiciones, como la hora, con o sin mascotas, comiendo o ejercitándose, etc. O bien, el número de ciertos contaminantes en el ambiente o en el agua, o la cantidad necesaria de ciertos átomos para crear una molécula determinada.

Una vez que un fenómeno, problema o situación sea modelado mediante un sistema de ecuaciones, su representación matricial es demasiado sencilla, tal y como lo veremos en los siguientes subtemas.

2.3.1. Matriz principal y matriz ampliada

Matriz principal

Una matriz es principal o de coeficientes si resulta de la representación de un sistema de ecuaciones lineales; es decir, si A es la representación del sistema de ecuaciones, entonces A es una matriz principal o de coeficientes.

Consideremos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x + 6y &= 0 \\ 5x + 2y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y + 7z &= 12 \\ 3x + 3y + 6z &= -3 \\ x + 5y + 2z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5x + 8y &= 2 \\ 6y &= -1 \\ 9x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

Las siguientes matrices son ejemplos de las matrices principales de los sistemas dados.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

A las matrices principales se les conoce con este nombre, debido a que a partir de ellas se encuentra la solución del sistema de ecuaciones del cual proviene.

Las matrices principales son las primeras matrices que se escriben con los coeficientes de las incógnitas de un sistema matricial; esto es, antes de sumarlas, restarlas o multiplicarlas por un escalar o por una matriz, ya que al realizar estas operaciones las matrices se modifican.

Todas las matrices descritas en el ejemplo anterior son matrices principales.

Matriz ampliada

Se le conoce como matriz ampliada o aumentada a la combinación de dos matrices, una que representa a la matriz de los coeficientes de un grupo de ecuaciones y otra que representa a la matriz de constantes de las mismas ecuaciones.

Considerando el siguiente sistema de ecuaciones:

x + 3y +z = 5
4x + y + 6z = 7
2x + 7y + z = 4

Tenemos, las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Donde A es una matriz de coeficientes del sistema y B es una matriz de las constantes. Con estas matrices podemos construir la matriz aumentada $(A|B)$, tal y como se muestra a continuación.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Las matrices aumentadas, forman una parte muy importante dentro de nuestro estudio y en la mayoría de los casos son las que más se utilizan, ya que son las únicas que nos ofrecen un resultado sobre alguna situación planteada mediante un sistema matricial.

A partir de ahora, notarás que las incógnitas de tus ecuaciones no serán *x*, *y* y *z* sino x_1, x_2, x_3, … x_n.

2.3.2. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

En este subtema trabajaremos los sistemas de ecuaciones lineales, para mostrar la manera en que estos se relacionan con las matrices. Supongamos que tenemos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, como el que se muestra a continuación:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = \ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n = \ b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots \ a_{mn}x_n = \ b_m \end{array}$$

De este sistema, podemos extraer los coeficientes de las variables en cada una de las ecuaciones y con ellos formamos la matriz principal o de coeficientes, de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Podemos nombrar a un vector $\boldsymbol{x}$ que represente a las variables, y escribirlo como:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Y por último, escribimos un vector **b** que represente a las constantes, las cuales son los segundos miembros de cada una de las ecuaciones que pertenecen al sistema de ecuaciones lineales:

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Y con todos estos elementos, podemos representar al sistema de ecuaciones lineales por medio de matrices, como sigue.

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

O bien:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Cuando el sistema de ecuaciones lineales que se está representando es homogéneo, entonces, se sustituye el vector **b** por el vector **0** y el sistema de ecuaciones nos quedaría de la siguiente manera.

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

O bien:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Generalmente tomaremos la matriz de coeficientes y la matriz o vector de constantes al representar sistemas de ecuaciones, ya que son los elementos que necesitamos para construir la matriz aumentada, la cual nos permitirá obtener o desarrollar algún resultado. Por ejemplo, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 4 \\ 9x_1 - 4x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Representamos los coeficientes por la siguiente matriz de 3 x 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 7 \\ 9 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por la matriz de 3 x 1 a las constantes:

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Formamos la matriz aumentada

$$(A|\boldsymbol{b})$$

O bien:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & -3 & 7 & 4 \\ 9 & -4 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Ésta es la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales anterior.

2.4. Operaciones elementales de renglón

Las operaciones elementales de renglón las utilizamos en nuestra vida cotidiana, al modificar algunos hechos o acontecimientos que se pueden representar mediante un vector. Esto se ilustra con los siguientes ejemplos:

Si tenemos una lista de compras de alimentos perecederos y compramos los mismos productos en las mismas cantidades cada semana, podemos encontrar la cantidad total que se compra al mes, multiplicando el vector que las representa por el número de semanas que restan del mes que se encuentra en curso.

Imagina que estás realizando un experimento en el cual analizas qué sustancias se producen en diferentes reacciones químicas. Puedes hacer un arreglo matricial que exprese los comportamientos de tus sustancias. Supón que debes tener más presente una de las reacciones, entonces puedes intercambiar de lugar las filas de tu matriz y también puedes realizar otras interacciones entre los renglones para determinar si es posible obtener o no otra sustancia.

A continuación, veremos de manera más específica cuáles son las operaciones elementales de renglón, así como la manera en que éstas se desarrollan. Por otra parte, conoceremos cómo obtener la matriz inversa mediante estas operaciones.

2.4.1. Aplicación de las operaciones elementales de renglón a una matriz

De los cursos de álgebra que vimos en la secundaria y en el bachillerato conocemos los sistemas de ecuaciones lineales. En ellos vimos que multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por un número distinto de cero da una nueva ecuación, la cual es equivalente a la original.

Otra de las cosas que conocemos de un sistema de ecuaciones es que, al sumar una ecuación, ya sea del sistema o equivalente a una de las del sistema, con otra del mismo sistema, se obtiene una ecuación que no la modifica y además, si se intercambian de renglón dos ecuaciones de un mismo sistema, resulta un sistema equivalente al primero, es decir, que las soluciones serían las mismas.

Las operaciones elementales con renglones, aplicadas a la matriz aumentada, que representa un sistema de ecuaciones lineales, son las siguientes:

- Multiplicar o dividir un renglón por un número diferente de cero.
- Sumar un renglón original o su equivalente, con otro renglón.
- Intercambiar dos renglones.

Cada una de las operaciones anteriores aplicadas sobre una matriz aumentada, no modifica la matriz, ya que nos forma una matriz equivalente a la primera. Por esto mismo, tampoco se altera el sistema de ecuaciones que dicha matriz representa.

El proceso de aplicar las operaciones elementales con renglones para simplificar una matriz aumentada se conoce como reducción por renglones.

Primero pondremos en práctica las operaciones de renglones, para posteriormente ver cómo esto nos ayuda a resolver sistemas de ecuaciones lineales. Vamos a desarrollar el siguiente ejemplo.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 2 & 0 & 7 & | & 3 \\ 1 & 6 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}$ una matriz aumentada; utiliza las operaciones elementales por renglón y encuentra la matriz identidad equivalente.

Para trabajar con los renglones y las columnas, utilizaremos R_i para hacer referencia al renglón i, con esto podemos reducir nuestra matriz de la siguiente manera.

Primero escribimos la matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 2 & 0 & 7 & | & 3 \\ 1 & 6 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}$$

Para realizar las operaciones entre renglones, lo que nos conviene es realizar operaciones con los renglones de tal manera que en la diagonal principal queden unos. Como nuestra matriz ya tiene al primer elemento de la diagonal igual a 1, tenemos que convertir a los elementos que se encuentran debajo de él, en ceros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 2 & 0 & 7 & | & 3 \\ 1 & 6 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}$$

Paso 1.

$-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ Multiplicamos al renglón 1, por -2 y le sumamos el renglón 2; el resultado de estas operaciones lo vamos a colocar en el renglón 2, por lo que el renglón 1 permanecerá igual.

$$-2R_1 + R_2 = -2(1 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 5) + (2 \;\; 0 \;\; 7 \;\; 3) = (-2 \;\; -8 \;\; -4 \;\; -10) + (2 \;\; 0 \;\; 7 \;\; 3) = (0 \;\; -8 \;\; 3 \;\; -7)$$

Este resultado lo puedes observar en el renglón 2 de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 0 & -8 & 3 & | & -7 \\ 1 & 6 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}$$

Paso 2.

$-R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ Para que el elemento a_{31} sea igual a cero, multiplicamos al renglón 1 por -1 y le sumamos el renglón 3, el resultado lo vamos a colocar en el renglón 3, por lo que el renglón 1 pasará tal como está.

$$-R_1 + R_2 = -(1 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 5) + (1639) = (-1 \;\; -4 \;\; -2 \;\; -5) + (1639) = (0214)$$

El resultado lo puedes observar en el renglón 3 de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 0 & -8 & 3 & | & -7 \\ 0 & 2 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Paso 3.

$-\frac{1}{8}\ R_2\ \ \rightarrow R_2$ multiplicamos al renglón 2 por -1/8 para tener al 1 en la matriz principal

$$-\frac{3}{8}R_2 \rightarrow R_2 = (0,-8,3,-7)\left(-\frac{1}{8}\right) = (0,-8,3,-7)$$

El resultado nos quedaría tal como se muestra en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{7}{8} \\ 0 & 2 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Ya tenemos los tres unos en la matriz principal, nos falta hacer ceros a los demás elementos de la matriz de coeficientes; para ello, realizaremos las siguientes operaciones:

Paso 4.

Al renglón 2 lo multiplicamos por -4 y le sumamos el renglón 1; al resultado lo colocamos en el renglón 1.

$$-4R_2 + R_1 \rightarrow R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{7}{8} \\ 0 & 2 & 1 & & 4 \end{pmatrix}$$

Paso 5.

Al renglón 2 lo multiplicamos por -2 y le sumamos el renglón 3; al resultado lo colocamos en el renglón 3. El renglón 2 pasa tal como está.

$$-2R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$

Como te podrás dar cuenta, las operaciones se realizaron de tal manera que el elemento a_{12} y a_{32} sean iguales a cero, pero el elemento a_{33} de la diagonal principal en lugar de 1 es 7/4; esto se resuelve fácilmente multiplicado por 4/7. El resultado se muestra en la siguiente matriz:

$$R_3 \to \frac{4}{7}R_3$$

Paso 6.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{7} \end{array}\right)$$

Paso 7.

$$-\frac{7}{2}R_3 + R_1 \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-6}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{7} \end{array}\right)$$

Paso 8.

$$\frac{3}{8}R_3 + R_2 \to R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19/14 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/7 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada que se obtuvo tiene unos en la diagonal principal y ceros en sus demás elementos, excepto en los que corresponden a las constantes. Entonces, hemos llegado a la matriz identidad y lo hemos conseguido con el uso de las operaciones elementales de renglón.

Ahora veremos cómo las operaciones de renglón realizadas en la matriz asociada al sistema de ecuaciones nos ayudan en la solución de éste.

Las matrices principales son aquellas que representan un sistema de ecuaciones lineales y que nos permiten obtener la solución de dicho sistema, de forma muy sencilla. La manera para hacer esto, es la siguiente.

Como lo establecimos al principio, las operaciones con renglones nos forman nuevas matrices, las cuales son equivalentes a la matriz principal o bien a la matriz con la cual comenzamos a trabajar; de esta manera tenemos la siguiente equivalencia.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 2 & 0 & 7 & | & 3 \\ 1 & 6 & 3 & | & 9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19/14 \\ 0 & 0 & 1 & | & 9/7 \end{pmatrix}$$

Entonces, la nueva matriz de coeficientes equivalente a la matriz principal es una matriz identidad, denotémosla en este caso por A’ y así, tenemos que

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, la matriz o vector de constantes, que anteriormente era

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ahora es

$$\boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{19}{14} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix}$$

Y por último, quien no cambia es la matriz o vector de variables $\boldsymbol{x}$**.**

El sistema solución lo podemos escribir tal y como se muestra a continuación:

$$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$$

O bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{19}{14} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_(1)$$

De esta manera, si desarrollamos el producto escalar de las matrices del primer miembro, tenemos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(x_1) + (0)(x_2) + (0)(x_3) \\ (0)(x_1) + (1)(x_2) + (0)(x_3) \\ (0)(x_1) + (0)(x_2) + (1)(x_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + 0 + 0 \\ 0 + x_2 + 0 \\ 0 + 0 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo este resultado en (1), tenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 19/14 \\ 9/7 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{19}{14}$$

$$x_3 = \frac{9}{7}$$

Éstas son las soluciones de la matriz aumentada $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 2 & 0 & 7 & | & 3 \\ 1 & 6 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}$

Se puede observar que el proceso de operaciones elementales de renglón de una matriz no es complicado, sino laborioso y dependiendo del tamaño de la matriz construida, puede llegar a ser hasta tedioso. Una manera más sencilla de obtener los valores de las variables es la siguiente:

Teniendo la matriz identidad en el lado izquierdo de la matriz aumentada, igualamos las variables correspondientes a cada posición, tal y como se muestra a continuación.

La matriz reducida por renglones queda de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19/14 \\ 0 & 0 & 1 & | & 9/7 \end{pmatrix}$$

A partir de ella, podemos encontrar las soluciones, tomando en cuenta el orden de las variables; para esto, asociamos a la primera columna la variable x_1, a la segunda columna x_2 y la tercera columna x_3; de esta manera, las soluciones son:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{19}{14}$$

$$x_3 = \frac{9}{7}$$

Y con esto, evitamos utilizar el producto escalar.

2.4.2. Matriz inversa mediante operaciones de renglón

Diremos que la matriz inversa de una matriz cuadrada A_n es la matriz que cumple la siguiente propiedad:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

Sean A y B dos matrices cuadradas; B es la matriz inversa de A si

$$AB = BA = I$$

Es decir, si el producto matricial de A y B nos da como resultado a la matriz identidad, entonces B es la matriz inversa de A y la denotamos por A^{-1}; de esta manera, podemos escribir la ecuación anterior en términos de A como sigue:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

A las matrices que tienen inversa se les llama invertibles. Las matrices cuadradas que no tienen inversa se conocen como matrices singulares. A su vez, también a las matrices invertibles se les conoce como no singulares.
Cabe destacar que el hecho de que una matriz cuadrada sea invertible no garantiza que todas las matrices cuadradas lo sean, ya que existen matrices que no tienen inversa.
A continuación, veremos el proceso de encontrar la matriz inversa; para esto, tomaremos la misma matriz con la cual trabajamos en el subtema anterior.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 2 & 0 & 7 & | & 3 \\ 1 & 6 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}$ una matriz aumentada; encuentra su matriz inversa mediante operaciones por renglón.

Para comenzar, únicamente trabajaremos con la parte izquierda de la matriz, es decir, con

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

A esta matriz la vamos a aumentar con la matriz identidad de 3 x 3, de la siguiente manera:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Para encontrar la matriz inversa, lo que tenemos que hacer es realizar operaciones por renglón, hasta convertir a la matriz de la izquierda en una matriz identidad; la matriz que se obtenga en la parte de la derecha será la matriz inversa que estamos buscando.

Realizaremos los cálculos para encontrar la matriz inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_1 + R_3 \to R_3]{-2R_1 + R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{8}R_2 \to R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{-4R_2 + R_1 \to R_1 \\ -2R_2 + R_3 \to R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{3}{8}R_3 + R_2 \to R_2]{-\frac{7}{2}R_3 + R_1 \to R_1}$$

$$\xrightarrow{\frac{4}{7}R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{array}\right)$$

En el lado izquierdo de la matriz aumentada se ha generado la matriz identidad; entonces, el lado derecho representa a la matriz inversa de A, es decir,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -\dfrac{1}{14} & -\dfrac{1}{14} & \dfrac{3}{14} \\ -\dfrac{6}{7} & \dfrac{1}{7} & \dfrac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Para comprobar que A^{-1} efectivamente es la matriz inversa de B se puede realizar el producto matricial AA^{-1}, o bien $A^{-1}A$.

2.5. Solución de sistemas lineales

En este tema vamos a desarrollar la solución de los sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices; veremos el procedimiento para encontrar la solución de un sistema mediante la representación matricial y el empleo de los métodos de Gauss y de Gauss-Jordan; dichos procedimientos facilitan la manera de resolver cualquier sistema de ecuaciones mediante una matriz.

Otra forma para dar solución a un sistema de ecuaciones es utilizando el determinante de una matriz asociada. Veremos este método en la siguiente Unidad de forma más extensa.

¿Sabías que…?

Se cuenta que en la lápida de Diofanto, un gran matemático griego, podía leerse el siguiente epitafio:

"…Transeúnte, ésta es la tumba de Diophante: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole durante cuatro años. De todo esto, se deduce su edad."

En su forma actual, lo anterior puede representarse a través de una ecuación lineal… ¿Puedes tú saber la edad de Difanto?

2.5.1. Método de eliminación de Gauss

El método de eliminación de Gauss es el método más básico y simple que se puede utilizar para resolver un sistema de ecuaciones lineales; los elementos necesarios para desarrollarlo ya los conocemos.

Básicamente, este método consiste en aplicar operaciones de renglón a una matriz hasta convertirla en una matriz triangula superior; a partir de ello, podemos encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones del cual procede nuestra matriz por un método más simple; este puede ser el de inspección.

Vamos a desarrollar un ejemplo para conocer el método de eliminación Gaussiana o de Gauss.

Ejemplo: Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6$$

$$6x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 17$$

$$x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 9$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 = -15$$

Lo primero que hacemos es construir la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales; esto es, la matriz principal aumentada, la cual es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 6 \\ 6 & -4 & 3 & 5 & | & 17 \\ 1 & -6 & 3 & 1 & | & 9 \\ -3 & 2 & 1 & -9 & | & -15 \end{pmatrix}$$

Vamos a reducirla mediante operaciones por renglón, hasta obtener una matriz triangular superior, puesto que en esto consiste el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 6 \\ 6 & -4 & 3 & 5 & | & 17 \\ 1 & -6 & 3 & 1 & | & 9 \\ -3 & 2 & 1 & -9 & | & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow[3R_1+R_4\to R_4]{\substack{-6R_1+R_2\to R_2 \\ -R_1+R_3\to R_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & | & -19 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_4 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & | & -3 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & | & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2R_2+R_4\to R_4]{5R_2+R_3\to R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & -18 & 14 & | & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -13 & | & -13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{18}R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{9} & | & \frac{6}{9} \\ 0 & 0 & 5 & -13 & | & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5R_3+R_4\to R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{9} & | & \frac{6}{9} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{82}{9} & | & -\frac{147}{9} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{9}{82}R_4 \to R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{9} & | & \frac{6}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{147}{82} \end{pmatrix}$$

Hemos llegado a la forma de Gauss; tal y como se aprecia, es una matriz triangular superior; por último, lo que tenemos que hacer es encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones a partir de la matriz obtenida, para esto, asociamos a cada columna una variable, así, por la fila 4 y columna 5, tenemos que $x_4 = \frac{147}{82}$, además, tenemos por la fila 3 que $x_3 - \frac{7}{9}x_4 = \frac{6}{9}$

Ello implica que

$$x_3 = \frac{6}{9} + \frac{7}{9}x_4$$

$$= \frac{6}{9} + \frac{7}{9}\left(\frac{147}{82}\right)$$

$$x_3 = \frac{169}{82}$$

De la fila 2 tenemos

$$x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -3$$

$$x_2 = 4x_3 - 3x_4 - 3$$

$$= 4\left(\frac{169}{82}\right) - 3\left(\frac{147}{82}\right) - 3$$

$$x_2 = -\frac{11}{82}$$

Y por último, de la fila 1 tenemos

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6$$

$$x_1 = 6 + x_2 - x_3 - 2x_4$$

$$x_1 = 6 - \frac{11}{82} - \frac{169}{82} - 2\left(\frac{147}{82}\right)$$

$$x_1 = \frac{18}{82}$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema de ecuaciones son:

$$x_1 = \frac{18}{82}$$

$$x_2 = -\frac{11}{82}$$

$$x_3 = \frac{169}{82}$$

$$x_4 = \frac{147}{82}$$

2.5.2. Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss y el de Gauss-Jordan son muy similares; en el proceso de solución de un sistema de ecuaciones lineales es más utilizable el método de Gauss, ya que en éste se hace un 50% menos de operaciones que en el método de Gauss-Jordan. El hecho de que la mayoría de las personas trabajen con este último, se debe a que permite conocer la matriz inversa proveniente de un sistema de ecuaciones lineales. Gauss-Jordan lo hemos utilizado anteriormente para encontrar la matriz inversa; desarrollaremos un ejemplo en el cual visualices y con esto compares este método con el de Gauss y establezcas el de tu preferencia.

Supongamos que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5$$
$$2x_1 + 7x_3 = 3$$
$$x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 9$$

Su matriz aumentada asociada es:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Para resolver este sistema por el método de Gauss-Jordan, lo que debemos hacer es encontrar la matriz identidad basados en la matriz A. Esto es, aplicamos el método de Gauss y encontramos los unos de la diagonal principal. Luego convertimos también en ceros los números arriba de la diagonal principal. Recuerda que ya lo habíamos hecho y obtuvimos la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 19/14 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 \end{array}\right)$$

Dada la cual, se deducen automáticamente los resultados del sistema de ecuaciones:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{19}{14}$$
$$x_3 = \frac{9}{7}$$

Con este método, como recordarás, también es posible encontrar la matriz inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

$-R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ Para que el elemento a_{31} sea igual a cero, multiplicamos al renglón 1 por -1 y le sumamos el renglón 3, el resultado lo vamos a colocar en el renglón 3 por lo que el renglón 1 pasará tal como está.

$$-2R_1 + R_2 = -2(1\ \ 4\ \ 2\ \ \ 5) + (2\ \ 0\ \ 7\ \ \ 3) = (-2\ \ \ -8\ \ \ -4\ \ \ -10) + (2\ \ \ 0\ \ \ 7\ \ \ 3) = (0\ \ \ -8\ \ \ 3\ \ \ -7)$$

Este resultado lo puedes observar en el renglón 2 de la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \\ 1 & 6 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

$$-R_1 + R_2 = -(1\ \ 4\ \ 2\ \ \ 5) + (1\ 6\ 3\ 9) = (-1\ \ \ -4\ \ \ -2\ \ \ -5) + (1\ 6\ 3\ 9) = (0\ 2\ 1\ 4)$$

El resultado lo puedes observar en el renglón 3 de la siguiente matriz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$-\frac{1}{8}R_2 \rightarrow R_2$ Multiplicamos al renglón 2 por -1/8 para tener al 1 en la matriz principal

$$-\frac{3}{8}R_2 \rightarrow R_2 = (0, -8, 3, -7)\left(-\frac{1}{8}\right) = (0, -8, 3, -7)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

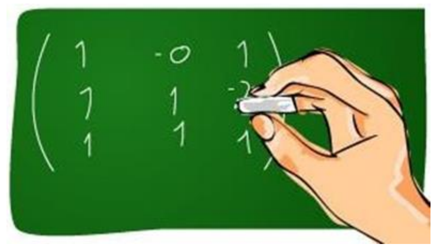
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{7}{8} \\ 0 & 2 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2R_2+R_3\to R_3]{-4R_2+R_1\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & | & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to\frac{4}{7}R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{9}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{7}{2}R_3+R_1\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-6}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{9}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{8}R_3+R_2\to R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19/14 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/7 \end{pmatrix}$$

Consideraciones específicas de la Unidad

Si se requiere profundizar en el tema de matrices consulta Friedberg, Stephen, et. Al; *Álgebra lineal*; Estados Unidos (2007), Illinois State University. Prentice.



Fuentes de consulta

- Corcobado, J. L. y Marijuán, J. Matemáticas I.
- Friedberg, Stephen, et. al; *Álgebra lineal*; Estados Unidos (2007), Illinois State University. Prentice.
- Lay, D. C.; *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (tercera edición); México (2007), Pearson Educación.
- Marsden, Jerrold; Tromba, Anthony; *Cálculo vectorial*; Estados Unidos (1991), Addison-Wesley Iberoamericana.

Para saber más

En la página http://www.marcelovalenzuela.com/matrices/producto-de-matrices.php, puedes ingresar matrices para multiplicarlas; recuerda que el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda. Si deseas saber más sobre Excel puedes buscar los tutoriales ¡Algunos se pueden consultar de forma gratuita!