UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL POLITECNICA
ANTONIO JOSE DE SUCRE
VICERECTORADO PUERTO ORDAZ
SECCIÓN DE MATEMATICAS
ASIGNATURA: ALGEBRA LINEAL

GUIA SOBRE:
MATRICES, SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES, DETERMINATES

PROF.LUIS NUÑEZ

1.- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Un gran número de problemas de las ciencias y de ingeniería requieren un tratamiento con ecuaciones que relacionan dos conjuntos de variables. Una ecuación del tipo:

$$ax = b$$

Se denomina ecuación lineal. La palabra lineal hace referencia a que la gráfica de la ecuación anterior es una línea recta. De forma análoga las ecuaciones del tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \qquad (1)$$

donde los a_i y b son constantes conocidas y las x_i son incógnitas, son llamadas **ecuaciones lineales**. En muchos problemas, la resolución pasa por determinar los números x_i (incógnitas) que satisfagan la ecuación (1) .

Una solución de la ecuación lineal (1) es una sucesión de n números c_1, c_2, c_3 ... c_n con la propiedad que satisfacen la ecuación.

Ejemplo 1.1

Para la ecuación lineal: $6x_1 – 3x_2 + 4x_3 = -13$

Una solución de la misma es: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = -4$

Puesto que cumple la ecuación anterior $6(0) − 3(-1) + 4(−4) = −13$

ésta no es la única solución de la ecuación lineal dada, puesto que

$x_1 = -3$, $x_2 = -1/3$, $x_3 = 1$ también es solución.

Observación. Una ecuación lineal ***no contiene*** productos, cocientes o raíces de las incógnitas. Todas las incógnitas se presentan únicamente a la primera potencia y no aparecen como argumento de funciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales.

Las siguientes ecuaciones **no** son lineales:

a) $\dfrac{3x+2}{y} = 4$ b) $3xy + 2x = 4$

c) $\sqrt{x} - 3x^2 = 6$ d) $2.\text{sen}(2x-3) + 3^x = 5$

El problema central que estudiaremos en este tema es cuando se presentan un conjunto de ecuaciones lineales que deben cumplirse en forma simultánea, a dichos conjuntos se les llama **sistemas de ecuaciones lineales**.

Consideramos el problema de determinar ***n*** números reales: x_1, x_2, x_3,.....,x_n que satisfagan simultáneamente las ***m*** condiciones siguientes:

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

En donde a_{ij} y b_i son elementos de R.

Al conjunto de ecuaciones anteriormente señaladas, se les llama un **sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.** Los valores de x_1 , x_2 , … , x_n que satisfacen simultáneamente a todas las ecuaciones del sistema constituyen **una solución** del sistema de ecuaciones lineales. Resolver un sistema lineal consiste en encontrar todas las posibles soluciones, si es que existen.

El uso de doble subíndice para los coeficientes de las incógnitas, permite la ubicación en el sistema, el primer subíndice corresponde a la ecuación y el segundo a la incógnita que acompaña.

En el proceso para resolver un sistema lineal, se usan dos axiomas importantes del álgebra elemental:

1) Si $a = b$ y $c = d$ entonces $a+c = b+d$
2) Si $a = b$ y k es cualquier número real entonces $k.a = k.b$

El primero de estos axiomas nos garantiza que si en un sistema de ecuaciones sumamos miembro a miembro dos ecuaciones, obtenemos otra ecuación correcta. El segundo axioma nos dice que si multiplicamos cada lado de una ecuación por una constante $k \neq 0$, se obtiene una ecuación válida. El caso $k = 0$, no es útil porque resultaría $0 = 0$, que aunque es cierta no contribuye a encontrar la solución del sistema.

***Ejemplo* 1.2** Resolver el sistema lineal
$$\begin{aligned} x - 3y &= -3 \\ 2x + y &= 8 \end{aligned}$$

Para determinar las soluciones de este sistema lineal, utilizaremos la técnica llamada ***método de eliminación*** que seguramente se haya trabajado en cursos de bachillerato.

Procedimiento.

i) multiplicamos los miembro de la primera ecuación por -2
$$\begin{aligned} -2x + 6y &= 6 \\ 2x + y &= 8 \end{aligned}$$
ii) sumamos miembro a miembro las ecuaciones y obtenemos: $7y = 14$
iii) despejando y se obtiene: $y = 2$
iv) sustituyendo este valor en una de las ecuaciones se obtiene: $x = 3$
v) Sustituyendo $x = 3$ e $y = 2$ en las dos ecuaciones del sistema dado, verificamos que efectivamente estos valores constituyen una solución.

***Ejemplo* 1.3** Consideremos el sistema lineal
$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ 2x - 6y &= 3 \end{aligned}$$

Aplicando el mismo procedimiento anterior obtendremos $0 = 1$ lo cual carece de sentido. Esto significa el sistema lineal dado no tiene solución.

***Ejemplo* 1.4** $-x - 2y + 3z = -4$
$3x + 2y - 5z = 4$

Multiplicando los miembros de la primera ecuación por 3 y luego sumando miembro a miembro con la segunda ecuación se obtiene :

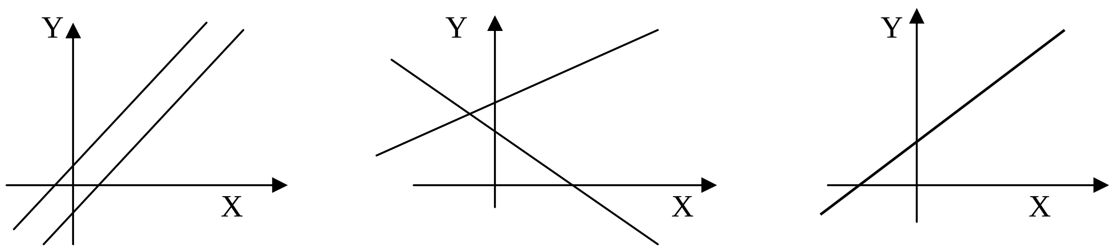
$$-4y + 4z = -8 \qquad \text{de donde } y = z + 2$$

sustituyendo en la primera ecuación se tiene $-x - 2(z+2) + 3z = -4$
de allí se despeja x para obtener: $x = z$

Así la solución del sistema es $x = r$, $y = 2 + r$, $z = r$ donde r es un número real cualquiera. Por lo tanto este sistema tiene infinitas soluciones.

Estos ejemplos muestran que un sistema lineal puede tener:
- Una solución
- Ninguna solución
- Infinitas soluciones

Desde el punto de vista geométrico una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta en el plano, en este sentido resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas equivale a encontrar la intersección de dichas rectas, aquí se presentan tres posibilidades:



Rectas paralelas; intersección vacía — Rectas secantes; un solo punto en común — Rectas coincidentes; infinitos puntos en común

Al resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales estarán presentes tres posibilidades: solución única, infinitas soluciones o ninguna solución.

En el ejemplo 3. se puede observar que el sistema consta de dos ecuaciones con tres incógnitas, cada ecuación geométricamente representa un plano en R^3 y la solución corresponde a las ecuaciones paramétricas de una recta en R^3, dicha recta es la intersección de los dos planos.

Dado un sistema de ecuaciones lineales, una submeta para resolverlo es encontrar un sistema lineal equivalente (que tiene la misma solución), en el que la solución general se pueda determinar fácilmente. Las operaciones que se realizan para obtener el sistema equivalente son las siguientes **operaciones elementales:**

Tipo I Intercambio de dos ecuaciones del sistema
Tipo II Reemplazo de una ecuación por un múltiplo escalar no nulo de ella
Tipo III Reemplazo de una ecuación del sistema por la suma de ella y un múltiplo real de otra ecuación del sistema.

***Ejemplo* 1.5.** Encuentre la solución general del sistema aplicando las operaciones descritas anteriormente

$$\begin{aligned} x+2y+7z &= 1 \\ -x+y-z &= 2 \\ 3x-2y+5z &= -5 \end{aligned}$$

Si analizamos el ***método de eliminación*** descrito en anteriormente, observamos lo siguiente. Al realizar los pasos del método de eliminación, sólo modificamos los números que aparecen junto a las incógnitas x_1 x_2 …. x_n. Así, podemos encontrar una forma de escribir un sistema lineal sin tener que escribir las incógnitas. En esta sección definimos un objeto que nos permite hacerlo; es decir, escribir sistemas lineales de una forma compacta que facilite la automatización del método de eliminación en una computadora, que permita obtener un procedimiento rápido y eficaz para determinar las soluciones. También desarrollaremos las operaciones sobre las matrices y trabajaremos con ellas de acuerdo con las propiedades que cumplen.

El sistema propuesto en se puede representar solamente con los coeficientes y los términos constantes, mediante el siguiente arreglo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Este arreglo se llama matriz y cada número de la matriz se denomina componente. Para facilitar el trabajo con sistemas de ecuaciones lineales, vemos la necesidad de trabajar con matrices por tal razón introduciremos este concepto a continuación.

2.- MATRIZ

Una matriz es una distribución rectangular ordenada de elementos de un conjunto numérico determinado, estos elementos se colocan en filas y columnas de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.1 $\begin{pmatrix} -2 & 1/6 & 5 \\ \sqrt[3]{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Es una matriz con dos filas y tres columnas.

Observaciones:

i. Usaremos las letras mayúsculas A, B, C, ..., para denotar las matrices.

ii. La matriz anterior la denotaremos con A y se puede expresar asi: $A=(a_{ij})$, donde i = 1, 2, 3,....., m representa las filas y j = 1, 2, 3,......, n representa las columnas. Para referirnos al elemento de la matriz A que está en la fila i y en la columna j lo denotamos así: a_{ij}

iii. En nuestro caso los elementos a_{ij} serán números reales, salvo que se indiquen otros.

iv. Denotaremos por $M_{mxn}(R)$ al conjunto de todas las matrices de ***m*** filas y ***n*** columnas con elementos reales, donde m y n $\in Z^+$.

v. Si A es una matriz de m filas y n columnas, diremos que A tiene tamaño mxn.

Ejemplo 2.2. Supongamos que un empresario tiene cuatro plantas, cada una de las cuales fabrica tres productos, si aij denota la cantidad de producto i elaborada en la planta j en una semana, entonces la matriz de 3x4

$$\begin{array}{c} \\ Pr\,oducto\,1 \\ Pr\,oducto\,2 \\ Pr\,oducto\,3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Planta\,1 & Planta\,2 & Planta\,3 & Planta\,4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 560 & 360 & 380 & 0 \\ 340 & 450 & 420 & 80 \\ 280 & 270 & 210 & 380 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esta matriz proporciona la producción del fabricante en una semana

2.1. Igualdad de matrices: Sean A $\in M_{mxn}(R)$ y B$\in M_{pxq}(R)$: A=B $\Leftrightarrow m = p$, $n = q$ y además $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i = 1, 2, 3,....., m y j= 1, 2, 3,......, n . Es decir dos matrices son iguales si ellas tienen el mismo número de filas, el mismo número de columnas y los elementos que ocupan la misma posición también son iguales.

2.2. CLASES DE MATRICES

Según el aspecto de las matrices, éstas pueden clasificarse en:

- Matriz columna y Matriz fila: Una matriz mx1 se llama matriz columna. De igual manera, una matriz 1xn se llama matriz fila.

  Una matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas. Se dice que una matriz cuadrada *n* x *n* es de orden *n*. Al conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n con números reales lo denotaremos por M_n en lugar de M_{nxn}

  Ejemplo 2.3. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces, *A* y *B* son matrices cuadradas de orden 3 y 2 respectivamente.

- Matriz Nula: Si A$\in M_{mxn}(R)$/ $a_{ij} = 0$ para todo ij, diremos que A es la matriz nula de orden mxn. y la denotaremos por $\mathbf{O}_{mxn}$.

$$\mathbf{O}_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz Identidad: Sea $I_n = (I_{ij}) \in M_n(R)$, si $I_{ij} = \begin{cases} 0 & si \ i \neq j \\ 1 & si \ i = j \end{cases}$ diremos que I_n es la matriz identidad de orden n y la denotaremos por I_n o simplemente I si no hay dudas sobre el tamaño. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Matriz Diagonal: La matriz $A \in M_n(R)$ es diagonal sí y sólo si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz triangular superior: Sea $A \in M_n(R)$, $A = (a_{ij})$ es una matriz triangular superior sí y sólo si $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$.

- Matriz triangular inferior: Sea $A \in M_n(R)$, $A = (a_{ij})$ es una matriz triangular inferior si y sólo si $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$.

Triangular inferior $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ Triangular superior $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2.3 OPERACIONES ELEMENTALES POR FILAS:

Dada una matriz de orden mxn. Una operación entre filas es elemental si se corresponde con uno de los siguientes tipos:

i. Intercambio de dos filas: que denotaremos por $f_i \leftrightarrow f_j$

ii. Multiplicar una fila por un escalar no nulo. Por ejemplo multiplicar la fila i por α
$f_i \to \alpha f_i$

iii. Sustituir una fila por ella misma más un múltiplo de otra fila diferente:
$f_i \to f_i + \alpha f_j \quad \alpha \neq 0$, e $i \neq j$

Matrices equivalentes:

Dos matrices $A,B \in M_{mxn}(R)$ son equivalentes si una se obtiene de la otra mediante una sucesión finita de operaciones elementales por filas.

***Ejemplo* 2.3**. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ si aplicamos $f_2 \to f_2 + 2f_1$ obtenemos $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Si a B le aplicamos la operación $f_3 \leftrightarrow f_2$ (intercambio de filas) obtenemos

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ En este caso podemos afirmar que A , B y C son equivalentes entre si.

Matriz elemental.

Una matriz cuadrada A se dice que es elemental si se puede obtener de la identidad por medio de una sola operación elemental por fila.

***Ejemplo* 2.4.** Si a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ le aplicamos la operación elemental $f_1 \to f_1 - 2f_3$ se obtiene una matriz elemental $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si a esta nueva matriz se le efectúa otra operación elemental entre sus fila como por ejemplo $f_2 \leftrightarrow f_3$ se obtiene $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la cual no es elemental

Matriz reducida por filas.

Sea $A \in M_{mxn}(R)$, A es una matriz reducida por filas si se verifica que:

i) El primer elemento no nulo de cada fila no nula es 1.

ii) Cada columna de A que contiene el primer elemento no nulo de alguna fila tiene ceros en las demás posiciones.

Matriz escalonada.

Sea $A \in M_{mxn}(R)$, A es una matriz escalonada si se verifica que:

i) Las filas nulas de A (si las hay) están debajo de las filas no nulas.

ii) Si dos filas sucesivas tienen elementos no nulos, entonces el primer elemento no nulo de la fila de abajo esta a la derecha del primer elemento no nulo de la fila de arriba

EJERCICIOS Determine si las matrices dadas son escalonadas y/o reducidas por filas:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada reducida por filas.

Sea $A \in M_{mxn}(R)$, A es una matriz escalonada reducida por filas, si A es escalonada y además es reducida por filas.

Observación:

En la forma escalonada reducida por fila, todos los elementos situados arriba y abajo del primer 1 de la fila son ceros.

TEOREMA:

Toda matriz mxn sobre el cuerpo R es equivalente a una matriz escalonada y reducida por filas sobre el mismo cuerpo.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES USANDO LA FORMA MATRICIAL

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

i) La matriz: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & . & a_{2n} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$ Es llamada matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones

ii) La matriz: $C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ es la matriz aumentada del sistema.

iii) Si X es una columna con las incógnitas y B es la columna que contiene los términos constantes del sistema, entonces **AX = B** es la representación matricial del sistema de ecuaciones.

iv) Si $a_1, a_2, \dots\dots, a_n$ son n constantes que satisfacen las m ecuaciones del sistema entonces diremos que la columna con los valores $a_1, a_2, \dots\dots, a_n$ es una solución del sistema de ecuaciones.

v) Si $b_1 = b_2 = \dots\dots = b_n = 0$, se dice que el sistema (1) es un sistema homogéneo y su forma matricial es AX = $\mathbf{0}$.

vi) Para el sistema lineal general existen tres posibilidades: que no tenga soluciones (sistema incompatible), que tenga una única solución (sistema compatible determinado) o que tenga un número infinito de soluciones (sistema compatible indeterminado).

vii) Un sistema lineal homogéneo, es compatible, puesto que $x_1 = x_2 = \dots\dots x_n = 0$, es siempre una solución; llamada solución trivial, en este caso existen dos posibilidades: la solución trivial es la única solución o hay un número infinito de soluciones además de la trivial.

viii) Diremos que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes sí la matriz aumentada de uno es equivalente a la matriz aumentada del otro.

ix) Si dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, entonces ellos tienen el mismo conjunto solución.

x) La técnica básica para resolver, un sistema de ecuaciones es la de determinar otro sistema equivalente al sistema original, cuyas soluciones se puedan determinar más fácilmente.

xi) Un sistema compatible con más incógnitas que ecuaciones, tiene infinitas soluciones.

4. MÉTODOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Para resolver un sistema de ecuaciones existen varios métodos que podemos clasificar en directos e indirectos, entre los métodos directos están: Eliminación Gaussiana con sustitución regresiva, Método de Gauss-Jordan, Regla de Cramer, Método de la inversa, Factorización L.U. Entre los métodos indirecto se destacan el de Jacobí y el de Gauss-Seidel.

En este curso trataremos sólo algunos métodos directos. Iniciaremos con los métodos basados en la obtención de sistemas equivalentes.

Teorema
Sean $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y C $\mathbf{x} = \mathbf{d}$ dos *sistemas lineales,* cada uno con m ecuaciones y n incógnitas. Si las matrices aumentadas $(A \vdots b)$ y $(C \vdots d)$ de estos sistemas son equivalentes por filas, entonces ambos sistemas lineales tienen exactamente las mismas soluciones.

Corolario
Si A y C son dos matrices de m x n equivalentes por renglones, entonces los sistemas lineales A $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y C $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tienen exactamente las mismas soluciones.

4.1 ELIMINACIÓN GAUSSIANA CON SUSTITUCIÓN REGRESIVA:

<u>Procedimiento:</u>

a) Se considera la matriz aumentada del sistema.
b) Se determina una matriz escalonada equivalente a la matriz aumentada del sistema
c) Se construye un sistema de ecuaciones equivalente al anterior, donde se detecta directamente un valor de una de las incógnitas
d) Se usa la sustitución regresiva para encontrar los valores de las restantes incógnitas.
e) Verificar la solución

Ejemplo 4.1. Sea el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & z & = & -4 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

su matriz ampliada asociada es

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 5 & -1 & \vdots & -4 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 2 \end{array}\right)$$

Ahora resolvemos por el método de Gauss sabiendo que la primera columna corresponde a los coeficientes de la x, la segunda a los de la y, la tercera a los de la z y la cuarta a los términos independientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 3f_1]{f_2 \to f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -8 & -4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + 8f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -87 \end{pmatrix}$$

De este modo, el sistema tiene una solución única, que obtendremos mediante la sustitución regresiva.

$$z = \frac{-87}{-28} = \frac{87}{28} \qquad y = -10 + 3\left(\frac{87}{28}\right) = \frac{-280 + 261}{28} = \frac{-19}{28}$$

$$x = 3 - \frac{87}{28} - 2\left(\frac{-19}{28}\right) = \frac{84 - 87 + 38}{28} = \frac{35}{28} = \frac{5}{4}$$

Ejercicio: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

4.2 ELIMINACIÓN DE GAUSS–JORDAN

Procedimiento:

a) Se considera la matriz aumentada del sistema
b) Se determina la matriz escalonada reducida, equivalente a la anterior .
c) Se construye un sistema de ecuaciones equivalente al anterior, donde se puede ver de inmediato la solución del sistema.
d) Verificar la solución.

Resuelva el sistema de ecuaciones del ejemplo1, aplicando el método de eliminación Gauss-Jordan.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & z & = & -4 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Ejemplo 4.2. El sistema dado en el *ejemplo* 4.1 es**,**

la matriz ampliada asociada a él es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 5 & -1 & \vdots & -4 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$

Al igual que en el *ejemplo* 4.1 empezamos a escalonar la matriz aumentada usando operaciones elementales en las filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 3f_1]{f_2 \to f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -8 & -4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + 8f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -87 \end{pmatrix}$$

ya se obtuvo la forma escalonada, ahora procedemos a reducir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -87 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to f_1 - 2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 23 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -87 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 \to f_2 - \frac{3}{28}f_3]{f_1 \to f_1 + \frac{1}{4}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-19}{28} \\ 0 & 0 & -28 & -87 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \to \frac{-1}{28}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-19}{28} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{87}{28} \end{pmatrix}$$

La cuarta columna contiene la solución del sistema de ecuaciones dado. Verifíquelo.

Ejemplo 4.3. Aplicando el método Gauss-Jordan encuentre todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6 \end{cases}$$

y después todas las soluciones al sistema homogéneo asociado.

Ejemplo 4.4 Considere el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Encuentre los valores de a , b ,c para que el sistema sea compatible (tenga solución)

Solución.

Aplicando el Método de Gauss se tiene:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & a \\ -1 & 0 & 2 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 - \frac{1}{2} f_1]{f_2 \to f_2 + \frac{1}{2} f_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & a \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & b + \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & c - \frac{a}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & a \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & b + \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & c - b - a \end{pmatrix}$$

El sistema dado tendrá solución siempre que c- b-a = 0. (c = a+b)

A modo de ejemplo, si tomamos a = 2 b = -3 y c = -1 que satisfacen la condición anterior obtenemos el sistema equivalente $\begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = -2 \end{cases}$. Despejando y de la segunda ecuación se obtiene y = -4 – z que sustituido en la primera ecuación resulta:

2x + (-4 – z) - 3z =2 $\Rightarrow$ x = 2z + 3

Así la solución general serán las ternas (2t+3, -4-t, t) donde t es un parámetro real. El sistema tiene infinitas soluciones y se pueden obtener soluciones particulares dándole valores reales a t. Por ejemplo para t=0 se tiene una solución (3, -4, 0)

Ejemplo 4.5 Resolvamos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 3 \\ 2x + 5y - z - 9w &= -3 \\ 2x + y - z + 3w &= -11 \\ x - 3y + 2z + 7w &= -5 \end{aligned}$$

Solución:

Paso 1: La matriz aumentada de este sistema lineal es:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right]$$

Paso 2: La matriz aumentada es equivalente por renglones a la matriz (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Paso 3: El sistema lineal equivalente representado por esta matriz es:

$$\begin{aligned} x \qquad + 2w &= -5 \\ y \quad - 3w &= 2 \\ z - 2w &= 3 \end{aligned}$$

Hemos ignorado la última fila que consta completamente de ceros. Así la solución del sistema lineal es

$$x = -5 - 2r$$
$$y = 2 + 3r$$
$$z = 3 + 2r$$
$$w = r$$

5. OPERACIONES CON MATRICES:

5.1. SUMA DE MATRICES:

Sean **A, B**$\in M_{mxn}(R)$ donde A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}), consideremos la matriz C = (c_{ij}) perteneciente a $M_{mxn}(R)$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i =1, 2, 3,....., m y j=1, 2, 3,......, n. La matriz C es la suma de A más B, es decir C = A + B.

Ejemplo 5.1.

$$Si \quad A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1/2 & -4 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad entonces \quad A+B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 7/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Observación: **Sólo podemos sumar matrices del mismo tamaño**

5.1.1 PROPIEDADES:

i) La adición definida en el conjunto $M_{mxn}(R)$ es una **Ley de Composición Interna.** Pues ella es una función que asigna a cada par de matrices de $M_{mxn}(R)$ otra matriz del mismo conjunto.

ii) $\forall$A, B, C $\in M_{mxn}(R)$ se cumple que: (A+B)+C = A+(B+C)

iii) $\exists$ **O**$\in M_{mxn}(R)$ tal que: A+**O** = **O**+A = A, $\forall$A $\in M_{mxn}(R)$, **O** es llamada matriz nula

iv) $\forall$A $\in M_{mxn}(R)$, $\exists$ B$\in M_{mxn}(R)$ tal que: A+B = B+A =**O** . La matriz B se denota por -A y se le llama opuesto aditivo de A.

v) $\forall$A, B$\in M_{mxn}(R)$: A+B = B+A.

Un conjunto no vacío con una operación donde se satisfacen las primeras 4 propiedades anteriores se denomina grupo, si además se cumple la propiedad (v) se dice que el grupo es conmutativo.

* Las propiedades anteriores se pueden resumir diciendo que $M_{mxn}(R)$ con la adición es un grupo conmutativo.

5.2. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ.

Sea A $\in M_{mxn}(R)$ y sea α un número real, consideremos la matriz C $\in M_{mxn}(R)$ tal que $c_{ij} = \alpha\, a_{ij}$ para todo i = 1, 2, 3,....., m y j= 1, 2, 3,......, n. A esta matriz C se le llama producto del escalar α por la matriz A. Notación C = αA.

***Ejemplo* 5.2** *Si* $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}$ entonces $2.A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

5.2.1 PROPIEDADES.

i) La operación multiplicación de un número real por una matriz de $M_{mxn}(R)$ es una **Ley de composición externa** en $M_{mxn}(R)$ con escalares de R. Puesto que esta operación es una función que a cada par ordenado formado por un número real y una matriz, le asigna como imagen una matriz de $M_{mxn}(R)$.

Sean $\alpha, \gamma \in$ R y A, B$\in M_{mxn}(R)$ se cumple que:

ii) $(\alpha + \gamma)$ A = α A + γ A
iii) $\alpha.\mathbf{O} = \mathbf{O}$
iv) o.A = **O**
v) $\alpha.(A+B) = \alpha.A+\alpha.B$
vi) $\alpha. (\gamma.A)= (\alpha. \gamma) A = \gamma(\alpha.A)$
vii) 1. A = A

5.3. PRODUCTO DE MATRICES

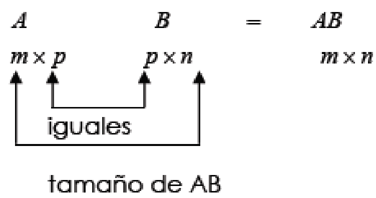
Sean las matrices A$\in M_{mxp}(R)$ y B $\in M_{pxn}(R)$, llamaremos producto de las matrices A y B, a la matriz C cuyo elemento c_{ij} es la suma de los productos de los elementos de la fila i de A por los correspondientes elementos de la columna j de B.

Escribimos C = A.B Donde $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + ... + a_{ip}\, b_{pj}$. (1)

Es decir $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$ para todo i = 1, 2, 3,...,m y para todo j= 1, 2, 3,...,n

La ecuación (1) dice que el i,j-ésimo elemento de la matriz producto es el producto punto del i-ésimo reglón (fila) de A y la j-ésima columna de la matriz B.

Observa que el producto de A y B sólo está definido cuando el número de reglones o filas de B es exactamente igual al número de columnas de A



***Ejemplo* 5.3:**

1. $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 1 + 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$

3. $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & \frac{5}{2} & -2 \\ 0 & -4 & -6 & 4 \\ 2 & 4 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Observaciones:

i) Para realizar el producto de las matrices (A.B) el número de columnas de A debe ser igual al número de la filas B.

ii) Si A.B está definido no necesariamente B.A está definido

iii) Si A.B y B.A están definidos, no necesariamente A.B=B.A

5.3.1 PROPIEDADES

i) La multiplicación de matrices es una L.C.I en Mn(R).

ii) Para cualesquiera A, B y C pertenecientes a Mn(R) se cumplen:

a) A(B.C) = (A.B)C

b) A(B+C) = AB+ AC

c) (A+B)C =AC+BC

iii) Existe $I_n \in$ Mn(R) tal que $A \bullet I_n = I_n \bullet A = A$

iv) No es válida la ley de cancelación: **A.B = A.C no implica que B=C**

EJERCICIOS

1) Dadas $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Verifique que AB=AC pero $B \neq C$

2) Dadas $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Verifique que DE = DF pero $E \neq F$.

Estos dos casos ratifican que la **ley de cancelación** que es válida en la multiplicación de números reales y otras operaciones, en el caso de multiplicación de matrices **no** es válida.

3) Dadas $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & -5 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

Verifique que: AB = BA = **O** y $Q^2 = I$ (Q^2 denota el producto Q.Q y en general, si A es una matriz cuadrada A^n =A.A.A........A n veces)

4) Encuentre dos matrices A y B de tamaño 2x2 tales que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

5) Encuentre dos matrices A y B de tamaño 2x2 tales que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Aplicación comercial

Suponga que únicamente dos compañías rivales, R y S, fabrican cierto producto. Cada año, la compañía R conserva ¼ de sus clientes, mientras que ¾ cambian a S. En el mismo lapso, S conserva 2/3 de sus clientes, mientras que 1/3 cambia a R. Esta información se puede desplegar en forma matricial como

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} R & S \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 3/4 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} R \\ S \end{array} \end{array}$$

Al comenzar por primera vez la fabricación del producto, R tiene 3/5 del mercado (el mercado es la cantidad total de clientes), mientras que S tiene los otros 2/5 del mercado. Denotamos la distribución inicial del mercado como:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

Un año después, la distribución del mercado es como sigue:

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 3/4 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/60 \\ 43/60 \end{bmatrix}$$

Esto se puede ver fácilmente como sigue. Supongamos que el mercado inicial consta de k personas, digamos k= 12000 y que este número no se modifica con el paso del tiempo. Entonces inicialmente, R tiene 3/5 k clientes y S tiene 2/5 k clientes. Al final del primer año, R conserva ¼ de sus clientes y gana 1/3 de los de S. Así, R tiene:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}k\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}k\right) = \frac{17}{60}k \text{ clientes}$$

De manera análoga, al final de dos años, la distribución del mercado estará dada por:

$$x_2 = Ax_1 = A(Ax_0) = A^2 x_0$$

El problema que acabamos de ver es un ejemplo de una **cadena de Markov.**

5.3.2 Matriz invertible o no singular

La matriz $A \in M_n(R)$ es invertible si sólo si existe $B \in M_n(R)$ tal que: $A.B = B.A = I_n$, en este caso diremos que B es la inversa de A y la denotaremos por A^{-1}

***Ejemplo* 5.4.** Supongamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & -10 + 10 \\ 3 - 3 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & 15 - 15 \\ -2 + 2 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Puesto que $AB = BA = I$, A y B son invertibles, siendo cada una la inversa de la otra.

MÉTODO DE GAUSS PARA OBTENER LA INVERSA

Sea $A = (a_{i\,j})$ una matriz cuadrada de orden n. Para calcular la matriz inversa de A, que denotaremos como A^{-1}, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1. Construir la matriz $n \times 2n$ $M = (A \vdots I)$ esto es, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad I en la derecha.

Paso 2. Se utilizan operaciones elementales por filas a la matriz M de modo que la matriz A llegue a su forma escalonada, reducida por filas.

Paso 3. Se comprueba sí A es invertible:

a) Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.

b) Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.

Ejemplo 5.5 Usar el método anterior para hallar la inversa de la matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f1 \to \frac{1}{2} f1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f2 \to f2 - 4 f1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 12 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f2 \to \frac{1}{12} f2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f1 \to f1 + \frac{3}{2} f2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

Verificación $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo 5.6 **E**ncontrar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Primero construimos la matriz $M = (A \vdots I)$,

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2\cdot 0 & 3-2\cdot 2 & 0-2 & 1-2\cdot 0 & 0 \\ 0 & 1-4\cdot 0 & 8-4\cdot 2 & 0-4 & 0 & 1-0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ luego se coge como pivote } a_{22} = -1,$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0-(-1) & 4-(-2) & 0-1 & -1-0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

La mitad izquierda de *M* está en forma triangular, por consiguiente, *A* es invertible. Si hubiera quedado toda una fila con ceros en la mitad *A* de *M*, la operación habría terminado (*A* no es invertible).

A continuación, tomamos como pivote a_{33}, ponemos ceros encima de éste y seguimos operando hasta que nos quede una matriz diagonal.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Ya que la matriz colocada en la mitad izquierda es diagonal, no hay que operar más. Transformamos la matriz diagonal en una matriz identidad; para ello hay que multiplicar la segunda fila por -1:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

La matriz que ha quedado en la mitad derecha de *M* es la matriz inversa de *A*:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar si el resultado es correcto, se procede a multiplicar AA^{-1}, teniendo que dar como resultado la matriz identidad I.

Comprobación: $AA^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

***Ejemplo* 5.7** Sea: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f2 \to f2-2f1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[f3 \to f3+f2]{f1 \to f1+3f2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La matriz A no puede reducirse a la matriz identidad por lo que se puede concluir que A no es invertible.

5.3.2.1 *Propiedades:*

i) *Si A es invertible, su inversa es única*

ii) Si A es invertible, entonces su inversa A^{-1} también es invertible y además $(A^{-1})^{-1} = A$

iii) Si A y B son invertibles del mismo tamaño, entonces A.B es invertible y además

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

iv) Si A es invertible entonces y n es un entero positivo A^n es invertible y $\left(A^n\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$

v) Si A es invertible y α es un real no nulo entonces α.A es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$

Demostración

i) Sea A una matriz invertible y supóngase que B y C son inversas de A.
Por ser B inversa de A se cumple que A.B = I. Si ahora multiplicamos por la izquierda cada miembro de la igualdad por C, obtenemos C(AB) = C.I. Luego asociando tenemos (C.A).B = C. Como C es inversa de A entonces C.A = I. Así que I.B = C y finalmente

se obtiene que B = C . Por lo que queda probado que si una matriz es invertible no existen inversas diferentes y por lo tanto es su inversa es única.

iii) Sean A y B dos matices invertibles del mismo tamaño (orden n). Entonces existen A^{-1} y B^{-1}

Como A, B, A^{-1} y B^{-1} son matrices cuadradas del mismo tamaño entonces existen $A.B$ y $B^{-1}.A^{-1}$ las cuales también son cuadradas de orden n.

$(AB).(B^{-1}A^{-1}) = A.(B.B^{-1}).A^{-1} = A.I.A^{-1} = A.A^{-1} = I$ Analogamente

$(B^{-1}A^{-1}).(AB) = B^{-1}.(A^{-1}.A).B = B^{-1}I.B = B^{-1}B = I$

Con esto queda probado que AB es invertible y su inversa denotada por $(AB)^{-1}$ es $B^{-1}A^{-1}$

Se deja la demostración de ii , iv y v al estimado lector.

TEOREMA:
Toda matriz elemental es invertible.

TEOREMA:
Para cada matriz cuadrada A sobre R, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
i) A es invertible
ii) A es equivalente por filas a I.
iii) A es un producto de matrices elementales.

5.4 TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ:

La transpuesta de una matriz A de orden mxn, representada por A^T es la matriz que se obtiene de A cambiando las filas por las columnas. Si $A \in M_{mxn}(R)$ entonces $A^T \in M_{nxm}(R)$.

En general:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ entonces } \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

5.4.1 Propiedades:

Para cualquier $A,B \in M_{mxn}(R)$ y $\forall\ k \in R$ se verifica que:
i) $(A^T)^T = A$.
ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ **Verificar con ejemplo**
iii) $(k.A)^T = k.A^T$
iv) Si A es invertible entonces A^T también es invertible y se cumple $\mathbf{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T}$

v) Si $A \in M_{mxn}(R)$ y $B \in M_{nxp}(R)$ entonces $(A.B)^T = B^T.A^T$ **Verificar con ejemplo**

Matriz simétrica. Diremos que $A \in Mn(E)$ es una matriz simétrica si $A^T = A$.
Si $A^T = A$ entonces $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i.j$

Matriz antisimétrica Diremos que $A \in Mn(R)$ es una matriz antisimétrica si $A^T = -A$.
Si $A^T = -A$ entonces $a_{ij} = - a_{ji}$ $\forall ij$ y $a_{ii} = 0$ $\forall ij$

***Ejemplo* 5.8**. Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que:
$A^T = A$. Siendo así, *A* es simétrica.
$B^T = -B$. Por lo que B es antisimétrica.
C no es cuadrada; en consecuencia, no es ni simétrica ni antisimétrica.

Observaciones: *Verificar con ejemplos*

i) $A.A^T$ es simétrica para cualquier matriz A
ii) $A+A^T$ es simétrica para cualquier matriz cuadrada A
iii) $A-A^T$ es antisimétrica para cualquier matriz cuadrada A
iv) Toda matriz cuadrada se puede expresar como la suma de una matriz simétrica con una antisimétrica. Esto es posible debido a la siguiente igualdad

$$A = \frac{1}{2}(A+A^T) + \frac{1}{2}(A-A^T)$$ ' La demostración es inmediata.

Matriz ortogonal

$A \in Mn(R)$ es ortogonal si sólo y si $A.A^T = A^T.A = I$. Es decir $A^T = A^{-1}$

5.5 USO DE LA INVERSA PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES.

Supóngase que se quiere resolver el sistema de ecuaciones lineales cuya representación matricial es A.X = B, donde A es una matriz cuadrada nxn invertible, X es una matriz columna nx1 que contiene todas las incógnitas y es una columna nx1 con los términos independientes.

Primero se procede a encontrar la inversa de la matriz A. Luego

$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$ (multiplicando por la izquierda en ambos miembros por A^{-1})
$(A^{-1}A)X= A^{-1}B$ (aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación matricial)
$IX= A^{-1}B$ (sustituyendo $A^{-1}A$ por I)
$X = A^{-1}B$ (usando el hecho que I es elemento neutro de la multiplicación)

De esta forma se obtiene la solución $X = A^{-1}B$

Ejemplo 5.10.. Resuelva el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Previamente se ha calculado la inversa de la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{-13}{3} & \frac{-7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Así, la única solución está dada por: $X= A^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 & \frac{-13}{3} & \frac{-7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Efectúe y verifique esta solución

Este método es válido cuando la matriz de los coeficientes del sistema es cuadrada e invertible. Además el método es útil cuando se tiene la matriz inversa, pues, encontrar la matriz inversa es muy laborioso.

Aplicaciones
Este método es útil en problemas industriales. Muchos modelos matemáticos se explican por medio de sistemas lineales. Esto significa que si se utilizan como entrada *n* valores (que se pueden ordenar como la matriz **X** de n x 1), entonces se obtienen m valores como salida (que se pueden ordenar como la matriz **B** de m x 1) mediante la regla **A X** = **B**. La matriz **A** está ligada de manera íntima al proceso. Así, supongamos que un proceso industrial tiene cierta matriz **A** asociada a él. Cualquier cambio en el proceso puede producir una nueva matriz. De hecho, hablamos de una **caja negra**, lo cual significa que la estructura interna del proceso no nos interesa. El problema que aparece con frecuencia en el análisis de sistemas es el determinar la entrada por utilizar para obtener la salida deseada.

Ejemplo 5.11 (Proceso industrial)
Consideremos un proceso industrial cuya matriz asociada es A. Si B es la matriz de salida:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz de entrada **X** es la solución del sistema lineal A **X** = B. Entonces se cumple:

$$X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6 FACTORIZACIONES LU DE UNA MATRIZ:

Supongamos que tenemos una matriz cuadrada A de orden n, si encontramos dos matrices L y U, siendo L una matriz triangular inferior de orden n y U una matriz triangular superior de orden n tal que:

A = L . U

Entonces se dice que hemos conseguido la factorización LU de A,
o que A tiene una descomposición LU.
Este método nos va ser de utilidad a la hora de resolver sistemas de ecuaciones.

Se mostrará cómo expresar una matriz cuadrada como un producto de una matriz triangular inferior denotada como **L** por una matriz triangular superior que denotamos por **U**. Las

notaciones corresponden a las palabras inglesas Lower y Upper. En principio suponemos que **A es invertible,** más adelante extenderemos para A de cualquier tamaño.
Veamos el siguiente ejemplo.

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ si aplicamos la operación elemental $f_2 \to f_2 - 2f_1$ obtenemos la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si a la matriz identidad 2x2 le aplicamos la misma operación elemental se obtiene $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Observe que $E.A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=B$

Esto no es casualidad, aplicar operaciones elementales a una matriz A es equivalente a multiplicar A por la izquierda con la matriz elemental correspondiente a la operación elemental aplicada.

Usaremos esta información para deducir la factorización LU de una matriz invertible.

Supongamos que A es una matriz cuadrada e invertible de orden n y además supóngase que A se puede triangularizar usando j operaciones elementales de filas del tipo III ($f_k \to f_k - 2f_i$). Como cada operación elemental equivale a multiplicar por una matriz elemental, podemos generar $E_1, E_2, ..., E_j$ matrices elementales de modo que .

$$E_j \cdots E_2\, E_1\, A = U \qquad (1)$$

suponiendo existe L y multiplicando por L en *(1)* se tiene

$$L\ E_j \cdot\cdot\cdot E_2\, E_1\, A = L\ U \qquad pero\ \ L\ U = A$$

$$L\ E_j \cdot\cdot\cdot E_2\, E_1\, A = A \qquad como\ \ A\ es\ invertible$$

$$L\ E_j \cdot\cdot\cdot E_2 E_1 = I_n \Rightarrow L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdot\cdot\cdot E_j^{-1} \qquad (2)$$

Sabemos que toda matriz elemental es invertible, y notemos que en éste caso además $E_1, E_2, ...E_j$ son triangulares inferiores , con solo elementos 1 en su diagonal principal por tanto sus inversas también lo son y luego su producto, así entonces L es triangular inferior con solo elementos 1 en su diagonal principal.

Así A = LU

Obtener L = $E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_j^{-1}$ encontrando las matrices elementales y luego invirtiéndolas puede ser considerarse como un proceso muy largo y poco práctico. Por lo que obtendremos L de una forma más sencilla.

Después de triangularizar A (obtener U), se observan las operaciones elementales aplicadas y se aplican a la matriz identidad las operaciones inversas en el orden contrario al utilizado para obtener U. Esta secuencia de operaciones elementales aplicadas sobre la Identidad, da como resultado la matriz triangular inferior L.

Ejemplo 6.1:

Encuentre una factorización LU de la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3\to f_3-\frac{3}{2}f_1]{f_2\to f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3\to f_3-\frac{5}{3}f_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U$$

Para obtener L se realizan las operaciones elementales inversas en el orden contrario al que se usó para obtener U y partiendo de la identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3\to f_3+\frac{5}{3}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3\to f_3+\frac{3}{2}f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2\to f_2+2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{L}$$

Verifique que L.U = A

Teorema

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si A se puede reducir mediante operaciones por filas a una matriz triangular superior U sin hacer intercambio de filas, entonces existe una matriz triangular inferior L con unos en la diagonal, tal que A= LU. Además si A es invertible esta factorización es única.

Ejemplo 6.2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ vamos a obtener dos factorizaciones LU

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3\to f_3-3f_1]{f_2\to f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + 3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[1]{f_2 \to f_2 + 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L$$

Verifique que L.U = A

Haciendo un nuevo proceso se puede obtener U = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y L = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de manera que L.U = A. Se deja de ejercicio la obtención de esta Última factorización

Observaciones:

i) Los elementos de la diagonal de L son todos iguales a 1.

ii) El procedimiento anterior se puede llevar a cabo mientras no se requieran intercambios de filas para poder reducir la matriz A a la forma triangular superior.

iii) Esta factorización se puede aplicar en casos de matrices no cuadradas por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 20 \end{pmatrix}$$ donde la matriz U en este caso no es cuadrada y por lo tanto no la calificamos como triangular, sin embargo satisface algunas condiciones que nos pueden ser útiles en algunas aplicaciones.

6.1. USO DE LA FACTORIZACIÓN LU PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES:

Supongamos que se requiere resolver el sistema AX =B donde A se puede reducir a una matriz U triangular superior (triangularizar), sin hacer intercambios de filas. Entonces el sistema se puede escribir como **LUX = B**. Donde L es triangular inferior invertible con solo unos en la diagonal principal. Luego existe un único vector Y tal que: LY =B (Y= L^{-1}.B)
Resolviendo el sistema UX= Y por sustitución regresiva. Se obtiene la solución del sistema AX=B. Es decir : AX= LUX = L(UX)= LY = B. Así nuestro sistema está resuelto.

Ejemplo 6.3: Use la factorización LU para resolver el sistema AX= B, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

usando sustitución regresiva se obtiene: $x_3 = 3$, $-3x_2 - 6(3) = -12 \Rightarrow x_2 = \dfrac{-12+18}{-3} = -2$

$2x_1 = 18 - 4(-2) - 6(3) \Rightarrow x_1 = 4$ solución $(4, -2, 3)^T$ Verifique la solución

Ejemplo 6.4 Resolver

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 10 \\ -4x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 20 \\ -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -4 & 8 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 + f_1]{f_2 \to f_2 + 2f_1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 - f_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = b \Leftrightarrow (\ LY = B \wedge UX = Y\ )$$

Resolvemos los dos sistemas por sustitución

Primero resolvemos LY = B $\Rightarrow$ $\begin{aligned} y_1 \quad &= 10 \\ -2y_1 + y_2 &= 20 \\ -y_1 + y_2 + y_3 &= 30 \end{aligned}$ y se obtiene Y = $\begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego resolvemos UX = Y $\Rightarrow$ $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 2x_2 + x_3 &= 40 \\ -x_3 \quad &= 0 \end{aligned}$ resultando X = $\begin{pmatrix} 35 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$

Supóngase ahora que para triangularizar la matriz A se requieren algunos intercambios de filas, estos intercambios de filas son el producto de multiplicaciones por matrices elementales, sea P el producto de todas las matrices elementales que producen los intercambio de filas necesarios para triangularizar A. Si consideramos la matriz P.A esta no requiere intercambios de filas y por lo tanto se puede factorizar en la forma LU. En este caso el sistema lineal AX=B se resuelve siguiendo el proceso siguiente.

AX = B $\Rightarrow$ P(AX)=PB $\Rightarrow$ (PA)X = PB $\Rightarrow$ (LU)X = PB $\Rightarrow$ UX = L^{-1}(PB) este último sistema se resuelve por sustitución regresiva.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1.- Estudie como usar el método de factorización cuando se requiere realizar intercambios de filas en el proceso de triangularizar la matriz A para obtener U y resuelva este sistema .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.- Resolver el siguiente sistema usando la inversa luego por factorización LU:

$$\begin{cases} x + y - z = 7 \\ 4x - y + 5z = 4 \\ 6x + y + 2z = 20 \end{cases}$$

3.- Escribir la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ como un producto de una matriz triangular inferior (L) una matriz triangular superior (U), es decir: A = LU.

4.- Resuelva cada sistema dado a continuación usando la factorización LU.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

MODELO DE EXAMEN :TEMA SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1) Resuelva el sistema (a), usando el método de la inversa y factorización LU, el sistema (b) usando el método de Gauss con sustitución regresiva. Si existe más de una solución, dé la solución general y una particular.

$$a)\ \begin{cases} 2x+3y+z=3 \\ x+2y+z=1 \\ -x+4y=-2 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x+3y+5z+10w=2 \\ -x-2z-4w=4 \\ 2x+4y+8z+16w=0 \\ y+z+2w=2 \end{cases}$$

2) Determine todos los valores de *a* para los cuales el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x+y+(a^2-5)z=a \end{cases}$$

a) no tenga solución b) tenga infinitas soluciones c) tenga solución única

3) Dadas las matrices

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Efectúe las siguientes operaciones: a) B+2C b) B^T.C c) A^2 –2A

4) Sabiendo que A es una matriz de orden 3x4, B es una matriz de orden 4x4, y C es una matriz de orden 4x1, D es una matriz de orden 1x4, señales cuales de las siguientes operaciones están definidas (indique el orden de la matriz resultante)y cuáles no están definidas.

D.C
A^T.C
$(B.C)^T$
$B.D^T$+C
$C.A^T$
A.C+D

5) Suponga que A, B y C son matrices de orden nxn, invertibles y con elementos reales, α es una constante real no nula. Diga si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Se requiere justificación.

Columna	Justificación
$(A^{-1}\cdot B^{T})^{-1} = (B^{-1})^{T}\cdot A$	
$(\alpha C+BA)^{T}= B^{T}A^{T} +\alpha C^{T}$	
$(A+B)\cdot(A-B)= A^{2}-B^{2}$	
$CB+I=(B^{-1}+C)B$	
$(B+A^{-1})^{-1}=B^{-1}+A$	
$(C.B)C^{-1}=B$	
$C^{-1}\,B^{-1} =(ABC)^{-1}.A$	
$A(B+C) =AC+AB$	

6) Sean A, X matrices de orden n tal que $\left[A^{T}.X^{T}\right]^{-1}-\left[X^{T}.A^{-1}\right]^{-1}+\left[X^{-1}.A^{T}\right]^{T}=I_n$ Despeje la matriz X

7) Calcular B^n para la matriz $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, n es un número natural.

8) Balancear la siguiente reacción química $CH_4+O_2\rightarrow CO_2+H_2O$. Esto es la combustión del metano. (Use sistemas ecuaciones lineales)

9) Determina los valores de *m* para los cuales la matriz $X=\begin{pmatrix}m&0\\0&2\end{pmatrix}$ satisface la ecuación

$X^{2}-\frac{5}{2}X+I=0$.

7. DETERMINANTES

A cada matriz n-cuadrada $A = (a_{ij})$ se le asigna un escalar particular denominado determinante de A, denotado por det (A) o | A |, tal designación se hace siguiendo una regla (función) que describiremos a continuación:

Los determinantes de orden uno y dos se definen como sigue:

$$|a_{11}| = a_{11} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Así, el determinante de una matriz 1x1 $A = (a_{11})$ es el propio escalar a_{11}, es decir, det $(A) = |a_{11}| = a_{11}$.

***Ejemplos 7.*1**.

a) Dado que el determinante de orden uno es el mismo escalar, tenemos det (24) = 24, det(-3) = -3, det $(3x+5) = 3x+5$.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (5)(2) = 3 - 10 = -7.$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (-3)(1) = -8 - (-3) = -8 + 3 = -5.$

DETERMINANTES DE ORDEN TRES

Consideremos una matriz 3x3 arbitraria $A = (a_{ij})$. El determinante de A se define como sigue:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Obsérvese que hay seis productos, cada uno formado por tres elementos de la matriz. Tres de los productos aparecen con signo positivo (conservan su signo) y tres con signo negativo (cambian su signo).

Para calcular los determinantes de orden tres, el siguiente diagrama puede ayudar a resolverlos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ (Para los tres productos positivos).}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ (Para los tres productos negativos).}$$

***Ejemplo* 7.2**. Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2) + (0)(1)(1) - (-2)(2)(1) - (0)(2)(4) - (1)(-5)(3) =$$

$$= 24 + 20 + 0 - (-4) - 0 - (-15) = 44 + 4 + 15 = 63$$

El determinante de la matriz 3x3 $A = (a_{i\,j})$ puede reescribirse como:

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

que es una combinación lineal de tres determinantes de orden dos, cuyos coeficientes (con signos alternantes) constituyen la primera fila de la matriz dada. Esta combinación lineal puede indicarse de la forma siguiente:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nótese que cada matriz 2x2 se obtiene suprimiendo en la matriz inicial la fila y la columna que contienen su coeficiente.

***Ejemplo* 7.3**. Para ilustrar esta propiedad, la aplicaremos al ejemplo anterior :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(8+5) - 2(0-10) + 1(0+4) = 39 + 20 + 4 = 63$$

Para definir determinantes de ordenes superiores a dos se dan dos definiciones previas y después una regla general para obtener el determinante de una matriz cuadrada de cualquier orden.

1) DEFINICIÓN DE MENORES DE UNA MATRIZ:

Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre el cuerpo R. La matriz de orden n-1 obtenida de A al eliminar la fila i y la columna j se denota por M_{ij} (A) y se le llama ***ij–ésimo menor de A***.

2) DEFINICIÓN DE COFACTORES DE UNA MATRIZ:

Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre el cuerpo R. El ***ij–ésimo cofactor de A***, denotado por A_{ij} se define como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}(A))$$

3) DEFINICIÓN:

Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre el cuerpo R. ***El determinante de la matriz A,*** denotado por det(A) o bién por $|A|$, se define mediante la siguiente regla:

a) Si n = 1 , es decir A= (a_{11}), entonces $|A| = a_{11}$

b) Si $n \geq 2$, entonces $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . A_{ik}$ para algún i fijo

$$\text{Así} \quad \det(A) = a_{i1}.\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + \ldots\ldots.. + a_{in}\, A_{in}$$

Si $A = (a_{nn})$ es una matriz de orden arbitrario n x n . Para calcular el det (A) se procede de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots \quad \cdot\cdot\ (-1)^{n+1}.a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Los signos se van alternando según la posición que ocupen las entradas del determinante.

Ejemplo 7.4.

Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Si observamos la matriz, podemos ver que en la tercera columna hay dos ceros. Así pues, si tomamos las entradas de la tercera columna para calcular el determinante, nos ahorraremos calcular dos determinantes, ya que el producto de un determinante por cero es cero.

$$\det(A) = -1\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1(-12+0-4-16-3) + 3(15+0+2+20-2-0)$$

$$= -1(-35) + 3(35) = 35 + 105 = 140.$$

7.1. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Las propiedades básicas del determinante son las siguientes:

1. El determinante de una matriz A y el de su transpuesta A^T son iguales, es decir,

$$|A| = |A^T|$$

2. Sea A una matriz cuadrada,

- Si A posee dos filas (columnas) iguales, necesariamente $|A| = 0$.
- Si A es triangular, esto es, A sólo tiene ceros por encima o por debajo de la diagonal principal, entonces $|A|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal. Es decir

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

3. Supongamos que B se ha obtenido de A mediante una operación elemental entre filas o columnas,

- Si se han intercambiado dos filas (columnas) de A, $|B| = -|A|$.

Si se ha sumado un múltiplo de una fila (columna) a otra, entonces $|B| = |A|$.

Si se ha multiplicado una fila (columna) de A por un escalar k, $B| = k|A|$.

4. Sea A cualquier matriz cuadrada de orden n, son equivalentes los siguientes principios:

A es invertible, es decir, A tiene inversa A^{-1}.

El determinante de A no es nulo: $|A| \neq 0$. y $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

5. El determinante es una función multiplicativa. Es decir, el determinante del producto de matrices A y B es el producto de los determinantes: $|AB| = |A|\,|B|$.

6. Sean A una matriz cuadrada de orden n y α un escalar, entonces $\det(\alpha A) = \alpha^n.\det(A)$

EJERCICIOS RESUELTO: CÁLCULO DE DETERMINANTES

1.-Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - (-6) = 5 + 6 = 11.$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - (-2) = -12 + 2 = -10.$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ =al haber toda una fila nula, el determinante da como resultado = 0.

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 48 + 0 - 16 - (-15) - 0 = 86 - 16 + 15 = 85.$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -42 + 20 + 0 - 0 - 14 - 0 = -36.$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 2(-6-24+16+2)+ 5(-4-24+6)-1(4+12-16-3) = -24-110+3 = -131.$

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & -8 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 1\cdot(16+0+24-(-4)-(-30)-0) -2\cdot(-128-2+30-(-40)-12-(-16))$
$= 74-2\cdot(-56) = 74+112 = 186.$

7.2 ADJUNTA DE UNA MATRIZ

La adjunta de una matriz cuadrada A con elementos de un cuerpo la denotaremos por Adj(A) y se define como la transpuesta de la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su cofactor

PROCEDIMIENTO PARA OBTENER ADJ (A)

1) Dada A
2) Hallar los cofactores de A y formar una matriz B, como sigue.

$$B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

3) Adj (A) = B^T

$$\operatorname{adj} A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7. 5.

$$\text{Sea } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Los nueve cofactores de A son:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -17 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

La transpuesta de la matriz de los cofactores anteriores proporciona la adjunta de A:

$$\operatorname{adj} A=\begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

7.3 *Aplicación de la adjunta para hallar la matriz inversa*

Para toda matriz cuadrada A, $A \cdot (\text{adj}\, A) = (\text{adj}\, A) \cdot A = |A|I$

De este modo, si $|A| \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}\, A)$

Observemos que esta propiedad nos permite hallar por otro método la inversa de una matriz.

***Ejemplo* 7.6** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\text{adj}\, A = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

y el det(A): $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 8 + 0 - 6 - 0 - 2 = -15 \neq 0.$

Así pues, aplicando la propiedad anterior:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}\, A)$, obtendremos: $A^{-1} = -1/15 \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$

EJERCICIOS RESUELTOS. Calcular, por la propiedad anterior, la inversa de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Primero hallaremos el determinante de la matriz A:

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$; como el determinante es cero, no existe la inversa de la matriz A.

$\det B = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17.$

El siguiente paso es hallar la adjunta de la matriz B, así pues, los cofactores de B son:

$B_{11} = 5 \quad B_{12} = -2$

$B_{21} = 1 \quad B_{22} = 3$

y la adjunta de *B*, denotada por adj *B*, será

$$\text{adj } B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando ahora la propiedad $B^{-1} = \frac{1}{|B|}(\text{adj } B) = \ B^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/17 & 1/17 \\ -2/17 & 3/17 \end{pmatrix}.$

b) Empezaremos por hallar el det *A*,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 4 - 12 = -26.$$

Los cofactores de *A* son:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

La transpuesta de la matriz de los cofactores anteriores proporciona la adjunta de *A*:

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} -10 & -8 & -10 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la propiedad de la matriz inversa obtenemos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{-26}\begin{pmatrix} -10 & -8 & -10 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \text{ simplificando, } \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/13 & 4/13 & 5/13 \\ -2/13 & 1/13 & -2/13 \\ 1/13 & -1/26 & -11/26 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. Calcular $|A|$, $|B|$, $|C|$, y $|D|$, triangularizando las matrices A, B, C y D.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Resp: $|A| = -1$, $|B| = -4$, $|C| = -32$, $|D|=160$

2. Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ calcular: a) $|A|$ y b) A^{-1} usando la Adj(A).

Resp: $|A| = -6$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

3. Encuentre los valores reales o complejos de α tales que $\det(A-\alpha I)=0$ para

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y para} \quad A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$ donde I es la identidad 3x3

4. Demuestre que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2=I$ entonces $\mathrm{Det}(A)=\pm 1$

5. Para cada una de las siguientes matrices, determine: (a) la matriz de los cofactores, (b) adj(A), (c) A. Adj(A), (d) detA y (e) A^{-1} si existe.

$$A=\begin{pmatrix} \cos\lambda & 0 & -\operatorname{sen}\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\lambda & 0 & \cos\lambda \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

6. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos del plano cartesiano. Demuestre que la igualdad $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, representa la ecuación de la recta que pasa por P_1 y P_2

7. Sean $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$ tres puntos del plano cartesiano. Demuestre que el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C es igual a $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$

8. Determine en cada caso si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta, mediante un contraejemplo si es falsa o una demostración en caso de ser verdadera:

a) Si A y B son matrices equivalentes, entonces el detA = detB.

b) Si A y B son matrices cuadradas de orden **n**, entonces det(A+B) = detA + detB

c) Si A es una matriz cuadrada con dos filas iguales entonces detA=0

d) El determinante de toda matriz elemental es igual a ±1

e) Si B se obtiene de la matriz cuadrada A realizando una sola operación elemental entonces detB = detA

f) Si A y B son matrices cuadradas de orden n y P es una matriz invertible de orden n entonces tal que se cumple que $A=P^{-1}BP$ entonces detA=detB

g) Considere la matriz B del ejercicio 5 (anterior) y resuelva la ecuación $\det(B-\lambda I)=0$, donde λ es una variable real (incógnita) e I es la identidad de orden 3.

8. REGLA DE CRAMER

Los pasos a seguir para resolver los sistemas de ecuaciones de la forma **AX=B** , donde A es cuadrada, mediante la regla de Cramer son los siguientes:

1. Hallar la matriz ampliada $(A \vdots B)$ asociada al sistema de ecuaciones

2. Calcular el determinante de *A*.

3. Aplicar la regla de Cramer, que consiste en:

a) ir sustituyendo la primera columna del det (*A*) por los términos independientes;

b) dividir el resultado de este determinante entre el det (*A*) para hallar el valor de la primera incógnita;

c) continuar sustituyendo los términos independientes en las distintas columnas para hallar el resto de las incógnitas.

Ejemplo 8.1. Sea el sistema de ecuaciones lineales formado por dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ x + 5y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Encontrar el valor de *x* e *y* mediante la regla de Cramer.

Empezaremos con el primer paso, que consiste en hallar la matriz ampliada $A \vdots B$ asociada al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 1 & 5 & \vdots & 3 \end{pmatrix}.$$

El segundo paso es calcular el determinante de *A*. Así pues:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17.$$

Y el tercero y último paso consiste en calcular las incógnitas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}{17} = \frac{5+6}{17} = \frac{11}{17}. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{9-1}{17} = \frac{8}{17}.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halle el valor de ***a*** para que el sistema sea compatible determinado, usando determinantes. Después resolver el sistema. Usando la regla de Cramer

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y - az = 6 \end{cases}$$

2.- Considere el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ -x + 7y - z = 0 \\ 4x - 11y + kz = 0 \end{cases}$$

¿Qué valor de k hará que el sistema tenga soluciones no triviales?

3.- Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$, determine los valores de λ para los cuales el sistema $(A - \lambda.I)X = 0$, tiene soluciones no triviales.

MODELO DE EXAMEN :TEMA DETERMINANTES

PARTE I. Seleccione la letra correspondiente a la alternativa correcta a cada pregunta.
Cada pregunta acepta sólo una respuesta correcta.
JUSTIFIQUE SUS RESPUESTAS

1) Si A es una matriz de orden n. Al multiplicar A por adj(A) se obtiene :

   a) I_n (matriz identidad de orden n)
   b) det(A)
   c) A. I_n
   d) det(A). I_n

2) Si A y B son matrices de orden n tal que det(A)=2, det(B)=-3, entonces det($A^{-1}.B^T$) vale:

   a) $-\frac{2}{3}$
   b) $\frac{2}{3}$
   c) $-\frac{3}{2}$
   d) $\frac{3}{2}$

3) El siguiente determinante vale: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 19 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$

   a) $6\sqrt{2}$
   b) $-6\sqrt{2}$
   c) $-5\sqrt{2}$
   d) 0

4) Si A es una matriz diagonal de orden n tal que det(A)=0 entonces se puede afirmar que:

   a) Todos los elementos de la diagonal son ceros.
   b) La suma de los elementos de la diagonal da cero
   c) Algún elemento de la diagonal es cero
   d) Existen elementos no nulos en la diagonal.

5) Los valores de a para los cuales la matriz $\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 3 \\ 5 & a & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es invertible, son:

a) 0, 3, 2

b) 3, 0, -2

c) -3, 3, 0

d) -3, 0, 2

PARTE II. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, X= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Encuentre A^{-1} usando la adjunta

b) Resuelva el sistema lineal AX= B usando la regla de Cramer.

PARTE III. Calcule los siguientes determinantes usando el método señalado:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ use los cofactores

2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 7 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ Triangularizando la matriz y las propiedades de los determinantes

3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 6 & -3 \\ -6 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & -5 & 4 \end{vmatrix}$ use el método que usted quiera

PARTE IV. En cada uno de los siguientes casos señala si la proposición dada es verdadera o falsa. No se requiere justificación. Dos malas eliminan una correcta.

a) Para cualquier matriz invertible A, se cumple que $Det(A^{-1}) = \dfrac{1}{Det(A)}$

b) Si A y B son matrices cuadradas de orden n entonces det(A.B) = det(A).det(B).

c) Si A y B son matrices cuadradas de orden n y B = 3.A entonces det(B) =3.det(A)

d) Si A es una matriz cuadrada tal que detA= 0 entonces el sistema de ecuaciones AX=B tiene infinitas soluciones para cualquiera que sea B.

e) Si A y B son matrices cuadradas de orden n entonces det(A-B) = det(A)-det(B)

f) Si A es una matriz cuadrada $\det(A^T)=\det(A)$

g) Si Det(A)=7 entonces el sistema AX=0 tiene solo solución trivial.

PARTE V.

1.- Sea **c** un número real y sea **A** una matriz de orden 3. Demostrar que $\det(cA) = c^3\det(A)$

2.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$. Calcular $\begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c+1 \\ 2a+6 & 2b & 2c+9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3.- Sea A es una matriz de orden 2 , I es la matriz identidad de orden 2.

a) Calcular det(I+A)

b) ¿Qué condiciones debe cumplirse para que det(I+A)=1+det(A)

4.- Si A es una matriz simétrica de orden 5, y det(A)=-4 , calcule:

a) $Det(A+A^T) =$

b) $Det(A.A^T) =$

c) $Det(A^{-1}.A.A^T) =$