5ª EDICIÓN

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN LA CIENCIA ADMINISTRATIVA

GRATIS
Software incluido
Vea la contraportada

G.D. Eppen

F.J. Gould

C.P. Schmidt

Jeffrey H Moore

Larry R. Weatherford

PEARSON
Prentice Hall

Creación de modelos de decisiones con hojas de cálculo electrónicas

PERSPECTIVA GENERAL de los EJEMPLOS incluidos en el LIBRO DE TEXTO, por ÁREA FUNCIONAL

PERSPECTIVA GENERAL de los EJEMPLOS incluidos en el LIBRO DE TEXTO, por ÁREA FUNCIONAL (Continuación)

	Páginas
Decisión sobre perforación de pozos petrolíferos	498-499
Presupuesto de capital con demandas inciertas	518-524, 524-532, 558
Licitación para un yacimiento petrolífero frente a la costa	558
Decisión de inversión en robótica para laboratorios	559-563
Decisión sobre perforación de pozos de gas natural	564-571
Pronóstico de ganancias por acción de una nueva aerolínea	632-634
Administración del desarrollo de un paquete de software de análisis financiero	679-683
Control del presupuesto de un gran proyecto de tarjetas de crédito	683-689

Mercadotecnia

Precio del servicio de copiado	38-45
Publicidad y precios	62-64
Gerencia de ventas	220-221
Asignación de la fuerza de ventas	237-238
Selección de medios en condiciones de certidumbre	254-258
Asignación de territorios de ventas	322-323
Optimización de gastos de mercadotecnia	336-337
Selección de medios en condiciones de incertidumbre	411-420
Campaña de mercadotecnia para Home and Garden Tractors	463-467, 468-470
Conducción de un estudio de investigación de mercados	470-476
Decisión del mercado de prueba	476-483
Base de la tasa de publicidad en revistas	499-501
Promoción de sartenes para omelette —cuántas unidades conviene pedir	533-538, 539-542
Modelo de cambio de marca	555
Promoción óptima de un modelo de televisor discontinuado	558
Uso del flujo de tráfico para pronóstico de ventas en torno a la decisión de ampliar una estación de gasolina	608-617
Pronóstico de la demanda de carbón	635-639
Pronóstico de ventas de automóviles	650
Pronóstico de circulación de una revista	652-654

Sector público

Sector público	Páginas
Programación de actividades del personal	101-102, 108-109
Administración de efectivo	126-129
Determinación de dietas óptimas	171-172
Planeación del transporte	239-244
Asignaciones de personal	232-239
Rutas de viaje	244-246
Sustitución de equipo	246-248
Administración del tráfico	248-249
Suscripción de bonos municipales	324-325
Planeación de un fondo de pensiones	326-327
Planeación de cumplimiento tributario y renta fiscal	389-396
Diseño de un programa educacional	408-410
Selección del sistema de programas que se aplicarán	422-427
Cargas tributarias equitativas en Peoria	407, 435-436
Administración de un proyecto grande	659-670
Probabilidad de completar el proyecto a tiempo	675-677
Control del presupuesto para un proyecto	683-689

Recursos humanos

Programación de actividades del personal	101-102, 108-109
Asignaciones de personal	232-239
Planeación de personal y producción	266-268
Contratación de una secretaria	581-583
Número de expertos en reparaciones que conviene contratar para el mantenimiento de equipo técnico	592-593
Cuántos operadores telefónicos debe contratar LS banco local	650-651

Otros

Selección de un empleo fuera de la universidad	435
Selección de una escuela de posgrado	435
Decisión de qué automóvil conviene comprar	435
Decisión de llevar o no el paraguas cuando vamos al trabajo	444
Análisis de fallas en una grúa	555
Decisión sobre pedidos de leche en una tienda de servicio rápido	556
Campaña anual de recaudación de fondos	557
Pronóstico del número de huéspedes en un hotel Marriott	654-656

Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa

Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa

QUINTA EDICIÓN

Construción de Modelos para la toma de Decisiones con Hojas de Cálculo Electrónicas

G.D. Eppen
F.J. Gould University of Chicago
C.P. Schmidt University of Alabama
J.H. Moore Stanford University
L.R. Weatherford University of Wyoming

TRADUCCIÓN:

Ángel Carlos González Ruiz
Traductor profesional

Gabriel Sánchez García
Universidad Nacional Autónoma de México

REVISIÓN TÉCNICA:

Marco Antonio Montúfar Benítez
Departamento de Ingeniería Industrial
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Estado de México

Guillermo Martínez del Campo Varela
Departamento de Ingeniería
Universidad Iberoamericana
México

PEARSON

PRENTICE HALL

Addison Wesley Longman

MÉXICO • ARGENTINA • BOLIVIA • BRASIL • COLOMBIA • COSTA RICA • CHILE • ECUADOR
EL SALVADOR • ESPAÑA • GUATEMALA • HONDURAS • NICARAGUA • PANAMÁ
PARAGUAY • PERÚ • PUERTO RICO • REPÚBLICA DOMINICANA• URUGUAY • VENEZUELA

AMSTERDAM • HARLOW • MIAMI • MUNICH • NUEVA DELHI • MENLO PARK • NUEVA JERSEY
NUEVA YORK • ONTARIO • PARÍS • SINGAPUR • SYDNEY • TOKIO • TORONTO • ZURICH

Datos de catalogación bibliográfica

EPPEN, G. D.

Investigacion de Operaciones
en la Ciencia Administrativa

PRENTICE-HALL, México, 2000

ISBN: 970-17-0270-0
Materia: Computación

Formato: 20 x 25.5 Páginas: 792

Versión en español de la obra titulada *Introductory Management Science, Fifth Edition*, de G.D. Eppen, F.J. Gould, C.P. Schmidt, J.H. Moore y L.R. Weatherford, publicada originalmente en inglés por Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, NJ, E.U.A.

Esta edición en español es la única autorizada.

Original English language title by
Prentice-Hall, Inc.

ISBN 0-13-889395-0

Edicion en español:
Editora: Marisa de Anta
Supervisor de traducción: Armando Castañeda González
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

Edición en inglés:
Senior Acquisitions Editor: Tom Tucker
Editorial Assistant: Melissa Back
Marketing Manager: Debbie Clare
Production Editor: Susan Rifkin
Production Coordinator: Cindy Spreder
Managing Editor: Katherine Evancie
Senior Manufacturing Supervisor: Paul Smolenski
Manufacturing Manager: Vincent Scelta
Design Director: Pat Smythe
Interior Design: Ox and Company, Inc.
Cover Design: John Romer
Interior Art/Cover Art: Marjory Dressler
Composition: Carlisle Communications, Inc.

QUINTA EDICION, 2000

Calle 4 No. 25-2do. piso
Fracc. Industrial Alce Blanco
53370 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Reg. Núm. 1524

ISBN 970-17-0270-0

Impreso en México/*Printed in Mexico*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 04 03 02 01 00

A Ashley y Aaron;

A Jenny, por su increíble apoyo y eterno compañerismo; y a Maria, Carolyn, Laura, Bob, Paul, y Amy, por su amor y entusiasmo

Acerca de los Autores

Jeffrey H. Moore

Jeffrey Moore se incorporó al profesorado de la Graduate School of Business (Escuela universitaria de graduados en negocios) de la Universidad de Stanford en 1972, después de haber trabajado más de 10 años como ingeniero en comunicaciones, analista en sistemas de computación y analista en administración. Desde su ingreso a Stanford, ha diseñado e impartido cursos en el área de Operaciones y Tecnología de la Información en los niveles ejecutivo, de maestría y doctorado. Además de sus responsabilidades administrativas, imparte el curso principal de construcción de modelos y es un catedrático muy reconocido en cuatro programas Senior Executive de Stanford. En su investigación, se concentra en sistemas de apoyo para la toma de decisiones y en el uso de la computadora por parte de altos ejecutivos. Ha escrito más de 40 artículos sobre estos temas y otros afines, y también ha trabajado intensamente como consultor en la industria privada, tanto nacional como internacional, para la aplicación de la tecnología de la información y la construcción de modelos como soporte para la toma de decisiones.

Ha trabajado en varios proyectos para la elaboración de material en cursos cuyo fin es introducir Excel con propósitos de construcción de modelos y apoyo a las decisiones en los niveles de posgrado, maestría en administración de empresas y también para ejecutivos. A este respecto, ha trabajado con varias subvenciones de Microsoft, IBM y Hewlett Packard, y colaboró inicialmente con Frontline Systems en la fase de ensayos y desarrollo del Solver de Excel, sobre todo en las opciones de optimización lineal. Él fue un precursor en 1978-79, cuando presentó uno de los primeros cursos sobre el uso de modelos en hojas de cálculo electrónicas en una escuela de administración de empresas, y poco después logró que las hojas de cálculo electrónicas fueran adoptadas para el curso fundamental de la Ciencia de las Decisiones, en Stanford, que así se convirtió en la primera escuela importante de administración que las adoptó. Desde entonces ha participado en el desarrollo de la construcción de modelos y aplicaciones estadísticas con hojas de cálculo electrónicas, y desarrolló el GLP (Graphical LP Optimizer de Stanford; un optimizador con gráficas de programación lineal hecho en dicha universidad) y Regress, un paquete de regresión basado en Excel que hoy se usa en Stanford y otros lugares.

En 1995-96 trabajó con la INFORMS Business School Educational Task Force, la cual realizó una encuesta entre más de 300 profesores universitarios de la Ciencia de la Administración. Además, en sus conferencias ha hecho presentaciones en las que muestra el importante papel que deben desempeñar las hojas de cálculo electrónicas en la enseñanza de la administración. En la actualidad es el director de TELL, el Technology Educational Learning Laboratory de la Stanford Business School, una nueva instalación dedicada a la enseñanza y el estudio del uso de la tecnología en la administración.

En 1996 recibió el Premio Sloan a la excelencia magisterial de Stanford por su curso fundamental sobre la construcción de modelos que sirven como soporte para la toma de decisiones.

El doctor Moore ostenta un BSEE con especialidad en diseño de circuitos digitales por la University of Cinncinatti, un título conjunto MBA/CS por la Texas A&M University y un doctorado en administración de empresas por la University of California en Berkeley. Ostenta también un certificado de Professional Engineer (E. E., Ohio).

Larry R. Weatherford

Larry Weatherford es profesor asociado en el College of Business de la University of Wyoming. Obtuvo su licenciatura en la Brigham Young University en 1982 y su maestría y doctorado en la Darden Graduate School of Business de la University of Virginia en 1991. Recibió el premio a la "Enseñanza Sobresaliente" por parte del College of Business en su primer año como profesor. En los años siguientes también se ha hecho acreedor al premio que otorga Alpha Kappa Psi al "Miembro más destacado del profesorado", al premio al "Investigador adjunto más destacado" que confiere el College of Business y, más recientemente, al premio Ellbogen al "Mérito en la enseñanza en el aula", conferido institucionalmente por la universidad. Varios de sus artículos académicos han aparecido en diversas publicaciones, como *Operations Research, Decision Sciences, Transportation Science, Naval Research Logistics, Cornell Hotel and Restaurant Administration Quarterly, International Journal of Technology Management, Journal of Combinatorial Optimization* y *Omega.*

En el terreno de la práctica, Larry fue el personaje presentado en la sección de "Preguntas y respuestas" de *Scorecard* (*Revenue Management Quarterly*) en el segundo trimestre de 1994. También fue autor de un artículo en la sección sobre literatura técnica publicada en ese mismo número de *Scorecard*. En varios de los últimos años ha presentado sus investigaciones en AGIFORS ante el grupo de estudios Yield Management, y también en la conferencia de IATA International Revenue Management. Ha trabajado en proyectos de administración de ingresos con varias aerolíneas y corporaciones de hotelería importantes.

En el aspecto personal, Larry está casado con la encantadora Jenny y tienen seis hijos (¡sí, todos nacidos del mismo matrimonio!). La mayor parte de sus intereses no profesionales están concentrados en su familia y en la iglesia. El resto de su tiempo libre lo dedica a jugar *racketball* o golf, y también a leer algún libro divertido.

Resumen de contenido

Contenido

Prefacio — Para el estudiante de administración

¡Felicidades! Al aprender el uso de Microsoft Excel se ha unido usted a los 35 millones de usuarios que han hecho de las hojas de cálculo electrónicas la *lingua franca* de la administración, lo cual ha creado toda una revolución administrativa que comenzó hace apenas una década. El tema de este libro no es Excel, sino la forma en que usted puede utilizar ese programa para el análisis de situaciones que se presentan en la administración. Nuestro enfoque consistirá en desarrollar y más tarde analizar un modelo Excel para cada situación. A partir de ese análisis se someterán a consideración las decisiones recomendables con el fin de mejorar la situación. Se desarrollará una amplia gama de modelos, conjuntamente con los conceptos apropiados, para que usted pueda generalizar estos ejemplos ante las diversas situaciones que encontrará durante su carrera como administrador.

La construcción de modelos explícitos para el análisis y la toma de decisiones administrativas se conoce tradicionalmente como *Ciencia de la Administración.*

El *Webster's New World Dictionary* define el término *oxymoron* (oxímoron) como una "figura retórica en la cual se combinan ideas o términos opuestos o contradictorios". Algunos ejemplos muy comunes de oxímoron son: dulce tristeza, estruendoso silencio, bebé gigante, sedán deportivo, eficiencia burocrática... y seguramente usted podrá encontrar muchos más. ¿Y qué podemos decir de la Ciencia de la Administración?

En el mismo diccionario se define la palabra *management* (administración) como "el acto, arte o actividad para administrar, manejar, controlar, dirigir", y otros conceptos por el estilo. Pero si la administración es un arte, entonces ¿la Ciencia de la Administración es un oxímoron, es decir, una contradicción de términos?

¡Para nosotros no lo es!

La ciencia consiste en un proceso mediante el cual se utilizan observaciones y se llevan a cabo ensayos para establecer principios y después aplicar esos principios para responder preguntas. En gran parte, los negocios se basan en esa misma aproximación. Los actuarios utilizan modelos estadísticos para establecer el tipo o costo de los seguros. Las organizaciones usan modelos de flujo de efectivo descontado para tomar decisiones sobre gastos de capital. Los ejecutivos de ventas emplean modelos basados en la elasticidad de la demanda para realizar sus determinaciones de precio, y los gerentes de fondos de pensiones utilizan modelos de inversión para controlar sus carteras de inversiones.

El tema principal de este libro son los modelos que pueden utilizarse en muchas y muy diversas situaciones administrativas. En realidad, gran parte de los modelos que vamos a estudiar son modelos *genéricos.* De la misma manera en que el modelo aquí utilizado para el descuento de flujos de efectivo se puede aplicar para la resolución de otros problemas en los cuales los periodos, las tasas de interés y los flujos de efectivo son diferentes; también los modelos que estudiaremos en este texto pueden utilizarse en situaciones sumamente distintas.

Creemos que este libro le parecerá interesante (para no hablar por ahora de su utilidad) en la medida en que usted (1) enfoque su atención a las *situaciones del mundo real* y a los modelos construidos en hojas de cálculo electrónicas, los cuales llevan a cabo la resolución de esas situaciones, y (2) participe activamente en la construcción y el análisis de dichos modelos. Por nuestra parte, hemos tratado de mantener el enfoque centrado en *la relación que existe entre la administración y el modelo.* Sin embargo, la responsabilidad de mantener dicho enfoque dependerá principalmente de usted. A medida que vaya avanzando en su trabajo, observará que este texto está lleno de modelos específicos. Es fácil llegar a sumergirse a tal grado en los detalles técnicos de los modelos y en la representación de los mismos en Excel, que al final se pierden de vista las habilidades de tipo general que es preciso desarrollar para llegar a ser un buen gerente o un buen constructor de modelos. Presentamos a continuación cuatro ideas que son fundamentales para lograr la eficiencia en la toma de decisiones. Será muy útil que las tenga usted presentes. Ya verá que los modelos específicos con los cuales va a trabajar le ayudarán a comprender mejor estas ideas.

El contexto del problema. Para poder representar una situación por medio de un modelo, primero es necesario "contextualizarla" o "enmarcarla". Esto significa que usted debe desarrollar una forma organizada que le permita pensar en la situación. Recuerde que la mayoría de los problemas de administración llegan hasta nosotros en forma de síntomas, no como el planteamiento claro de un problema. Supongamos que su representante de ventas en Spokane acaba de informarle que el principal competidor de su empresa les está ganando la partida, porque ahora ofrece a sus clientes el procesamiento directo de todas sus transacciones a través de Internet. En el sentido ordinario de la palabra, se trata de un problema de administración, pero en nuestro vocabulario es un síntoma. El planteamiento de un problema tiene que incluir las posibles decisiones y un método para medir la eficacia de cada una. El arte de pasar de un simple síntoma a un planteamiento claro del problema se conoce como el proceso para enmarcar la situación, y es una habilidad fundamental para un gerente o administrador eficiente.

La *optimización sujeta a restricciones* y las *decisiones bajo riesgo* son dos marcos útiles e importantes que estudiaremos aquí y que son aplicables a gran variedad de situaciones en administración. Desgraciadamente, no creemos que sea suficiente describir esos marcos y suponer que el lector los va a saber utilizar en forma correcta. Para que pueda avanzar hacia la meta de usar los contextos o marcos en forma intuitiva es necesario que usted entienda cómo fueron construidos los modelos y qué relaciones existen entre las decisiones y los resultados. Tendrá que aprender acerca de los modelos y su utilización en distintas situaciones, pues solamente así hará suyas estas ideas. Para eso será preciso que dedique cierto tiempo a revisar con sentido crítico los trabajos de otras personas y también a practicar por su cuenta. Por esa razón, este libro está lleno de ejemplos con sus representaciones correspondientes en hojas de cálculo electrónicas, además de casos prácticos y problemas que le ayudarán a perfeccionar sus habilidades en la construcción de modelos.

Optimalidad y sensibilidad. En este texto encontrará numerosos modelos construidos para empresas, por lo cual verá que el análisis de los mismos conduce a decisiones "óptimas". Esto suena muy bien: ¿qué podría haber mejor que una decisión "óptima"? Pero el lenguaje puede ser engañoso si no se comprenden a fondo los conceptos en cuestión. En este contexto, la *decisión óptima* es la que ofrece la mejor respuesta para el problema abstracto planteado en el modelo; por ejemplo, una respuesta que maximice las ganancias. Pero, ¿acaso es también la mejor respuesta para la situación de la vida real que, por principio de cuentas, nos indujo a construir el modelo? Esto es lo que tendrá usted que averiguar, sobre todo *antes* de poner en práctica la recomendación extraída del modelo. La decisión de aplicar o no una recomendación en particular siempre es una cuestión de juicio, pero la calidad de tal juicio dependerá, en un grado considerable, de lo bien que haya comprendido usted la relación entre el modelo y la situación real que se ha intentado reflejar en él.

También es importante valorar la *sensibilidad* de la respuesta, es decir, hasta qué punto la respuesta proporcionada por un modelo depende de los valores numéricos particulares que fueron utilizados como datos de entrada para el mismo. Por lo general, la alta dirección se siente más cómoda con las decisiones que son válidas dentro de una amplia gama de valores de entrada, de tal manera que una decisión buena no se transforme de pronto en una mala decisión a causa de un pequeño cambio en alguna de las entradas del modelo. Así pues, el análisis de la sensibilidad es un tema importante en todo este texto.

Conceptos de costo. Este libro se ocupa de las decisiones individuales de las empresas, como por ejemplo cuántos artículos conviene solicitar en un pedido o dónde se habrá de instalar una nueva fábrica. Uno de los elementos básicos que usted usará en la construcción de sus modelos son los costos. Así, tendrá oportunidad de trabajar con los conceptos de costos fijos, marginales y de oportunidad. La determinación de las relaciones de costo apropiadas en un modelo es un factor de importancia crucial para tomar decisiones acertadas. Ésta es una habilidad que le resultará muy útil en su carrera.

Un saludable escepticismo. Es importante ser escépticos. Aprenda a desconfiar de los expertos, de las soluciones producidas por modelos computarizados —tanto los de usted como, sobre todo, los de otras personas— y, por supuesto, de su propia intuición. Nuestros socios más valiosos son los que nos dicen: "No puedes estar en lo correcto. Si hubieras acertado, entonces la condición siguiente forzosamente tendría que ser cierta, pero resulta obvio que no lo es, por tanto te has equivocado." El trabajo directo con modelos —en la práctica— refuerza su capacidad para analizar y deslindar la ruta que conduce desde las suposiciones hasta las conclusiones. Los casos que presentamos al final de cada capítulo han sido diseñados específicamente para ilustrar este concepto. Saber formular la pregunta adecuada es el primer paso para llegar a una buena decisión. Ya tendrá oportunidad de trabajar para desarrollar esta habilidad.

Usted es el ingrediente clave para el éxito en la construcción de modelos que reflejen situaciones administrativas. Tenga presente que usted está "compitiendo" con los otros 35 millones de individuos que le han precedido en esta revolución y que han llegado a dominar la mecánica de las hojas de cálculo electrónicas. Pero, ¿cuántos de ellos son capaces de usar esas hojas para representar exitosamente mediante un modelo una situación administrativa desafiante, y justificar después su análisis sobre bases conceptuales sólidas? Por supuesto, es factible que el estudiante realice las tareas de trabajo de este texto o que logre aprobar la asignatura, y que, sin embargo, todo este material no produzca efecto alguno en su formación o en su carrera. Con el fin de evitar ese resultado trágico, es indispensable que usted haga *suyas* estas ideas acerca de los modelos, es decir, que las convierta en parte integral de su intuición personal. Este texto le puede ayudar, y también su maestro, pero al final de cuentas tendrá que realizarlo usted mismo teniendo como base su trabajo "práctico" en la construcción de modelos mediante Excel. Después de todo, el aprendizaje es una experiencia personal y sólo es posible obtenerlo por medio del esfuerzo propio.

Notas sobre la Traducción:

1. El disco compacto que se encuentra al final del texto contiene además del material en inglés (el cual especifica en la contraportada y en el prefacio para el profesor) las pantallas del programa Excel 7.0 en español. Es decir, el alumno tendrá dos versiones para poder trabajar de la manera que más le convenga o desee.
2. Se respetaron las unidades de medición del libro en inglés; en otras palabras no se hicieron conversiones de un sistema a otro.

Para el profesor

Por lo dicho anteriormente, resulta obvio que la ciencia de la administración basada en hojas de cálculo electrónicas tiene mucho que ofrecer a sus estudiantes. Creemos que un buen libro de texto, combinado con la labor de enseñanza y el entusiasmo de usted, puede desempeñar un papel decisivo para ayudar a encauzar las actitudes de los administradores del mañana hacia el uso apropiado de los modelos cuantitativos en el mundo de los negocios. Las hojas de cálculo electrónicas se han convertido en la herramienta que actualmente utilizan en forma casi exclusiva millones de administradores para el análisis de los problemas de la empresa. Ahora esas hojas de cálculo ofrecen muchas herramientas poderosas que nos permiten analizar modelos más complejos y tomar mejores decisiones. En virtud del uso tan generalizado de las hojas de cálculo electrónicas en administración, nuestra tarea consiste en lograr que los estudiantes enfoquen su atención al desarrollo de sus aptitudes para la construcción de modelos —que sepan "pintar" en el lienzo vacío de la hoja de cálculo electrónica los modelos que puedan ser útiles y prácticos para los negocios— y no en algoritmos o acertijos matemáticos.

Teniendo esto presente, la quinta edición fue revisada de principio a fin por los nuevos autores, Jeffrey Moore y Larry Weatherford, con el doble propósito de adecuarla a las herramientas más avanzadas de las hojas de cálculo electrónicas incorporadas a esta obra y ayudarle a usted a que las haga todavía más relevantes para la carrera que sus estudiantes van a emprender en administración. Con este propósito, el contenido se ha desviado de los procedimientos de resolución y otros detalles matemáticos y se ha enfocado en material adicional y casos prácticos. Por ejemplo, a casi todos los capítulos se les han añadido nuevos casos tomados de las escuelas de posgrado en administración de empresas de Stanford y Darden. Como también consideramos muy importante que el estudiante se percate de que las empresas del mundo real siguen utilizando con éxito estos métodos cuantitativos, hemos incluido viñetas actualizadas al principio de cada capítulo y diversas cápsulas de aplicación que muestran los resultados, a menudo del orden de millones de dólares, que han obtenido empresas muy conocidas mediante la aplicación de estas técnicas para la construcción de modelos.

Este libro de texto está dirigido a los cursos introductorios sobre la aplicación de la hoja de cálculo electrónica de Microsoft Excel para la construcción de modelos que sirvan para la toma de decisiones administrativas en los niveles de licenciatura o maestría. Los estudiantes tendrán así las ideas fundamentales que los guiarán a lo largo de toda su carrera. Para abordar las necesidades de los lectores interesados en seguir carreras administrativas más generales o más especializadas en la ciencia de las decisiones, el libro hace énfasis en:

- la importancia de contar con fundamentos conceptuales firmes en todos los temas, en oposición a las prescripciones que se hacen al estilo de "recetas de cocina" para el manejo de hojas de cálculo electrónicas.
- el papel que desempeña la construcción de modelos en hojas de cálculo electrónicas dentro del contexto más amplio de la toma de decisiones en la administración, en oposición a las técnicas algorítmicas.

Hemos adoptado un enfoque muy "práctico" en la construcción de modelos que corresponden a muchos de los desafíos a los cuales pueden enfrentarse las empresas en los rubros de operaciones, finanzas, recursos humanos, mercadotecnia y el sector público, para mencionar sólo unos cuantos. Los estudiantes muestran una clara preferencia por este enfoque porque, gracias a él, (1) adquieren habilidades capitalizables que podrán utilizar de inmediato en su carrera profesional y, lo más importante, (2) desarrollan hábitos y conocimientos valiosos para la construcción de modelos que les beneficiarán en forma perdurable. Muchos estudiantes se han comunicado con nosotros para decirnos que el presente fue uno de los cursos más valiosos que estudiaron en la universidad.

El libro revisado se enfoca en gran medida a los modelos —qué son, cómo se crean, cómo se usan y qué tipo de información ofrecen— y en la importancia decisiva del buen juicio administrativo para utilizar esa información. Al mismo tiempo, para los lectores interesados en los aspectos más especializados del tema, se incluye una exposición sin paralelo sobre técnicas de optimización y análisis de decisiones.

Las aplicaciones y ejemplos de las hojas de cálculo electrónicas en Microsoft Excel, en las cuales se incluye el uso de módulos suplementarios muy conocidos (Solver, Crystal Ball, @Risk y TreePlan), están integrados en todo el texto como paradigmas para la construcción de modelos.

Se ha prestado mucha atención a los pasos de los procedimientos (funcionan casi como "tutoriales") para la construcción y análisis de modelos para la toma de decisiones en Excel. Una vez más se hace énfasis en el uso "práctico" de Excel con sus módulos suplementarios. El libro presenta muchas "pantallas" que muestran los modelos realizados en Excel e incluye cuatro paquetes de programas de aplicaciones que el estudiante seguirá usando mucho tiempo después de terminado el curso:

- Un nuevo programa de visualización gráfica, GLP, para la optimización interactiva de modelos de programación lineal (*software* incluido con el libro de texto).
- Versión *exclusiva* para el estudiante, la cual contiene un módulo suplementario de Crystal Ball para simulaciones Monte Carlo (*software* incluido con el libro de texto).
- Módulo suplementario TreePlan para análisis de decisiones (*software* incluido con el libro de texto).
- Plantillas de Excel para modelos de línea o cola de espera (*software* incluido con el libro de texto).

También ampliamos la exposición introductoria acerca de la filosofía sobre la construcción de modelos y agregamos un nuevo capítulo donde se exponen técnicas generales para la construcción de modelos en hojas de cálculo electrónicas. Este capítulo sirve como introducción a los estudiantes para la utilización de dichas hojas de cálculo. Asimismo, revisamos a fondo dos capítulos: el correspondiente a la toma de decisiones con objetivos múltiples, en el cual se incorporó una nueva sección acerca del proceso de jerarquía analítica (PJA); y el capítulo dedicado a pronósticos, donde la exposición sobre modelos para el pronóstico de series de tiempo es ahora más amplia, independientemente de que se añadieron temas como el del tratamiento de la estacionalidad de los datos, y también un caso referente al uso de pronósticos en los hoteles Marriott.

En esta edición se presenta nuevo material sobre modelos de aplicación en el sector servicios, además de los ejemplos tradicionales de manufactura que ya aparecieron en ediciones anteriores. Continuando la excelente tradición de estas últimas, el texto expone en forma sin igual el tema de la optimización.

El texto está dividido en tres partes; la primera se refiere a temas generales que tratan la construcción de modelos, la segunda a los modelos de optimización y la tercera a los modelos probabilísticos (estocásticos). Esto provee un marco lógico para la organización del material, permitiendo que se haga más énfasis y se dedique mayor espacio a rubros "candentes" de actualidad, como el PJA, la simulación Monte Carlo, la toma de decisiones con objetivos múltiples y el uso general de hojas de cálculo electrónicas para la construcción de modelos. Aquí encontrará usted más material que el que se puede abarcar en un primer curso. Creemos que nuestra organización de los temas brinda a cada profesor toda la flexibilidad para que adapte su curso a diferentes grupos y necesidades.

Los apéndices sobre Solver y las características especiales de Excel para la construcción de modelos no se encuentran habitualmente en cursos donde se enseña la mecánica de las hojas de cálculo electrónicas, pero han sido incluidas aquí para que el estudiante pueda mejorar sus habilidades en el manejo de dichas hojas y aprecie mejor las capacidades de Excel para la construcción de modelos.

MATERIALES INCLUIDOS

Esta edición incluye un CD-ROM que contiene, sin costo extra, los siguientes programas y materiales para el curso:

- Nuevo programa de visualización gráfica, GLP, para la optimización interactiva de los modelos de programación lineal incluidos en el material de los capítulos 4 y 7.
- Versión *exclusiva* para el estudiante, la cual presenta el módulo suplementario Crystal Ball para simulaciones Monte Carlo, que podrá utilizarse con el material del capítulo 11. Es compatible con Excel 97 (versión 8.0).
- *Software* del módulo suplementario para análisis de decisiones TreePlan, que se usará con el material del capítulo 10. Es compatible con Excel 97 (versión 8.0).

- Plantillas de Excel para modelos de línea de espera, aplicables al material del capítulo 12. Son compatibles con Excel 97 (versión 8.0).
- Demostraciones con "reproducción" animada y comentarios de viva voz, para ilustrar el uso de los principales módulos suplementarios de Excel.
- Archivos de hojas de cálculo Excel para todos los ejemplos citados en el texto, así como todos los datos pertinentes para la resolución de los problemas y los casos prácticos presentados al final de los capítulos.

MATERIALES SUPLEMENTARIOS PARA LOS QUE ADOPTEN EL TEXTO

- Soluciones Excel (para el profesor) de cada uno de los ejemplos, casos y problemas presentados en el libro. El maestro puede usarlos en su forma original, suprimir algunos detalles o modificarlos a su gusto.
- Diapositivas de presentación para cada capítulo, en Power Point, con las hojas de cálculo Excel apropiadas (013-904780-8).
- Acceso a la página protegida en la World Wide Web para que obtenga oportunamente materiales complementarios (www.prenhall.com/eppen)
- Manual de soluciones para el maestro (013-904756-5)
- Archivo (Test Item File) con artículos de prueba (013-904764-6)
- Examen adaptable por el usuario (Custom Test) para Windows (013-904772-7)

AGRADECIMIENTOS

En nuestro papel como autores responsables de esta edición, queremos dar las gracias a los autores de las cuatro primeras ediciones de esta obra: Gary Eppen y F. J. Gould, a quienes se les unió en ediciones posteriores Charles Smith. A todos ellos nuestro más profundo reconocimiento por sus arduos esfuerzos en la preparación de un libro de texto clásico que valió la pena revisar.

Deseamos dar las gracias a nuestro editor, Tom Tucker, por la paciencia con la cual logró que esta revisión fuera aprobada. Consideramos que si no hubiera sido por sus orientaciones y dirección, este libro no sería ni remotamente el producto que actualmente es.

Nos gustaría expresar nuestra gratitud por la labor que realizaron los numerosos revisores de esta edición (véase la lista más adelante). Gracias a sus atinados comentarios e ideas éste es un mejor libro. Agradecemos también a quienes nos proporcionaron los casos prácticos ampliados que aparecen en esta edición, C. P. Bonini, Evan Porteus, Robert Wilson, Haim Mendelson, Krishnan Anand y Sam Bodily.

Agradecemos a los más de 300 profesores que participaron en la extensa Encuesta INFORMS, donde se ven aspectos sobre la enseñanza de la ciencia de la administración. En sus comentarios y sugerencias se basaron muchos cambios introducidos en esta edición.

Además, deseamos dar las gracias a nuestras secretarias, Heather Harper, Vonda Barnes y Marge Holford, por sus largas horas de minucioso trabajo repasando la edición anterior de este libro e incorporando las correcciones necesarias. También estamos en deuda con Kevin Lewis, quien con sus ojos de águila detectó cualquier error que pudiera haberse filtrado hasta esa etapa del proceso, y asimismo agradecemos a todos los jóvenes que pertenecen a la generación de la maestría en "Construcción de modelos para la toma de decisiones" de la University of Wyoming, correspondiente al otoño de 1997, que llevó a cabo el uso de este libro en el aula.

Nuestra gratitud para el profesor David Ashley por las plantillas sobre líneas de espera y para el profesor Mike Middleton por el *software* TreePlan.

Por último, queremos dar las gracias a Daniel Fylstra y John Watson de Frontline Systems y Software Engines por haber hecho realidad el Solver. Ha sido un placer trabajar con ellos. Otros miembros de Microsoft, Lewis Lewin y los ex alumnos de Administración de Empresas de Stanford, Steve Ballmer y Pete Higgins, merecen nuestro reconocimiento por su participación tan decisiva en la creación de las herramientas Excel, las cuales han hecho de este programa la opción preferida por parte de los gerentes y administradores para la construcción y el análisis de modelos. Su colaboración y receptividad ante las sugerencias de los académicos, para determinar el diseño del producto y el conjunto de características de Excel y Solver, han sido un modelo que ojalá sirva de ejemplo a otros creadores de *software*.

Esperamos que este texto y sus materiales de apoyo sirvan como un refuerzo para sus labores de enseñanza. Siempre nos agrada la comunicación con los profesores —sobre todo si nos mencionan sus ideas para mejorar este texto—, así que siéntase en entera libertad para hacernos llegar sus comentarios.

Jeffrey Moore, Palo Alto, CA
Email: moore_jeffrey@gsb.stanford.edu
Teléfono: (650) 723-4058
FAX: (650) 725-7979

Lawrence R. Weatherford, Laramie, WY
Email: lrw@uwyo.edu
Teléfono: (307) 766-3639
FAX: (307) 766-3488

REVISORES DE LA QUINTA EDICIÓN

Kenneth H. Brown, University of Northern Iowa; Mitale De, Wilfrid Laurier University; Greg DeCroix, University of Washington; Abe Feinberg, California State University; Phillip C. Fry, Boise State University; Thomas A. Grossman, Jr., University of Calgary; Anne D. Henriksen, University of New Mexico; Steven Nahmias, Santa Clara University; Robert Nau, Duke University; Gary Reeves, University of South Carolina; David A. Schilling, The Ohio State University; Rick L. Wilson, Oklahoma State University.

Parte 1

LOS MODELOS Y SU CONSTRUCCIÓN

En esta parte iniciamos nuestro enfoque con la construcción de modelos en Excel, los cuales se presentan como un apoyo para las decisiones administrativas. Nuestro enfoque consistirá en desarrollar un modelo de una situación administrativa en Excel, analizar dicho modelo con las herramientas de este programa y finalmente tomar una decisión basada en ese análisis. Los primeros capítulos estarán dedicados a estudiar un tipo de modelos conocidos como deterministas. Por eso tiene sentido preguntar: "¿Qué entendemos por *determinista*?"

La palabra *determinista* significa que todos los aspectos del modelo ya *se conocen con certeza*. Si se trata de un modelo de planeación de la producción, por ejemplo, se supondrá que sabemos *exactamente* en cuánto tiempo se produce una parte en particular, digamos 20 minutos, o el equivalente de tres partes por hora. En esas condiciones, sabremos que en ocho horas de trabajo será posible producir: 8 horas * 3 partes por hora = 24 partes.

Todos hemos usado modelos deterministas. Desde la primera vez que dedujimos que cinco piezas de una golosina, que vendían a cinco centavos cada una, nos costarían 25 centavos, supimos el valor exacto de todos los factores que intervienen en nuestro análisis. De hecho, en forma natural tendemos a suponer que el mundo circundante es determinista. Sin embargo, al reflexionar en el asunto, comprendemos que no es así. En el ejemplo anterior, sabemos que algunas de esas partes podrán fabricarse en 19 minutos y otras en 23. Tal vez nos basten 7 horas y 41 minutos para producir nuestras 24 partes.

Entonces, ¿qué objeto tiene utilizar modelos deterministas, si sabemos que no describen perfectamente la realidad? La respuesta es sencilla: los modelos son útiles. Es posible que los modelos deterministas no sean perfectos, pero a menudo ofrecen una aproximación razonablemente aceptable a la realidad, y ello casi siempre es preferible a no tener algún modelo. Los resultados, que tales modelos nos ofrecen, compensan de sobra el tiempo y esfuerzo necesarios para su construcción y análisis. Por esta razón, los modelos deterministas son el caballo de batalla entre las aplicaciones de las hojas de cálculo electrónicas destinadas al análisis de situaciones administrativas. También es por eso que hemos dedicado las dos primeras partes de este libro a tal estudio. Más adelante, en la tercera parte, relajaremos nuestra suposición determinista e incluiremos diferentes modelos en los que será necesario tomar en cuenta explícitamente la incertidumbre.

CAPÍTULO

1

Introducción a la construcción de modelos

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN Decisiones de crédito y cobranzas en AT&T Capital Corporation

Como propietaria y administradora de más de $12,000 millones en activos, AT&T Capital Corporation (AT&T CC) es la más grande entre las compañías de arrendamiento y financiamiento de Estados Unidos. El arrendamiento comercial en pequeña escala, que implica un capital en equipo valuado en $50,000 o menos, es un segmento estratégico de los negocios de AT&T CC que representa varios miles de millones de dólares. En este mercado altamente competitivo, AT&T CC debe tomar las decisiones de aprobación de crédito con rapidez (o correr el riesgo de perder clientes que serían absorbidos por otra arrendadora), con precisión (o arriesgarse a sufrir pérdidas por concepto de deudas incobrables) y con efectividad en términos de costos (o exponerse a pagar el costo de decisiones erróneas que merman las ganancias). Además, es preciso que la administración de las actividades de cobranza de cuentas pendientes sea efectiva, en términos de costos, para controlar las pérdidas ocasionadas por las deudas incobrables, reducir los costos de servicio de carácter financiero y mejorar el flujo de caja.

Adaptando una aproximación basada en el ciclo de vida, AT&T CC desarrolló un sistema computarizado de apoyo de decisiones, con el fin de administrar el riesgo de crédito de cada cliente durante toda su relación con la empresa. Se desarrollaron modelos y sistemas para apoyar tres fases de cada relación: (1) tomar las decisiones iniciales de crédito, (2) administrar la línea de crédito y las subsiguientes decisiones de crédito, y (3) realizar el cobro de cuentas. En cada fase, sendos modelos para la predicción del riesgo y la toma de decisiones ayudan a determinar qué decisión es la más conveniente. Algunas ventajas de este sistema son: respuestas más rápidas al cliente, incrementos en el volumen de negocios de AT&T CC y mayor rentabilidad.

Para tomar las decisiones de crédito iniciales se utiliza información del perfil de crédito e informes crediticios que permiten pronosticar el futuro desempeño de un cliente en términos de pago. Se usa un modelo de optimización para determinar las fuentes de información de crédito procedente de distintas oficinas de crédito. Otro modelo de optimización determina las decisiones de aprobación y la asignación de líneas de crédito. En la toma de la decisión aprobatoria se consideran la exposición en dólares y la predicción de la calificación de crédito, y poder así determinar las decisiones de Aprobar, Rechazar o Remitir para Revisión. Con este procedimiento se automatiza actualmente cerca de 68% de las decisiones iniciales de crédito, permitiendo un incremento de $40 millones en el volumen anual de negocios, al tiempo que los costos de la toma de decisiones se reducen en $550,000 anuales. Otra división de AT&T CC utilizó el modelo para reducir sus costos en más de $600,000 al año, incluida una reducción de 40% en el costo de la obtención de informes de crédito.

La administración de la línea de crédito del cliente implica una evaluación continua de la solvencia del mismo y permite reclasificar su línea de crédito en "cubos" crediticios. Los clientes son ascendidos al nivel de crédito inmediato superior o reubicados en un nivel inferior cuando el modelo de calificación crediticia predice un nuevo umbral. El modelo de administración de la línea de crédito ha reportado ahorros anuales de $300,000 al año, mientras que, al mismo tiempo sirve de base para un incremento de $6 millones en el volumen de negocios.

La cobranza de cuentas de clientes morosos es administrada mediante una serie de modelos estadísticos que recomiendan de uno a cinco escenarios de procedimientos para las actividades de cobranza. Un modelo de administración de cartera selecciona automáticamente a los clientes morosos y asienta sus nombres en una lista de espera, para incluirlos en la relación de trabajo de alguno de los representantes de servicio. El resultado ha sido una ganancia en productividad de 15%, la cual se traduce en una reducción sostenida de las deudas morosas por $16 millones y un aumento correspondiente de $1 millón mensual en el flujo de caja. Con dicho modelo, la provisión de AT&T CC para compensar cuentas dudosas disminuyó 15%, al tiempo que su volumen de negocios creció 23%.

En general, diversas aplicaciones de los modelos de análisis de riesgo, de optimización, estadísticos y de administración de cartera han reducido los costos de las decisiones de la gerencia de crédito en $3.5 millones anuales, permitiendo al mismo tiempo que el volumen de sus negocios aumente en $86 millones al año y reduzcan las pérdidas por deudas incobrables en $1.1 millones anuales. Según AT&T CC, esas inversiones en "automatización y optimización de decisiones se consideran ahora como una fuente apreciable de ventajas competitivas y mejoramiento de la rentabilidad". (Véase Curnow *et al*.)

1.1 INTRODUCCIÓN

El fundamento del éxito de AT&T es una serie de modelos de administración para apoyar la toma de decisiones de crédito, y precisamente los modelos para la administración son el tema de nuestro estudio. Este libro está dedicado a la construcción de modelos para la toma de decisiones administrativas usando hojas de cálculo electrónicas: qué son, cómo se construyen, cómo se usan y qué pueden revelarnos.

Por mucho tiempo, los gerentes han tenido una actitud ambigua hacia la construcción de modelos cuantitativos para la toma de decisiones. Aunque reconocen las ventajas de los modelos cuantitativos, algunos administradores han opinado a menudo que el proceso mismo de la construcción de modelos es un acto de "magia negra" que sólo debe ser practicado por matemáticos, consultores muy bien pagados o especialistas en informática. Desgraciadamente, el hecho de delegar la construcción de modelos a los especialistas elimina de este proceso al gerente y, con frecuencia, da lugar a que los resultados se apliquen en forma errónea o no se apliquen. Esto, a su vez, hace que los gerentes sean aún más escépticos acerca del valor real de la construcción de modelos, como no sea para redactar apéndices de resultados obtenidos con modelos —que a menudo se añejan como el buen vino— en informes que nadie lee jamás. Así, dinero y esfuerzo se desperdician en ceremoniosas actividades de construcción de modelos que, a la postre, tienen poca o ninguna repercusión en el administrador o en la organización que los mandó construir, los cuales ni aprenden ni son influidos por el proceso de modelación.

Dos tecnologías recientes han revolucionado la construcción de modelos al hacer posible que los administradores construyan y analicen sus propios modelos. Esas dos tecnologías son las poderosas computadoras personales y los avanzados y refinados programas de hoja de cálculo electrónica accesibles para el usuario. Parafraseando al profesor Sam Savage, estas tecnologías han hecho que "la cortina analítica se derrumbe..." como impedimento para la aplicación directa de la construcción de modelos para la toma de decisiones por los gerentes de la empresa. En otras palabras, los conocimientos analíticos de matemáticas avanzadas, programación de computadoras, razonamiento algorítmico y otros aspectos de la formación técnica que antes eran indispensables, ya casi han desaparecido como prerrequisitos para el usuario. Esta utilización directa de modelos como **apoyo de decisiones** no sólo se traduce en mejores decisiones, sino además, imparte a los administradores conocimientos importantes que anteriormente se perdían. Este enfoque del aprendizaje a partir de la construcción de modelos permite que el administrador aborde el aspecto más importante de cualquier situación de toma de decisiones: determinar cuáles son las preguntas fundamentales que es necesario plantear, qué alternativas conviene investigar y dónde centrar la atención.

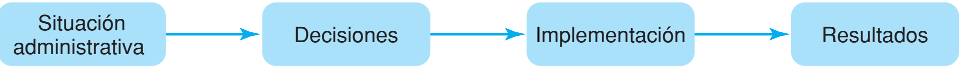
> **Gracias a que construyó modelos para ensayar las alternativas para el futuro diseño de su sistema, Federal Express solamente cometió equivocaciones sobre el papel. La construcción de modelos en computadora sí funciona: nos permite examinar muchas opciones diferentes y nos obliga a examinar el problema en su totalidad.**
>
> **Frederick W. Smith**
>
> **Presidente y director general de Federal Express Corporation**

1.2 EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

La figura 1.1 ilustra los pasos de la toma de decisiones administrativas. Cuando se presenta una situación en la cual intervienen alternativas conflictivas o antagónicas, el gerente la analiza; se

FIGURA 1.1

Enfoque administrativo de la toma de decisiones



toman decisiones para resolver los conflictos; las decisiones se ponen en práctica; y la organización asume las consecuencias en forma de resultados, tomando en cuenta que no todos son monetarios. En este libro enfocaremos la construcción de modelos con hojas de cálculo electrónicas como apoyo para la toma de decisiones; es decir, nos centraremos en las dos primeras etapas: el análisis de la situación y la toma de decisiones correspondiente.

La figura 1.2 define el proceso de modelación aplicado a las dos primeras etapas que usaremos en todo este libro. Observe que el diagrama está dividido en dos mitades, superior e inferior, separadas por una línea interrumpida. Debajo de dicha línea se encuentra el mundo real y caótico de todos los días, al cual se enfrentan los gerentes cuando están obligados a decidir cómo lidiar con el reto de una situación, como por ejemplo a quién se le asignan los recursos para llevar a cabo las tareas, la programación de actividades o el diseño de una estrategia de comercialización. El proceso comienza en el ángulo inferior izquierdo, con el reto de la situación administrativa.

Históricamente, los gerentes han dependido casi por completo de su propia intuición como el instrumento primario para tomar decisiones. Aunque la intuición es de gran valor, sobre todo en el caso de gerentes con experiencia, puede decirse que, por definición, está desprovista de un proceso analítico. Un administrador que basa la toma de decisiones solamente en la intuición no aprende, salvo por la retroalimentación que le proporcionan los resultados obtenidos, pero está demostrado que es una forma bastante cara e implacable.

El proceso de modelación, representado por el "mundo simbólico" en la mitad de la figura ubicada sobre la línea interrumpida, recomienda un curso de acción para complementar (no sustituir) el uso de la intuición en la toma de decisiones. Esta ruta indirecta implica abstraer los aspectos problemáticos de la situación administrativa en un modelo cuantitativo que represente lo más esencial de la situación.

Una vez que el modelo (cuantitativo) ha sido construido, se somete a un análisis para generar resultados o conclusiones que emanen exclusivamente de él, es decir, sin considerar las abstracciones que hayamos realizado con anterioridad. A continuación se realiza la interpretación de los resultados basados en el modelo, para relacionarlos de nuevo con la situación del mundo real, tomando en cuenta los factores que habíamos suprimido durante la fase previa de abstracción. Cuando a esto se agregan la intuición y la experiencia del gerente, el proceso de construcción del modelo conduce a mejores decisiones y aporta conocimientos que influyen en el proceso de aprendizaje.

Como ilustra la figura 1.3, el proceso mismo de construcción del modelo no es una aplicación del método científico que se pueda dejar totalmente en manos de los especialistas. El buen juicio administrativo ilumina todos los aspectos del proceso. Por eso, la participación íntima del gerente en cada una de las fases del proceso de construcción del modelo es indispensable para el éxito en el mundo real.

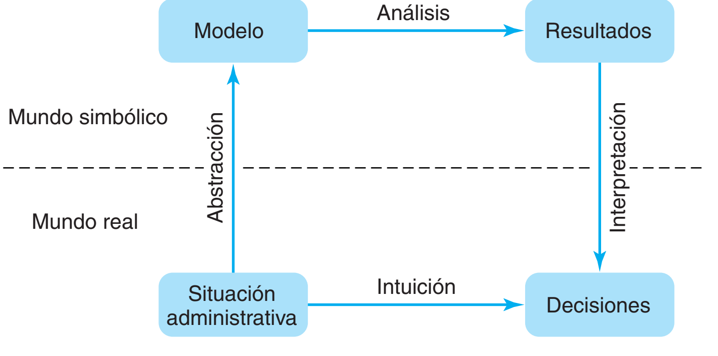


FIGURA 1.2

El proceso de construcción de un modelo

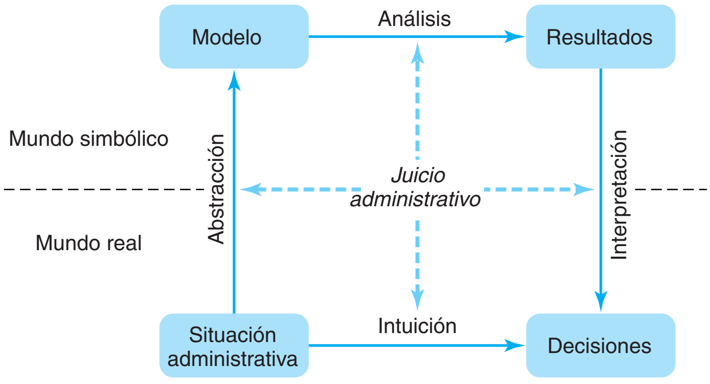


FIGURA 1.3
El papel del juicio en el proceso de construcción del modelo

Los administradores desempeñan un papel crucial durante la abstracción, la formulación del modelo, la interpretación y, más tarde, la ejecución de las decisiones. Por eso es esencial que usted comprenda

1. Qué tipos de situaciones administrativas se prestan a ser representadas con modelos,
2. Cuáles son las posibilidades de reunir o recuperar datos y analizar el modelo con miras a obtener recomendaciones o resultados (con una inversión razonable de tiempo y dinero), y
3. Qué puede hacer usted para extraer el mayor valor posible del modelo en cuanto a la interpretación del mismo, y la puesta en práctica de la decisión resultante.

LOS MODELOS EN LA EMPRESA

Los modelos suelen desempeñar diferentes papeles en distintos niveles de la empresa. En los niveles más altos, los modelos por lo común aportan información en forma de resultados y conocimientos, pero no necesariamente decisiones recomendables. Son útiles como instrumentos de planificación estratégica: ayudan a crear pronósticos, explorar alternativas, desarrollar planes para múltiples contingencias, acrecentar la flexibilidad y abreviar el tiempo de reacción. En niveles inferiores, los modelos se usan con más frecuencia para obtener decisiones recomendables. Por ejemplo, en muchas plantas las operaciones de la línea de montaje están totalmente automatizadas. En algunos casos, como en el ejemplo de AT&T, las decisiones se desarrollan mediante un modelo de la operación y se llevan a cabo de inmediato, en todo ello la gerencia sólo participa de modo excepcional. Sin embargo, lo más común es que la aportación de la automatización a la construcción de modelos consista en facilitar la recopilación de datos acerca de las operaciones. Después los administradores emplean esos datos para la actualización periódica de su modelo en la hoja de cálculo electrónica. Más tarde, el modelo revisado vuelve a ser analizado para extraer de él nuevas recomendaciones que sustenten la toma de decisiones, después de lo cual tiene lugar la reinterpretación e implementación de nuevas decisiones por parte de la gerencia.

Los modelos tienen distintas aplicaciones en los diferentes niveles de la empresa, por varias razones. A medida que se desciende en los niveles de una organización, las alternativas y los objetivos pueden volverse más claros. Es cada vez más fácil especificar cuantitativamente las interacciones, con frecuencia los datos precisos son más accesibles y el ambiente futuro implica menos incertidumbre. Además, la frecuencia de la toma de decisiones repetidas es alta, lo cual brinda la oportunidad de amortizar el costo del desarrollo del modelo y la recolección de datos entre muchas opciones para tomar una decisión. Por ejemplo, en el nivel más bajo de la jerarquía, las decisiones pueden referirse a cómo programar las operaciones de una máquina en particular. Sabemos qué productos serán fabricados en ella y los costos de los cambios necesarios para pasar de la fabricación de un producto a la de otro. La meta del modelo puede consistir en encontrar un programa de operaciones que produzca las cantidades necesarias en las fechas requeridas y minimice los costos por concepto de cambios y almacenaje.

Compare usted la claridad y el carácter explícito de ese problema con una decisión de la alta gerencia de una empresa que vale muchos miles de millones de dólares, y por otro lado tiene que elegir entre “invertir y crecer” o “producir para generar ganancias inmediatas”. Por supuesto que los modelos se pueden aplicar también a estos problemas vastos y confusos, pero los propios modelos están repletos de suposiciones cuestionables y de incertidumbre. En esos casos, determinar la validez del modelo, y entonces la concordancia con los objetivos puede ser una tarea tan difícil como encontrar la decisión apropiada.

MODELOS Y GERENTES

El número de formas en que los modelos se utilizan es tan abundante como el de las personas que los construyen. Se pueden usar para vender una idea o un diseño, para pedir las cantidades óptimas de medias nylon o para organizar mejor una gigantesca corporación multinacional. A pesar de esas diferencias, algunas generalidades son aplicables a todos los modelos creados como apoyo para la toma de decisiones. Todos estos modelos ofrecen un marco de referencia para el análisis lógico y congruente, y se utilizan por siete razones cuando menos:

1. Los modelos lo obligan a usted a definir explícitamente sus objetivos.
2. Los modelos lo obligan a identificar y registrar los tipos de decisiones que influyen en dichos objetivos.
3. Los modelos lo obligan a identificar y registrar las interacciones entre todas esas decisiones y sus respectivas ventajas y desventajas.
4. Los modelos lo obligan a pensar cuidadosamente en las variables que va a incluir, y a definirlas en términos que sean cuantificables.
5. Los modelos lo obligan a considerar qué datos son pertinentes para la cuantificación de dichas variables y a determinar las interacciones entre ellas.
6. Los modelos lo obligan a reconocer las restricciones (limitaciones) pertinentes en los valores que esas variables cuantificadas pueden adoptar.
7. Los modelos permiten que usted comunique sus ideas y conocimientos, lo cual facilita el trabajo de equipo.

De estas características se concluye que un modelo puede servir como una herramienta consistente para la evaluación y comunicación de diferentes políticas. Es decir, cada política o conjunto de decisiones es evaluada con el mismo objetivo, aplicando las mismas fórmulas para describir interacciones y restricciones. Además, los modelos se pueden ajustar y mejorar en forma explícita de acuerdo con la experiencia histórica, lo cual constituye una forma de aprendizaje adaptativo.

Una consideración final: los modelos construidos en hojas de cálculo electrónicas brindan la oportunidad de hacer un uso sistemático de poderosos métodos analíticos que nunca antes habían estado al alcance de los directores de empresas. Con esos recursos, ellos pueden manejar un gran número de variables e interacciones. Por sí sola, la mente es capaz de almacenar y comunicar sólo una fracción de esa información.

> Los modelos nos permiten aprovechar la potencia analítica de las hojas de cálculo, la cual va de la mano con la velocidad de las computadoras para el almacenamiento de datos y la realización de operaciones de cómputo.

1.3 UNA PALABRA SOBRE FILOSOFÍA

La "filosofía" representa nuestro esfuerzo por salvar la brecha entre la experiencia obtenida con modelos en el aula y las experiencias de usted, como gerente o administrador, en el mundo real. En el aula todos los problemas están formulados con claridad (por lo menos esa es nuestra intención), todos los datos se aprecian con nitidez y la solución puede ser un simple número que aparece al final del libro. Por supuesto, absolutamente nada de esto es válido "debajo de la línea" de la figura 1.2, es decir, en el mundo real. Por eso vale la pena esperar un momento y comentar en forma un poco más amplia cuál es el papel que corresponde a los modelos en el mundo real.

REALISMO

Comenzaremos con una idea ya conocida: ningún modelo logra captar toda la realidad. Cada modelo es una abstracción, lo cual significa que sólo incluye algunas de las posibles interacciones y representa en forma aproximada las relaciones entre ellas. Esto nos aporta una explicación muy simple y pragmática de por qué y cuándo se utilizan modelos.

> Un modelo es valioso si usted toma mejores decisiones cuando lo usa que cuando no lo usa.

Este enfoque es muy similar al que ha adoptado la ciencia o la ingeniería. Es posible que los modelos no describan con exactitud la fuerza ascensional del ala de un avión, pero con ellos diseñamos mejores aviones que sin ellos. El mismo concepto se aplica en el caso de los modelos construidos para la toma de decisiones en administración.

INTUICIÓN

Algunos gerentes siguen pensando que los modelos cuantitativos y la intuición administrativa se oponen entre sí: "o somos creativos para lidiar con la situación o tendremos que usar la computadora". Nada más alejado de la verdad. El uso eficaz (y creativo) de los modelos depende en forma decisiva del buen juicio administrativo y de la intuición.

La intuición desempeña un papel importante en el reconocimiento del problema y la formulación del modelo. Tiene usted que "ver" las posibilidades de utilizar un modelo cuantitativo antes que el proceso se ponga en marcha; es decir, para que se sienta usted dispuesto a invertir en el proceso de construcción de un modelo, deberá tener la sensación intuitiva de que dicho modelo le permitirá captar la esencia de la situación y producirá un resultado útil.

La intuición también es decisiva durante la interpretación y la implementación. Aun cuando el análisis de muchos de los modelos presentados en este libro produce decisiones "óptimas", es importante entender que tales decisiones sólo son la solución óptima para la abstracción simbólica que aparece "encima de la línea" en la figura 1.2. Sin embargo, puede ser o no una buena respuesta para resolver la situación correspondiente en el mundo real.

El término *optimalidad* es un concepto que se relaciona más con los modelos que con el mundo real. Si bien los modelos pueden optimizarse, eso rara vez o nunca es posible en las situaciones del mundo real.

Sólo en pocas ocasiones tiene sentido hablar de "soluciones óptimas" para las situaciones de la administración de empresas (y menos aún las del gobierno) en la vida real. Por esa razón es fundamental que usted, como gerente, se asegure de que las decisiones sugeridas por un modelo tengan sentido y satisfagan su propia intuición. Si las recomendaciones no resultan atractivas para su intuición administrativa, será mejor que averigüe si el modelo no está equivocado. De hecho, un aspecto crucial de su papel como gerente consiste en evaluar el propio modelo y determinar cuánto peso se debe conceder a sus recomendaciones. Tal vez sea necesario volver a considerar la situación o incluso la formulación del modelo. El hecho es que el uso de modelos no implica que el gerente pueda prescindir de su intuición. En realidad, uno de los peores errores que puede cometer un gerente es permitir ciegamente que un modelo lo suplante en la toma de decisiones sólo porque "la hoja de cálculo lo dijo así". El ambiente puede cambiar y un modelo que producía resultados muy buenos puede empezar a dar malos consejos. Usted siempre deberá estar alerta ante la posibilidad de que algo haya cambiado y que las antiguas respuestas ya no sean válidas. Hay abundante evidencia de que el proceso de construcción y uso de modelos funciona mejor cuando el ambiente que rodea una situación de negocios cambia tanto que las políticas o reglas empíricas habituales se vuelven inadecuadas.

Por supuesto, no hay garantía de que el uso de un " buen" modelo produzca siempre buenos resultados, pero aunque no posee una clarividencia perfecta, éste es el enfoque más racional que podemos adoptar. Más aún, igual que el proceso mismo de construcción de modelos, las situaciones administrativas no son estrictamente secuenciales, sino circulares. Esto significa que se presentan en forma reiterada y es necesario revisarlas y trabajar una y otra vez en ellas. Éste es uno de los principales factores que nos motivan a estudiar los modelos cuantitativos. Las posibilidades de que usted sea capaz de prever si un modelo dará o no resultado en el mundo real aumentarán drásticamente si comprende los conceptos contenidos en dicho modelo.

Para comprender mejor lo que hemos visto hasta aquí acerca del proceso de construcción de modelos, supongamos que usted es el gerente que sostiene el siguiente diálogo con un constructor de modelos.

Gerente A ver si comprendí bien. En esencia, usted dice que el esfuerzo dedicado a la construcción de modelos se ha desperdiciado en muchos casos porque los gerentes no participaron activamente en el proceso, por lo menos en la determinación de su impacto en el mundo real de la toma de decisiones definitivas y en el criterio de los propios gerentes.

Así es.

Gerente Y que el desarrollo de las potentes computadoras personales y las hojas de cálculo electrónicas hacen posible que ahora los gerentes, como yo, elaboremos nuestros propios modelos con rapidez y facilidad sin tener que recurrir a un especialista técnico.

Sí, así es en muchos casos.

Gerente Y que la ruta indirecta, es decir, la construcción de un modelo, su análisis e interpretación, debe servir para complementar mi intuición, mas no para sustituirla.

Efectivamente, sobre todo cuando algunos aspectos de la situación pueden cuantificarse en un modelo que complemente su estrategia intuitiva para abordar los aspectos no cuantificables de la situación.

Gerente Comprendo. Entonces, en conclusión, la adopción de este proceso de construcción de modelos me dará las respuestas que necesito para resolver mi problema.

Sorprendentemente..., no.

Gerente ¿Qué? ¿Trata de confundirme con esa respuesta? Usted y yo sabemos que el trabajo realizado con computadoras nunca es tan rápido ni tan fácil como se dice, y esto incluye las hojas de cálculo electrónicas. ¿Y ahora me dice que el uso de modelos en computadoras y hojas de cálculo *no* me dará la respuesta para mi problema de administración?

En cierto sentido sí, eso es lo que he dicho.

Gerente Muy bien, lo felicito. Acaba de convencerme de no usar modelos, al decir que son irrelevantes para hallar la solución a mi problema.

¡Cuidado! Acaba usted de tocar una de las principales ideas erróneas acerca del uso de modelos como apoyo para las decisiones. Observe otra vez las dos primeras figuras . No es por casualidad que allí no aparezcan la palabra problema *ni la palabra* respuesta*. Nuestra meta final es mejorar en forma general la toma de decisiones en las situaciones administrativas, y no sólo dar "respuestas".*

Gerente Escuche, no me interesa entrar en un absurdo debate académico sobre diferencias semánticas.

No es eso lo que digo. Por supuesto, en este libro dedicaremos mucha atención a proporcionar "una" respuesta, cuando no "la" respuesta para un problema determinado. Lo que intento decir es que el hecho mismo de que exprese su situación particular en el mundo real en términos del planteamiento de un problema hace que usted empiece a subir por la escalera de la abstracción y se interne en el proceso de la construcción de modelos. Es decir, los problemas existen como tales por encima de la línea interrumpida que aparece en la figura y, por tanto, también existen soluciones para esos problemas, pero solamente por encima de dicha línea, es decir, fuera del mundo real donde usted vive. Sin embargo, las "respuestas" para su "problema" abstracto, rara vez —o nunca— son, por sí mismas, la solución para la situación administrativa real. Las respuestas deben ser cuidadosamente interpretadas en el contexto del mundo real en el que usted vive, antes de tomar la decisión final. En consecuencia, la decisión que aplique al final puede ser muy distinta de la respuesta obtenida mediante el análisis del modelo.

Gerente Bien, entiendo lo que usted quiere decir. En otras palabras, debo comprender a qué problema abstracto específico se refieren las respuestas del modelo y cómo fueron obtenidas dichas respuestas, antes de poder interpretarlas como apoyo para tomar decisiones que me ayudarán a resolver mi situación —más caótica— en el mundo real.

Precisamente. Piense en las repuestas no como resultados en sí mismas, sino como elementos que, combinados con las declaraciones empleadas para plantear el problema, se convierten en auxiliares importantes para que usted actualice su intuición en torno a la situación administrativa que le indujo a utilizar este método. Esa "actualización de la intuición" tiene ventajas que trascienden los beneficios inmediatos de tomar mejores decisiones en la situación actual, en virtud de que la esencia del aprendizaje consiste en reforzar nuestra propia intuición. Más aún, los beneficios del aprendizaje son acumulativos a través de situaciones sucesivas y culminan con la sabiduría que todos anhelamos. Así, el compromiso de usted con la construcción de modelos debe surgir de su deseo de entender la situación en un nivel más profundo, no sólo para el beneficio inmediato de tomar mejores decisiones, sino también como un paso importante en el refinamiento de su intuición administrativa. La intuición refinada (o la sabiduría, si usted lo prefiere) aplicable a situaciones administrativas es el sello distintivo de un gerente exitoso. Nunca olvide el credo del constructor de modelos: "la meta del modelo es el cabal conocimiento, el discernimiento; no las simples respuestas".

Gerente Me da la impresión de que usted acaba de construir un "modelo verbal" para ayudarme a "vislumbrar" el papel que debo desempeñar al construir modelos a fin de "refinar mi intuición" sobre este proceso.

¡Descubrió mi juego!

Gerente Anteriormente dijo usted que el proceso mismo de la construcción de modelos no es científico. Yo creí que el propósito de los modelos cuantitativos era ayudarnos a proceder en una forma más científica.

Todo lo contrario. Dije que el proceso de construcción de modelos no es una aplicación del método científico. El propósito del método científico clásico es suprimir el juicio humano como una influencia que contamina o impone prejuicios en el conocimiento y la comprensión. En consecuencia, la verificación de teorías o resultados mediante la experimentación repetida y controlada es el meollo de la adquisición de conocimientos en la ciencia. Por desgracia, las situaciones administrativas casi nunca permiten que nos demos el lujo de reproducirlas en experimentos controlados, pues existen restricciones de costo o tiempo. Por eso tenemos que usar el criterio o buen juicio administrativo como guía o control imperfecto en todos los pasos del proceso de construcción de modelos. Dentro de éste, la fase correspondiente al análisis del modelo tendrá características científicas por cuanto se recurrirá a la lógica y al cómputo para obtener deducciones racionales, pero aparte de eso, la influencia del juicio personal surge en todas partes.

Gerente En otras palabras, ni los modelos ni el análisis, por sí solos, pueden protegerme de las malas consecuencias de "obtener como producto basura, ya que sólo introduje basura" en la toma de decisiones.

En efecto. Y usted, el gerente, debe participar plenamente en el proceso, porque es el único capaz de juzgar el posible contenido de "basura" en la abstracción, así como el modelo resultante, el análisis del mismo, la relevancia de los resultados y también su interpretación. Después de todo, usted es quien será responsable de la decisión final. ¿No es cierto?

Gerente ¡De eso puede estar seguro! Bien, esto ha sido muy útil para aclarar el papel que debo desempeñar y los beneficios que puedo esperar del uso de modelos.

En realidad hay otro beneficio sumamente importante del trabajo con modelos que no hemos mencionado: la utilidad de los modelos como elemento auxiliar de la comunicación. Las decisiones importantes rara vez se toman en forma aislada, pues requieren la colaboración y anuencia de otras personas, sobre todo de las encargadas de implementar la decisión final. Cuando el proceso de construcción del modelo se realiza correctamente, el modelo resultante y la justificación que aporta para la toma de decisiones pueden ser poderosas herramientas para fomentar el trabajo de equipo, explicar y comunicar ideas y conclusiones a otros y recibir sus comentarios y cooperación.

Gerente ¡Está bien, está bien, ya me convenció! ¿Podemos continuar ahora con la elaboración de modelos en hojas de cálculo? Tengo decisiones que tomar...

Todavía no. Primero tenemos que considerar otras cosas, por ejemplo algunos de los tipos de modelos cuantitativos disponibles, los pasos conducentes a la construcción de un modelo, y el importante papel que desempeñan los datos en la construcción de modelos en hojas de cálculo electrónicas.

1.4 TIPOS DE MODELOS

Hay tres tipos de modelos. Los ingenieros construyen modelos de aviones, y los urbanistas modelos de ciudades. En ambos casos se trata de **modelos físicos.** El segundo tipo de modelo lo empleamos tan a menudo que con frecuencia no lo reconocemos: el **modelo análogo.** Estos modelos representan un conjunto de relaciones a través de un medio diferente, pero análogo. El mapa de carreteras es un modelo análogo del terreno correspondiente, el velocímetro de un vehículo representa la velocidad mediante el desplazamiento análogo de una aguja sobre una escala graduada, y un diagrama de rebanadas de pastel representa la magnitud del costo de varios componentes con áreas en forma de cuña.

El más abstracto es el **modelo simbólico,** en el cual todos los conceptos están representados por variables cuantitativamente definidas y todas las relaciones tienen una representación matemática, en lugar de física o por analogía. Por ejemplo, los físicos construyen modelos cuanti-

TABLA 1.1 Tipos de modelos

TIPO DE MODELO	CARACTERÍSTICAS	EJEMPLOS
Modelo físico	Tangible Comprensión: fácil Duplicación y posibilidad de compartirlo: difícil Modificación y manipulación: difícil Alcance de utilización: la más baja	Modelo de un aeroplano, modelo de una casa, modelo de una ciudad
Modelo análogo	Intangible Comprensión: más difícil Duplicación y posibilidad de compartirlo: más fácil Modificación y manipulación: más fácil Alcance de su utilización: más amplio	Mapa de carreteras, velocímetro, gráfica de rebanadas de pastel
Modelo simbólico	Intangible Comprensión: la más difícil Duplicación y posibilidad de compartirlo: las más fáciles Modificación y manipulación: las más fáciles Alcance de su utilización: el más amplio	Modelo de simulación, modelo algebraico, modelo de hoja de cálculo electrónica

tativos del universo y los economistas crean modelos cuantitativos de la economía. Por el hecho de que se utilizan variables cuantitativamente definidas e interrelacionadas por medio de ecuaciones, es frecuente que los modelos simbólicos sean conocidos como modelos matemáticos, modelos cuantitativos o, en nuestro caso, modelos de hoja de cálculo electrónica.

Los gerentes trabajan con los tres tipos de modelos, más comúnmente con los modelos análogos en forma de cuadros y gráficas, pero también con modelos simbólicos en forma de salidas de hojas de cálculo electrónicas e informes MIS (Management Information System, Sistema de Información Administrativa). La tabla 1.1 resume las características de los tres tipos de modelos.

A pesar de su diversidad, todos estos modelos tienen un aspecto en común:

> Un modelo es una abstracción cuidadosamente seleccionada de la realidad.

Nos concentraremos en la elaboración de modelos simbólicos (sobre todo como se representan en hojas de cálculo) y los analizaremos para obtener resultados en tabuladores (modelos simbólicos) y gráficas (modelos análogos).

MODELOS SIMBÓLICOS (CUANTITATIVOS)

Como ya se dijo, un modelo simbólico emplea las matemáticas para representar las relaciones entre los datos de interés. Un modelo simbólico requiere que sus datos sean cuantificables, es decir, que resulte posible expresarlos en forma numérica. Considere los siguientes ejemplos comunes. En un modelo para evaluar las alternativas entre comprar una casa y alquilar un apartamento se considera: el pago inicial requerido, las tasas hipotecarias, el flujo de efectivo, la plusvalía y depreciación; en suma, datos numéricos. En un modelo para ayudarle a usted a decidir si le conviene realizar los estudios necesarios para obtener una maestría se tendría que considerar: la cantidad de tiempo necesaria, la colegiatura y otros gastos, el potencial de salario, y así por el estilo; es decir, datos numéricos. En síntesis, los datos numéricos son la médula de los modelos simbólicos.

Examinemos más de cerca un ejemplo muy sencillo de modelo simbólico. Si se encuentra usted actualmente en Chicago, Illinois, y desea estar en Cleveland, Ohio, a la hora de la cena, tal vez le interese estimar el tiempo que tendrá que viajar en su automóvil desde Chicago hasta Cleveland. Para eso podría consultar la distancia en kilómetros en un mapa o por Internet, la cual dividiría después entre su velocidad promedio típica. En este caso, su modelo sería

$$T = \frac{D}{S} \qquad \text{donde } T = \text{ tiempo, } D = \text{ distancia, y } S = \text{ velocidad.}$$

Sin duda este modelo es útil. No obstante, advierta que es una simplificación de la realidad, porque se han pasado por alto muchos factores que podrían influir en la duración de su viaje. No se ha molestado usted en incluir retrasos por posibles reparaciones en el camino, las condiciones del tiempo, escalas para abastecerse de gasolina o para ir al sanitario, y así sucesivamente. Sin embargo, si planea salir a las 9 a.m. y $T = 6$ horas, entonces el modelo es bastante bueno para sus propósitos. Es decir, podrá sentirse muy seguro de que llegará a Cleveland a tiempo para la cena.

Sin embargo, supongamos que usted no podrá salir sino hasta el mediodía y tiene una reservación en un restaurante de lujo para reunirse con una persona muy importante a las 6:30 p.m. En ese caso podría considerar que este modelo es demasiado simple y sentiría más confianza si lo refinara un poco para incluir otros detalles que lo acercaran más a la realidad. Por ejemplo, podría añadir una expresión que representara sus escalas a lo largo del camino. Entonces el modelo sería

$$T = \frac{D}{S} + (R*N)$$

donde R es el tiempo prometido que permanece en cada escala de su viaje y N es el número de veces que piensa detenerse.

Usted puede seguir mejorando su modelo si le incorpora más factores. Algunos de esos factores tendrían que ser quizá estimaciones o aproximaciones. Los dos puntos que debe tener presentes son:

1. Un modelo siempre es una simplificación de la realidad.
2. Debe incorporar al modelo suficientes detalles para que
   - El resultado satisfaga sus necesidades,
   - Sea consistente con los datos que tiene usted a su alcance, y
   - Pueda ser analizado en el tiempo con el que usted cuenta para ese propósito.

MODELOS DE DECISIÓN

En este libro hacemos énfasis en los modelos de decisión: modelos simbólicos en los cuales algunas de las variables representan decisiones que deben (o al menos podrían) tomarse. Es obvio que usted no puede cambiar la distancia entre Chicago y Cleveland. Por otra parte, sí puede elegir su velocidad, el número de veces que se detendrá y el tiempo que permanecerá en cada escala. Por tanto, estas últimas son variables de decisión. (Deben existir algunos límites para esas variables: es obvio que usted no puede conducir a 500 kph, que el depósito de su automóvil sólo puede contener cierta cantidad de gasolina, que se requiere cierto tiempo para llenar el depósito, y así sucesivamente. Discutiremos estos límites en el capítulo 2, pues son fundamentales para la construcción de modelos realistas.)

Objetivos Las decisiones suelen tomarse para alcanzar un objetivo en particular. Así, además de las variables de decisión, los modelos de decisión incluyen una medida explícita del desempeño que permite calibrar el grado en que se ha alcanzado ese objetivo. Una de las operaciones cruciales en la construcción de modelos consiste en especificar cuál será la influencia de las variables de decisión sobre la medida de desempeño. Considere los siguientes ejemplos:

1. *Modelo para la asignación de la fuerza de ventas.* La variable de decisión podría ser: cuántos vendedores se asignarán a cada territorio. Una medida típica del desempeño sería el ingreso por concepto de ventas, y el objetivo podría ser maximizar dicho ingreso.
2. *Modelo para la programación de actividades en el taller.* Las variables de decisión podrían ser: cuántas horas programar determinadas máquinas para fabricar determinadas partes, y en qué secuencia. Los objetivos podrían consistir en minimizar los costos, el tiempo total de terminación o los retrasos en las fechas de entrega.
3. *Modelo para la administración de caja.* Las variables de decisión podrían ser: las cantidades de fondos que deberán mantenerse en cada una de las categorías (efectivo, títulos de la tesorería, bonos, acciones) cada mes. Un objetivo común podría consistir en minimizar el monto de los intereses perdidos por el hecho de mantener activos líquidos, es decir, dinero en efectivo o su equivalente.

En resumen:

1. Los modelos de decisión describen en forma selectiva la situación administrativa.
2. Los modelos de decisión designan las variables de decisión.
3. Los modelos de decisión designan medida(s) de desempeño que refleja(n) el (los) objetivo(s).

1.5 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Sea sencillo o complejo, un modelo tiene que ser construido por personas. Desgraciadamente, no existen "sistemas expertos" automáticos para crear modelos, salvo en aplicaciones estrechas, muy especializadas. La revolución de la computadora y el desarrollo de programas podrán conducir algún día a paquetes para la construcción automática de modelos hechos por los directores. Sin embargo, en la actualidad, la construcción de modelos requiere una buena dosis de arte e imaginación, además de una pizca de conocimientos técnicos.

En un ambiente de negocios, el desarrollo de modelos cuantitativos requiere que se especifiquen las interacciones de muchas variables. Para lograr esa cuantificación, el problema debe expresarse en términos matemáticos. En los siguientes capítulos veremos muchos ejemplos de construcción de modelos. No se deje engañar por los ejemplos específicos del texto, porque en el mundo real no existe de ordinario una sola "forma correcta" de formular un modelo. Los distintos modelos pueden ofrecer perspectivas diferentes de una misma situación, a semejanza de los cuadros de Picasso y Van Gogh que nos hacen ver en formas muy diferentes una misma escena. En la medida en que la construcción de modelos es un arte, sus fundamentos pueden enseñarse igual que los del arte. Como guía general, usted puede dividir en tres pasos el proceso de la construcción de un modelo:

1. Estudie el ambiente de la situación administrativa.
2. Formule una representación selectiva de la situación.
3. Construya y analice un modelo simbólico (cuantitativo).

ESTUDIO DEL AMBIENTE

Los recién llegados al mundo de la construcción de modelos suelen restar importancia al primero de estos pasos, el estudio del ambiente administrativo. Con frecuencia, el problema planteado no es una abstracción apropiada de la situación real. Muchas veces el problema planteado no es más que la descripción de un síntoma. Diversos factores, como conflictos en la organización, diferencias entre las metas personales y las de la empresa, y la complejidad general de la situación, pueden ser obstáculos que afectan la comprensión clara de la situación. Muchas veces se supone que los datos son conocidos, pero en realidad no es así. La experiencia es el ingrediente esencial para el éxito; tanto la experiencia en la construcción de modelos como la experiencia de haber trabajado en el ambiente que se pretende estudiar.

FORMULACIÓN

El segundo paso, la formulación del modelo, incluye un análisis conceptual básico en el cual es necesario hacer suposiciones y simplificaciones. La formulación requiere que el constructor del modelo seleccione o aísle del ambiente total aquellos aspectos de la realidad que son pertinentes para la situación en cuestión. Como quiera que sea, las situaciones administrativas que nos ocupan implican decisiones y objetivos, los cuales deben ser identificados y definidos de modo explícito. Puede haber varias formas de definir las variables de decisión, y tal vez al principio no se encuentre la definición más apropiada. También los objetivos pueden resultar poco claros. Hasta los gerentes más competentes pueden no saber con precisión qué resultados desean lograr. Otra cuestión igualmente problemática es que puede haber demasiados objetivos por satisfacer, lo cual puede imponer la necesidad de escoger sólo uno de ellos. (Veremos en forma muy clara que, comúnmente, no es posible optimizar dos objetivos diferentes al mismo tiempo. Así, en términos generales, es absurdo tratar de obtener "el mayor rendimiento con la menor inversión" o "el mayor bien para el mayor número de personas".)

La figura 1.4 presenta el primer paso (que a menudo es el más crucial) en la formulación de un modelo de decisión: la identificación de sus principales ingredientes conceptuales. En este primer paso tenemos que aplazar la construcción de los detalles de trabajo del modelo. En lugar de eso, nos concentramos en identificar (1) las **entradas** del modelo, es decir, los elementos sobre los cuales trabajará éste, y (2) las **salidas** del modelo, o sea, los resultados que deberán ser producidos por el mismo. Por eso en esta etapa se conoce al modelo como la "caja negra", pues no sabemos (todavía) qué relaciones lógicas colocaremos dentro de ella.

Una vez que hemos identificado las entradas y salidas del modelo, debemos refinarlas en dos subdivisiones. Las entradas, conocidas como **variables exógenas,** están divididas en: (1)

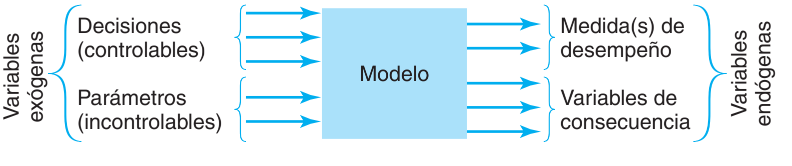


FIGURA 1.4
Vista de la "caja negra" de un modelo

decisiones, variables que usted controla como gerente, es decir, las variables de decisión; y (2) **parámetros,** variables que están bajo el control de otras personas o de la "Madre Naturaleza".[1] Algunos ejemplos de variables de decisión serían el precio al cual venderá usted su producto, la ubicación de una instalación propuesta, o incluso la decisión de vender o no una subsidiaria. Algunos ejemplos de parámetros son los precios que cobran los competidores por un producto similar, una restricción física de la capacidad de un almacén, el costo unitario de las materias primas o las lluvias del mes entrante. Tal vez no sea posible conocer con anticipación el valor de muchas entradas incontrolables. Si esas entradas se consideran como parámetros, entonces es posible construir el modelo como si todas ellas fueran conocidas. El valor numérico de dichas cantidades se puede especificar después de haber analizado los datos para calcularlo, o simplemente se pueden asignar valores supuestos durante el análisis del modelo.

Las salidas, llamadas **variables endógenas,** se dividen en (1) **medidas de desempeño,** variables que permiten medir el grado en el cual se han alcanzado las metas, y (2) **variables de consecuencia,** las cuales muestran otras consecuencias que ayudan a entender e interpretar los resultados del modelo. Las medidas de desempeño son especialmente importantes porque representan los criterios empleados para determinar hasta qué punto se están alcanzando los objetivos finales. Por esta razón, a las medidas de desempeño se les llama a menudo **funciones objetivo.** Algunos ejemplos son: los ingresos, la participación en el mercado, el costo total, la moral del trabajador, la satisfacción del cliente y el rendimiento sobre la inversión. Entre los ejemplos de variables de consecuencia podemos citar: la subdivisión de los ingresos, el número de artículos embarcados, y otras cantidades que "es deseable conocer".

A pesar de su sencillez, el marco de los ingredientes conceptuales de la caja negra nos obliga a considerar, desde el principio del proceso de construcción del modelo, qué debemos incluir, qué es conveniente excluir del mismo y cómo clasificar los factores pertinentes. A continuación presentamos algunas preguntas que ilustran la forma en que las sencillas ideas de la figura 1.4 inducen a la reflexión:

- Para mi compañía, dentro del sector privado, ¿las ganancias son una variable de decisión o una medida de desempeño?
- ¿Cuáles son exactamente los conjuntos de variables de decisión pertinentes, a diferencia de las que tienen importancia secundaria o terciaria? Por ejemplo, ¿el precio de mi producto es la única decisión significativa que debo considerar, suponiendo que mi presupuesto de promoción, u otro factor, sea determinado (tal vez por otra persona) en una suma específica? ¿O tanto el precio del producto como la magnitud del presupuesto de promoción deben ser considerados como decisiones que yo deberé tomar en forma simultánea?
- Como gerente, ¿controlo verdaderamente el precio de mi producto?, en cuyo caso, ¿dicho precio es una variable de decisión? ¿O el precio de mi producto está determinado por las fuerzas competitivas del mercado?, en cuyo caso, ¿es el precio un parámetro?
- ¿La cantidad de producto que habrá de venderse es una variable de decisión y, por tanto, una entrada controlable del modelo? ¿O la cantidad por vender del producto es una salida del modelo (variable de consecuencia), una vez que se ha determinado su precio como una entrada?
- ¿La moral del trabajador es una medida de desempeño y, por ende, algo en lo que yo puedo influir en forma administrativa mediante decisiones sobre recursos humanos? ¿O es un parámetro que debo aceptar como algo dado? En cualquier caso, ¿cómo puedo medir la moral? Si la moral es un concepto demasiado escurridizo para definirlo con precisión como una variable, ¿debo excluirla entonces del modelo y considerarla después como parte de la fase de interpretación del mismo? ¿O deberé usar, por ejemplo, el ausentismo de los trabajadores como una medida subordinada o representativa de la moral? En ese caso, ¿qué factores podrían afectar al ausentismo?, y ¿qué subconjuntos de éstos son mis variables de decisión?
- Si la participación en el mercado se considera como una medida de desempeño, ¿cuál es exactamente la definición del mercado dentro del cual esa participación se verá influida por mis decisiones? ¿Se trata de una participación en el mercado regional, nacional o internacional? ¿O en los tres? ¿Me refiero a la participación en el mercado este año, el año próximo o dentro de cinco años? ¿Debo medir la participación en el mercado en términos de unidades vendidas, o de ingresos?

[1] Aquí usamos el término *parámetro* en su acepción administrativa más amplia, es decir: "cualquier factor exógeno, como el precio de mercado o la tasa tributaria, que ayuda a definir un modelo y también determina su comportamiento". Algunos constructores de modelos prefieren emplear los términos *variable exógena no controlada* o *variable aleatoria*, en lugar de *parámetro*. Esto les permite proponer una definición más restrictiva de *parámetro*, para caracterizar la incertidumbre fundamental de una variable exógena no controlada.

- ¿Debo incluir las ventas de mi competidor como parámetros de entrada en el modelo? Pero si las ventas del competidor son entradas exógenas, eso significa que no puedo influir en ellas y debo aceptarlas como un hecho. Sin embargo, no hay duda de que puedo influir en el volumen de ventas de mis competidores, mediante agresivos descuentos de precio o con más publicidad, dos factores que podrían ser mis variables de decisión. En ese caso, la participación del competidor en el mercado sería una salida endógena (variable de consecuencia) en mi modelo, en lugar de una entrada exógena. Pero si es una salida, entonces, ¿la participación del competidor en el mercado debe considerarse como una medida de desempeño que deberá minimizarse?
- En mi modelo, ¿tengo que incluir mis propias medidas de desempeño, escala de tiempo y visión del mundo, o las que prefiera mi jefe?
- ¿El modelo debe estar enfocado en las decisiones de operación cotidianas, en las decisiones estratégicas a largo plazo, o en ambas cosas?
- ¿Qué debo incluir en términos de mediciones de desempeño o parámetros procedentes de entidades externas interesadas, como los órganos de regulación del gobierno, los grupos de consumidores y los accionistas?

Las técnicas que desarrollaremos para construir modelos son aplicables independientemente de cómo se definan las entradas y salidas del modelo. Sin embargo, las preguntas anteriores ilustran la importancia de usar el juicio administrativo para definir con claridad los elementos de la caja negra.

Un enfoque sugerido para la etapa de la formulación consiste en definir primero el objetivo y su(s) medida(s) de desempeño, es decir, las salidas críticas del modelo. Después se considerará qué entradas del modelo (variables de decisión y parámetros) están relacionadas con el logro del objetivo, ya que influyen en la(s) medida(s) de desempeño. A partir de esta base, se desprende en forma más natural el paso crítico de definir las variables de decisión y los parámetros que influyen en el logro de la meta. Finalmente, este razonamiento regresivo produce la formulación de la caja negra del modelo. No obstante, con frecuencia es más fácil trabajar en forma regresiva, porque para los gerentes es natural pensar en las situaciones en términos de objetivos y medidas de desempeño.

CONSTRUCCIÓN SIMBÓLICA

Una vez que se ha llevado a cabo la formulación (la cual puede ser un proceso verbal o escrito), es necesario construir un modelo simbólico.

La experiencia ha demostrado que los gerentes generales o directores fallan en la construcción de modelos en el momento en que se presenta la necesidad de desarrollar las ecuaciones matemáticas que relacionarán entre sí las variables contenidas en la caja negra. De hecho, este paso requiere cuidado porque, junto con los datos, las ecuaciones son el “meollo” de todo el proceso de construcción del modelo. Este tema es tan importante que le dedicaremos mucha atención a lo largo del libro. En efecto, el tema central del texto es que muchos modelos prácticos pueden ser construidos y analizados por un solo gerente, y con las técnicas modernas de las hojas de cálculo electrónicas. Aun en situaciones más complejas, que requieren la intervención de un equipo interdisciplinario, los modelos preliminares pueden ser iniciados por un gerente no especializado en el tema.

Una de las razones que nos inducen a pensar así es que la mayoría de las ecuaciones contenidas en un modelo simbólico son simples relaciones de contabilidad (Ganancia = Ingresos − Costo total) o definiciones físicas (Número de meses = 12* Número de años) y, por tanto, cualquier gerente puede manejarlas con facilidad. Las relaciones restantes del modelo son más difíciles de desarrollar. Sin embargo, la mayoría de los modelos administrativos tienen sólo unas cuantas ecuaciones complicadas. En esos casos, se requiere algo de práctica para desarrollar los conceptos matemáticos correctos que permitan relacionar dos o más variables como parte de la lógica del modelo. Una técnica útil consiste en usar la habilidad personal para dibujar una gráfica que ilustre la(s) relación(es) deseada(s). Es decir, no comienza con la ecuación matemática final, sino con una gráfica de la misma, y más tarde usted mismo (o un colega con talento) deduce una ecuación aceptable a partir de esa gráfica.[2] La técnica para lograrlo funciona también en el análisis de datos primarios, el cual puede ser necesario para estimar los valores de los parámetros. Llamamos a esta técnica “construcción de modelos a partir de datos”, un tema bastante importante como para que lo desarrollemos por separado en la siguiente sección.

[2]Como veremos en el capítulo 2, Excel incluye una herramienta para facilitar el desarrollo de ecuaciones a partir de ese tipo de gráficas.

1.6 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS CON DATOS

En gran parte, las decisiones administrativas se basan en la evaluación e interpretación de datos. Sin embargo, los datos sólo pueden ser interpretados a través del lente de un marco de referencia conceptual. Es difícil determinar qué fue primero: el marco o la recopilación de datos. Por supuesto que se requieren datos para construir modelos eficaces. Los esfuerzos para mejorar la construcción de modelos suelen conducir a la adquisición y compilación de más información o de nuevos tipos de datos. La existencia de éstos incrementa el beneficio potencial del uso de un modelo. C. West Churchman, uno de los primeros partidarios del uso de modelos en la administración, ha dicho que en realidad no existen datos "brutos", pues el acto de reunir y tabular esos números refleja siempre las tendencias que se tienen respecto a un marco de referencia determinado, es decir, de un modelo (mental). Sin embargo, una de las características de la civilización avanzada, por lo menos en lo que se refiere a la tecnología, parece ser la adquisición y el uso simultáneos de datos y modelos.

Los modelos simbólicos brindan una forma de evaluar e interpretar datos de manera sistemática y con más atención a los detalles, de lo que es posible con los modelos mentales. Los modelos simbólicos pueden usarse también para generar datos, y éstos suelen ser necesarios para construir modelos (por ejemplo, para estimar los parámetros del modelo). De hecho, no es raro que el éxito o el fracaso de un intento por construir modelos se relacione con la disponibilidad, precisión y relevancia de los datos. En la construcción y uso práctico de modelos administrativos hay que prestar mucha atención al tema de los datos. Por ejemplo, un modelo que requiera datos detallados puede resultar inútil si no se dispone de tales datos o si la recolección de los mismos es costosa y demasiado lenta.

En esta sección presentamos algunas consideraciones pertinentes para el uso de datos en la construcción de modelos. El escenario para esta exposición y otras incluidas en el libro es una firma hipotética llamada PROTRAC.

Establecida en el oeste medio de Estados Unidos, PROTRAC produce más de 200 artículos que abarcan maquinaria agrícola, maquinaria industrial y para la construcción, productos químicos y equipo para huerto y jardín. Su principal fuente de ingresos es la venta de máquinas-herramienta para agricultura, construcción, silvicultura, conformación de terrenos y manejo de materiales. Estos productos se elaboran en 14 fábricas, la mayoría de las cuales están localizadas en Estados Unidos, y se venden en todo el mundo.

Las decisiones de PROTRAC se basan en gran medida en la información disponible, es decir, en la evaluación e interpretación de datos. Antes dijimos que, desde el punto de vista de la construcción de modelos, las decisiones recomendadas por medio de ellos se expresan como un número, que representa tal vez un precio o la cantidad de artículos que es preciso vender. Tenga muy presente esta definición. También queremos que capte con mucha claridad lo que entendemos por **datos.** Para nuestros fines, la palabra *datos* significa también números.

Para apreciar la íntima relación entre números y modelos, supongamos que la gerencia de PROTRAC debe tomar una decisión sobre el monto de dinero que debe asignar a su mercadotecnia en Europa. Antes de tomar tal decisión, la gerencia desea tener una idea del efecto que dicha asignación produciría en el total de las ventas europeas. Con ese propósito, una funcionaria ejecutiva consultó la base de datos de la corporación para obtener información sobre los gastos de mercadotecnia y el total de ingresos por concepto de ventas en Europa durante un periodo de 12 años, después de lo cual introdujo dichos datos a su hoja de cálculo Excel, como muestra la figura 1.5.

Esta hoja de cálculo no es más que un medio para comunicar los datos requeridos. Se ha elegido ese formato para la tabla por simple comodidad; es importante señalar que su propósito no consiste en sugerir relaciones especiales entre los distintos números. Sin embargo, supongamos que después de haber estudiado los datos de la figura 1.5, la ejecutiva supone o establece la hipótesis de cierta relación entre los gastos de mercadotecnia y las ventas. Ella puede considerar, por ejemplo, que el ingreso total por la venta de su producto en un año determinado depende directamente sólo de los gastos de mercadotecnia en ese año, y no de los ingresos por ventas o los gastos de mercadotecnia en años anteriores. Dicho de otro modo, ella cree que el ingreso total por concepto de ventas es independiente del tiempo. (Las palabras *depende directamente* implican que un gasto mayor en mercadotecnia se traduce en ventas más altas.) Así, la ejecutiva puede estimar que las ventas por $1.8 millones en 1992 sólo estuvieron relacionadas en forma significativa con los $400,000 gastados en mercadotecnia durante ese mismo año. En forma alternativa, la funcionaria podría considerar que las ventas de 1992 se relacionaron más bien con los gastos de mercadotecnia en 1989. O bien, puede elaborar la hipótesis de que las ventas de 1992 dependieron por igual de los gastos de mercadotecnia en 1989, 1990 y 1991.

	A	B	C
1	Año	Gastos de mercadotecnia	Ingresos por ventas
2	1986	$0	$0
3	1987	$50	$450
4	1988	$100	$650
5	1989	$200	$1,150
6	1990	$150	$1,000
7	1991	$250	$1,390
8	1992	$400	$1,800
9	1993	$300	$1,565
10	1994	$350	$1,715
11	1995	$445	$2,080
12	1996	$500	$2,140
13	1997	$550	$2,200

FIGURA 1.5

Gastos de mercadotecnia e ingresos por ventas en PROTRAC, sucursal europea, 1986-1997 (en miles de dólares)

Podríamos elaborar hipótesis sobre muchas relaciones posibles. Es obvio que las relaciones apropiadas dependerían de muchos factores asociados con el ambiente real de PROTRAC. Además, hemos expresado las relaciones de nuestra hipótesis en términos vagos, parcialmente cuantitativos. Es decir, dijimos en forma hipotética que las ventas de 1992 dependieron directamente de los gastos de mercadotecnia correspondientes a ese año, pero nuestra hipótesis no incluyó una relación cuantitativa específica. Podríamos hacer una declaración cuantitativa específica: las ventas reales en 1992 fueron 4.5 veces mayores que el gasto en mercadotecnia durante el mismo año. Esto significa que en 1992 se obtuvieron, *en promedio,* 4.5 dólares de ventas por cada dólar de mercadotecnia. Sin embargo, este hecho por sí mismo, no nos permite concluir que un gasto de $600,000 en 1992 hubiera conducido a un nivel de ventas de $2.7 millones. Además, ¿realmente el factor de proporcionalidad de 1992 tiene alguna importancia para la decisión actual? En 1997, por ejemplo, el factor de proporcionalidad fue 4.0, no 4.5. ¿Qué relación existe entre los datos de 1997 y los de 1992? ¿Las actuales técnicas de mercadotecnia de PROTRAC son más semejantes a las de 1997 que a las de 1992? ¿O la operación ha permanecido básicamente igual entre 1992 y 1997?

¿Y qué podemos decir de otros factores relevantes, como las condiciones económicas en general? Si establecemos la hipótesis de una relación causal entre la mercadotecnia y las ventas de cada año, entonces los datos revelan que, *en promedio,* cada dólar gastado en mercadotecnia fue más efectivo en 1992 que en 1997. ¿Qué factores del mundo real nos permitirían explicar esos diferentes grados de eficacia en los distintos años? Es decir, ¿cuáles de las interacciones del mundo real están reflejadas en esos datos? Tal vez se trate de diferencias en las técnicas de publicidad, o diferencias graduales del mercado y la demanda, lo cual, a su vez, podría deberse a diferentes condiciones económicas, al clima o a políticas del gobierno.

Como gerente, usted debe considerar ese tipo de preguntas en cuanto empiece a interpretar los datos de la tabla. Pero el objeto de la exposición actual es éste: en cuanto usted empieza a establecer hipótesis sobre *cualquier* relación entre sus datos, inicia la formulación de la(s) ecuación(es) de un modelo. Es decir, ya está empezando a interpretar los datos como un reflejo de importantes relaciones subyacentes. Por tanto, la figura 1.5 tiene un significado especial: se ha convertido en una representación selectiva de la realidad. Como tal, una simple tabla de datos encaja en nuestra definición anterior de modelo. Es importante subrayar que, por sí mismos, los datos no representan un modelo. Aislados, los números no significan más que un registro de hechos (p. ej., el ingreso total por concepto de ventas en Europa fue de $1.8 millones en 1992). Sólo cuando se adscribe cierta relación a los números es cuando empieza a existir un modelo, por lo menos en forma embrionaria.

1.7 CUESTIONES RELACIONADAS CON LOS DATOS

FORMAS Y FUENTES DE DATOS

Es posible que esos datos ya estén anotados en la base de datos de una computadora (listos para ser importados en una hoja de cálculo), que estén impresos en papel o, lo más común, que no hayan sido registrados sistemáticamente, por lo cual se requiere un esfuerzo adicional para su recolección. Los datos pueden estar medidos en libras o toneladas, francos o dólares. La cuestión de las unidades suele ser importante cuando se trabaja con datos. Por ejemplo, ¿en qué moneda debe medir la gerencia de PROTRAC sus ventas en Europa? Si la respuesta es en dólares, ¿qué tipos de cambio debe aplicar para convertir divisas extranjeras a dólares? Los tipos de cambio varían de cuando en cuando, y el efecto de sus variaciones puede introducir sólo pequeñas imperfecciones en nuestros cálculos, pero también es posible que le dé a nuestro mundo un aspecto notablemente distinto. La decisión de cómo recopilar, almacenar e interpretar datos está gobernada por los usos que se vayan a dar a dichos datos. Por desgracia, es común que la información reunida en bases de datos de empresas haya sido recopilada con otros propósitos, como informes financieros, por lo cual debe tenerse mucho cuidado en investigar las fuentes y definiciones de esa información, si los datos van a ser utilizados de nuevo para la construcción de modelos administrativos y la toma de decisiones.

Los datos pueden provenir de registros del pasado. Los datos pueden ser generados a través de observaciones directas o estimaciones realizadas en el presente. En particular, los datos pueden ser producidos por un modelo que requiera determinadas decisiones como entradas. Por último, los datos pueden ser generados mediante pronósticos del futuro.

AGREGACIÓN DE DATOS

Una de las consideraciones importantes cuando se usan datos es el grado de agregación o consolidación deseado. Por ejemplo, ¿requiere nuestro modelo datos sobre las ventas anuales totales de los últimos cinco años, o de las ventas anuales por país en los últimos cinco años, o de las ventas anuales totales por planta en ese periodo, o de las ventas anuales totales por planta y por producto en ese lapso? Esta lista de requisitos describe datos en forma cada vez más disgregada o pormenorizada. Los datos disgregados tienen más detalle y su obtención es, en general, más difícil y costosa. Sin embargo, también son más valiosos porque contienen más información. Además, es posible agregar datos disgregados, pero no siempre es posible hacerlo inverso. Así, si las ventas totales por planta y por producto son conocidas, es posible obtener las ventas totales por producto y por país, o las ventas totales por país, o las ventas totales por producto, o las ventas totales por planta. En cambio, resulta evidente que en este caso no sería posible partir de las cifras agregadas para extraer de ellas las cifras disgregadas. Los beneficios de la síntesis de datos que proporciona la agregación tienen un costo: la agregación renuncia a una parte de la información.

Aun cuando los datos disgregados son deseables porque contienen más información, también es verdad que tales datos pueden estar demasiado disgregados para ser incorporados a una hoja de cálculo[3] o para que los use con comodidad un gerente en particular. En términos de la decisión de construir o no nuevas plantas en Europa, los ejecutivos de PROTRAC pueden tener interés en comparar una pequeña y selecta recolección de datos adicionales o agregados. Es decir, su decisión puede basarse en un modelo simplificado que represente selectivamente la realidad con unos cuantos números seleccionados, escritos "en el reverso de un sobre".

Debe resultar obvio que, pasando por alto los costos del procesamiento, un mayor número de datos sólo puede conducir a mejores decisiones. (Si esto no es obvio, por lo menos debe resultar claro que un mayor número de datos no nos puede conducir a peores decisiones.) No obstante, también es cierto que existe un límite en el grado de disgregación que puede digerir cada uno de los individuos que están a cargo de tomar las decisiones. Por fortuna, los modelos de hoja de cálculo electrónica pueden trabajar con información mucho más detallada que los individuos; ésta es una de las principales justificaciones para utilizarlos. Recuerde que, a medida que las situaciones administrativas se vuelven más complejas y sofisticadas, los *detalles* adquieren

[3]Las hojas de cálculo electrónicas modernas, como Excel, tienen incorporadas opciones que permiten transmitir búsquedas, a través de una red, a servidores con grandes bases de datos. Esos datos externos son agregados después por el software del servidor de la base de datos, de acuerdo con las condiciones de la búsqueda, y aparecen en las celdas de la hoja de cálculo, listas para usarse en el modelo.

cada vez más importancia. Sin embargo, estamos ante una espada de dos filos. Si bien los modelos suelen tener datos disgregados, a veces la propia disgregación crea problemas insuperables. Por ejemplo, la disgregación puede dar lugar a demasiadas variables, con lo cual el modelo resulta demasiado largo e incómodo para usarse, o puede requerir un trabajo de recopilación de datos costoso y prolongado. A este respecto, el equilibrio está entre el ideal de usar la mayoría de los datos disponibles (sumamente detallados y pormenorizados) y la necesidad práctica de mantener la simplicidad del modelo.

REFINACIÓN DE DATOS

El término *refinación* se emplea a menudo como sinónimo de disgregación, pero eso no es del todo correcto. Los datos que están muy refinados (se les describe a menudo como altamente estructurados) corresponden a datos muy disgregados, pero lo inverso no siempre es cierto. Una cantidad considerable de datos puede ser fácilmente accesible en la base de datos de la red corporativa conocida como “almacén de datos”. Es posible que los datos sean pertinentes para la situación que usted está estudiando, pero es frecuente que los datos no se encuentren en la forma apropiada. Tal vez encontremos datos anuales acerca del volumen total de ventas y datos anuales sobre el número total de plantas en operación, pero para nuestro modelo podemos requerir las ventas promedio por planta realizadas cada año. Dichas ventas pueden calcularse mediante manipulaciones sencillas de los datos existentes, usando la hoja de cálculo electrónica. Este proceso de manipulación, “masaje” o “trituración” de información, puede designarse con mayor propiedad como la refinación de los datos. Tales procesos de refinamiento pueden requerir extensivas manipulaciones en la hoja de cálculo electrónica, según el material disponible y el que usted requiera para la construcción de su modelo.

1.8 MODELOS DETERMINÍSTICOS Y PROBABILÍSTICOS

Sabemos que este libro está dedicado a los modelos de decisión. Sin embargo, bajo ese rubro general se extiende un cúmulo de conocimientos muy amplio y diversificado. Por eso es útil contar con una taxonomía, una forma de organizar el material para que podamos ver el bosque antes de meternos en él y de que los propios árboles nos impidan verlo. Por ejemplo, los modelos para toma de decisiones se clasifican con frecuencia según la función de negocios a la cual se aplican (finanzas, mercadotecnia, contabilidad de costos, operaciones, etc.) o por la disciplina de aplicaciones o la industria involucrada (ciencias, ingeniería, economía, organización militar, instituciones no lucrativas, transporte, capital de riesgo, etc.). También pueden clasificarse según el nivel de la organización en el cual se aplican (estratégicos *vs.* tácticos), por el marco temporal elegido (largo *vs.* corto plazo), por el tipo de matemáticas utilizadas (ecuaciones lineales *vs.* ecuaciones no lineales) y por la tecnología aplicada en la construcción del modelo (hoja de cálculo electrónica, paquete de software personalizado, lápiz y papel, etc.). Cada una de esas tipologías provee mayores conocimientos acerca de los usos y la aplicabilidad de cada modelo. En este libro usaremos una tipología más para organizar nuestra aproximación a la construcción de modelos: modelos determinísticos *vs.* probabilísticos.

MODELOS DETERMINÍSTICOS

Los modelos **determinísticos** son aquéllos donde se supone que todos los datos pertinentes se conocen con certeza. Es decir, en ellos se supone que cuando el modelo sea analizado se tendrá disponible toda la información necesaria para tomar las decisiones correspondientes. Un ejemplo de modelo determinístico sería la asignación de la tripulación de una aerolínea para cada uno de sus vuelos diarios del mes próximo, conociendo los horarios de vuelos, el personal disponible, las restricciones legales sobre las horas de trabajo, las reglas del sindicato y así sucesivamente. Como veremos en los capítulos dedicados a los modelos determinísticos, éstos pueden manejar situaciones complejas en las que hay muchas decisiones y restricciones. La utilidad de los modelos determinísticos suele ser máxima cuando unas cuantas entradas no controladas del modelo presentan incertidumbre. En consecuencia, los modelos determinísticos se utilizan a menudo, aunque no siempre, para la toma de decisiones internas de una organización, como en el ejemplo acerca del programa de trabajo para la tripulación de una aerolínea.

Los modelos determinísticos serán expuestos en las dos primeras partes de este libro. El resto de la primera parte está dedicado a la construcción de modelos en general utilizando hojas de cálculo electrónicas Excel, y casi toda la segunda parte se refiere a modelos de optimización restringidos. En la segunda parte se presentará el tema de la **programación lineal** (PL), que es el caballo de batalla de los modelos de optimización restringida.[4] En la segunda parte usted aprenderá a formular modelos PL, a optimizarlos y a interpretar la solución. En la segunda parte veremos también muchos otros modelos. Entre ellos figuran la programación con enteros, la no lineal y la de objetivos múltiples, que son primas hermanas de la PL.

Los modelos determinísticos son importantes por cinco razones:

1. Una asombrosa variedad de importantes problemas de administración pueden formularse como modelos determinísticos.
2. Muchas hojas de cálculo electrónicas cuentan con la tecnología necesaria para optimizar modelos determinísticos, es decir, para encontrar decisiones óptimas. Cuando se trata en particular de modelos PL grandes, el procedimiento puede realizarse con mucha rapidez y fiabilidad.
3. El subproducto de las técnicas de análisis es una gran cantidad de información muy útil para la interpretación de los resultados por la gerencia.
4. La optimización restringida, en particular, es un recurso extremadamente útil para reflexionar acerca de situaciones concretas, aunque no piense usted construir un modelo y optimizarlo.
5. La práctica con modelos determinísticos le ayudará a desarrollar su habilidad para la formulación de modelos en general.

MODELOS PROBABILÍSTICOS

En los modelos **probabilísticos,** o estocásticos, algunos elementos no se conocen con certeza. Es decir, en los modelos probabilísticos se presupone que algunas variables importantes, llamadas variables aleatorias, no tendrán valores conocidos antes que se tomen las decisiones correspondientes, y que ese desconocimiento debe ser incorporado al modelo. Un ejemplo de modelo probabilístico podría ser la decisión de establecer una compañía de Internet mediante la venta pública de acciones de capital, antes de saber si el mercado para nuestra oferta será favorable (mercado en alza) y rendirá un alto precio de las acciones, o desfavorable (mercado sostenido) y el precio de éstas será bajo. Como veremos en la tercera parte del libro, esos modelos incorporan la incertidumbre a través de probabilidades en las variables aleatorias; en este caso, la condición futura del mercado de valores. Estos modelos tienden a reportar su mayor utilidad cuando intervienen en ellos muchas entradas inciertas y hay pocas restricciones. En consecuencia, los modelos de incertidumbre se usan a menudo para la toma de decisiones estratégicas referentes a la relación de una organización con su ambiente (incierto), como en el ejemplo de la oferta de acciones al público.

En la tercera parte del libro aprenderá qué tipos de criterios puede aplicar cuando el factor incertidumbre interviene en el modelo, y cómo tomar una decisión óptima a la luz de esos criterios. También en este caso tenemos problemas de decisión que son cuantitativos, en los cuales tratamos de optimizar alguna función de las variables de decisión. Entre los temas de esta parte del libro figuran: análisis de decisiones, filas de espera, simulación, administración de proyectos y pronósticos. Puesto que la incertidumbre desempeña un papel fundamental en dichos modelos, esta parte del libro requiere ciertos conocimientos previos de cálculo de probabilidades y estadística. El apéndice A de este texto ofrece un breve repaso de conceptos sobre probabilidades. Aunque seguramente eso no bastará para que usted se vuelva un experto, le brindará una introducción (o un repaso) a los conceptos clave que se requieren para la debida comprensión de estos capítulos.

1.9 CICLOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Para entender mejor el lugar que ocupan los modelos en el proceso de su construcción y análisis, será conveniente que clasifiquemos los modelos simbólicos a partir de las dimensiones ilustradas por medio del diamante que aparece en la figura 1.6. Confrontados entre sí, los lados derecho e izquierdo del diamante se refieren a los extremos polares que corresponden a la construcción de modelos determinísticos frente a la construcción de modelos probabilísticos.

Por supuesto, ningún modelo es completamente determinístico (ausente de incertidumbre en todas sus variables) ni totalmente probabilístico (con incertidumbre en los valores de todas

[4] La palabra "lineal" en PL se refiere al requisito de que cada una de las relaciones expresadas en el modelo esté especificada como una ecuación lineal. El término "programación" incluido en PL no tiene relación alguna ni con la programación para computadoras ni con el desarrollo del software correspondiente. Su origen está relacionado, más bien, con el procedimiento de "establecer un calendario o *programa* de actividades para realizar eficazmente una tarea".

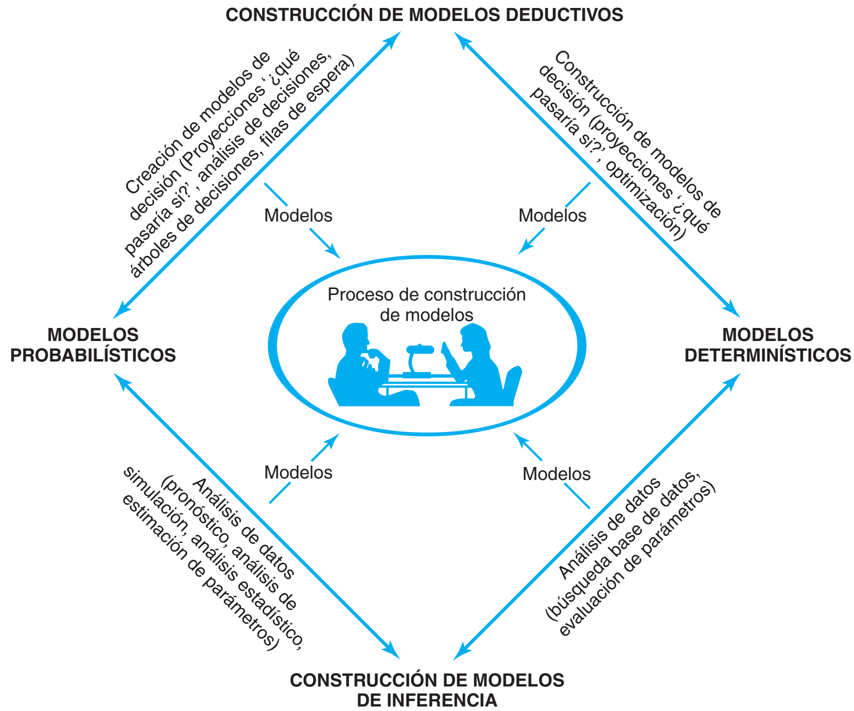


FIGURA 1.6

Tipos de modelos

sus variables). Volviendo al ejemplo anterior de la programación de actividades para la tripulación de una aerolínea, el clima o la enfermedad podrían perturbar los vuelos o la disponibilidad de los miembros de la tripulación en formas inesperadas, lo cual comprometería las asignaciones de tripulación propuestas por el modelo. En forma similar, en el ejemplo de la oferta de las acciones de Internet, las condiciones del mercado podrían ser previsibles con un grado adecuado de certeza, o bien, el modelo de la oferta de acciones podría incluir la decisión de aplazar en el último minuto la operación si las condiciones se tornan desfavorables, con lo cual podría mitigarse el efecto de la incertidumbre.

La confrontación entre los extremos superior e inferior del diamante se refiere a los extremos polares de la construcción de modelos deductivos frente a la de modelos de inferencia. La primera supone que el modelo puede desarrollarse inicialmente enfocando las variables mismas, interrelacionándolas después en el modelo por medio de suposiciones sobre las relaciones algebraicas y los valores de cualquier número de parámetros. En consecuencia, la construcción de modelos deductivos tiende a avanzar "de arriba hacia abajo", dando un valor especial a los conocimientos y juicios que el autor puede tener de antemano, tanto acerca de las relaciones matemáticas y los valores de los datos, como sobre la futura aplicabilidad de esos conocimientos precedentes. Los modelos resultantes tienden a ser "pobres en datos" inicialmente, pues incluyen sólo algunas decenas o centenares de datos, que con frecuencia están expresados como los parámetros supuestos del modelo.

En la construcción de modelos de inferencia, en lugar de empezar con suposiciones se presume que el modelo puede desarrollarse centrándose en las variables mismas, tal como se reflejan en la colección de datos existentes, relacionándolas entre sí en el modelo mediante el análisis de los datos para determinar sus relaciones y estimar los valores de cualquiera de los parámetros. El resultado es que la construcción de modelos de inferencia tiende a avanzar "de abajo hacia arriba", concediendo un valor especial a la precisión y disponibilidad de los datos y a los juicios sobre la futura aplicabilidad de ellos. Los modelos resultantes tienden a ser inicialmente "ricos en datos", con varios centenares o millares de éstos, que a menudo se refinan después para estimar los parámetros del modelo.

El diamante también ilustra que *las cuatro* dimensiones que forman sus facetas son abordadas por los gerentes en el proceso para construir modelos, sobre todo en las etapas formativas iniciales. Es decir, la construcción de modelos pocas veces se realiza usando una sola de las dimensiones o siguiendo una simple "receta de cocina" donde se combinen dichas dimensiones. En lugar de eso, los elementos del modelo son ensayados, probados, evaluados (a menudo subjetivamente en un principio), revisados, vueltos a ensayar y así sucesivamente, en forma itera-

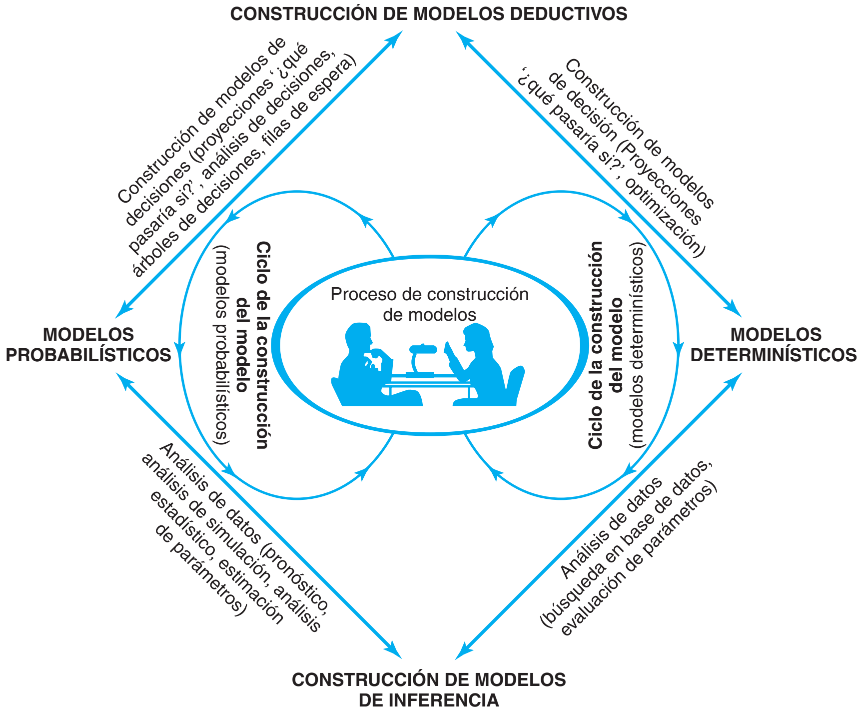


FIGURA 1.7

Ciclos en la construcción de modelos

tiva, saltando de una "faceta" del diamante a otra ya sea mediante la creatividad o al estilo de una "lluvia de ideas". Por ejemplo, una gerente de PROTRAC podría empezar a construir un modelo para el cálculo del costo de un producto por medio de un modelo de decisiones, suponiendo o razonando (por el método deductivo) que el costo total de los bienes vendidos representa 60% del ingreso total, y considerando que el porcentaje del "costo de los bienes" (60%) es conocido (determinístico). Esto la hace pasar de la parte superior del diagrama a la faceta derecha de un modelo determinístico. Cuando esté más avanzado el proceso de construcción del modelo, tal vez desee "dar un vistazo a algunos datos históricos sobre ingresos y costos", con lo cual descenderá hasta la faceta del diamante que corresponde al análisis de datos, ubicado a la derecha y abajo en el diagrama. Después de analizar los datos históricos (por inferencia), quizá decida modificar el porcentaje a 63% por ejemplo. A continuación, podría examinar el efecto de esa revisión en los costos generales o la rentabilidad del modelo PROTRAC en conjunto. Esto la llevaría de nuevo a la faceta de la decisión de la derecha, en la construcción del modelo (las proyecciones de '¿qué pasaría si?' sobre costos totales y rentabilidad) para evaluar subjetivamente la veracidad del mismo. El enfoque iterativo se ilustra mediante el ciclo o circuito cerrado de construcción de modelos representado en la mitad derecha de la figura 1.7.

Ya más avanzado el proceso de construcción del modelo, los colegas podrían convencer a la gerente de que el porcentaje del costo de los bienes no permanece en el valor fijo de 63%, sino que varía en forma un tanto aleatoria a causa de la variabilidad en los precios de productos primarios que paga PROTRAC por sus materias primas. Con esto, el proceso de construcción del modelo pasaría a la mitad izquierda del diagrama, para que ella pudiera desarrollar iterativamente las relaciones entre diversos porcentajes del costo de los bienes y el precio de los productos primarios (deducción) y analizara los datos para ponerlos a prueba (inferencia) con relación en los parámetros de la distribución de probabilidades que rige los valores para el porcentaje de costo de los bienes, es decir, el ciclo de formulación del modelo que aparece en la mitad izquierda del diagrama. Más tarde aun, la gerente podría tratar de simplificar su modelo pasando por alto la incertidumbre reconocida en torno al porcentaje del costo de los bienes (por ejemplo, porque otras proyecciones de '¿qué pasaría si?' sugieren que la variabilidad en los precios de los productos primarios no afecta materialmente la toma de decisiones). Con esto, la parte del modelo correspondiente a la relación del costo de los bienes se desplazaría de nuevo a la mitad derecha del diamante que aparece en el diagrama. Este último desplazamiento muestra que en el proceso de construcción de modelos existen ciclos o circuitos cerrados horizontales, además de los verticales cuyo diagrama aparece en la figura 1.7.

El enfoque iterativo del tipo ensayo-error para la construcción de modelos ilustrado en la figura 1.7 es sumamente creativo. A eso se debe que la formulación de modelos administrativos sea más un arte que una ciencia. Y, como todo arte, se aprende observando con sentido crítico los ejemplos realizados por otras personas y practicando, practicando, practicando.

1.10 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS Y TOMA DE DECISIONES

En términos generales, el éxito en la aplicación de modelos para la toma de decisiones en el mundo real puede dividirse en cuatro etapas, las cuales muestran una estrecha correspondencia con los elementos del proceso de construcción de modelos ilustrado en la figura 1.1:

1. Formulación del modelo y construcción del mismo, es decir, el proceso de tomar situaciones administrativas del mundo real, abstraerlas en una formulación y después desarrollar los términos matemáticos de un modelo simbólico;
2. Análisis del modelo para generar resultados;
3. Interpretación y validación de los resultados del modelo, asegurándose de que la información disponible obtenida del análisis ha sido interpretada en el contexto de la situación original en el mundo real; y
4. Implementación, es decir, aplicar a la toma de decisiones en el mundo real, el conocimiento validado que se obtuvo con la interpretación de los resultados del modelo.

Como en la propia construcción de modelos, las cuatro etapas anteriores casi nunca se realizan en secuencia; más bien, los gerentes las aplican en forma iterativa. Los modelos se construyen cíclicamente, como se describió en la sección anterior. Después se analizan para obtener los resultados, los cuales se interpretan críticamente, y de ellos se extraen recomendaciones que muchas veces no satisfacen ni la más sencilla prueba de validación: ¿los resultados interpretados y las recomendaciones violan el sentido común?

El sentido común es la prueba más obvia de la validez de un modelo. Si en éste no se detectan errores lógicos fáciles de identificar, pero los resultados o recomendaciones transgreden el sentido común, no hay más remedio que regresar a la primera etapa para diagnosticar si la situación administrativa no fue definida adecuadamente, si se perdió demasiado realismo en la formulación, si el modelo mismo es deficiente, y otras cosas por el estilo. Generalmente, es necesario hacer un buen número de repeticiones antes de producir un modelo aceptable o, en algunas ocasiones, antes que el gerente comprenda que su sentido común no fue aplicado con acierto por principio de cuentas. Sea como fuere, es erróneo concluir que esas repeticiones fueron una pérdida de tiempo: durante el proceso mismo se aprenden muchas cosas, a medida que se van perfeccionando tanto los modelos como los conocimientos del gerente.

VALIDACIÓN DEL MODELO

Por sí solo, el sentido común difícilmente ofrece un camino científico para validar la construcción de un modelo. Por desgracia, también otras técnicas de validación tienen sus limitaciones. Por ejemplo, con frecuencia se valida un modelo diciendo que una organización ahorró $X en sus costos u obtuvo $Y en ganancias cuando lo usó como base para sus decisiones. Esto plantea la pregunta de sí el desempeño hubiese mejorado lo mismo (¡o quizá más!) sin el modelo.

Considerando que, en general, no es posible realizar una experimentación bajo control, un método imperfecto para validar un modelo consiste en usarlo para “predecir la historia”. En efecto, para probar el modelo, se utilizan como entradas datos históricos sobre decisiones, parámetros y resultados obtenidos en una situación similar en una época ya conocida. A continuación se comparan los dos conjuntos de resultados, los del modelo y los de la historia, y el modelo queda validado si existe similitud entre ellos. Por último, se analiza el modelo y cualquier ventaja adicional en términos de mejores recomendaciones para la toma de decisiones es una evidencia del valor del mismo; desde luego, suponiendo que la validez histórica implica que el modelo también será válido en el futuro.

En el último análisis, usted debe recordar que el desempeño administrativo es evaluado subjetivamente todos los días en condiciones mal definidas de toma de decisiones. Como tecnología de respaldo para las decisiones de esos mismos gerentes, no es razonable atribuir a la construcción de modelos una categoría científica más elevada y casi inalcanzable. A la postre, la validación de un modelo y la utilidad de su construcción son juicios de valor. Según lo ha demostrado la experiencia, los gerentes que se comprometen y participan activamente en este proceso tienen muy pocas dificultades para realizar tales juicios de valor.

TABLA 1.2 Terminología sobre la construcción de modelos

TÉRMINO EN CONSTRUCCIÓN DE MODELOS	LÉXICO ADMINISTRATIVO	DEFINICIÓN FORMAL	EJEMPLO
Variable de decisión	Palanca	Cantidad de entrada exógena controlable	Monto de la inversión
Parámetro	Medidor	Cantidad de entrada exógena incontrolable	Tasa de interés
Variable de consecuencia	Resultado	Variable de salida endógena	Comisiones pagadas
Medida de desempeño	Rasero	Variable endógena para fines de evaluación (valor de la función objetivo)	Rendimiento sobre la inversión

UNA PERSPECTIVA FINAL

Aunque los diferentes grupos de estudiantes pueden poner de relieve distintas partes del material, según la perspectiva del maestro y las necesidades del grupo, recuerde que en todo este libro se hace énfasis en el enfoque administrativo que muestra la figura 1.1. Este enfoque en la construcción de modelos se interesa, ante todo, en identificar situaciones, formular modelos, analizarlos, interpretar los resultados y llevar a la práctica las decisiones. En la exposición de la construcción de modelos, nuestro motivo principal es el interés de aplicar estos enfoques en el mundo real. Sin eso, usted, el usuario de hojas de cálculo electrónicas, sería un programador-/matemático puro y usted, el gerente, no tendría trabajo.

1.11 TERMINOLOGÍA DE LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Después de esta introducción, creemos que ya está usted casi listo para pasar al capítulo 2, donde principia el examen de la construcción de modelos en hojas de cálculo. Sin embargo, cerraremos este capítulo con una advertencia importante. Aunque la mayoría de los términos que hemos empleado para describir la construcción de modelos son muy directos, la terminología de un modelo en particular se torna necesariamente más precisa a medida que evoluciona su construcción. Esto se debe a la necesidad de definir con cuidado las variables y relaciones del modelo. Por desgracia, este requisito tiene un precio: el uso de la terminología especializada de construcción de modelos (por ejemplo, *variable de decisión, parámetro, exógeno,* etc.) resulta discordante para otros gerentes, que a menudo son personajes importantes durante la implementación. La tabla 1.2 presenta unos cuantos términos de la especialidad, sus definiciones y ejemplos, junto con expresiones administrativas que sugerimos para el uso coloquial. El léxico administrativo más pintoresco suele ser muy útil para comunicar a otras personas las ideas de la construcción de modelos en la etapa de la caja negra.

1.12 RESUMEN

Este capítulo presenta una visión general sobre el uso de los modelos cuantitativos para la toma de decisiones, con énfasis especial en su desempeño como herramientas para el gerente. Se ha subrayado la interacción entre gerente y modelo, prestando atención particular al papel que juega el gerente como la persona que en última instancia toma las decisiones y es el constructor, usuario y valuador de los modelos. Hemos explorado la relación entre la construcción de modelos y la intuición administrativa en el proceso de la toma de decisiones.

Los modelos son una representación limitada de la realidad y, por esa razón, los resultados del análisis de un modelo no son necesariamente la solución idónea para la situación administrativa original. En particular, hemos hecho hincapié en que la idea de "óptimo" es una concepción matemática, no un concepto perteneciente al mundo real. Sin embargo, si un modelo ha sido bien formulado y su resultado se interpreta cuidadosamente, podrá proveer un valioso acervo de información para la persona encargada de tomar decisiones.

Hemos presentado los conceptos de: variables de decisión, parámetros, restricciones, objetivos y medidas de desempeño, todos los cuales son componentes importantes de los modelos. Describimos distintos tipos de modelos y el papel decisivo que los datos desempeñan en su construcción. Hemos expuesto el proceso iterativo mediante el cual son construidos los modelos, la función que corresponde a distintos tipos de modelos en las organizaciones de negocios, y temas relacionados con la validación de modelos. Un aspecto importante es que hemos destacado la forma en que los modelos refuerzan los conocimientos administrativos, favorecen la comunicación de ideas a otras personas y facilitan el trabajo de equipo.

Términos clave

Apoyo a las decisiones. Uso de datos, modelos y análisis en la obtención de conocimientos que ayudan en la toma de decisiones.

Ciencia administrativa. Aplicación sistemática del proceso de construcción de modelos a situaciones administrativas.

Construcción de modelos de inferencia. Formulación de un modelo simbólico en el cual las variables, los parámetros y las relaciones matemáticas entre ellos son estimaciones obtenidas por medio del análisis de datos.

Construcción de modelos deductivos. Formulación de un modelo simbólico en el cual los valores de las variables, los parámetros y las relaciones matemáticas entre ellos son suposiciones derivadas de conocimientos anteriores.

Decisión (variable de decisión). Variable exógena cuyo valor está bajo el control de la persona a cargo de tomar las decisiones y es determinado por ella.

Medida de desempeño (función objetivo). Variable endógena que permite determinar hasta qué punto ha alcanzado sus metas un modelo.

Modelo análogo. Es aquél en el cual se utiliza un medio diferente para representar propiedades reales, como cuando se usa el desplazamiento de las manecillas de un reloj para representar el tiempo.

Modelo de caja negra. Modelo simbólico incompleto en el cual sólo están definidas las variables de entrada y salida, pero no hay relaciones matemáticas definidas.

Modelo de decisión. Modelo simbólico que incluye variables de decisión y, por lo menos, una medida de desempeño.

Modelo determinístico. Es aquél en el que todos los datos se conocen con certeza.

Modelo físico. Es una representación, como la maqueta de un avión, cuyos componentes son reproducciones físicas que muestran las propiedades reales del objeto representado.

Modelo probabilístico. Es aquél donde algunos datos no se conocen con certeza, pero cuyo grado de incertidumbre está determinado por probabilidades conocidas.

Modelo simbólico (modelo cuantitativo). Es aquél en el que se usan datos, variables y relaciones matemáticas para representar propiedades abstractas, como un modelo sobre la economía de un país.

Modelo simbólico PL. Representación algebraica de un PL.

Parámetro. Variable cuyo valor no está determinado por la persona a cargo de tomar las decisiones, sino que se establece en forma exógena.

Proceso de construcción de modelos. Aplicación iterativa de la abstracción, la construcción de modelos, el análisis y la interpretación, combinados con la intuición y el buen juicio, como ayuda para la toma de decisiones.

Programa lineal (PL). Modelo determinístico formado por ecuaciones lineales, y que contiene una sola medida de desempeño (función objetivo) por optimizar, sujeta a satisfacer un conjunto dado de restricciones.

Variable de consecuencia. Variable endógena que proporciona información adicional para ayudar a la gerencia en la interpretación de los resultados del modelo.

Variables endógenas. Variables cuantitativas cuyos valores están determinados por las relaciones incluidas en un modelo simbólico, es decir, que son salidas de un modelo simbólico.

Variables exógenas. Variables cuantitativas cuyos valores se determinan por medio de un proceso externo, en relación con un modelo simbólico, es decir, que son entradas de un modelo simbólico.

Ejercicios de repaso

Verdadero-falso

1. **V F** Generalmente, cuanto más complicado es el modelo, tanto más útil puede ser.
2. **V F** Los modelos suelen pasar por alto gran parte de la realidad del mundo.
3. **V F** Los modelos de decisión requieren valores numéricos para las variables de decisión.
4. **V F** Un modelo de decisión capta a menudo las interacciones y el trueque de ventajas y desventajas entre ciertas variables o cantidades de interés .

5. **V F** Generalmente no hay una sola forma correcta de construir el modelo de una situación administrativa.
6. **V F** Una ventaja del proceso de construcción de modelos es que frecuentemente elimina la necesidad de conocer muy a fondo el ambiente que es objeto de estudio.
7. **V F** En la práctica, los modelos son construidos algunas veces por equipos de individuos que están especializados en diferentes disciplinas.
8. **V F** Por definición, los modelos de optimización siempre ofrecen la mejor decisión para la situación del mundo real.
9. **V F** Un modelo sustituye satisfactoriamente el juicio y la experiencia de un ejecutivo.
10. **V F** Una de las funciones importantes de la administración puede consistir en la evaluación de modelos (para determinar si dichos modelos deben usarse y si es conveniente implementar sus resultados).
11. **V F** Aunque las hojas de cálculo electrónicas facilitan el cómputo, no producen un verdadero impacto sobre la toma de decisiones.
12. **V F** "Los modelos "¿qué pasaría si?" sólo sirven para examinar cambios en el valor de las variables de decisión.
13. **V F** Los datos sólo son necesarios cuando la construcción del modelo ha finalizado.
14. **V F** En cuanto hace usted una hipótesis sobre *cualquier* relación entre sus datos, ya está empezando a formular la(s) ecuación(es) de un modelo.
15. **V F** En la construcción de modelos se usan datos.
16. **V F** Un modelo aporta un medio consistente para interpretar y evaluar datos.
17. **V F** Los datos agregados contienen más información que los datos disgregados.
18. **V F** Los "datos altamente estructurados" son lo contrario de los "datos altamente refinados".

Opción múltiple

19. Un modelo es
    - **a.** una representación selectiva de la realidad
    - **b.** una abstracción
    - **c.** una aproximación
    - **d.** una idealización
    - **e.** todo lo anterior
20. Con frecuencia, las decisiones están basadas en
    - **a.** una evaluación de datos numéricos
    - **b.** números producidos por modelos
    - **c.** el uso de modelos intuitivos que nunca son escritos
    - **d.** todo lo anterior
21. Un modelo
    - **a.** no puede ser útil, a menos que refleje con mucho detalle una situación real
    - **b.** es un instrumento para quien está a cargo de tomar decisiones
    - **c.** rara vez se somete a revisión después de haber sido construido
    - **d.** todo lo anterior
22. Un modelo
    - **a.** obliga al gerente a ser explícito en cuanto a sus objetivos
    - **b.** obliga al gerente a identificar explícitamente los tipos de decisiones que influyen en los objetivos
    - **c.** obligan al gerente a reconocer en forma explícita las restricciones impuestas a los valores que las variables pueden asumir
    - **d.** Todo lo anterior
23. Los modelos
    - **a.** desempeñan distintos papeles en los diferentes niveles de la empresa
    - **b.** rara vez se usan en el proceso de planeación estratégica
    - **c.** son una forma costosa de tomar decisiones de rutina diarias
    - **d.** todo lo anterior
24. Optimización restringida significa
    - **a.** que el modelo correspondiente es una representación muy precisa de la realidad
    - **b.** encontrar el mejor resultado (matemático) posible, considerando las restricciones del caso
    - **c.** las dos expresiones anteriores
25. Considere a un gerente cuyos intereses y aptitudes son muy ajenos al terreno de las técnicas cuantitativas. Su propósito al estudiar un curso de construcción de modelos con hojas de cálculo electrónicas podría ser
    - **a.** tener fundamentos para aceptar o rechazar el uso de instrumentos cuantitativos
    - **b.** aprender nuevas formas de observar su ambiente
    - **c.** familiarizarse con el tipo de ayuda que las hojas de cálculo electrónicas pueden proporcionar
    - **d.** todo lo anterior
26. Con el análisis "¿qué pasaría si?", estamos seguros de encontrar
    - **a.** una solución óptima
    - **b.** una buena solución
    - **c.** una solución factible (si existe alguna)
    - **d.** nada de lo anterior
27. En un modelo probabilístico, alguno de los elementos del problema
    - **a.** es una variable aleatoria con distribución conocida
    - **b.** es una variable aleatoria de la cual nada se sabe
    - **c.** adopta diversos valores que es necesario calcular con precisión antes que el modelo pueda ser resuelto
    - **d.** no será conocido hasta que el modelo haya sido claramente formulado
28. Una gerente que desea maximizar las ganancias y minimizar los costos
    - **a.** necesita especificar dos objetivos en su modelo
    - **b.** puede conseguir el resultado que desea maximizando (ganancias menos costos)
    - **c.** tiene una meta imposible y debe elegir un objetivo
    - **d.** debe utilizar un modelo probabilístico
29. En general, los modelos de programación lineal
    - **a.** pueden ser optimizados aunque sean muy grandes
    - **b.** son más útiles para analizar problemas que para resolverlos
    - **c.** son de naturaleza probabilística
    - **d.** rara vez pueden ser resueltos en una computadora

30. Todo modelo cuantitativo
- **a.** representa los datos de interés en forma numérica
- **b.** requiere el uso de una computadora para su completa resolución
- **c.** debe ser determinístico
- **d.** todo lo anterior

31. El uso de los modelos de decisión
- **a.** sólo es posible cuando todas las variables se conocen con certeza
- **b.** reduce el papel del buen juicio y la intuición en la toma de decisiones administrativas
- **c.** requiere que los gerentes tengan un alto grado de habilidad en el manejo de computadoras
- **d.** nada de lo anterior

Respuestas

1.	F	**9.**	F	**17.**	F	**25.**	d
2.	V	**10.**	V	**18.**	F	**26.**	d
3.	V	**11.**	F	**19.**	e	**27.**	a
4.	V	**12.**	F	**20.**	d	**28.**	c
5.	V	**13.**	F	**21.**	b	**29.**	a
6.	F	**14.**	V	**22.**	d	**30.**	a
7.	V	**15.**	V	**23.**	a	**31.**	d
8.	F	**16.**	V	**24.**	b		

Preguntas para discusión

1-1. "Las situaciones administrativas difíciles son aquéllas para las cuales no existen modelos." Interprete esta afirmación. Proponga algunos ejemplos.

1-2. ¿Cuál es la relación entre datos y modelos?

1-3. ¿En qué punto las entradas de una hoja de cálculo electrónica que conforman una tabla de determinados datos empiezan a asumir el papel de un modelo?

1-4. ¿Cuál es la ventaja de tener datos disgregados? ¿Cuál es la ventaja de los datos agregados?

1-5. Supongamos que usted desea llegar a ser un gerente que toma decisiones, pero sus habilidades e intereses particulares están muy lejos del terreno cuantitativo. ¿Qué objeto tiene que estudie un texto introductorio sobre la construcción de modelos en hojas de cálculo electrónicas?

1-6. ¿Qué razones se le ocurren para explicar el hecho de que muchos modelos son construidos, pero nunca llegan a ejecutarse? ¿La falta de realización significa que todo el trabajo dedicado al desarrollo del modelo fue una pérdida de tiempo y recursos?

1-7. ¿Cómo interpreta usted la frase "una aplicación exitosa de un modelo"?

1-8. La maximización de las ganancias se considera comúnmente como la medida del desempeño de las empresas (del sector privado). ¿Debe ser así siempre? ¿Puede mencionar otros objetivos que pudieran ser apropiados? (No se preocupe si no son fácilmente cuantificables.)

1-9. Con frecuencia se dice que no existen decisiones óptimas para los complejos problemas de las empresas. Sin embargo, los modelos de optimización producen "decisiones óptimas". Entonces, ¿en qué sentido son óptimas esas decisiones?

1-10. Considere la siguiente declaración: "nuestra política de producción debe ser lograr la máxima producción al mínimo costo". Comente esta declaración.

1-11. ¿Cuál es el significado de una ecuación matemática en la cual los datos (los valores de los parámetros) no se conocen con precisión? ¿Qué tipos de suposiciones tenderían a justificar el uso de modelos en situaciones de ese tipo?

1-12. "Cuantificar los elementos de un problema de decisión es la parte fácil; la parte realmente difícil es analizar el modelo." ¿Está usted de acuerdo? ¿Por qué sí o por qué no?

1-13. Está usted en medio de una presentación ante el director general de su compañía, esforzándose por justificar su petición de que se apruebe un proyecto de varios millones de dólares para la comercialización de un nuevo invento. Él interrumpe su exposición y le dice: "Abreviemos las cosas. ¿Qué palancas está pidiendo y qué rasero deberé usar si apruebo este proyecto?" Interprete sus palabras en el contexto de la construcción de modelos.

1-14. ABC Consulting se especializa en construir y analizar modelos de decisiones por una cuota que paga su clientela de gerentes. "Es un negocio muy lucrativo", dice Rick James, presidente de ABC. "Llegamos a la organización, el gerente nos plantea brevemente el problema en cuestión. Valoramos entonces el problema y reunimos los datos necesarios. Después construimos un modelo en nuestras computadoras ABC o adaptamos alguno de nuestra creciente biblioteca de modelos, lo analizamos, regresamos con el cliente y en una presentación ofrecemos nuestras recomendaciones a la gerencia." Prosigue, "¿alguna vez presentamos al cliente las ecuaciones o el modelo mismo o le entregamos una copia de la hoja de cálculo que contiene el modelo? ¡Por supuesto que no!". ¿Por qué no entrega ABC el modelo al gerente? ¿Por qué no exigen sus clientes que lo entregue? ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de ese modo de usar modelos? Para responder esta última pregunta, aplique primero el punto de vista de Rick James y luego el de uno de sus clientes.

1-15. ¿En qué circunstancias de las organizaciones cree usted que se tendría mayor y menor éxito en el uso de modelos como apoyo a la toma de decisiones de la empresa? Como ayuda para estructurar su exposición, considere lo siguiente:

- **a.** Una organización universitaria donde las decisiones se toman por consenso *vs.* una organización internamente competitiva donde las decisiones se toman mediante discusiones entre adversarios.
- **b.** Una gran organización centralizada donde un comité directivo toma todas las decisiones *vs.* una gran organización descentralizada donde los gerentes locales toman la mayoría de las decisiones.
- **c.** Una pequeña organización dirigida por un solo empresario *vs.* una gran organización dirigida por gerentes funcionales en finanzas, contabilidad, mercadotecnia, manufactura, y así sucesivamente.
- **d.** Un gerente de línea *vs.* un gerente de personal administrativo.
- **e.** Una compañía que introduce un nuevo producto en un nuevo mercado *vs.* una compañía que comercializa un producto reconocido en un mercado tradicional.
- **f.** Una organización donde todos los gerentes son expertos en hojas de cálculo electrónicas *vs.* otra donde no lo son.
- **g.** Una organización que tiene un departamento central de planificación, formado por expertos que elaboran todos los modelos para la compañía, *vs.* otra donde no existe dicho departamento.
- **h.** Una organización con altos niveles de rotación en los puestos directivos *vs.* otra con poca rotación en dichos puestos.
- **i.** Una organización que experimenta un rápido crecimiento de sus ingresos *vs.* otra cuyos ingresos crecen lentamente.
- **j.** Una organización altamente lucrativa *vs.* una que sufre pérdidas.
- **k.** Una organización de servicios *vs.* una organización de manufacturas.
- **l.** Una organización en una economía del "primer mundo", como Francia, *vs.* una organización en una economía "recientemente emergente", como Vietnam.
- **m.** Una organización donde los gerentes tienen títulos académicos en ciencias o ingeniería *vs.* otra cuyos gerentes tienen títulos universitarios en humanidades.

1-16. "A medida que las situaciones administrativas se vuelven más complejas y sofisticadas, los *detalles* son cada vez más importantes." ¿Por qué es verdadero este enunciado? ¿Qué relevancia tiene en relación con los modelos?

1-17. ¿A qué se refiere C. West Churchman cuando dice que no existen datos en bruto?

1-18. Su nueva jefa, la vicepresidenta de ventas internacionales, lo llama a su oficina y le anuncia: "He decidido abrir una nueva oficina de ventas en Singapur. Pero en la próxima junta, el viernes, tendré que convencer a nuestro jefe, el vicepresidente de mercadotecnia, de que apruebe esta decisión. Quiero que usted nos acompañe y prepare para mí un modelo en una hoja de cálculo electrónica con muchas ecuaciones, gráficas y otros recursos que me ayuden a convencerlo. Deseo que él apruebe la oficina de Singapur. ¡Recuérdelo!" ¿Esta táctica refleja un uso apropiado de los modelos? ¿Qué haría usted en respuesta a esta petición de su jefa, y por qué?

1-19. Se ha dicho que un dato nunca ha sido la causa de que un modelo sea rechazado, no importa que dicho dato no confirme sus hipótesis. Lo único que puede hacer que un modelo sea rechazado es otro modelo. ¿Está usted de acuerdo con esto o no? ¿Por qué sí o por qué no? Suponiendo que esa afirmación sea cierta, ¿qué papel le corresponde a los datos en la validación de un modelo?

Referencias

George Curnow, Gary Kochman, Steven Meester, Debashish Sarkar y Keith Wilton, "Automating Credit and Collections at AT&T Capital Corporation", en *Interfaces,* 27, núm. 1 (1997), págs. 29-52.

Peter Horner, "Eyes on the Prize", en *OR/MS Today,* agosto de 1991, págs. 34-35.

CAPÍTULO

2 Construcción de modelos en hojas de cálculo electrónicas

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN

Modelo de las operaciones de los buques nodriza de la Guardia Costera

Una de las funciones de la Guardia Costera de Estados Unidos es la debida conservación de los 50,000 artefactos auxiliares de la navegación o ayudas náuticas que utilizan los marineros para navegar las vías acuáticas en torno a la parte continental de dicho país, Alaska, Hawai y los territorios estadounidenses, como los del Caribe y el Pacífico Occidental. Entre esos dispositivos de ayuda figuran faros, boyas con luz o sin ella, reflectores y balizas diurnas. Esos artefactos de ayuda para la navegación consisten en una boya flotante unida a un lastre por una cadena, o bien, en una estructura fija sostenida por pilotes o que se encuentra en tierra firme. Las ayudas para la navegación señalan peligros subacuáticos y cauces de tráfico para los navíos. Las grandes boyas de alta mar pueden medir hasta 2.70 metros de diámetro y 11 metros de alto, y llegan a pesar más de 10 toneladas. A cada uno de esos dispositivos de ayuda para la navegación se le da servicio una vez al año para mantenerlo en buenas condiciones de operación. En el caso de boyas permanentes, esto implica verificar su latitud y longitud, sustituir las letras o números faltantes y pintarlas de nuevo. El tiempo promedio del servicio de mantenimiento para cada boya fluctúa entre 25 y 260 minutos, según la índole del servicio y las condiciones climáticas y ambientales en las cuales se realice la operación.

La Guardia Costera emplea diversas clases de buques nodriza para (1) instalar artefactos federales de ayuda para la navegación, (2) realizar operaciones de servicio de rutina, y (3) atender interrupciones de carácter fortuito. La Guardia Costera necesitaba sustituir las dos principales clases de embarcaciones en su flota de buques nodriza (es decir, el instalador de boyas marítimas y el buque para boyas costeras). Había en total 26 buques nodriza marítimos y 11 costeros, que proporcionaban 7500 ayudas a la navegación. El costo estimado de sustitución era de 50 millones de dólares por cada buque nodriza marítimo y $20 millones para los de tipo costero. Se creó un modelo en una computadora de escritorio para ayudar a la Guardia Costera en la proyectada sustitución de esa flota de 37 navíos. Con ese modelo se analizó el programa de operaciones de la flota, para dar el servicio más eficiente a las naves. En el modelo fue necesario tomar en cuenta muchos datos, incluso el mantenimiento esperado, las distancias a las cuales tendrían que navegar los buques para dar servicio a cada boya, y el costo correspondiente.

Entre los factores por los cuales se complicaba la situación figuraba el hecho de que los buques encargados de atender las boyas realizaban también otras operaciones, tales como misiones de búsqueda y rescate, vigilancia del debido cumplimiento de leyes y tratados, y la limpieza de derrames de petróleo. Cada tipo de embarcación tenía distintas capacidades. Por ejemplo, los buques nodriza marítimos podían izar objetos hasta de 20 toneladas, trabajaban en el mar a más de 1.80 metros de profundidad, y podían permanecer hasta 45 días sin tocar puerto; en cambio, los buques costeros trabajan en áreas más próximas a la costa, navegando en aguas poco profundas donde los buques nodriza de alta mar no podrían transitar. Además, los barcos costeros tenían menos capacidad de izamiento y no podían pasar tanto tiempo sin fondear.

Otra complicación del modelo consistía en la necesidad de estimar los efectos del mal tiempo. El número total de horas perdidas al año dependía de si las boyas se encontraban expuestas a la intemperie en forma total o parcial, o si estaban completamente protegidas.

La recomendación extraída del resultante modelo de apoyo para las decisiones fue que la mezcla óptima de barcos sería una flota de 16 buques marítimos y 14 costeros. Mientras las operaciones de los buques se programaran en forma eficiente, la nueva flota proporcionaría la cobertura suficiente. Esto representó una disminución de 7 buques en la flota, con un ahorro de $350 millones por costos de capital para adquisiciones, además de una reducción de 500 puestos de personal (plazas) con el correspondiente ahorro. (Véase Bucciarelli *et al*.)

2.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 1 fueron expuestas algunas ideas y razonamientos básicos acerca de la construcción de modelos simbólicos y se reiteró que el arte de la formulación de modelos es un proceso iterativo. Este capítulo está enfocado a la construcción de ciertos modelos determinísticos en hojas de cálculo electrónicas Excel, para lo cual expondremos con amplitud varios ejemplos. Durante este proceso se pondrán a la consideración de usted varias ideas:

1. Sugerencias sobre la forma de traducir una representación de la caja negra en un modelo construido en una hoja de cálculo electrónica;
2. Recomendaciones para realizar correctamente diseños y esquemas de modelos en hojas de cálculo electrónicas;
3. Sugerencias sobre cómo documentar sus modelos, y
4. Características útiles de Excel para la construcción y el análisis de modelos.

Un punto importante es que, usted también encontrará aquí varios ejemplos de modelos. Tenga presente que la construcción de dichos modelos es una forma de arte y que se aprende, en parte, por medio de la revisión crítica de ejemplos y, a fin de cuentas, con la práctica.

Un comentario final antes de comenzar: los modelos construidos en hojas de cálculo electrónicas que veremos aquí son pequeños, principalmente por conveniencia pedagógica. Las hojas de cálculo electrónicas modernas, como Excel, son capaces de contener modelos mucho más grandes, incluso gigantescos. Sin duda hay muchos ejemplos del uso exitoso de modelos enormes. Sin embargo, ni las dimensiones ni el refinamiento matemático del modelo implican necesariamente, por sí mismos, que éste será útil. Los modelos sencillos y pequeños también pueden tener gran utilidad si brindan ayuda para la toma de decisiones. Más aún, los grandes y sofisticados modelos que tienen éxito han evolucionado casi siempre a partir de un precursor rudimentario, merced al éxito en la experiencia administrativa.

Ningún gerente puede tomar en serio un modelo si no logra comprenderlo o si su utilización y mantenimiento le resultan engorrosos. El mayor error que puede cometer inicialmente un gerente es construir en una hoja de cálculo electrónica un modelo con demasiados detalles, en un vano intento por no perder la realidad de la situación. La sencillez se debe tener siempre presente, sobre todo en las primeras etapas de la construcción de un modelo. Recuerde que, por lo menos al principio, un modelo construido en una hoja de cálculo electrónica debe competir con éxito contra su popular predecesor, el modelo anotado en "el reverso de un sobre".

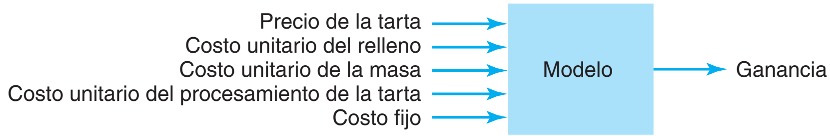
2.2 EJEMPLO 1: SIMON PIE

Simon Pie Company obtiene ganancias combinando dos ingredientes (fruta y masa de pan congelada) que compra para confeccionar con ellos tartas de manzana, por medio del procesamiento apropiado (cocción, empaque, entrega, etc.), las cuales vende a tiendas de abarrotes de la localidad. El fundador de la compañía, Samuel Simon, se ha propuesto construir un modelo en Excel para explorar sus opciones. Sin embargo, antes de abrir Excel, aplica las ideas expuestas en el capítulo 1 y define un diagrama de caja negra, trabajando en forma retrospectiva a partir de una medida de desempeño para definir sus elementos conceptuales. (Recuerde que la formulación de un modelo consiste en definir sus variables de entrada y salida, las cuales configuran la imagen de caja negra de dicho modelo.)

El hecho de que Simon necesite obtener ganancias inmediatas facilita la elección de las ganancias semanales como medida de desempeño. Al meditar en la situación, Simon concluye que, una vez considerado todo lo demás, su decisión más crítica consistirá en determinar el precio de las tartas al mayoreo. El plan de mercadotecnia de Simon le impide modificar el tamaño o la calidad de sus tartas, y las tiendas de abarrotes agregan simplemente un cargo extra al costo por el cual adquieren las tartas (el precio de mayoreo de Simon). Así, las cantidades de tartas vendidas, y por consiguiente sus costos, están determinados por el precio de las tartas de Simon (al mayoreo). A partir de esto, Simon concluye que el precio de las tartas de manzana es la

FIGURA 2.1

Vista de la caja negra del modelo de Simon Pie



variable de decisión y será lo que determine sus ganancias, junto con los parámetros de costo, como muestra la figura 2.1. Entre los parámetros de costo figuran el costo fijo de Simon por concepto de alquiler, pago de intereses sobre un préstamo comercial, y así sucesivamente; el costo unitario por tarta de fruta y la masa; y el costo unitario del procesamiento de la tarta, que incluye la cocción, la envoltura y la entrega de la misma.

El segundo paso es la construcción del modelo, la creación de la lógica que se introducirá en la caja negra. Al llegar a este punto, muchos gerentes son víctimas del "bloqueo del modelador", una maldición muy similar al bloqueo que sufren los escritores. El remedio en ambos casos es el mismo: empezar a escribir. Dado que la construcción de modelos es un proceso iterativo, los primeros intentos tendrán que ser revisados muchas veces antes que comience a surgir un modelo satisfactorio; todo el secreto consiste en empezar.

Para algunos gerentes sin experiencia en la construcción de modelos, los diagramas de influencia son un recurso útil que les ayuda a estructurar su pensamiento y, al mismo tiempo, les permite romper el bloqueo del modelador. Los **diagramas de influencia** son un instrumento apropiado para organizar nuestro procedimiento para la construcción de modelos, y brindan la ventaja adicional de ser el primer paso para la documentación del modelo. Un diagrama de influencia muestra las conexiones entre las variables exógenas del modelo y una medida de desempeño, dejando para más tarde la definición de la lógica matemática del modelo. La creación de un diagrama de influencia empieza con una variable para medir el desempeño. (Si existen varias medidas de desempeño, elija una de ellas.) Descomponga después la variable que haya elegido como medida de desempeño, en dos o más variables intermedias, las cuales se combinarán matemáticamente en el modelo y permitirán definir el valor de esa medida de desempeño. A la postre, todas las variables intermedias habrán quedado incluidas dentro de la lógica de la caja negra de su modelo. A continuación, vuelva a descomponer cada una de las variables intermedias en otras variables intermedias conexas. Este proceso de descomposición continúa hasta que se llegue a definir una variable exógena; es decir, hasta que logre usted salir de la caja negra porque ha definido una variable de decisión o un parámetro de entrada. Ilustraremos este proceso para el caso de Simon Pie.

A partir de la medida de desempeño elegida, las ganancias, Simon define sus dos componentes: los ingresos y el costo total. En seguida, Simon descompone cada una de estas dos variables intermedias en sus partes constitutivas; después subdivide cada una de éstas en otras partes y así sucesivamente, como muestra la figura 2.2. El proceso de creación del diagrama de Simon termina cuando todas las variables de entrada del modelo han sido definidas.

No existen reglas seguras y rápidas para saber cuántos detalles conviene incluir en un diagrama de influencia; su propósito es ayudar a poner en marcha la construcción del modelo, no identificar cada una de las variables intermedias del modelo definitivo. Después, en el curso del desarrollo de ese modelo, irán surgiendo los detalles apropiados a medida que se formalicen más aspectos de la lógica del mismo.

La revisión de la figuras 2.1 y 2.2 revela muchos aspectos del pensamiento de Simon. Y no sólo porque aquí están incluidos los factores que él considera relevantes para convertir las tartas en ganancias, sino también porque al haber excluido otros factores, nos demuestra que este diagrama representa la visión propia de su empresa. Por ejemplo, en dicho diagrama se ve con claridad que ni las reacciones de sus competidores ni la economía en general son relevantes para sus ganancias, por lo menos en el corto plazo. Y tampoco existen inventarios, tal vez porque las tartas se elaboran y se venden frescas. El capital de trabajo y otras variables de flujo de efectivo están ausentes, por lo cual suponemos que no deben afectar notablemente sus ganancias. Los detalles sobre compras, programas de horneado, entregas, recursos humanos y deterioro de productos brillan por su ausencia. Por supuesto, tal vez piense agregar estos factores y otros cuando el proceso de construcción del modelo esté más avanzado para simplificar la versión inicial: una táctica inteligente.

El paso siguiente, la construcción del modelo, requiere la especificación de las ecuaciones que indican las relaciones entre las variables. Escritas en palabras, casi todas esas ecuaciones serían bastante directas:

$$
\begin{aligned}
\text{Ganancias} &= \text{Ingresos} - \text{Costo total}\\
\text{Ingresos} &= \text{Precio de la tarta} * \text{Tartas demandadas}\\
\text{Costo total} &= \text{Costo de procesamiento} + \text{Costo de los ingredientes} + \text{Fixed Cost}\\
\text{Costo de los ingredientes} &= \text{Cantidad de relleno} * \text{Costo unitario del relleno} + \text{Cantidad de masa} * \text{Costo unitario de la masa}\\
\text{Costo de procesamiento} &= \text{Tartas demandadas} * \text{Costo unitario de procesamiento de las tartas}
\end{aligned}
$$

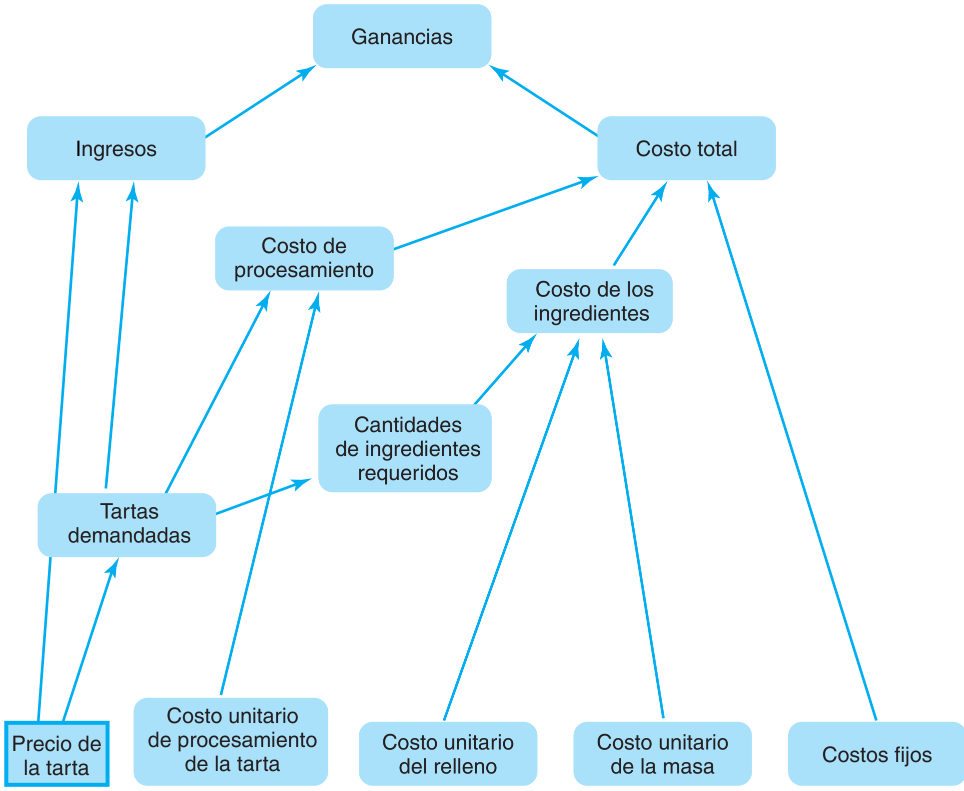


FIGURA 2.2

Diagrama de influencia para el modelo de Simon Pie

SUGERENCIA: ***Es fácil construir diagramas con Excel, cambiándose a una nueva hoja de cálculo electrónica, suprimiendo las "líneas de división" y mostrando la Barra de herramientas Dibujo de Excel. Mediante la selección de herramientas, modificadores y opciones, es posible construir una sorprendente variedad de dibujos. Por ejemplo, en la figura 2.2, la variable de decisión "Precio de la tarta" está representada por un rectángulo, mientras que para todas las demás variables se usó un rectángulo redondeado. Usted es libre de adoptar cualquier convención que le ayude a elaborar sus modelos y la correspondiente documentación.***

La ecuación de las tartas demandadas requiere mayor reflexión. Simon considera que la demanda de tartas es una función del precio de las mismas y que los precios más altos producen una demanda (ventas) más baja. Él estima que al precio de $12 sus tartas no tendrían demanda alguna y que, por debajo de ese precio lograría vender cada semana 4000 tartas más por cada dólar que redujera el precio. Suponiendo, sólo para simplificar, que la relación de demanda pudiera expresarse por medio de una ecuación lineal, contaríamos entonces con la siguiente ecuación para expresar la demanda semanal de Simon, en millares (000) de tartas, la cual sería válida mientras el precio de la tarta fluctuara entre $0 y $12.

$$\text{Tartas demandadas} = 48 - 4 * \text{Precio de la tarta}$$

La figura 2.3 presenta la hoja de cálculo electrónica Excel correspondiente al modelo de ganancias semanales de Simon. Los resultados han sido calculados para los valores de los parámetros actuales de Simon y para el precio vigente de sus tartas, $8. Observe cómo se representa este modelo en Excel. Todo se ha organizado y presentado sistemáticamente a fin de facilitar la interpretación del modelo. En términos generales, los modelos construidos en hojas de cálculo electrónicas deben ajustarse a las siguientes recomendaciones:

1. Las variables de entrada se presentarán juntas y rotuladas.
2. Los resultados del modelo estarán claramente rotulados.
3. Se indicarán las unidades de medición cuando sea necesario.
4. Los resultados físicos se presentarán separados de los resultados financieros o económicos.
5. Los números se colocarán en celdas separadas, como datos, y se expresarán en las fórmulas por medio de referencias a dichas celdas. El hecho de colocar números fuera de las fórmulas en las cuales se utilizan y en la parte superior de la hoja de cálculo electrónica es útil para realizar modificaciones y preparar la documentación del modelo.
6. El uso de negritas, sangrías y subrayados en ciertas celdas será un recurso opcional para facilitar la interpretación de los rótulos.

Al revisar el comportamiento del modelo usando precios más bajos para las tartas, Simon observa que con la fórmula del costo de procesamiento del modelo se obtiene el costo histórico correcto cuando el número de tartas demandadas es 16,000, pero no con otros valores de tartas demandadas. Para explorar más a fondo la cuestión, Simon examina sus datos reales sobre el costo de procesamiento para diferentes niveles de producción de tartas. Estos datos y el costo de

SUGERENCIA: ***En virtud de que para imprimir las fórmulas de una hoja de cálculo electrónica suele requerirse un trabajo considerable a fin de dar nuevo formato a las fuentes y ajustar la anchura de las columnas, resulta más fácil copiar toda la hoja de cálculo que contiene su modelo a una nueva hoja del libro, mediante los comandos Mover o Copiar hoja, incluidos en el menú Edición. A continuación, visualice las fórmulas en la hoja que acaba de copiar (activando la casilla de verificación correspondiente en la ficha Ver, dentro del comando Opciones del menú Herramientas) y aplique un formato para mejorar su apariencia. Sin embargo, esto debe hacerlo solamente después de haber completado la construcción del modelo, dado que no existe un "vínculo activo" entre las dos hojas de cálculo: si más tarde cambia usted una fórmula en la hoja de cálculo original, recuerde que deberá volver a copiar todas las celdas afectadas a la segunda hoja.***

	A	B
1	**Simon Pie Co. -- Modelo de ganancias semanales**	
2	**Variable de decisión:**	
3	Precio de la tarta	$8.00
4	**Parámetros:**	
5	Costo unitario de procesamiento de la tarta ($ por	$2.05
6	Costo unitario del relleno de fruta ($ por tarta)	$3.48
7	Costo unitario de la masa ($ por tarta)	$0.30
8	Costo fijo ($000)	$12
9	Ecuación de la demanda de tartas	
10	Intersección	48
11	Pendiente (coeficiente lineal)	-4
12		
13		
14		
15		
16	**Resultados físicos (000)**	
17	Tartas demandadas y vendidas	16
18	**Resultados financieros ($000)**	
19	Ingresos	$128
20	Costo de procesamiento	$33
21	Costo de los ingredientes	$60
22	Costos generales	$12
23	Costo total	$105
24	Ganancias (antes de impuestos)	$23

	A	B
1	**Simon Pie Co. -- Modelo de ganancias**	
2	**Variable de decisión:**	
3	Precio de la tarta	$8.00
4	**Parámetros:**	
5	Costo unitario de proce	$2.05
6	Costo unitario del rellen	$3.48
7	Costo unitario de la mas	$0.30
8	Costo fijo ($000)	$12
9	Ecuación de la demanda	
10	Intersección	48
11	Pendiente (coeficiente li	-4
12		
13		
14		
15		
16	**Resultados físicos (**	
17	Tartas demandadas y ven	=B10+B11*B3
18	**Resultados financier**	
19	Ingresos	=B17*B3
20	Costo de procesamient	=B5*B17
21	Costo de los ingrediente	=(B6+B7)*B17
22	Costos generales	=B8
23	Costo total	=SUMA(B20:B22)
24	Ganancias (antes de impu	=B19-B23

FIGURA 2.3

Modelo inicial para las ganancias semanales de Simon Pie

	A	B	C
1	Datos de costos de Simon ($000)		
2	Número de tartas (000)	Costo de procesamiento (real)	Costo de procesamiento (modelo)
3	8	$ 12.80	$ 16.40
4	10	$ 17.50	$ 20.50
5	12	$ 21.60	$ 24.60
6	14	$ 25.90	$ 28.70
7	16	$ 32.80	$ 32.80
8	18	$ 39.60	$ 36.90
9	20	$ 46.00	$ 41.00
10	22	$ 56.10	$ 45.10
11	24	$ 63.60	$ 49.20
12			
13			
14			
15			

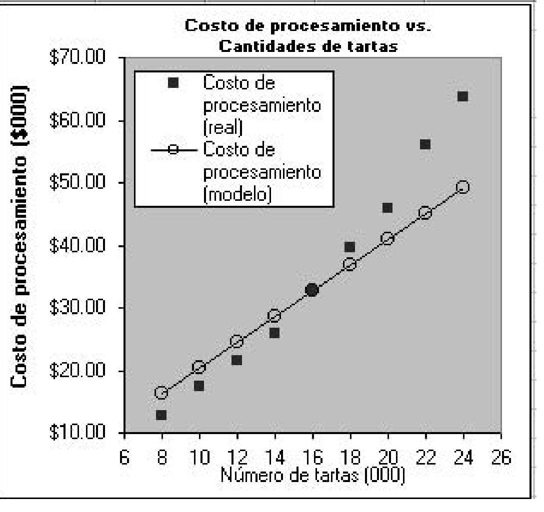


FIGURA 2.4

Simon Pie Actual *Versus* Costo de Procesamiento Proyectado

procesamiento proyectado que se obtiene con el modelo (= 2.05 * Tartas demandadas) se presentan en forma tabular y gráfica en la figura 2.4. Observamos que la fórmula del Costo de procesamiento del modelo no proporciona un buen ajuste con respecto a los datos. Además, el gráfico de los datos del costo de procesamiento sugiere que, en el caso de Simon, sería más apropiado usar una ecuación no lineal.

Aun cuando se puede usar la deducción matemática para desarrollar la lógica de una mejor ecuación del costo de procesamiento, otra forma de desarrollar una ecuación que represente dicho costo consiste en utilizar la capacidad de línea de tendencia de Excel para ajustar una ecuación determinada a los datos existentes. Con este propósito, Simon selecciona los puntos que representan los datos en el gráfico, oprime el botón derecho del ratón y en el menú desplegado escoge el comando de menú Línea de tendencia, como muestra la figura 2.5.

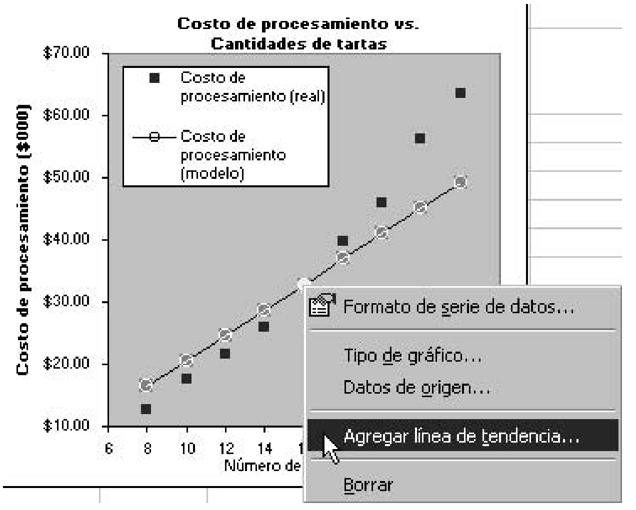


FIGURA 2.5

Línea de tendencia para revisar la *fórmula del costo* de procesamiento

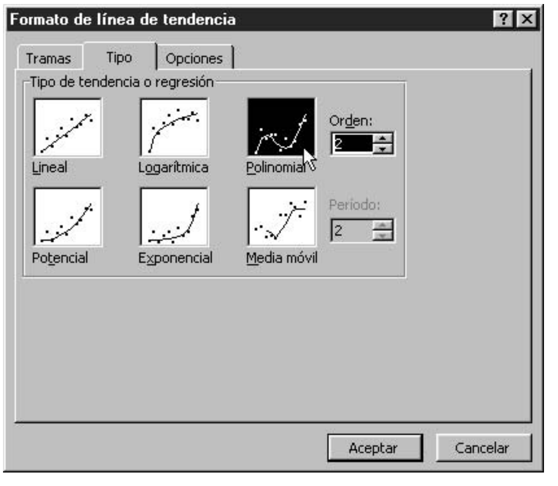


FIGURA 2.6

Ecuación polinomial de segundo orden

Simon elige una relación cuadrática, es decir, un polinomio de segundo orden para ver si obtiene una mejor representación de sus datos con una ecuación polinomial simple, como muestra la figura 2.6.

Simon decide que la ecuación tenga su intersección en el origen y oprime el botón Aceptar, como muestra la figura 2.7. La ecuación final se presenta en la figura 2.8; al examinarla vemos que se ajusta mejor a los datos del costo de procesamiento.[1]

En la figura 2.9 se ilustra el modelo revisado de Simon Pie, al cual se ha incorporado ahora la nueva ecuación para el costo de procesamiento.

Los pasos antes descritos son un ejemplo del ciclo o circuito cerrado que se presenta en la construcción de modelos, que ya habíamos mencionado en el capítulo 1. A partir de un simple modelo deductivo, usted examina el comportamiento de cada ecuación importante frente a datos reales o datos hipotéticos que reflejan sus propios juicios. Después, cada ecuación del modelo original es revisada según se requiera. En el ejemplo de Simon Pie, varios procedimientos iterativos similares serán determinantes en la revisión que realice Simon de otras relaciones hipotéticas contenidas en el modelo, como las que permiten determinar las ecuaciones del costo de los ingredientes o la ecuación de la demanda de tartas.

[1]Esta aproximación a la construcción de un modelo, en la cual se parte de los datos disponibles para identificar una ecuación, resulta apropiada para determinar relaciones hipotéticas o para curvas que se ajustan fielmente a los datos. En el caso de datos reales, si la curva ajustada no se aproxima en grado suficiente a todos los puntos correspondientes a los datos, las sutiles complejidades de lidiar con "ruido" contenido en los datos requieren el uso de un modelo probabilístico para interpretar el ajuste. Aplazaremos este caso hasta el capítulo 13, dedicado a los pronósticos.

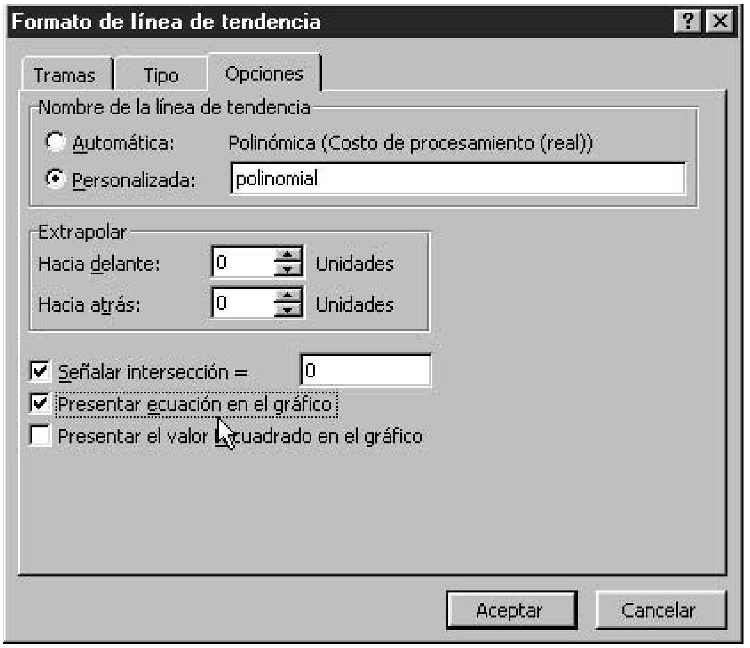


FIGURA 2.7

Opciones de la línea de tendencia

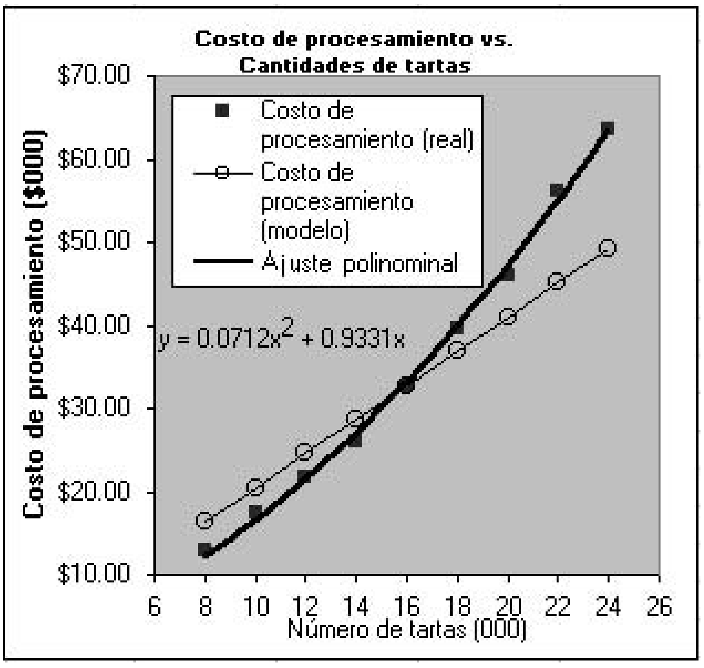


FIGURA 2.8

Ecuación del costo

Una de las consecuencias de refinar un modelo para incluir en él ecuaciones revisadas es que en la hoja de cálculo electrónica aparecen coeficientes de carácter más técnico. Es decir, empiezan a aparecer datos que en el modelo no tienen su homólogo en los informes administrativos. Muchos constructores de modelos optan por "enterrar" esos coeficientes técnicos dentro de las fórmulas de la hoja de cálculo, lo cual constituye una violación a la quinta recomendación anterior. Un posible remedio consiste en usar las opciones: Agrupar y Esquema de Excel. Estas opciones pueden usarse para ocultar datos técnicos cuando el modelo se imprime en un informe, pero conservándolos en la hoja de cálculo electrónica Excel. En el modelo de Simon Pie, los coeficientes técnicos de las dos ecuaciones, tartas demandadas y costo de procesamiento, pueden omitirse antes de imprimir informes. Basta seleccionar las filas correspondientes y escoger el comando de menú Agrupar, como muestra la figura 2.10.

	A	B
1	**Simon Pie Co. -- Modelo de ganancias semanal**	
2	**Variable de decisión:**	
3	Precio de la tarta	$8.00
4		
5	**Parámetros:**	
6	Costo unitario del relleno de fruta ($ por tarta)	$3.48
7	Costo unitario de la masa ($ por tarta)	$0.30
8	Costo fijo ($000)	$12
9	Coeficientes de la ecuación	
10	Ecuación de la demanda de tartas	
11	Intersección	48
12	Pendiente (coeficiente lineal)	-4
13	Ecuación de procesamiento de costos	
14	Coeficiente lineal	0.9331
15	Coeficiente cuadrático	0.0712
16	**Resultados físicos (000)**	
17	Tartas demandadas y vendidas	$16.0
18	**Resultados financieros ($000)**	
19	Ingresos	$128
20	Costo de procesamiento	$33
21	Costo de los ingredientes	$60
22	Costos generales	$12
23	Costo total	$106
24	Ganancias (antes de impuestos)	$22

	A	B
1	**Simon Pie Co. -- M**	
2	**Variable de decisió**	
3	Precio de la tarta	8
4		
5	**Parámetros:**	
6	Costo unitario del relle	3.48
7	Costo unitario de la ma	0.3
8	Costo fijo ($000)	12
9	Coeficientes de la ecua	
10	Ecuación de la demand	
11	Intersección	48
12	Pendiente (coeficien	-4
13	Ecuación de procesam	
14	Coeficiente lineal	0.9331
15	Coeficiente cuadrático	0.0712
16	**Resultados físicos**	
17	Tartas demandadas y ve	=B11+B12*B3
18	**Resultados financie**	
19	Ingresos	=B17*B3
20	Costo de procesamier	=(B14+B15*B17)*B
21	Costo de los ingredien	=(B6+B7)*B17
22	Costos generales	=B8
23	Costo total	=SUM(B20:B22)
24	Ganancias (antes de imp	=B19-B23

FIGURA 2.9

Modelo revisado de Simon Pie

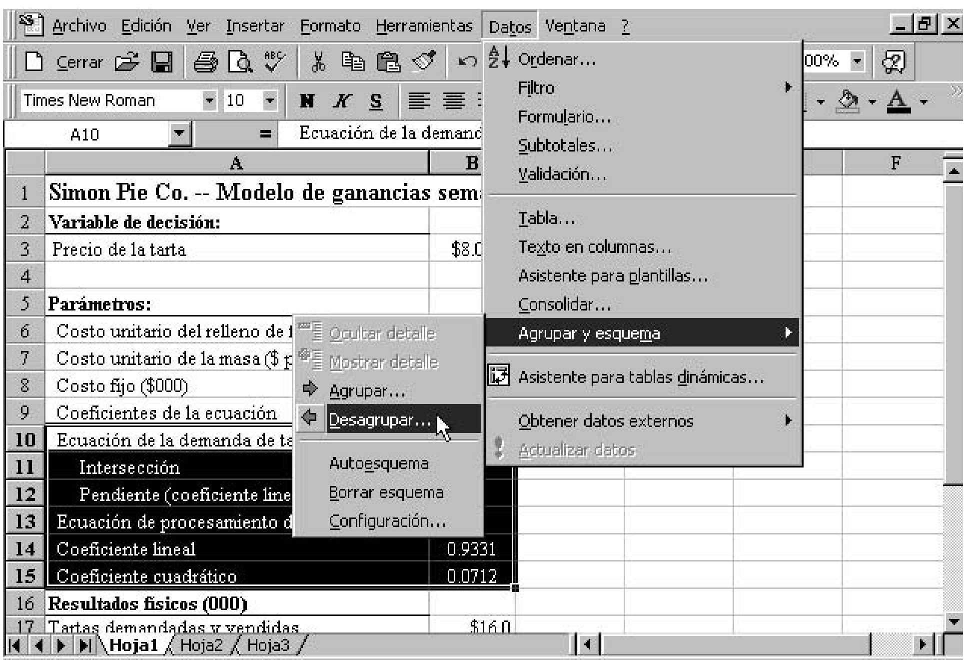


FIGURA 2.10

Cómo agrupar filas para usar el comando Esquema en el modelo de Simon Pie

Con un clic en el botón − del esquema que aparece en la figura 2.11, esas filas se contraerán para simplificar la impresión y la visualización.

Con un clic en el botón + las filas volverán a aparecer para las operaciones de construcción y análisis del modelo, como muestra la figura 2.12.

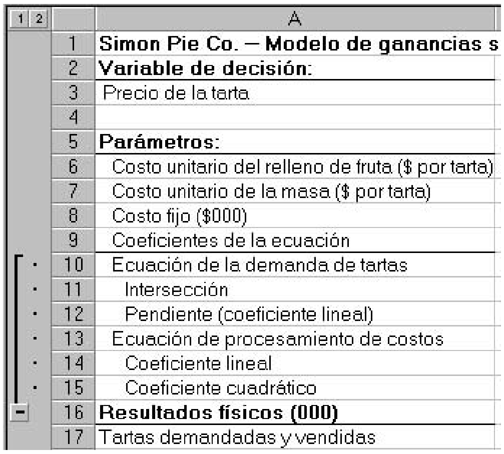


FIGURA 2.11

Presentación de esquema en el modelo de Simon Pie

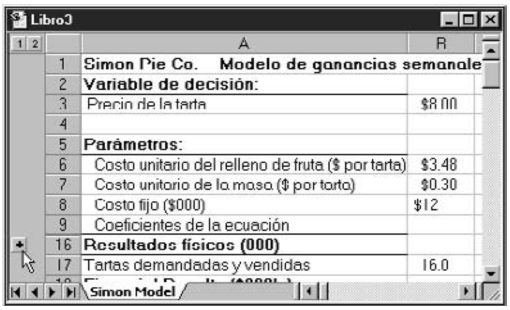


FIGURA 2.12

Esquema contraído del modelo de Simon Pie

PROYECCIÓN "¿QUÉ PASARÍA SI?"

Una vez que el comportamiento de las relaciones individuales es validado, ya puede comenzar el análisis sistemático del modelo. El análisis más sencillo que se aplica a modelos en hojas de cálculo electrónicas consiste en proyectar las consecuencias de otras entradas optativas, según lo que se conoce como una **proyección "¿qué pasaría si?"**.[2] Las proyecciones "¿qué pasaría si?" son exactamente lo que su nombre sugiere. Simon desea saber qué ocurriría con ciertas variables endógenas que le interesan si alguna característica de su ambiente de operación (un parámetro) o su variable de decisión cambiara de un modo específico. Es evidente que esas preguntas son fundamentales en cualquier tarea administrativa, por lo cual la proyección "¿qué pasaría si?" es, por amplio margen, la aplicación más popular de los modelos construidos en hojas de cálculo electrónicas. En su modelo final, Simon puede examinar las consecuencias de los cambios en sus suposiciones y/o decisiones en términos de ganancias. La figura 2.13 muestra los diferentes resultados obtenidos para dos de las preguntas "¿qué pasaría si?" de Simon: los montos de las ganancias cuando el precio de la tarta es $7 y $9 respectivamente.

Aunque las proyecciones "¿qué pasaría si?" en Excel son muy directas, tienen tres limitaciones:

1. A menos que se impriman resúmenes con los datos por separado, los resultados de una nueva proyección "¿qué pasaría si?" borran los resultados de la respuesta anterior, pues la hoja electrónica vuelve a hacer sus cálculos para la nueva entrada, y eso dificulta las comparaciones;
2. Es difícil "ver" o "llegar a percibir" las relaciones cuando solamente se puede repasar un resultado "¿qué pasaría si?" a la vez; y
3. El análisis del modelo mediante proyecciones repetidas "¿qué pasaría si?" es un poco aleatorio.

Afortunadamente, Excel tiene incorporados varios comandos para compensar cada una de esas limitaciones. En caso de que todo el modelo esté contenido en una sola columna, el método más general para construir una tabla con varias proyecciones de "¿qué pasaría si?" consiste en

[2]Algunos constructores de modelos llaman a esto "extrapolación" o "pronóstico", pero hemos preferido reservar esos términos para usarlos con modelos probabilísticos.

	A	B
1	**Simon Pie Co. — Modelo de ganancias semanales**	
2	**Variable de decisión:**	
3	Precio de la tarta	$7.00
4		
5	**Parámetros:**	
6	Costo unitario del relleno de fruta ($ por tarta)	$3.48
7	Costo unitario de la masa ($ por tarta)	$0.30
8	Costo fijo ($000)	$12
9	Coeficientes de la ecuación	
16	**Resultados físicos (000)**	
17	Tartas demandadas y vendidas	20.0
18	**Resultados Financieros ($000's)**	
19	Ingresos	$140
20	Costo de procesamiento	$47
21	Costo de los ingredientes	$76
22	Costos generales	$12
23	Costo total	$135
24	Ganancias (antes de impuestos)	$5

	A	B
1	**Simon Pie Co. — Modelo de ganancias semanales**	
2	**Variable de decisión:**	
3	Precio de la tarta	$9.00
4		
5	**Parámetros:**	
6	Costo unitario del relleno de fruta ($ por tarta)	$3.48
7	Costo unitario de la masa ($ por tarta)	$0.30
8	Costo fijo ($000)	$12
9	Coeficientes de la ecuación	
16	**Resultados físicos (000)**	
17	Tartas demandadas y vendidas	12.0
18	**Resultados Financieros ($000's)**	
19	Ingresos	$108
20	Costo de procesamiento	$21
21	Costo de los ingredientes	$45
22	Costos generales	$12
23	Costo total	$78
24	Ganancias (antes de impuestos)	$30

FIGURA 2.13

Dos proyecciones "¿qué pasaría si?" para el modelo de Simon

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Simon Pie Co. -- Modelo de ganancias semanales**							
2	**Variable de decisión:**							
3	Precio de la tarta	$6.00	$7.00	$8.00	$9.00	$9.50	$10.00	$11.00
4								
5	**Parámetros:**							
6	Costo unitario del relleno de fruta ($ por tarta)	$3.48	$3.48	$3.48	$3.48	$3.48	$3.48	$3.48
7	Costo unitario de la masa ($ por tarta)	$0.30	$0.30	$0.30	$0.30	$0.30	$0.30	$0.30
8	Costo fijo ($000)	$12	$12	$12	$12	$12	$12	$12
9	Coeficientes de la ecuación							
16	**Resultados físicos (000)**							
17	Tartas demandadas y vendidas	24.00	20.0	16.0	12.0	10.0	8.0	4.0
18	**Resultados Financieros ($000's)**							
19	Ingresos	$144	$140	$128	$108	$95	$80	$44
20	Costo de procesamiento	$63	$47	$33	$21	$16	$12	$5
21	Costo de los ingredientes	$91	$76	$60	$45	$38	$30	$15
22	Costos generales	$12	$12	$12	$12	$12	$12	$12
23	Costo total	$166	$135	$105	$79	$66	$54	$32
24	Ganancias (antes de impuestos)	($22)	$5	$23	$29	$29	$26	$12

FIGURA 2.14

Decisiones alternativas: Modelo de Simon Pie

copiar el modelo completo en columnas adyacentes, una para cada escenario "¿qué pasaría si?".[3] En realidad, cada columna se convierte así en una copia del modelo original, lo cual nos permite comparar y contrastar las consecuencias de múltiples cambios introducidos en los valores de los datos, como ilustra la figura 2.14.

También en el caso de un cambio sistemático en una sola variable, este esquema del modelo se presta al uso del Asistente para gráficos a fin de ilustrar los resultados del modelo, como muestra la figura 2.15. En este ejemplo, a partir del gráfico es fácil comprobar que la medida del desempeño, es decir las ganancias, es mayor cuando el precio de la tarta es de unos $9.25, y que el punto de equilibrio con ganancias cero se presenta con un precio de la tarta de $6.75 aproximadamente.

En el modelo de Simon Pie que aparece en la figura 2.14 se usan columnas para reproducir el modelo y permitir que varias proyecciones "¿qué pasaría si?" se tabulen juntas; en este caso, para analizar varios posibles precios semanales de las tartas. En otras versiones del modelo, las columnas pueden diseñarse como intervalos de tiempo. Así lo observamos en la figura 2.16, en la cual se han agregado cuatro modelos semanales para producir un modelo mensual consolidado. En el caso de Simon Pie, el modelo mensual se obtiene sumando las variables de los cuatro modelos semanales. En otras situaciones, la consolidación es algo más complicado que una simple suma. Por ejemplo, es posible que sea necesario rastrear las cantidades correspondientes a inventarios a través del tiempo.

[3] Si el modelo completo original ya ocupa varias columnas, entonces el generador de informes de Excel, llamado Administrador de escenarios, constituye una forma alternativa para crear escenarios múltiples.

SUGERENCIA: ***Si los datos del eje X no están uniformemente espaciados —es decir, si no existe un intervalo común entre los diversos puntos— asegúrese de emplear un tipo de gráfico de dispersión XY de Excel. Los gráficos de otros tipos distorsionarán la apariencia real de este gráfico si los datos del eje X no se encuentran uniformemente espaciados. Consulte el Apéndice Excel si necesita información adicional.***

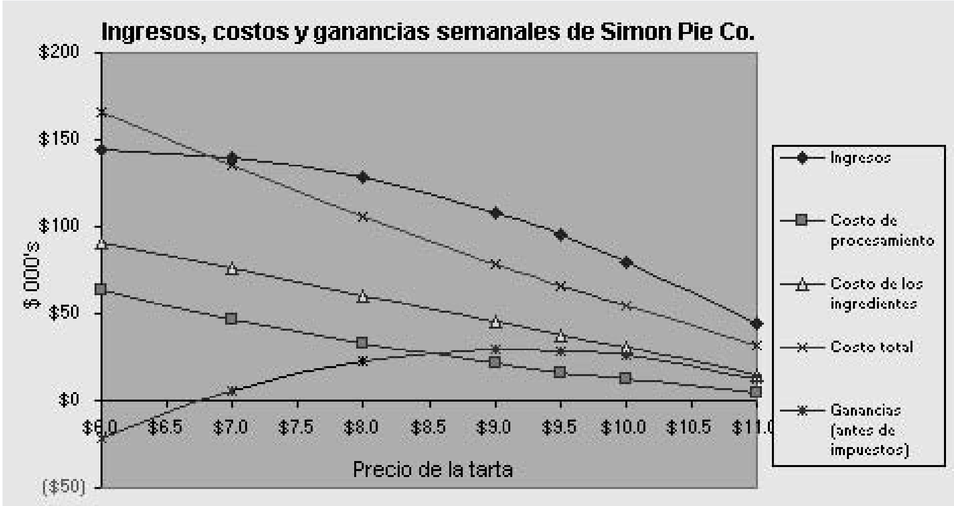


FIGURA 2.15

Gráfico de ingresos, costos y ganancias de Simon Pie

FIGURA 2.16

Modelo mensual de Simon Pie

	A	B	C	D	E	F
1	**Simon Pie Co. -- Modelo de ganancias mensuales**					
2		**Semana 1**	**Semana 2**	**Semana 3**	**Semana 4**	**Total**
3	**Variable de decisión:**					
4	Precio de la tarta	$9.00	$9.40	$8.90	$9.20	$9.50
5	**Parámetros:**					
6	Costo unitario del relleno de fruta ($ por tarta)	$3.48	$3.43	$3.52	$3.47	$3.48
7	Costo unitario de la masa ($ por tarta)	$0.30	$0.28	$0.31	$0.30	$0.30
8	Costo fijo ($000)	$12	$12	$12	$12	$12
9	Coeficientes de la ecuación					
16	**Resultados físicos (000)**					
17	Tartas demandadas y vendidas	12.0	10.4	12.4	11.2	46.0
18	**Resultados Financieros ($000's)**					
19	Ingresos	$108.00	$97.76	$110.36	$103.04	$419.16
20	Costo de procesamiento	$21.45	$17.41	$22.52	$19.38	$80.76
21	Costo de los ingredientes	$45.36	$38.58	$47.49	$42.22	$173.65
22	Costos generales	$12.00	$12.00	$12.00	$12.00	$48.00
23	Costo total	$78.81	$67.99	$82.01	$73.60	$302.41
24	Ganancias (antes de impuestos)	$29.19	$29.77	$28.35	$29.44	$116.75

2.3 EJEMPLO 2: XERTECH COPY, INC.

Muchos modelos de hojas de cálculo electrónicas tienen sólo unas cuantas entradas (parámetros y variables de decisión), y tanto la lógica como las medidas de desempeño se definen casi exclusivamente en función de la contabilidad financiera. En esos casos, el análisis consiste en examinar los resultados alternativos de diversas entradas para el modelo, como se ilustra en el ejemplo de XerTech.

Emily y Bill Peterson han decidido fundar una compañía, XerTech Copy, que instalará máquinas de autocopiado en los locales de sus clientes: bibliotecas, universidades, preparatorias, centros comerciales, etc. Ellos han planeado mantener sus costos de capital en un nivel mínimo, alquilando copiadoras para uso pesado, provistas de un dispositivo adjunto de autoservicio que funciona con monedas. Además del costo de alquiler y otros gastos de la copiadora, XerTech pagaría una cuota a la organización cliente que le proporcionara espacio para instalarla. La cuota consistiría en un pago mensual fijo por alquiler de espacio. Como parte de su plan de negocios para XerTech, Emily y Bill hicieron las siguientes suposiciones:

Número de copiadoras alquiladas (variable de decisión)	40
Precio cobrado por copia (variable de decisión)	$.05
Costo variable por copia (materiales, reparaciones, etc.)	$.03
Tarifa de alquiler mensual de espacio para copiadoras (variable de decisión)	$150
Otros gastos mensuales:	
Costo de alquiler de cada copiadora	$250
Trabajo de recolección de monedas por copiadora	$35
Costos fijos diversos por copiadora	$50

Entonces desarrollaron el modelo de hoja de cálculo electrónica que aparece en la figura 2.17, para analizar la rentabilidad de su nueva empresa. A semejanza del ejemplo de Simon Pie, el esquema de la hoja de cálculo electrónica Excel de los Peterson presenta la forma que recomendamos para facilitar la construcción, depuración e interpretación de modelos. Decidieron (1) colocar rótulos de texto en muchas de las filas y columnas, y (2) indicaron las unidades de medida para cada cantidad. Esos rótulos ayudan a entender el significado de los números que aparecen en la hoja de cálculo. Además, las siete primeras filas presentan (3) las entradas exógenas importantes (parámetros) para el modelo. En todas las fórmulas se usan referencias de cel-

	A	B	C	D	E	F
1	XerTech Copy Inc.					
2	Gasto mensual promedio por copiadora				Número de copiadoras alquiladas	40
3	Costo de alquiler mensual	$250.00				
4	costo de servicio por copiadora	$35.00			Precio cobrado por copia	$0.05
5	Otros costos fijos	$50.00			Costo variable por copia	$0.03
6	Gastos fijos por copiadora	$335.00			Margen por copia	$0.02
7	Tarifa de alquiler de espacio	$150.00				
8						
9	Mensual					
10	Copias/Mes/Copiadora	30,000				
11	Ingresos	$60,000				
12	Costos de bienes vendidos	$36,000				
13	Contribución al margen	$24,000				
14	Costos generales y de administra	$19,400				
15	Ingreso neto	$4,600				

	A	B	C	D	E	F
1	XerTech Copy Inc.					
2	Gasto mensual promedio por				Número de copiadoras alquiladas	40
3	Costo de alquiler mensual	250				
4	sto de servicio por copiadora	35			Precio cobrado por copia	0.05
5	Otros costos fijos	50			Costo variable por copia	0.03
6	Gastos fijos por copiadora	=SUMA(B3:B5)			Margen por copia	=F4-F5
7	Tarifa de alquiler de espacio	150				
8						
9	Mensual					
10	Copias/Mes/Copiadora	30000				
11	Ingresos	=$F$2*B10*$F$4				
12	Costos de bienes vendidos	=$F$2*B10*$F$5				
13	Contribución al margen	=B11-B12				
14	Costos generales y de admin	=$F$2*($B$6+$B$7)				
15	Ingreso neto	=B13-B14				

FIGURA 2.17

Primera hoja de cálculo electrónica de XerTech das para localizar las celdas donde se encuentran los parámetros, en lugar de utilizar directamente los datos de los parámetros como números en las ecuaciones de la fórmula. Las filas restantes constituyen (4) la variable de interés de entrada (copias al mes por copiadora) y (5) la lógica principal del modelo; en este caso, una declaración de ingresos cuyo resultado es el cálculo de medición del desempeño de salida, es decir el Ingreso neto mensual.

Los Peterson están considerando varios convenios alternativos sobre los pagos del alquiler de espacio para las copiadoras. Además de proponer la cuota fija de alquiler mensual de $150 por copiadora, podrían optar por ofrecer a sus clientes un pago más bajo por concepto de alquiler de espacio, más el pago de una comisión por cada copia realizada. Por ejemplo, una empresa cliente podría preferir que se le pagaran solamente $50 al mes por el alquiler de espacio para cada copiadora, pero recibiendo el pago de una comisión de medio centavo por cada copia producida. En una tercera opción que ahora está bajo estudio, se propondría un alquiler mensual fijo de $75, más el pago de un centavo de comisión por copia, que sólo se pagaría por la parte del volumen mensual que rebasara una cifra límite determinada, por ejemplo, 20,000 copias al mes. Antes de anunciar esos planes alternativos de alquiler, los Peterson desean observar en forma comparativa los volúmenes correspondientes al punto de equilibrio de su nueva empresa con las tres opciones.

En lugar de escribir y analizar cada una de las alternativas en hojas de cálculo diferentes, como si fueran varios modelos independientes, la formulación preferida consiste en presentar los tres modelos en una sola hoja de cálculo electrónica, dedicando una columna a cada opción. Esto permite hacer comparaciones administrativas inmediatas entre las principales opciones, como muestra la figura 2.18.

	A	B	C	D
1	XerTech Copy Inc.			
2	Gasto mensual promedio por copiadora		Número de copiadoras alquiladas	40
3	Costo de alquiler mensual	$250.00		
4	Costo de servicio por copiadora	$35.00	Precio cobrado por copia	$0.05
5	Otros costos fijos	$50.00	Costo variable por copia	$0.03
6	Gastos fijos por copiadora	$335.00	Margen por copia	$0.02
7				
8		Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3
9		Cuota de alquiler fija	Cuota de alquiler + comisión	Cuota de alquiler + comisión pasando cierto límite
10	Copias/mes/copiadora	30,000	30,000	30,000
11	Tarifa de alquiler de espacio	$150.00	$50.00	$75.00
12	Tarifa de la comisión		$0.005	$0.01
13	Comisión a partir del límite de			20,000
14	Ingreso mensual	Sin comisión	Con comisión	Con comisión sobre ventas>límite
15	Ingresos	$60,000	$60,000	$60,000
16	Costo de los bienes vendidos	$36,000	$42,000	$40,000
17	Margen de contribución	$24,000	$18,000	$20,000
18	Costos generales y administrativ	$19,400	$15,400	$16,400
19	Ingreso neto	$4,600	$2,600	$3,600

	A	B	C	D
1	XerTech Copy Inc.			
2	Gasto mensual promedio p		Número de copiadoras alqui	40
3	Costo de alquiler mensual	250		
4	Costo de servicio por copia	35	Precio cobrado por copia	0.05
5	Otros costos fijos	50	Costo variable por copia	0.03
6	Gastos fijos por copiadora	=SUMA(B3:B5)	Margen por copia	=D4-D5
7				
8				Escenario
9		Cuota de alquiler fija	Cuota de alquiler + comisión	Cuota de alquiler + comisión pasando cierto límite
10	Copias/mes/copiadora	30000	30000	30000
11	Tarifa de alquiler de espacio	150	50	75
12	Tarifa de la comisión		0.005	0.01
13	Comisión a partir del límite			20000
14	Ingreso mensual	Sin comisión	Con comisión	Con comisión sobre ventas>límite
15	Ingresos	=$D$2*B10*$D$4	=$D$2*C10*$D$4	=$D$2*D10*$D$4
16	Costo de los bienes vendid	=$D$2*B10*$D$5	=$D$2*C10*($D$5+C12)	=$D$2*(D10*$D$5+SI(D10<=D13,0,D12*(D10-D13)))
17	Margen de contribución	=B15-B16	=C15-C16	=D15-D16
18	Costos generales y adminis	=$D$2*($B$6+B11)	=$D$2*($B$6+C11)	=$D$2*($B$6+D11)
19	Ingreso neto	=B17-B18	=C17-C18	=D17-D18

FIGURA 2.18

La segunda hoja de cálculo de XerTech: tres opciones para el pago del alquiler

En virtud de que las columnas están ocupadas por las principales opciones en el modelo de XerTech, no es posible registrar las proyecciones de "¿qué pasaría si?" para una opción determinada copiando simplemente las fórmulas a través de las columnas, como hicimos en el caso de Simon Pie. Sin embargo, si sólo una de las variables exógenas va a modificarse en forma sistemática, el comando Tabla 1 del menú Datos de Excel puede usarse para registrar las proyecciones de "¿qué pasaría si?" con cualquiera de las alternativas. Es decir, la Tabla de datos 1 permite que una sola variable exógena se modifique dentro de un intervalo especificado, y presenta los resultados en forma tabular para cada una de las múltiples variables endógenas (variables de consecuencias y del desempeño).

Antes de utilizar el comando **Tabla de datos,** es necesario definir los valores de la variable exógena que es única en una región vacía de la hoja de cálculo. Dichos valores pueden estar escritos en una columna o en una fila; en este ejemplo, ilustrado en la figura 2.19, los valores se encuentran en una fila. A continuación, cada una de las variables endógenas que nos interesa observar se introduce en una fila por separado, debajo de la primera. No existe límite en cuanto al número de esas filas. La columna que está a la izquierda de la fila donde se han introducido los valores de la variable exógena (la columna G en la figura 2.19), es especial. Es necesario que tenga una celda vacía (G2 en este caso) precisamente en la fila donde se encuentran los valores de la variable exógena, y en las filas siguientes (G3:G7), debe tener una referencia a la ubicación de la celda del modelo donde se calcula el valor de la variable endógena correspondiente a esa fila. En forma opcional, la siguiente columna hacia la izquierda (la columna F en la figura 2.19) puede contener rótulos. (Estos rótulos tienen propósitos de documentación y no forman parte del comando Tabla de datos.) La distribución final de la Tabla de datos (que hemos llamado Tabla de datos 1 porque en ella sólo una variable exógena puede cambiar) y sus fórmulas para la primera alternativa del modelo XerTech aparecen en la figura 2.19.

A continuación, seleccione las celdas de todas las filas de la tabla, incluidas las de la columna de la izquierda que contienen las referencias a las celdas del modelo, pero no los rótulos (si los hubiera) y seleccione el comando Tabla como muestra la figura 2.20.

Puesto que los valores de la variable exógena se presentan en la primera fila (la fila 2 en este caso), la referencia a la celda del modelo en la cual se calcularán dichos valores se indica en el cuadro de diálogo correspondiente a Tabla en el campo "Celda de entrada (fila):", como

	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**Tabla de datos -- Alternativa 1**								
2	Copias/mes/copiadora		10000	15000	20000	25000	30000	35000	40000
3	Ingreso	$60,000							
4	Costo de los bienes vendidos	$36,000							
5	Margen de contribución	$24,000							
6	Costos generales y de administración	$19,400							
7	Ingreso neto	$4,600							

	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**Tabla de datos -- Alternativa 1**								
2	Copias/mes/copiadora		10000	15000	20000	25000	30000	35000	40000
3	Ingreso	=B15							
4	Costo de los bienes vendidos	=B16							
5	Margen de contribución	=B17							
6	Costos generales y de administración	=B18							
7	Ingreso neto	=B19							

FIGURA 2.19

Esquema de la Tabla de datos 1

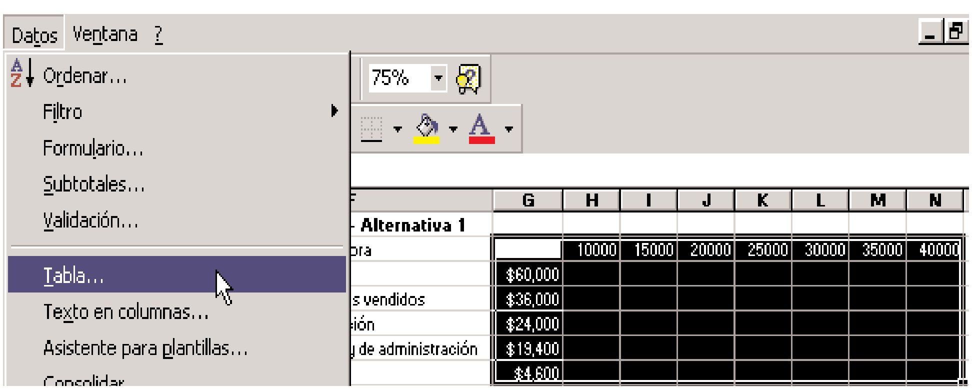


FIGURA 2.20

Exposición de la Tabla de datos

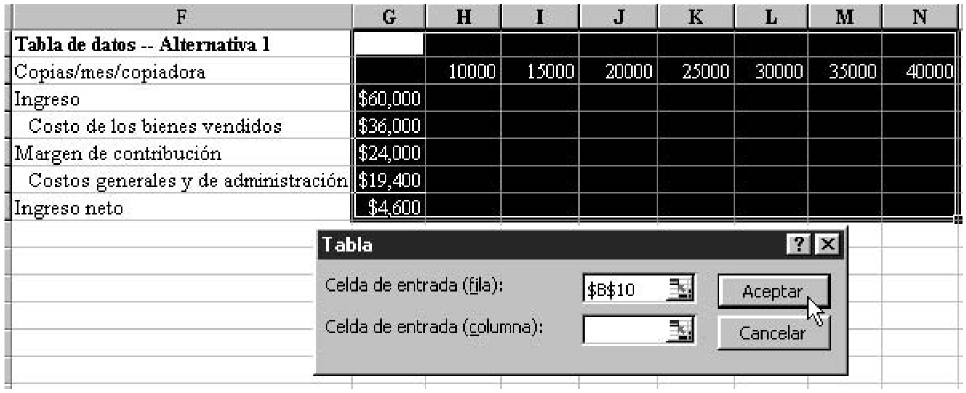


FIGURA 2.21

Cómo llenar el cuadro de diálogo Tabla

	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**Tabla de datos -- Alternativa 1**								
2	Copias/mes/copiadora		10000	15000	20000	25000	30000	35000	40000
3	Ingresos	$60,000	$20,000	$30,000	$40,000	$50,000	$60,000	$70,000	$80,000
4	Costo de los bienes vendidos	$36,000	$12,000	$18,000	$24,000	$30,000	$36,000	$42,000	$48,000
5	Margen de contribución	$24,000	$8,000	$12,000	$16,000	$20,000	$24,000	$28,000	$32,000
6	Costos generales y de admón.	$19,400	$19,400	$19,400	$19,400	$19,400	$19,400	$19,400	$19,400
7	Ingreso neto	$4,600	($11,400)	($7,400)	($3,400)	$600	$4,600	$8,600	$12,600

FIGURA 2.22

Tabla de datos 1 completa

muestra la figura 2.21. (Inversamente, si dichos valores se hubieran escrito en una columna, entonces se habría utilizado el campo "Celda de entrada columna".) El cuadro de diálogo correspondiente al otro tipo de celda de entrada se deja en blanco.

Al hacer clic en Aceptar, el modelo es evaluado con cada uno de los valores de entrada de la variable exógena, y se completa la tabla correspondiente a la lista de valores de la variable endógena, tomados del modelo para ese valor de esa entrada, como muestra la figura 2.22.

Como vimos en el ejemplo de Simon Pie, esta información puede usarse para construir un gráfico, como se aprecia en la figura 2.23. Nota: a causa de la presencia de la celda en blanco que se deja en la esquina superior izquierda de la tabla, el Asistente de gráficos ignora automáticamente la información innecesaria de la columna G.

A partir del gráfico es fácil verificar que la medida de desempeño, es decir el ingreso neto, es lineal en el volumen de producción de cada copiadora, y que el punto de equilibrio (ingreso neto cero) se presenta cuando el volumen es de unas 24,000 copias al mes por copiadora.

Utilizando el comando **Buscar objetivo** de Excel, es posible encontrar estimaciones más precisas para las salidas del modelo que pudieran interesarnos. Buscar objetivo calcula automáticamente el valor de una sola variable de entrada del modelo que produzca el valor deseado en una sola variable endógena de salida, casi siempre una medida de desempeño. Por ejemplo, Buscar objetivo puede usarse para encontrar el valor del punto de equilibrio en términos de copias al mes por copiadora. Seleccione primero la opción "Buscar objetivo..." en el menú Herramientas de Excel, como muestra la figura 2.24.

Ya sea escribiendo directamente la referencia de la celda o haciendo clic en la celda misma dentro de la hoja de cálculo, indique la celda donde se encuentra la fórmula que permite calcular el valor de la variable endógena de salida Ingreso neto ("Definir la celda"); como respuesta a "con el valor", escriba el cero que corresponde al punto de equilibrio; en "para cambiar la celda", indique la celda que contiene la fórmula para calcular el volumen mensual por copiadora; y haga clic en Aceptar, como muestra la figura 2.25.

Excel empezará entonces a iterar sistemáticamente el modelo de la Alternativa 1, usando diferentes valores de entrada en la celda indicada "para cambiar", hasta que logra obtener la salida deseada para la celda previamente "definida" por usted, si tal cosa es posible, como muestra la figura 2.26.[4] En este caso, el volumen que conduce al punto de equilibrio resultó ser de 24,250 copias al mes por copiadora.

[4]Se realiza una búsqueda sistemática, comenzando con el valor inicial de la celda. Si más de un valor de la celda sometida a cambio produce el valor deseado en la celda de salida, el procedimiento Buscar objetivo se detendrá cuando se encuentre el primero de dichos valores. Las discontinuidades de un modelo ocasionadas por declaraciones SI(), por ejemplo, pueden hacer que falle Buscar objetivo.

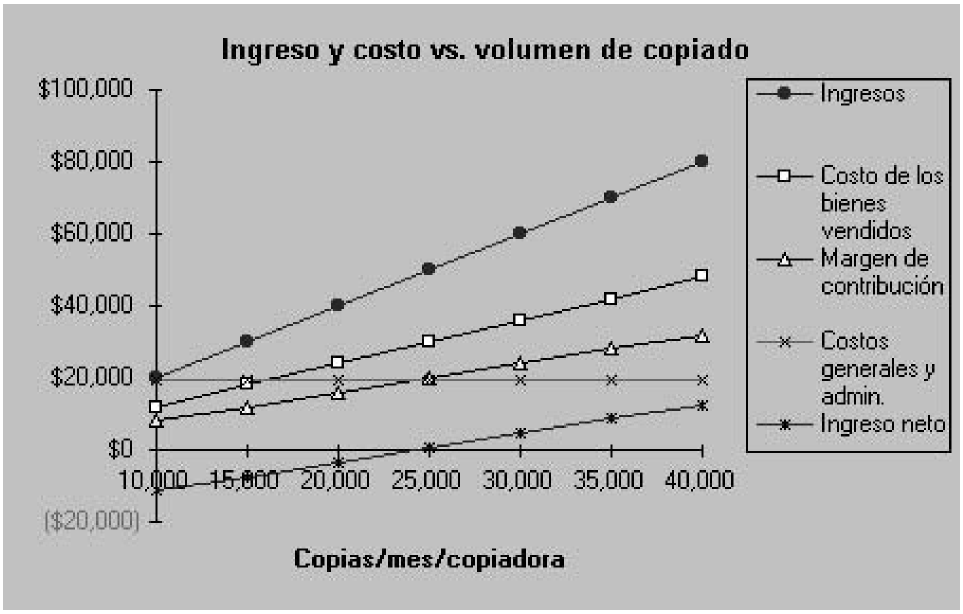


FIGURA 2.23

Gráfico de los resultados de la Tabla de datos 1

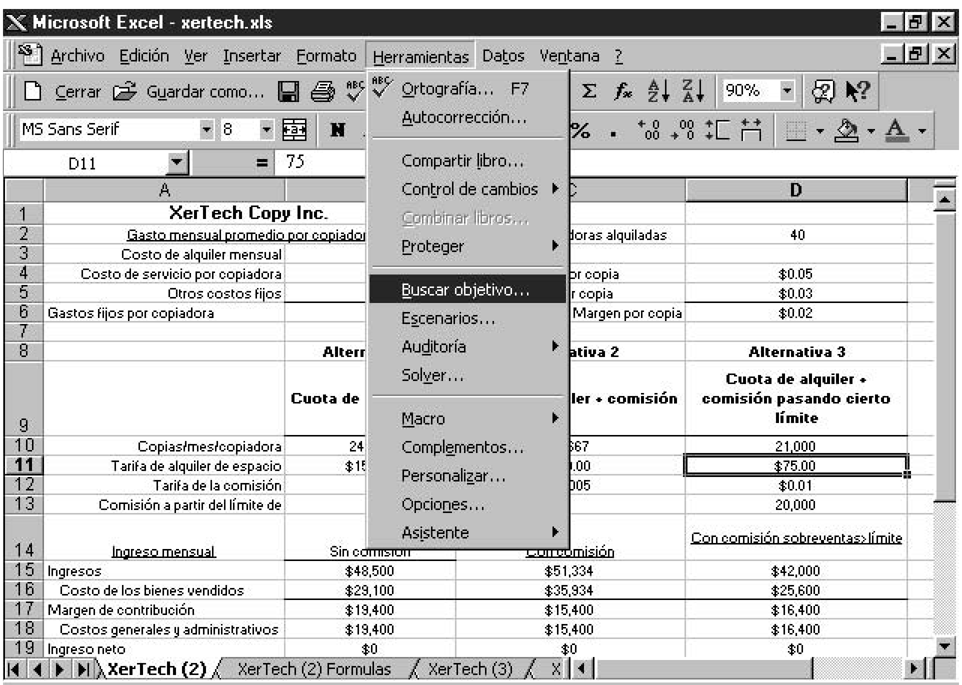
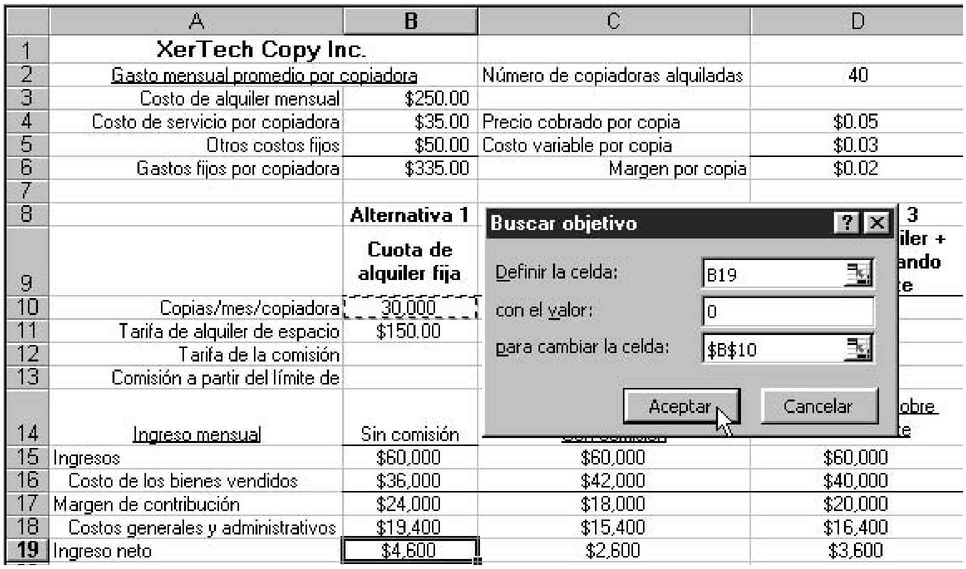


FIGURA 2.24

Buscar objetivo

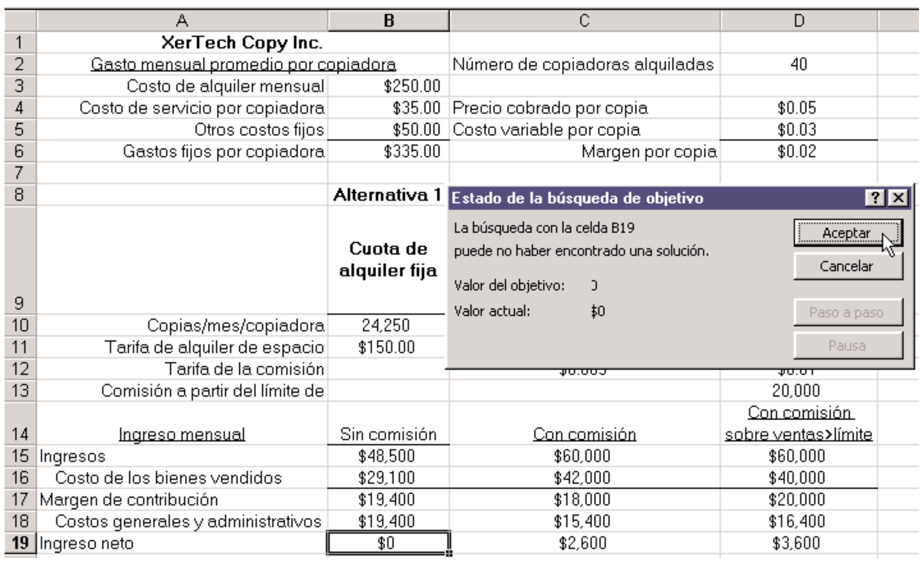
SUGERENCIA: ***Cuando las referencias de celdas se introducen en los cuadros de diálogo de Excel haciendo clic sobre celdas de la hoja de cálculo, en el cuadro de diálogo se registran direcciones absolutas como referencia de las celdas. En todos los casos, el uso de referencias de celda absolutas o relativas en los diálogos produce los mismos resultados.***



	A	B	C	D
1	XerTech Copy Inc.			
2	Gasto mensual promedio por copiadora		Número de copiadoras alquiladas	40
3	Costo de alquiler mensual	$250.00		
4	Costo de servicio por copiadora	$35.00	Precio cobrado por copia	$0.05
5	Otros costos fijos	$50.00	Costo variable por copia	$0.03
6	Gastos fijos por copiadora	$335.00	Margen por copia	$0.02
7				
8		Alternativa 1		3
9		Cuota de alquiler fija		iler + ando e
10	Copias/mes/copiadora	30,000		
11	Tarifa de alquiler de espacio	$150.00		
12	Tarifa de la comisión			
13	Comisión a partir del límite de			
14	Ingreso mensual	Sin comisión		obre e
15	Ingresos	$60,000	$60,000	$60,000
16	Costo de los bienes vendidos	$36,000	$42,000	$40,000
17	Margen de contribución	$24,000	$18,000	$20,000
18	Costos generales y administrativos	$19,400	$15,400	$16,400
19	Ingreso neto	$4,600	$2,600	$3,600

FIGURA 2.25

Cuadro de diálogo Buscar objetivo



	A	B	C	D
1	XerTech Copy Inc.			
2	Gasto mensual promedio por copiadora		Número de copiadoras alquiladas	40
3	Costo de alquiler mensual	$250.00		
4	Costo de servicio por copiadora	$35.00	Precio cobrado por copia	$0.05
5	Otros costos fijos	$50.00	Costo variable por copia	$0.03
6	Gastos fijos por copiadora	$335.00	Margen por copia	$0.02
7				
8		Alternativa 1		
9		Cuota de alquiler fija		
10	Copias/mes/copiadora	24,250		
11	Tarifa de alquiler de espacio	$150.00		
12	Tarifa de la comisión			
13	Comisión a partir del límite de			20,000
14	Ingreso mensual	Sin comisión	Con comisión	Con comisión sobre ventas>límite
15	Ingresos	$48,500	$60,000	$60,000
16	Costo de los bienes vendidos	$29,100	$42,000	$40,000
17	Margen de contribución	$19,400	$18,000	$20,000
18	Costos generales y administrativos	$19,400	$15,400	$16,400
19	Ingreso neto	$0	$2,600	$3,600

FIGURA 2.26

Volumen mensual que conduce al punto de equilibrio, Alternativa 1

La aplicación repetida de Buscar objetivo a cada una de las tres celdas correspondientes a Ingreso neto proporciona las comparaciones requeridas del punto de equilibrio, como muestra la figura 2.27.

A los Peterson les interesa también conocer los puntos de indiferencia en el ingreso neto con cada una de las tres alternativas. Por ejemplo, suponiendo una producción de 30,000 copias al mes por copiadora, y que la aplicación de la alternativa original del pago de un alquiler fijo de $150 al mes por copiadora y las tasas de comisión alternativas a partir del límite que aparece en la figura 2.27, ¿qué tarifas fijas de alquiler, para cada una de las dos nuevas alternativas, producen resultados de indiferencia en términos del ingreso neto, en comparación con la alternativa original? Para responder esta pregunta, agregue fórmulas a la hoja de cálculo de la figura 2.18 para restar el ingreso neto de la alternativa 2, y el de la alternativa 3 del ingreso neto correspondiente a la alternativa 1, respectivamente, como muestra la figura 2.28.

	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3
	Cuota de alquiler fija	Cuota de alquiler + comisión	Cuota de alquiler + comisión pasando cierto límite
Copias/mes/copiadora	24,250	25,667	21,000
Tarifa de alquiler de espacio	$150.00	$50.00	$75.00
Tarifa de la comisión		$0.005	$0.01
Comisión a partir del límite de			20,000
Ingreso mensual	Sin comisión	Con comisión	Con comisión sobre ventas>límite
Ingresos	$48,500	$51,334	$42,000
Costo de los bienes vendidos	$29,100	$35,934	$25,600
Margen de contribución	$19,400	$15,400	$16,400
Costos generales y administrativos	$19,400	$15,400	$16,400
Ingreso neto	$0	$0	$0

FIGURA 2.27

Comparaciones de punto de equilibrio

	A	B	C	D
14	Ingreso mensual	Sin comisión	Con comisión	Con comisión sobre ventas>límite
15	Ingresos	=$D$2*B10*$D$4	=$D$2*C10*$D$4	=$D$2*D10*$D$4
16	Costo de los bienes	=$D$2*B10*$D$5	=$D$2*C10*($D$5+C12)	=$D$2*(D10*$D$5+SI(D10<=D13,0,D12*(D10-D13)))
17	Margen de contribuc	=B15-B16	=C15-C16	=D15-D16
18	Costos generales y a	=$D$2*($B$6+B11)	=$D$2*($B$6+C11)	=$D$2*($B$6+D11)
19	Ingreso neto	=B17-B18	=C17-C18	=D17-D18
20		Ingreso neto, Alternativa 1 - 2	=B19-C19	
21			Ingreso neto, Alternativa 1 - 3	=B19-D19

FIGURA 2.28

Cálculo de las diferencias del ingreso neto con las distintas alternativas

Esto permite volver a aplicar el comando Buscar objetivo para encontrar los puntos de indiferencia, es decir, los puntos en los cuales la diferencia en términos de Ingreso neto es cero en comparación con la Alternativa 1, como muestran las figuras 2.29 y 2.30.

Aun cuando en este caso los resultados de la figura 2.30 son fáciles de deducir algebraicamente, el uso de Buscar objetivo produce también buenos resultados con modelos más complicados, en los cuales la solución algebraica alcanzaría un grado inadmisible de dificultad.

Si solamente nos interesa estudiar "¿qué pasaría si?" con dos entradas del modelo, entonces podemos disponer de un análisis compacto, ya sea mediante la expansión directa del modelo o usando el comando Tabla de datos 2 de Excel. Ilustraremos este punto en el siguiente ejemplo.

2.4 EJEMPLO 3: ROSA RAISINS

Rosa Raisins (RR) es una compañía procesadora de alimentos, establecida en el condado Napa Wine de California, cuyo negocio consiste en comprar las uvas excedentes de los viñedos en otoño, deshidratarlas para convertirlas en pasas, recubrirlas con una capa de azúcar y venderlas a diversos fabricantes de cereales y golosinas. En primavera, al principio de la temporada del cultivo de la uva, RR tiene que tomar varias decisiones relacionadas entre sí. La primera se refiere a cuántas uvas debe comprar, bajo un contrato vigente de abastecimiento con los viñedos, y la segunda consiste en determinar el precio al cual venderá sus pasas recubiertas de azúcar.

RR dispone de la opción de un contrato con un viñedo que se compromete a suministrarle en otoño la cantidad de uvas que le solicite, al costo fijo de $.25 por libra ($.55/kg), con la condición de que el pedido se haga en primavera. Si después resulta que hay una diferencia entre la cantidad de uvas que la empresa necesita y las que el viñedo le ha proporcionado, RR tiene que comprar el volumen faltante en el mercado abierto, durante el otoño, a un precio que puede fluctuar entre el nivel mínimo histórico de $.15 por libra ($.33/kg) y un valor máximo de $.35 por libra ($.77/kg).

La otra decisión importante que debe tomar esta empresa es el precio al cual venderá sus pasas recubiertas de azúcar. RR tiene varios clientes —grandes procesadores de cereales para el desayuno y golosinas— que, en conjunto, le compran toda su producción de pasas recubiertas de azúcar. RR negocia con esos procesadores, en grupo, para concertar el precio de sus pasas re-

	A	B	C	D	E
8		**Alternativa 1**	**Alternativa 2**	**Alternativa 3**	
9		**Cuota de alquiler fija**	**Cuota de alquiler + comisión**	**Cuota de alquiler + comisión pasando cierto límite**	
10	Copias/mes/copiadora	30,000	30,000	30,000	
11	Tarifa de alquiler de espacio	$150.00	$50.00	$75.00	
12	Tarifa de la comisión		$0.005		
13	Comisión a partir del límite de				
14	Ingreso mensual	Sin comisión	Con comisión		
15	Ingresos	$60,000	$60,000		
16	Costo de los bienes vendidos	$36,000	$42,000		
17	Margen de contribución	$24,000	$18,000		
18	Costos generales y admin.	$19,400	$15,400		
19	Ingreso neto	$4,600	$2,600		
20		Ingreso neto, Alternativa 1 - 2	$2,000		
21			Ingreso neto, Alternativa 1 - 3		

Buscar objetivo

Definir la celda: $C$20

con el valor: 0

para cambiar la celda: $C$11

Aceptar

FIGURA 2.29

Determinación de la indiferencia del alquiler de espacios, Alternativa 2

	A	B	C	D
8		**Alternativa 1**	**Alternativa 2**	**Alternativa 3**
9		**Cuota de alquiler fija**	**Cuota de alquiler + comisión**	**Cuota de alquiler + comisión pasando cierto límite**
10	Copias/mes/copiadora	30,000	30,000	30,000
11	Tarifa de alquiler de espacio	$150.00	$0.00	$50.00
12	Tarifa de la comisión		$0.005	$0.01
13	Comisión a partir del límite de			20,000
14	Ingreso mensual	Sin comisión	Con comisión	Con comisión sobre ventas>límite
15	Ingresos	$60,000	$60,000	$60,000
16	Costo de los bienes vendidos	$36,000	$42,000	$40,000
17	Margen de contribución	$24,000	$18,000	$20,000
18	Costos generales y admin.	$19,400	$13,400	$15,400
19	Ingreso neto	$4,600	$4,600	$4,600
20		Ingreso neto, Alternativa 1 - 2	$0	
21			Ingreso neto, Alternativa 1 - 3	$0

FIGURA 2.30

Puntos de indiferencia, Alternativas 2 y 3

cubiertas de azúcar y determinar la cantidad de dicho producto que comprarán los procesadores al precio negociado. Las negociaciones con los procesadores se realizan en primavera (antes que se conozca el precio que tendrán las uvas en el mercado abierto durante el otoño) y la gerencia de RR ha considerado conveniente analizar sus alternativas.

La gerencia de RR considera que la siguiente conclusión es el juicio más acertado sobre las negociaciones con los procesadores sobre precio y cantidad. Basada en la experiencia de años anteriores, la gerencia de RR estima que (1) si ofrece sus pasas recubiertas de azúcar al precio de $2.15 por libra ($4.74/kg), los procesadores en conjunto demandarán (es decir, harán pedidos por) 700,000 libras (317,513 kg) de ese producto y (2) la demanda total de pasas recubiertas de azúcar tendrá un aumento de 15,000 libras (6804 kg) por cada centavo que reduzca el precio de sus pasas por debajo de $2.15.

Para fabricar pasas recubiertas de azúcar es necesario lavar y secar las uvas hasta convertirlas en pasas; a continuación, éstas se recubren con el azúcar que RR compra a $.30 por libra ($.66/kg). Se necesitan 2.5 libras de uvas (1.13 kg), más .05 libras (.02 kg) de azúcar como recubrimiento para elaborar una libra (.45 kg) de pasas recubiertas de azúcar, correspondiendo todo el resto al agua que se evapora durante la desecación de las uvas. Además del costo de materias primas, uvas y azúcar, la planta de procesamiento de RR tiene un costo variable de $.20 por la conversión de una libra de uvas en pasas, hasta alcanzar su capacidad de 3,500,000 libras (1,587,565 kg) de uvas. Si es necesario procesar más de 3,500,000 libras de uvas, RR tiene que subcontratar el procesamiento de las uvas excedentes con alguna firma competidora, la cual le cobra $.60 por convertir en pasas una libra de uvas. RR tiene también otros costos fijos (gastos generales) en la planta procesadora de uvas, que ascienden a $200,000 al año.

Jan Thurston, negociadora principal de RR, construyó el modelo de la figura 2.31, en Excel, para analizar la situación y como guía para sus futuras negociaciones en torno a los precios y cantidades de las pasas. Su objetivo es estudiar el efecto de diversas situaciones posibles o escenarios sobre las ganancias de RR. La figura 2.32 muestra dos proyecciones "¿qué pasaría si?" para valores alternativos de los parámetros del precio de las pasas, de las uvas compradas bajo contrato y de su precio en el mercado abierto. Aunque sería posible examinar muchas proyecciones diferentes con las técnicas desarrolladas en el ejemplo de Simon Pie, a Thurston sólo le interesa modificar dos entradas del modelo. Si el análisis del modelo se reduce a dos variables de entrada como máximo, entonces la representación tabular o gráfica es preferible para mostrar los resultados. A diferencia de la Tabla de datos 1, la Tabla de datos 2 permite modificar dos variables exógenas dentro de intervalos específicos, aunque únicamente tabula los resultados para una variable endógena, la cual es de ordinario una medida de desempeño.

Lo que le interesa principalmente a Thurston es la ganancia anual antes de impuestos, que considerará como medida de desempeño, por lo cual ha decidido aplicar el análisis de la Tabla de datos 2, modificando una variable de decisión: el precio de las pasas recubiertas de azúcar, y un parámetro: el precio de la uva en el mercado abierto, suponiendo por ahora que la otra variable de decisión: el peso de las uvas compradas bajo contrato, tiene un valor fijo de 1,000,000 de libras. Antes de utilizar la tabla de datos es necesario definir los rangos o intervalos de valores para las dos variables exógenas, en cualquier región vacía de la hoja de cálculo Excel, como muestra la figura 2.33. Thurston ha seleccionado precios que fluctúan entre \$1.20 y \$2.00, en incrementos de \$.05 para las pasas recubiertas de azúcar, y precios de la uva en el mercado abierto que fluctúan entre \$.15 y \$.35 también en incrementos de \$.05. Uno de los conjuntos de precios lo ha introducido como una fila de valores, y el otro conjunto como una columna de valores. Con propósitos de documentación, Thurston decidió rotular cada serie con objetos de Cuadro de texto (tomados de la Barra de herramientas Dibujo de Excel), para referencia futura.

SUGERENCIA: ***Para ahorrar trabajo de mecanografía, use el comando Rellenar series de Excel, que encontrará en el menú Edición o Autorrellenar para introducir cada rango de valores. Vea los detalles en el Apéndice sobre Excel.***

En la celda de la esquina superior izquierda, en la intersección de cada serie, se introduce una referencia a la celda única que calcula la medida de desempeño, en este caso B33, ganancias antes de impuestos. A continuación, seleccionando todas las celdas del intervalo rectangu-

	A	B
1	**Modelo de Rosa Raisins**	
2	**Variables de decisión:**	
3	Precio de las pasas recubiertas de azúcar, por libra	$2.10
4	Uvas que se comprarán bajo contrato (000 de libras)	1,000
5	**Parámetros exógenos de mercado:**	
6	Precio contratado de la uva, por libra	$0.25
7	Precio de la uva en el mercado abierto, por libra	$0.25
8	Costo del azúcar, por libra	$0.30
9	**Parámetros de procesamiento:**	
10	Costo del procesamiento interno de la uva, por libra	$0.20
11	Capacidad interna de procesamiento de la uva (libras)	3,500
12	Costo del procesamiento externo de la uva	$0.60
13	Libras de uvas por libra de pasas	2.5
14	Libras de azúcar por libra de pasas	0.05
15	Costo fijo anual ($000)	$200
16	**Coeficientes de la ecuación de la demanda de pasas**	
17	Parámetro del precio base	$2.15
18	Demanda base (coeficiente de intersección)	700
19	Coeficiente lineal (pendiente)	15
20	**Requisitos físicos:** (000 de libras)	
21	Demanda de pasas recubiertas de azúcar	775
22	Uvas necesarias para satisfacer la demanda	1,841
23	Uvas compradas bajo contrato	1,000
24	Uvas compradas en el mercado abierto	841
25	**Resultados financieros ($000):**	
26	Ingresos	$1,628
27	Costo del procesamiento interno	$368
28	Costo del procesamiento externo	$0
29	Materias primas, uvas compradas bajo contrato	$250
30	Costo de materias primas, uvas en el mercado abierto	$210
31	Costo de materias primas, azúcar	$12
32	Otros costos fijos	$200
33	Ganancias (antes de impuestos)	$588

	A	B
1	**Modelo de Rosa Rais**	
2	**Variables de decisión:**	
3	Precio de las pasas recubie	$2.10
4	Uvas que se comprarán	1,000
5	**Parámetros exógeno:**	
6	Precio contratado de la uv	$0.25
7	Precio de la uva en el merc	$0.25
8	Costo del azúcar, por libra	$0.30
9	**Parámetros de proce**	
10	Costo del procesamiento i	$0.20
11	Capacidad interna de proce	3,500
12	Costo del procesamiento e	$0.60
13	Libras de uvas por libra de p	2.5
14	Libras de azúcar por libra de	0.05
15	Costo fijo anual ($000)	$200
16	**Coeficientes de la ecu**	
17	Parámetro del precio ba:	$2.15
18	Demanda base (coeficie	700
19	Coeficiente lineal (pendie	15
20	**Requisitos físicos:** (0	
21	Demanda de pasas recubie	=B18+B19*(B17-B3)*100
22	Uvas necesarias para satis	=B13*B21*(1-B14)
23	Uvas compradas bajo cont	=B4
24	Uvas compradas en el merc	=MAX(0,B22-B23)
25	**Resultados financiero**	
26	Ingresos	=B21*B3
27	Costo del procesamient	=MIN(B22,B11)*B10
28	Costo del procesamient	=SI(B22>B11,B22-B11,0)*B12
29	Materias primas, uvas co	=B6*B23
30	Costo de materias prima	=B7*B24
31	Costo de materias prima	=B8*B14*B21
32	Otros costos fijos	=B15
33	Ganancias (antes de impue	=B26-SUMA(B27:B32)

FIGURA 2.31

El modelo de Rosa Raisins

lar F16:W21, Thurston escoge el comando Tabla en el menú Datos. Entonces aparece el diálogo Tabla, como ilustra la figura 2.34.

En este momento, Thurston tiene que relacionar cada una de las dos series de datos de la tabla con las celdas donde están sus respectivas variables de entrada exógena, en el modelo RR. Puesto que la serie Precio de las pasas es la serie introducida como "fila" en la tabla, está vinculada con la celda B3 del modelo RR por medio de la "celda de entrada (fila)" solicitada en el cuadro de diálogo. En forma similar la serie introducida como "columna", Precio de la uva en el mercado abierto, está vinculada con la variable del mismo nombre en el modelo RR, contenida en la celda B7. Cuando se hace clic en Aceptar, Excel toma cada uno de los pares de entradas, introduce esos valores en las celdas especificadas del modelo RR, vuelve a calcular la hoja y coloca el valor resultante para las ganancias antes de impuestos en la celda correspondiente, dentro de la tabla, como se aprecia en la figura 2.35.

La representación compacta de la tabla permite (1) inspeccionar con facilidad los resultados para encontrar las celdas que muestran altas ganancias. Sin embargo, la representación de la Tabla de datos 2 facilita otros dos análisis importantes: (2) el examen de la posible independencia entre las dos variables de entrada del modelo y (3) el análisis de sensibilidad. Por importancia para el análisis de modelos en general, examinaremos cada uno de estos tres puntos por separado.

Como vimos en el ejemplo anterior, la utilidad más patente de una Tabla de datos es la facilidad con que permite inspeccionar los resultados, como los que aparecen en la figura 2.35. En ellos buscaremos las combinaciones de altas ganancias correspondientes a las dos series de entradas; es decir, para una fila dada, por ejemplo el Precio de la uva en el mercado abierto, el examen de las celdas en la tabla de datos nos muestra el precio de las pasas con el cual se maximizan las ganancias. Esta inspección muestra también que para cualquier precio de la uva en el mercado abierto, hay un solo precio de las pasas que maximiza las ganancias antes de impuestos.

Un segundo análisis, menos obvio pero importante, se centra en averiguar si existe algún patrón en el conjunto de ganancias máximas antes de impuestos para los precios dados de la uva en el mercado abierto. Es decir, a Thurston le interesa saber si el Precio de las pasas que maximiza las ganancias es dependiente o independiente del precio de la uva en el mercado abierto. La relación se muestra en la tabla parcial de la figura 2.36, en la cual han sido sombreadas las máximas ganancias antes de impuestos para cada precio de la uva en el mercado abierto. A la tabla de la figura 2.36 se le conoce a menudo como una "tabla de réditos", porque muestra las alternativas del precio de las pasas de Thurston, los valores de los precios de la uva en el mercado abierto (uno de los cuales se impondrá en la realidad) y la medida del desempeño o "rédito", o sea las ganancias antes de impuestos, que corresponde a cada combinación. Observe

	A	B
1	**Modelo de Rosa Raisins**	
2	**Variables de decisión:**	
3	Precio de las pasas recubiertas de azúcar, por libra	$1.95
4	Uvas que se comprarán bajo contrato (000 de libras)	2,000
5	**Parámetros exógenos de mercado:**	
6	Precio contratado de la uva, por libra	$0.25
7	Precio de la uva en el mercado abierto, por libra	$0.20
8	Costo del azúcar, por libra	$0.30
9	**Parámetros de procesamiento:**	
10	Costo del procesamiento interno de la uva, por libra	$0.20
11	Capacidad interna de procesamiento de la uva (libras)	3,500
12	Costo del procesamiento externo de la uva	$0.60
13	Libras de uvas por libra de pasas	2.5
14	Libras de azúcar por libra de pasas	0.05
15	Costo fijo anual ($000)	$200
16	**Coeficientes de la ecuación de la demanda de pasas:**	
17	Parámetro del precio base	$2.15
18	Demanda base (coeficiente de intersección)	700
19	Coeficiente lineal (pendiente)	15
20	**Requisitos físicos: (000 de libras)**	
21	Demanda de pasas recubiertas de azúcar	1,000
22	Uvas necesarias para satisfacer la demanda	2,375
23	Uvas compradas bajo contrato	2,000
24	Uvas compradas en el mercado abierto	375
25	**Resultados financieros ($000):**	
26	Ingresos	$1,950
27	Costo del procesamiento interno	$475
28	Costo del procesamiento externo	$0
29	Materias primas, uvas compradas bajo contrato	$500
30	Costo de materias primas, uvas en el mercado abierto	$75
31	Costo de materias primas, azúcar	$15
32	Otros costos fijos	$200
33	Ganancias (antes de impuestos)	$685

	A	B
1	**Modelo de Rosa Raisins**	
2	**Variables de decisión:**	
3	Precio de las pasas recubiertas de azúcar, por libra	$2.10
4	Uvas que se comprarán bajo contrato (000 de libras)	500
5	**Parámetros exógenos de mercado:**	
6	Precio contratado de la uva, por libra	$0.25
7	Precio de la uva en el mercado abierto, por libra	$0.20
8	Costo del azúcar, por libra	$0.30
9	**Parámetros de procesamiento:**	
10	Costo del procesamiento interno de la uva, por libra	$0.20
11	Capacidad interna de procesamiento de la uva (libras)	3,500
12	Costo del procesamiento externo de la uva	$0.60
13	Libras de uvas por libra de pasas	2.5
14	Libras de azúcar por libra de pasas	0.05
15	Costo fijo anual ($000)	$200
16	**Coeficientes de la ecuación de la demanda de pasas:**	
17	Parámetro del precio base	$2.15
18	Demanda base (coeficiente de intersección)	700
19	Coeficiente lineal (pendiente)	15
20	**Requisitos físicos: (000 de libras)**	
21	Demanda de pasas recubiertas de azúcar	775
22	Uvas necesarias para satisfacer la demanda	1,841
23	Uvas compradas bajo contrato	500
24	Uvas compradas en el mercado abierto	1,341
25	**Resultados financieros ($000):**	
26	Ingresos	$1,628
27	Costo del procesamiento interno	$368
28	Costo del procesamiento externo	$0
29	Materias primas, uvas compradas bajo contrato	$125
30	Costo de materias primas, uvas en el mercado abierto	$268
31	Costo de materias primas, azúcar	$12
32	Otros costos fijos	$200
33	Ganancias (antes de impuestos)	$655

FIGURA 2.32

Dos escenarios "¿qué pasaría si?" para el modelo de Rosa Raisins

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
14																			
15															Precio de las pasas				
16	Precio de la uva en el mercado abierto	=$B$33	$1.20	$1.25	$1.30	$1.35	$1.40	$1.45	$1.50	$1.55	$1.60	$1.65	$1.70	$1.75	$1.80	$1.85	$1.90	$1.95	$2.00
17		$0.15																	
18		$0.20																	
19		$0.25																	
20		$0.30																	
21		$0.35																	

FIGURA 2.33

Distribución para el comando Tabla de datos 2 de RR

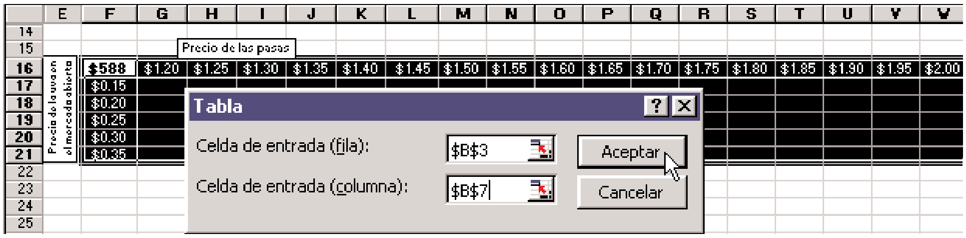


FIGURA 2.34

Relación de las entradas de fila y columna de la tabla con el modelo de RR

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
14																			
15				Precio de las pasas															
16	Precio de la uva en el mercado abierto	**$588**	$1.20	$1.25	$1.30	$1.35	$1.40	$1.45	$1.50	$1.55	$1.60	$1.65	$1.70	$1.75	$1.80	$1.85	$1.90	$1.95	$2.00
17		$0.15	($167)	($20)	$120	$252	$377	$494	$604	$706	$801	$865	$874	$875	$868	$854	$833	$804	$767
18		$0.20	($369)	($213)	($65)	$77	$210	$336	$455	$566	$670	$743	$761	$771	$773	$768	$755	$735	$707
19		$0.25	($572)	($407)	($249)	($99)	$43	$178	$306	$426	$539	$621	$647	$666	$677	$681	$677	$666	$648
20		$0.30	($774)	($600)	($434)	($275)	($123)	$21	$157	$286	$407	$499	$534	$562	$582	$595	$600	$598	$588
21		$0.35	($976)	($794)	($618)	($450)	($290)	($137)	$8	$146	$276	$377	$421	$457	$486	$508	$522	$529	$528

FIGURA 2.35

Tabla de datos de las ganancias antes de impuestos para el modelo RR (cantidad de uva contratada = 1000)

	E	F	Q	R	S	T	U	V	W
14									
15				Precio de las pasas					
16	Precio de la uva en el mercado abierto	**$588**	$1.70	$1.75	$1.80	$1.85	$1.90	$1.95	$2.00
17		$0.15	$874	$875	$868	$854	$833	$804	$767
18		$0.20	$761	$771	$773	$768	$755	$735	$707
19		$0.25	$647	$666	$677	$681	$677	$666	$648
20		$0.30	$534	$562	$582	$595	$600	$598	$588
21		$0.35	$421	$457	$486	$508	$522	$529	$528

FIGURA 2.36

Revisión de la tabla para averiguar la independencia de los dos factores

que Thurston reduciría el precio de las pasas que maximiza sus ganancias, si supiera con anticipación que el precio de la uva en el mercado abierto va a bajar, lo cual confirma que existe una relación de dependencia entre los dos conjuntos de precios y las ganancias. Si el precio de las pasas que maximiza las ganancias se hubiera mantenido invariable con cualquier valor del precio de la uva en el mercado abierto, entonces esa independencia habría permitido que Thurston hiciera caso omiso de la incertidumbre en torno al precio futuro de la uva en el mercado abierto, durante sus negociaciones sobre el precio de las pasas.

En general, si una variable de decisión es independiente de otro parámetro de entrada, entonces las variaciones de ese parámetro pueden ser ignoradas. Conocer este hecho es importante para la construcción de modelos. Sin embargo, en este caso, el precio óptimo de las pasas no es independiente del precio de la uva en el mercado abierto: el hecho de que el precio de la uva en el mercado abierto sea más bajo implica que el precio de las pasas para maximizar las ganancias bajará también. En virtud de que el precio de la uva en el mercado abierto no se conoce todavía en el momento en que Thurston negocia el precio de las pasas, ella tiene que hacer un pronóstico de dicho precio para estar en condiciones de negociar. Por ahora, suponemos que Thurston echará mano de su buen criterio para calcular cuál será el precio de la uva en el mercado abierto. (Más tarde, en el capítulo 10, al tratar sobre análisis de decisiones, examinaremos formas más racionales de crear modelos para situaciones inciertas como ésta, en lugar de recurrir a un simple tanteo.)

La tabla de réditos que aparece en la figura 2.36 representa la tercera técnica de análisis que puede ayudar a Thurston en sus negociaciones: el **análisis de sensibilidad.** En general, el análi-

	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
16	$1.60	$1.65	$1.70	$1.75	$1.80	$1.85	$1.90	$1.95	$2.00
17	$801	$865	$874	$875	$868	$854	$833	$804	$767
18	$670	$743	$761	$771	$773	$768	$755	$735	$707
19	$539	$621	$647	$666	$677	$681	$677	$666	$648
20	$407	$499	$534	$562	$582	$595	$600	$598	$588
21	$276	$377	$421	$457	$486	$508	$522	$529	$528
22									
23					Cambio del precio de las pasas				
24	Cambio del precio de la uva en el mercado abierto			-5%	-3%	0%	3%	5%	
25				$1.75	$1.80	$1.85	$1.90	$1.95	
26		-40%	$0.15	28%	27%	25%	22%	18%	
27		-20%	$0.20	13%	13%	13%	11%	8%	
28		0%	$0.25	-2%	-1%	$681	-1%	-2%	
29		20%	$0.30	-18%	-15%	-13%	-12%	-12%	
30		40%	$0.35	-33%	-29%	-25%	-23%	-22%	

	O	P	Q	R	S	T	U	V
16	1.6	1.65	1.7	1.75	1.8	1.85	1.9	1.95
17	800.718	865.4375	873.9	874.875	868.3437	854.3125	832.7812	803.75
18	669.625	743.25	760.6	770.5	772.875	767.75	755.125	735
19	538.531	621.0625	647.3	666.125	677.4062	681.1875	677.4687	666.25
20	407.437	498.875	534.0	561.75	581.9375	594.625	599.8125	597.5
21	276.343	376.6875	420.7	457.375	486.4687	508.0625	522.1562	528.75
22								
23					Cambio del precio de las pasas			
24	Cambio del precio de la uva en el mercado abierto			=(R25-$T$25)/$T$25	=(S25-$T	=(T25-$T$25)/$T$25	=(U25-$T	=(V25-$T
25				1.75	1.8	1.85	1.9	1.95
26		=(Q26-$Q$28)/$Q$28	0.15	=(R17-$T$28)/$T$28	=(S17-$T	=(T17-$T$28)/$T$28	=(U17-$T	=(V17-$T
27		=(Q27-$Q$28)/$Q$28	0.2	=(R18-$T$28)/$T$28	=(S18-$T	=(T18-$T$28)/$T$28	=(U18-$T	=(V18-$T
28		=(Q28-$Q$28)/$Q$28	0.25	=(R19-$T$28)/$T$28	=(S19-$T	=T19	=(U19-$T	=(V19-$T
29		=(Q29-$Q$28)/$Q$28	0.3	=(R20-$T$28)/$T$28	=(S20-$T	=(T20-$T$28)/$T$28	=(U20-$T	=(V20-$T
30		=(Q30-$Q$28)/$Q$28	0.35	=(R21-$T$28)/$T$28	=(S21-$T	=(T21-$T$28)/$T$28	=(U21-$T	=(V21-$T

FIGURA 2.37

Sensibilidad de las ganancias antes de impuestos considerando el precio de la uva

sis de sensibilidad consiste en evaluar la forma en que los cambios de una variable de entrada del modelo afecta los cambios correspondientes en alguna otra variable, tal vez una variable para medir el desempeño o una variable de decisión. Por ejemplo, ¿un cambio de 10% en algún parámetro produce un cambio de 1% o de 10% o de 100% en las ganancias? En términos aproximados, si un cambio de X% en una variable de entrada produce un cambio mucho menor que X% en la otra variable, entonces se dice que la segunda variable es "insensible" a la variable de entrada. Si un cambio de X% en la variable de entrada produce un cambio mucho mayor que X% en la otra variable, se dice que la variable de salida es "sensible" a esa variable de entrada. Igual que en el caso de la independencia, la insensibilidad es a menudo una propiedad deseable en la relación entre las dos variables. En contraste, las relaciones relativamente sensibles son las que deben atraer el interés de los gerentes. Por ejemplo, si se demuestra que la ganancia es insensible al valor de algún parámetro, entonces no es necesario determinar con gran precisión el valor de dicho parámetro. En este ejemplo, Thurston debe comprometerse con un precio de las pasas antes de conocer el precio de la uva en el mercado abierto y, además, acabamos de observar que el precio óptimo de las pasas no es independiente del precio de la uva en el mercado abierto. Dicho de otro modo, la decisión de Thurston sería sencilla si el precio de la uva en el mercado abierto pudiera conocerse con anticipación. Tal como están las cosas, Thurston tiene que escoger una columna (precio de las pasas) en la figura 2.35, y más tarde, en el otoño, la "Madre Naturaleza" escogerá la fila (precio de la uva en el mercado abierto).

El análisis de sensibilidad permite que Thurston observe la forma en que diferentes precios de la uva en el mercado abierto podrían afectar las ganancias antes de impuestos, en términos de cambios en el porcentaje de ganancias, una vez que ella se comprometa con un precio de las pasas en particular. Para ilustrar este punto, supongamos que Thurston está convencida, fuera de cualquier duda, de que el precio de la uva en el mercado abierto será $.25. En la figura 2.36, observa que el mejor precio de las pasas que podría elegir es $1.85, pues produce unas ganancias $681,000 antes de impuestos. En la figura 2.37 se vuelve a mostrar la tabla de réditos de la figura 2.36, pero ahora en términos de porcentajes, para facilitar el examen de la sensibilidad de las ganancias antes de impuestos frente a los cambios del precio de la uva en el mercado abierto, en valores próximos a los del caso base de Thurston, en el cual el precio de la uva en el mercado abierto es igual a $.25 y el precio de las pasas es igual a $1.85. Está claro que las ganancias antes de impuestos no serán insensibles a los cambios del precio de la uva en el mercado abierto, si la creencia de Thurston de que éste será $.25 es errónea. Sin embargo, tampoco será altamente sensible; un cambio de ±40% en el precio de la uva en el mercado abierto induce un cambio de ±25% en las ganancias antes de impuestos, considerando el precio de las pasas igual a $1.85 elegido por Thurston.

	O	P	Q	R	S	T	U	V
31								
32					Cambio del precio de las pasas			
33				-5%	-3%	0%	3%	5%
34				$1.75	$1.80	$1.85	$1.90	$1.95
35	Camb... prec o ... rcado ab erto	-40%	$0.15	2.4%	1.6%	$854	-2.5%	-5.9%
36		-20%	$0.20	0.4%	0.7%	$768	-1.6%	-4.3%
37		0%	$0.25	-2.2%	-0.6%	$681	-0.5%	-2.2%
38		20%	$0.30	-5.5%	-2.1%	$595	0.9%	0.5%
39		40%	$0.35	10%	3%	$508	2.8%	4.1%

	O	P	Q	R	S	T	U	V
31								
32					Cambio del precio de las pasas			
33				=(R34-$T$34)/$T$34	=(S34-$T$34)/$T$34	=(T34-$	=(U34-$T	=(V34-$T$34)/$T$34
34	Cambio del precio de la uva en el mercado abierto			1.75	1.8	1.85	1.9	1.95
35		=(Q35-$Q$28)/$Q$28	0.15	=(R17-$T17)/$T17	=(S17-$T17)/$T17	=T17	=(U17-$T	=(V17-$T17)/$T17
36		=(Q36-$Q$28)/$Q$28	0.2	=(R18-$T18)/$T18	=(S18-$T18)/$T18	=T18	=(U18-$T	=(V18-$T18)/$T18
37		=(Q37-$Q$28)/$Q$28	0.25	=(R19-$T19)/$T19	=(S19-$T19)/$T19	=T19	=(U19-$T	=(V19-$T19)/$T19
38		=(Q38-$Q$28)/$Q$28	0.3	=(R20-$T20)/$T20	=(S20-$T20)/$T20	=T20	=(U20-$T	=(V20-$T20)/$T20
39		=(Q39-$Q$28)/$Q$28	0.35	=(R21-$T21)/$T21	=(S21-$T21)/$T21	=T21	=(U21-$T	=(V21-$T21)/$T21

FIGURA 2.38

Sensibilidad de las ganancias antes de impuestos con un precio de las pasas igual a $1.85

Sin embargo, desde el punto de vista de la toma de decisiones, la sensibilidad de las ganancias antes de impuestos con respecto al parámetro del precio de la uva en el mercado abierto *no* es lo que debería preocupar a Thurston en este punto. De hecho, debería interesarse por la sensibilidad de su *decisión* sobre el precio de las pasas a los cambios en los precios de la uva en el mercado abierto. Un examen cuidadoso de la figura 2.37 revela que las ganancias antes de impuestos son relativamente *insensibles* al precio de la uva en el mercado abierto, aunque a primera vista no lo parezca. Por ejemplo, supongamos que Thurston se ha comprometido a mantener un precio de las pasas igual a $1.85 y que se presenta el peor resultado posible: un precio de la uva en el mercado abierto igual a $.35 en lugar de los $.25 que Thurston esperaba, haciendo que el resultado en la celda T30 tenga una caída de 25% en las ganancias antes de impuestos con respecto al caso tomado como base. Puesto que las uvas son materia prima para RR, el alza en el precio de éstas habría sido perjudicial para las ganancias, independientemente del precio de las pasas que Thurston hubiera elegido. En consecuencia, lo importante no es la caída de 25% en las ganancias, sino cuánto habría podido mitigar Thurston el daño a las ganancias *si hubiera sabido* con anticipación que el precio de la uva en el mercado abierto sería $.35. En la figura 2.37 observamos que si Thurston hubiera recibido información perfecta con anticipación, comunicándole que el precio de la uva en el mercado abierto sería $.35, habría elegido un precio de las pasas igual a $1.95, lo cual habría producido una ganancia antes de impuestos 22% más baja (celda V30 de la figura 2.37) que su caso base. Tal como resultaron las cosas, ella no contaba con información previa y escogió un precio de las pasas igual a $1.85, lo cual redundó en una ganancia reducida de 25%, una diferencia de sólo tres puntos porcentuales con respecto al caso en que se contaba con información perfecta. Un análisis similar puede aplicarse al caso más conveniente de que el precio de la uva en el mercado abierto sea más bajo que en el caso base. Una vez más, la comparación pertinente no es el cambio absoluto de las ganancias antes de impuestos con respecto a la celda del caso base, pero sí existe una diferencia relativa en las ganancias antes de impuestos que podría registrarse entre el caso base de Thurston, donde el precio de las pasas es $1.85, y el precio de las pasas que ella habría elegido si hubiera tenido información perfecta y anticipada sobre el precio de la uva en el mercado abierto. Por ejemplo, si el precio de la uva en el mercado abierto fuera realmente $.15, entonces la comparación pertinente sería entre la celda R17 y la celda T17 de la figura 2.37, y no entre la celda R17 y la celda T19.

Esta insensibilidad se ilustra mejor con la tabla de la figura 2.38. Allí las comparaciones no se realizan con la celda base T17, sino con las ganancias antes de impuestos que se habrían obtenido con la decisión de Thurston de establecer el Precio de las pasas igual a $1.85, comparadas con las ganancias antes de impuestos que habría obtenido con la mejor decisión, si hubiera conocido con anterioridad el precio de la uva en el mercado abierto. En la figura 2.38 vemos que esa diferencia perdida, en términos de ganancias antes de impuestos, fluctúa entre .7% y 4.1%, registrada como reacción ante los cambios del precio de la uva en el mercado abierto que fluctúan ±40%.

Como se aprecia en este ejemplo, el análisis de sensibilidad puede parecer un tanto confuso al principio, pero es la parte medular de muchos conocimientos administrativos que pueden

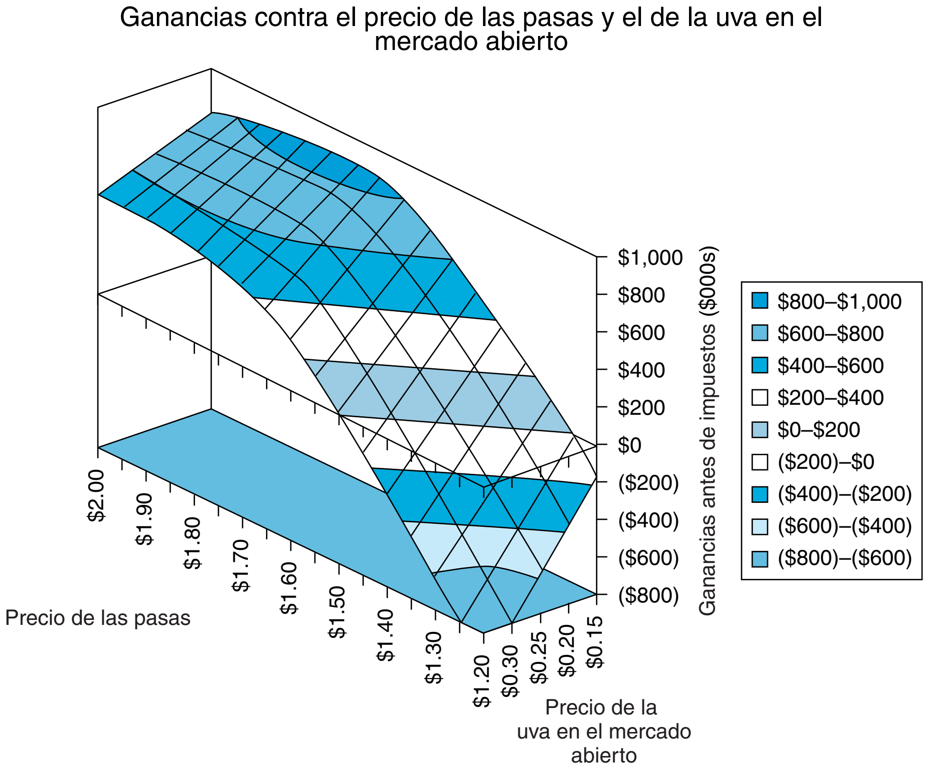


FIGURA 2.39

Gráfico de superficie 3D de las ganancias antes de impuestos para RR

adquirirse por medio de la construcción de modelos. Afortunadamente, un gráfico "dice más que mil palabras" acerca de esos conocimientos, si es un gráfico Excel bien diseñado. Los elementos incluidos en la Tabla de datos 2 de la figura 2.35 son complementados por el Asistente para gráficos de Excel, a fin de presentar información visual acerca de la sensibilidad. Seleccionando el intervalo F16:W21 en la figura 2.35, eligiendo el tipo de gráfico Superficie 3D en el Asistente para gráficos y con un poco de formato adicional, se obtiene el trazo de la figura 2.39.[5]

Aunque la figura 2.39 es visualmente atractiva, resulta difícil observar el análisis de sensibilidad en los contornos de gráficos 3D, mientras que el gráfico de Dispersión XY, aunque es más prosaico, a menudo es más valioso para observar esas relaciones. La figura 2.40 presenta un gráfico de Dispersión XY de los mismos datos, usando una serie para cada precio de la uva en el mercado abierto. Como resulta obvio al examinar la figura 2.40, cualquiera que sea el precio de la uva en el mercado abierto, las Ganancias antes de impuestos son relativamente insensibles al precio de las pasas, siempre que los precios se mantengan por encima de $1.65 aproximadamente.

Ninguno de los tres ejemplos que hemos estudiado incluye explícitamente restricciones para las variables del modelo. Las restricciones que influyen para limitar el rango de valores que resultan aceptables en las variables son muy comunes en la construcción de modelos, como lo ilustra el ejemplo de Oak Products.

2.5 EJEMPLO 4: LA PRODUCCIÓN EN OAK PRODUCTS INC.

Oak Products, Inc. (OP) produce una línea de sillas de roble macizo de alta calidad. La línea de productos incluye seis estilos de sillas: Captain, Mate, American High, American Low, Spanish King y Spanish Queen. Esas sillas fueron diseñadas con la idea de utilizar en ellas varias partes componentes intercambiables: espigas largas y cortas, asientos pesados y livianos, y travesaños pesados y ligeros. Además, cada tipo de silla ostenta un apoyo distintivo como remate del respaldo. Las partes intercambiables ayudan a proteger a OP contra los cambios repentinos de la demanda. Hoy es 15 de noviembre y Tom Burr, el gerente de la planta, se reunirá con James

[5]Como en el caso de los gráficos 2D, en los gráficos 3D los valores de los datos que son asignados a los ejes de la variable independiente se consideran categóricos para el trazado de todos los gráficos, excepto los de Dispersión XY. En consecuencia, cada serie de entrada debe tener intervalos uniformemente espaciados para evitar posibles distorsiones en el trazado de la variable dependiente.

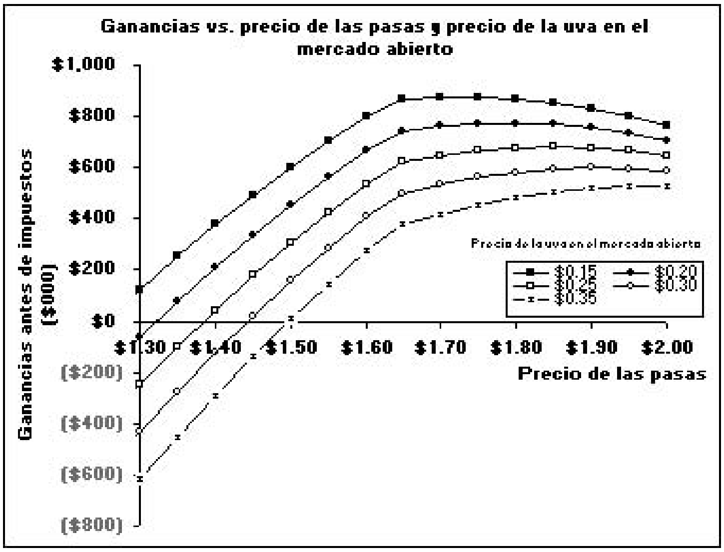


FIGURA 2.40

Gráfico de Dispersión XY de las ganancias antes de impuestos de RR

White, de control de producción, para elaborar el plan de producción para la próxima semana. En OP, las actividades de acabado (es decir, lijado, aspersión y secado de las partes componentes) requiere una semana. Por esta razón, sólo los componentes que estén totalmente terminados y disponibles podrán utilizarse en las sillas que se van a producir durante la semana siguiente.

Jim White ha desarrollado un modelo de producción, cuyo resultado es el modelo de hoja de cálculo electrónica que aparece en la figura 2.41.

Como en los otros ejemplos, la hoja de cálculo de Jim se usa para representar su modelo de acuerdo con los principios que hemos recomendado a fin de facilitar la construcción, depuración e interpretación. En la hoja de cálculo de Jim, las columnas se utilizan para representar “actividades” de decisión; es decir, la acción de producir determinado tipo de sillas, e incluyen el nivel de producción y el consumo de partes en dichas sillas. Para aclarar esto, Jim ha agregado rótulos de texto en las filas y columnas, lo cual ayuda a entender el significado de los números. Por ejemplo, el dato 4 en B6 indica que para producir una silla Captain se utilizan cuatro espigas cortas. Además, en las celdas B3:G3, Jim incluyó su sugerencia para el plan de producción. Así, la propuesta de Jim consiste en producir 40 sillas de cada tipo, con una ganancia total de $8760. Las entradas de las celdas H6:J6 indican que

1. En el plan de producción de Jim se usará un total de 1600 espigas cortas;
2. El inventario inicial de espigas cortas, que es un parámetro, incluye 1900 espigas; y
3. El inventario final que dejará el plan de Jim serán unas 300 espigas cortas.

La figura 2.42 ilustra el uso de una capacidad de Excel conocida como Nombres, la cual nos permite crear nombres para intervalos de celdas en el modelo de Jim. Esto facilita la lectura de las fórmulas en la hoja de cálculo, en comparación con las fórmulas que aparecen en la figura 2.41. En cualquier modelo construido en una hoja de cálculo pueden usarse nombres para mejorar la documentación, pero éstos son particularmente útiles cuando se refieren a series de celdas adyacentes, como en el modelo de Oak Products.

SUGERENCIAS: ***Las variables a las que se ha asignado un nombre son globales dentro de un libro de Excel. Esto significa que están disponibles para todas las hojas de cálculo contenidas en él. Así, una celda incluida en un modelo construido en una hoja puede hacer referencia a una variable de cualquier otra hoja por su nombre. Para detalles acerca de la creación de nombres de intervalos o campos, consulte el Apéndice sobre características de Excel.***

Usando el modelo de Jim, la sesión en la cual se elabora el plan de producción se desarrolla así:

Jim: He aplicado el procedimiento usual para determinar la producción, es decir, planear la fabricación de cantidades iguales de cada producto y luego maximizar la cantidad total producida. Esta vez se nos acabaron primero las espigas largas, pero todo resultó muy bien. Fabricamos 40 sillas de cada tipo y ganamos $8760.

Tom: Ya sé que siempre hemos producido cantidades iguales de cada estilo de sillas, pero en esta ocasión será diferente. El presidente me ha dicho que los productos de madera maciza tienen ahora gran demanda y que lograremos vender todo, no importa qué produzcamos. Quiere que obtengamos la mayor ganancia posible. ¿Qué debemos hacer?

Jim: No conozco la respuesta con todos sus detalles, pero tengo una idea. Está claro que las sillas American High son nuestro artículo más rentable, pero he observado que en ellas

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Estilo de silla	Capt.	Mate	AmerHi	AmerLo	SpanK	SpanQ			
2	Ganancia/silla	$ 36	$ 40	$ 45	$ 38	$ 35	$ 25	GANANCIA TOTAL		
3	Cantidad fabricada	40	40	40	40	40	40	$8,760		
4		Componentes necesarios para cada silla						Uso total	Inventario inicial	Inventario final
5	Espigas largas	8	0	12	0	8	4	1280	1280	0
6	Espigas cortas	4	12	0	12	4	8	1600	1900	300
7	Patas	4	4	4	4	4	4	960	1090	130
8	Asientos pesados	1	0	0	0	1	1	120	190	70
9	Asientos ligeros	0	1	1	1	0	0	120	170	50
10	Travesaños pesados	6	0	4	0	5	0	600	1000	400
11	Travesaños ligeros	0	4	0	5	0	6	600	1000	400
12	Barrotes Capt.	1	0	0	0	0	0	40	110	70
13	Barrotes Mate	0	1	0	0	0	0	40	72	32
14	Barrotes Amer.	0	0	1	1	0	0	80	93	13
15	Barrotes Span.	0	0	0	0	1	1	80	85	5

SUGERENCIAS: ***La figura 2.41 usa la función SUMA-PRODUCTO(). Esta función multiplica cada pareja de celdas correspondientes en sus argumentos y luego suma todos los productos resultantes. Esta función se usa frecuentemente en modelos de hoja de cálculo electrónica. Si no le resulta familiar, revise su utilización en el Apéndice Excel.***

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Estilo de silla	Ca	Ma	Am	Am	Sp	Sp			
2	Ganancia/silla	36	40	45	38	35	25	GANANCIA TOTAL		
3	Cantidad fabricada	40	40	40	40	40	40	=SUMAPRODUCTO($B$3:$G$3,B2:G2)		
4		Com						Uso total	Invent	Inventario final
5	Espigas largas	8	0	12	0	8	4	=SUMAPRODUCTO($B$3:$G$3,B5:G5)	1280	=I5-H5
6	Espigas cortas	4	12	0	12	4	8	=SUMAPRODUCTO($B$3:$G$3,B6:G6)	1900	=I6-H6
7	Patas	4	4	4	4	4	4	=SUMAPRODUCTO($B$3:$G$3,B7:G7)	1090	=I7-H7
8	Asientos pesados	1	0	0	0	1	1	=SUMAPRODUCTO($B$3:$G$3,B8:G8)	190	=I8-H8
9	Asientos ligeros	0	1	1	1	0	0	=SUMAPRODUCTO($B$3:$G$3,B9:G9)	170	=I9-H9
10	Travesaños pesados	6	0	4	0	5	0	=SUMAPRODUCTO($B$3:$G$3,B10:G10)	1000	=I10-H10
11	Travesaños ligeros	0	4	0	5	0	6	=SUMAPRODUCTO($B$3:$G$3,B11:G11)	1000	=I11-H11
12	Barrotes Capt.	1	0	0	0	0	0	=SUMAPRODUCTO($B$3:$G$3,B12:G12)	110	=I12-H12
13	Barrotes Mate	0	1	0	0	0	0	=SUMAPRODUCTO($B$3:$G$3,B13:G13)	72	=I13-H13
14	Barrotes Amer.	0	0	1	1	0	0	=SUMAPRODUCTO($B$3:$G$3,B14:G14)	93	=I14-H14
15	Barrotes Span.	0	0	0	0	1	1	=SUMAPRODUCTO($B$3:$G$3,B15:G15)	85	=I15-H15

FIGURA 2.41

La primera hoja de cálculo electrónica de OP

	H	I	J
1			
2	GANANCIA TOTAL		
3	=SUMAPRODUCTO(cantidad_fabricada,ganancia__silla)		
4	Uso total	Inventario inicial	Inventario final
5	=SUMAPRODUCTO(cantidad_fabricada,Espigas_largas)	1280	=Inventario_inicial-Uso_total
6	=SUMAPRODUCTO(cantidad_fabricada,Espigas_cortas)	1900	=Inventario_inicial-Uso_total
7	=SUMAPRODUCTO(cantidad_fabricada,Patas)	1090	=Inventario_inicial-Uso_total
8	=SUMAPRODUCTO(cantidad_fabricada,Asientos_pesados)	190	=Inventario_inicial-Uso_total
9	=SUMAPRODUCTO(cantidad_fabricada,Asientos_ligeros)	170	=Inventario_inicial-Uso_total
10	=SUMAPRODUCTO(cantidad_fabricada,Travesaños_pesados	1000	=Inventario_inicial-Uso_total
11	=SUMAPRODUCTO(cantidad_fabricada,Travesaños_ligeros)	1000	=Inventario_inicial-Uso_total
12	=SUMAPRODUCTO(cantidad_fabricada,Barrotes_Capt.)	110	=Inventario_inicial-Uso_total
13	=SUMAPRODUCTO(cantidad_fabricada,Barrotes_Mate)	72	=Inventario_inicial-Uso_total
14	=SUMAPRODUCTO(cantidad_fabricada,Barrotes_Amer.)	93	=Inventario_inicial-Uso_total
15	=SUMAPRODUCTO(cantidad_fabricada,Barrotes_Span.)	85	=Inventario_inicial-Uso_total

FIGURA 2.42

Uso de nombres de intervalos para mejorar la documentación de la fórmula

se utilizan las espigas más largas y por ahora estamos escasos de esas partes. Si dejara de fabricar dos American High, perdería $90 de ingresos, pero ahorraría 24 espigas largas. Podría usar esas espigas para fabricar 3 sillas Captain, en cuyo caso ganaría $108. Así pues, ¿qué pasaría si fabricáramos 100 sillas Captain y ninguna American High?

(Jim introduce esta nueva propuesta en las celdas B3:G3. La hoja de cálculo Excel donde aparece este resultado se ilustra en la figura 2.43.)

Tom: ¡Estupendo, Jim! Has aumentado las ganancias semanales en $360. ¿Crees que podríamos hacerlo mejor? Seguramente sí. En realidad, creo que podemos aplicar tu idea una vez más. Las sillas Spanish King requieren ocho espigas largas, mientras que las Spanish Queen sólo necesitan cuatro. Si dejo de fabricar una silla modelo King perderé $35, pero podré hacer dos Queen y así ganaré $50. Entonces, ¿qué pasaría si no hiciéramos ningún modelo King y fabricáramos 120 Queen en total? (El resultado aparece en la figura 2.44.)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Estilo de silla	Capt.	Mate	AmerHi	AmerLo	SpanK	SpanQ			
2	Ganancia/silla	$ 36	$ 40	$ 45	$ 38	$ 35	$ 25	GANANCIA TOTAL		
3	Cantidad fabricada	100	40	0	40	40	40	$9,120		
4		Componentes necesarios para cada silla						Uso total	Inventario inicial	Inventario final
5	Espigas largas	8	0	12	0	8	4	1280	1280	0
6	Espigas cortas	4	12	0	12	4	8	1840	1900	60
7	Patas	4	4	4	4	4	4	1040	1090	50
8	Asientos pesados	1	0	0	0	1	1	180	190	10
9	Asientos ligeros	0	1	1	1	0	0	80	170	90
10	Travesaños pesados	6	0	4	0	5	0	800	1000	200
11	Travesaños ligeros	0	4	0	5	0	6	600	1000	400
12	Barrotes Capt.	1	0	0	0	0	0	100	110	10
13	Barrotes Mate	0	1	0	0	0	0	40	72	32
14	Barrotes Amer.	0	0	1	1	0	0	40	93	53
15	Barrotes Span.	0	0	0	0	1	1	80	85	5

FIGURA 2.43

La hoja de cálculo de Jim revisada

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Estilo de silla	Capt.	Mate	AmerHi	AmerLo	SpanK	SpanQ			
2	Ganancia/silla	$ 36	$ 40	$ 45	$ 38	$ 35	$ 25	GANANCIA TOTAL		
3	Cantidad fabricada	100	40	0	40	0	120	$9,720		
4		Componentes necesarios para cada silla						Uso total	Inventario inicial	Inventario final
5	Espigas largas	8	0	12	0	8	4	1280	1280	0
6	Espigas cortas	4	12	0	12	4	8	2320	1900	-420
7	Patas	4	4	4	4	4	4	1200	1090	-110
8	Asientos pesados	1	0	0	0	1	1	220	190	-30
9	Asientos ligeros	0	1	1	1	0	0	80	170	90
10	Travesaños pesados	6	0	4	0	5	0	600	1000	400
11	Travesaños ligeros	0	4	0	5	0	6	1080	1000	-80
12	Barrotes Capt.	1	0	0	0	0	0	100	110	10
13	Barrotes Mate	0	1	0	0	0	0	40	72	32
14	Barrotes Amer.	0	0	1	1	0	0	40	93	53
15	Barrotes Span.	0	0	0	0	1	1	120	85	-35

FIGURA 2.44

La hoja de cálculo de Tom revisada

Jim: Te daré una noticia buena y una mala. La buena es que tus cálculos económicos son correctos. Las ganancias semanales aumentaron $600. La mala es que no tenemos el inventario requerido para respaldar ese plan. El modelo muestra un inventario final negativo en el caso de las espigas cortas y muchas otras cosas. Esto significa que necesitaríamos más espigas cortas de las que tenemos. Y eso no sería posible.

Tom: Comprendo lo que quieres decir. Parece que fui demasiado lejos. Pero ya entendí que podríamos disminuir la producción de Spanish King y aumentar la de Spanish Queen en cierta medida, y así se elevarían las ganancias. Con suficiente esfuerzo, creo que lograríamos averiguar hasta dónde sería posible avanzar con este tipo de sustitución antes de agotar el inventario. Pero, incluso entonces, ¿cómo sabríamos si es una buena solución? Realmente no sé qué sería mejor.

MODELOS DE OPTIMIZACIÓN

Igual que los otros ejemplos, el modelo de Oak Products es un modelo de decisiones cuantitativo. Especifica la relación entre las variables de decisión (la cantidad de sillas de cada estilo que serán fabricadas) y los parámetros (el número de partes utilizadas en cada silla y la provisión de partes disponibles), y calcula una medida de desempeño (la ganancia total) y otras variables de consecuencia (el agotamiento de los inventarios). Sin embargo, no indica cuántas sillas será conveniente producir. Reflexionando un poco, la pregunta resulta graciosa. ¿Cuántas sillas conviene producir para lograr qué? Tal vez deseamos saber cuántas sillas debemos fabricar para usar lo más posible nuestro inventario de partes. O bien, cuántas sillas hay que producir para satisfacer la demanda normal de los clientes de cada modelo. Como en los ejemplos anteriores, es más probable que deseemos saber cuántas sillas es necesario producir para maximizar las ganancias semanales de OP. La cuestión es que para decidir qué vamos a hacer, es preciso saber qué queremos lograr; es decir, tenemos que especificar nuestro objetivo.

Desgraciadamente, ninguna de las técnicas analíticas que hemos visto en los ejemplos de este capítulo permite realizar proyecciones "¿qué pasaría si?" que incluyan tablas de datos y gráficos, sometiéndose al mismo tiempo a restricciones específicas. En un problema determinado, por ejemplo, tal vez usted desearía aumentar lo más posible las ventas o las ganancias, y en otro intentaría reducir los costos o los tiempos de entrega, respetando al mismo tiempo las restricciones existentes sobre capacidad, recursos y tiempo.

2.6 RESTRICCIONES Y OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA

Si Tom y Jim deciden que quieren incrementar lo más posible sus ganancias semanales, entonces el modelo de Oak Products se convierte en un **modelo de optimización.** En el modelo de Oak Products se presenta un ejemplo de un problema de optimización con restricciones, es decir, un problema en el cual se desea maximizar (o minimizar) cierta función de medida de desempeño de las variables de decisión, pero bajo un conjunto de restricciones. Restricción es una limitación al intervalo de decisiones permisibles. En este caso particular, las restricciones son las cantidades disponibles de varias partes necesarias para la fabricación de sillas, pero en realidad puede haber muchos tipos de restricciones. De hecho, los gerentes toman la mayoría de sus decisiones personales y profesionales en situaciones donde las decisiones permisibles están sujetas a restricciones. En nuestra vida privada, casi siempre nos enfrentamos a limitaciones de algún tipo, ya sea de tiempo, dinero, espacio o energía. En el mundo de la empresa tropezamos con restricciones todavía más numerosas. Con frecuencia el gerente necesita tomar en cuenta requisitos de capital, disponibilidad de personal, calendarios de entregas, cuotas de importación, reglas del sindicato, capacidad de la fábrica, reglamento ambiental, costos de inventario, exigencias jurídicas y un cúmulo de factores adicionales. Por tanto, tal vez no deba sorprendernos que la optimización restringida —lograr el mejor resultado posible dentro de las restricciones de cada caso— sea una de las áreas más activas en el terreno de la investigación administrativa.

La formulación propuesta para Oak Products es un modelo de programación lineal (PL) de planeación administrativa de tipo ordinario, y resulta fácil obtener la mejor solución o **solución óptima**. Una de las herramientas analíticas que más se usan, la programación lineal, es un procedimiento especial para realizar la optimización restringida. Existen varios paquetes de aplicación o "complementos" de las hojas de cálculo electrónicas que trabajan sobre un modelo y lo **optimizan.** Dos de esos paquetes son *Solver* y *What's Best*. En la figura 2.45 apreciamos el resultado optimizado del modelo de Oak Products. Es interesante observar que, de acuerdo con las proyecciones del modelo, las ganancias semanales aumentarían $1174 por encima del plan revisado de Jim y ninguna silla estilo Spanish forma parte de la solución óptima; es decir, la **decisión óptima** sería producir cero sillas estilo Spanish.

Solver viene incluido con Excel y lo estudiaremos ampliamente en los capítulos de la segunda parte.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Estilo de silla	Capt.	Mate	AmerHi	AmerLo	SpanK	SpanQ			
2	Ganancia/silla	$ 36	$ 40	$ 45	$ 38	$ 35	$ 25	GANANCIA TOTAL		
3	Cantidad fabricada	100	72	40	53	0	0	$10,294		
4		Componentes necesarios para cada silla						Uso total	Inventario inicial	Inventario final
5	Espigas largas	8	0	12	0	8	4	1280	1280	−0
6	Espigas cortas	4	12	0	12	4	8	1900	1900	0
7	Patas	4	4	4	4	4	4	1060	1090	30
8	Asientos pesados	1	0	0	0	1	1	100	190	90
9	Asientos ligeros	0	1	1	1	0	0	165	170	5
10	Travesaños pesados	6	0	4	0	5	0	760	1000	240
11	Travesaños ligeros	0	4	0	5	0	6	553	1000	447
12	Barrotes Capt.	1	0	0	0	0	0	100	110	10
13	Barrotes Mate	0	1	0	0	0	0	72	72	−0
14	Barrotes Amer.	0	0	1	1	0	0	93	93	−0
15	Barrotes Span.	0	0	0	0	1	1	0	85	85

FIGURA 2.45

La solución óptima para el modelo de OP

2.7 RESUMEN

En este capítulo presentamos la construcción de modelos en hojas de cálculo electrónicas, principalmente mediante una serie de pequeños ejemplos. Hemos sugerido varios métodos que permiten traducir una representación de caja negra en un modelo de hoja de cálculo; hicimos recomendaciones para lograr un buen diseño y esquema del modelo en la hoja de cálculo, dimos algunas sugerencias acerca de la documentación de modelos y presentamos características útiles de Excel para la construcción y análisis de modelos.

Los diagramas de influencia facilitan la construcción de modelos y proporcionan documentación para los mismos. Las ecuaciones del modelo se construyen en forma iterativa, revisando las relaciones hasta lograr que se ajusten a las relaciones hipotéticas contenidas en los datos. Las proyecciones "¿qué pasaría si?" son la herramienta de análisis primaria para la construcción de modelos en hojas de cálculo electrónicas. Hacer copias del modelo, trabajar en los comandos Buscar objetivo, Tabla de datos, y también en los gráficos son recursos útiles para evaluar series de proyecciones del tipo "¿qué pasaría si?".

La distribución o esquema del modelo en la hoja de cálculo tiene una importancia decisiva para desarrollar modelos comprensibles, libres de errores de lógica, sencillos de mantener y documentar, y fáciles de comunicar a otras personas. Una lógica clara, la ausencia de números en las fórmulas, la inclusión de rótulos en variables y el uso de nombres para identificar las variables son factores que contribuyen a la buena construcción de modelos en hojas de cálculo electrónicas.

Términos clave

Análisis de sensibilidad. Cálculo en porcentaje del efecto que un cambio porcentual dado en una variable exógena puede producir en otra variable.
Buscar objetivo. Operación consistente en encontrar el valor de una sola variable exógena que produce un determinado valor en una sola variable endógena.
Decisión óptima. Conjunto de valores factibles para una decisión que optimizan la función objetivo en un modelo de optimización.
Diagrama de influencia. Diagrama de flujo jerárquico cuyo punto de partida es una medida de desempeño que aclara por medio de flechas sus relaciones con las variables y parámetros de un modelo.
Modelo de mezcla de productos. Modelo de producción que incluye la manufactura de varios artículos.
Modelo de optimización. Modelo de decisión determinístico en el cual se intenta optimizar una sola medida de desempeño (función objetivo), dependiendo de la satisfacción de un conjunto de restricciones dado.
Modelo de producción. Modelo de decisión en el cual la(s) variable(s) de decisión especifica(n) las cantidades de uno o varios artículos que conviene fabricar.
Optimizar. Maximizar o minimizar una función objetivo.
Proyección "¿qué pasaría si?". Sustitución de valores de decisión y/o parámetros en un modelo simbólico para calcular el efecto que producen en determinada(s) medida(s) de desempeño y variables de consecuencias.
Solución óptima. Otro término para referirse a una decisión óptima.
Tabla de datos. Tabulación sistemática de los valores correspondientes a una medida de desempeño y/o variable de consecuencias para un intervalo determinado de valores de una o dos variables exógenas.

Ejercicios de repaso

Verdadero-falso

1. **V F** La forma en que un modelo se presente en una hoja de cálculo electrónica no es muy importante, siempre que los cálculos sean correctos.
2. **V F** La inclusión de números en las fórmulas mejora la documentación de la hoja de cálculo.
3. **V F** Es importante incluir las unidades de medición en los modelos construidos en hojas de cálculo electrónicas.
4. **V F** Cuando se tienen datos hipotéticos en dos variables, el comando Línea de tendencia de Excel es útil para investigar fórmulas algebraicas alternativas que permitan relacionarlas entre sí.
5. **V F** Generalmente, no hay una sola forma correcta de dibujar un diagrama de influencia.
6. **V F** En un modelo de hoja de cálculo, las columnas siempre se usan para representar el tiempo.

7. **V F** Para el análisis de modelos en hojas de cálculo electrónicas es necesario que la medida de desempeño sea: las ganancias.
8. **V F** El comando Buscar objetivo es un procedimiento para optimizar modelos en hojas de cálculo electrónicas.
9. **V F** Los gerentes no tienen por qué preocuparse de las fórmulas en un modelo construido en hojas de cálculo, sino sólo por los resultados del modelo.
10. **V F** Los comandos Agrupar y Esquema pueden usarse para ocultar detalles importantes del modelo cuando se imprime una hoja de cálculo Excel.
11. **V F** Es una buena idea separar los cálculos de variables intermedias que se refieren a cantidades físicas, de los correspondientes a la contabilidad de sus costos.
12. **V F** Las proyecciones "¿qué pasaría si?" sólo son útiles para examinar cambios en los valores de variables de decisión.
13. **V F** Las Tablas de datos son útiles para crear tablas de proyecciones del tipo "¿qué pasaría si?".
14. **V F** Las Tablas de datos sirven solamente para calcular los números que van a ser introducidos en el Asistente para gráficos de Excel.
15. **V F** El comando Buscar objetivo es útil para encontrar los valores de una variable exógena, con los cuales una medida de desempeño adquiere un valor igual al que se ha obtenido con otro modelo alternativo.

Opción múltiple

16. Un buen modelo construido en una hoja de cálculo deberá
- **a.** tener claramente etiquetados los resultados del modelo
- **b.** indicar las unidades de medición en que están expresadas sus variables
- **c.** separar las variables de entrada de las variables endógenas
- **d.** explicar en forma clara cómo se calculan las variables endógenas a partir de las variables de entrada
- **e.** todo lo anterior

17. Los modelos de optimización contienen
- **a.** variables de decisión
- **b.** una función objetivo
- **c.** las dos afirmaciones anteriores

18. Un modelo de optimización
- **a.** proporciona la mejor decisión en el aspecto matemático
- **b.** aporta la mejor decisión posible dentro del limitado contexto del modelo
- **c.** puede ser una herramienta consistente para la evaluación de diferentes políticas
- **d.** todo lo anterior

19. Al usar proyecciones "¿qué pasaría si?", tenemos la seguridad de que podremos encontrar
- **a.** una solución óptima
- **b.** una buena solución
- **c.** una solución factible (si existe alguna)
- **d.** nada de lo anterior

20. Una decisión óptima para el modelo de Oak Products es aquella que
- **a.** utiliza todas las partes componentes disponibles
- **b.** usa el mayor número posible de las partes menos caras
- **c.** maximiza el margen de contribución (ingresos menos costos)
- **d.** maximiza las ganancias semanales
- **e.** maximiza el número total de sillas producidas

21. El comando Tabla de datos 1
- **a.** requiere que se indique un intervalo de valores para una variable exógena
- **b.** nos permite especificar múltiples variables endógenas
- **c.** las dos afirmaciones anteriores
- **d.** nada de lo anterior

22. El comando Tabla de datos 2
- **a.** requiere que se indique un intervalo de valores para dos variables exógenas
- **b.** nos permite especificar múltiples variables endógenas
- **c.** las dos afirmaciones anteriores
- **d.** nada de lo anterior

23. El análisis de sensibilidad
- **a.** compara los cambios de una variable endógena con los cambios de una variable exógena
- **b.** no se puede aplicar a variables de decisión
- **c.** no se puede usar para comparar los valores de dos parámetros
- **d.** las declaraciones a y b anteriores
- **e.** las declaraciones a y c anteriores
- **f.** todo lo anterior

24. La identificación de celdas e intervalos por medio de nombres
- **a.** facilita la interpretación de las fórmulas en la hoja de cálculo
- **b.** ayuda a documentar el modelo construido en la hoja de cálculo
- **c.** oculta la estructura fundamental de las fórmulas
- **d.** las afirmaciones a y b anteriores
- **e.** las afirmaciones a y c anteriores
- **f.** todo lo anterior

25. Algunas características de Excel que pueden usarse como elementos auxiliares para la interpretación y documentación de modelos son
- **a.** el uso del estilo de fuente negrita
- **b.** sangrías en las celdas que contienen rótulos y resultados
- **c.** el uso del estilo subrayado y el sombreado de celdas
- **d.** el uso de bordes en las celdas
- **e.** todo lo anterior

Respuestas

1. F
2. F
3. V
4. V
5. V
6. F
7. F
8. F
9. F
10. V
11. V
12. F
13. V
14. F
15. V
16. e
17. c
18. d
19. d
20. d
21. c
22. a
23. a
24. d
25. e

Problemas

2-1. Simon no considera que el modelo para su empresa sea válido cuando el precio de las tartas se encuentra fuera del intervalo comprendido entre $6 y $11. Use declaraciones SI() y/o el formato condicional de Excel para modificar el modelo, de modo que presente un mensaje de advertencia si se introduce en el modelo cualquier precio fuera de ese intervalo .

2-2. Los Peterson consideran que el costo variable por copia es más complicado que en el modelo XerTech actual, en el cual los materiales cuestan $0.2 por copia y el costo promedio de las reparaciones por copia es $.01. Ahora creen que el costo promedio por copia es más que proporcional al número de copias producidas al mes por cada copiadora. En realidad, estiman dicha relación como se muestra abajo. Modifique el modelo XerTech para incluir la nueva información y prepare un informe para los Peterson con estos nuevos resultados.

DATOS MENSUALES

# de copias/copiadora (000)	Costo de reparaciones/copiadora
20	$ 50
30	150
40	400
50	1000

2-3. Use la Tabla de datos para examinar la sensibilidad a las ganancias que muestra el modelo de Simon Pie frente a los cambios en los siguientes parámetros: costo unitario del relleno para tartas, costo unitario de la masa, costos fijos, pendiente de la ecuación de la demanda de tartas, intersección de la ecuación de la demanda de tartas.

2-4. Bartel Job Shop Co. ha recibido una oferta para montar cerca de 15,000 “agendas” electrónicas a $26.50 cada una. Utilizando sus instalaciones de manufactura, Bartel estima que su costo variable por el montaje de cada unidad sería $21. Alternativamente, Bartel puede subcontratar parte de las operaciones de montaje con Wizard Fabrication Co., con lo cual el costo de montaje de Bartel se reduciría a $18 por unidad. Wizard cobraría a Bartel un cargo fijo de $42,000 por este contrato. Otra opción de Bartel sería pagar $150,000 por el alquiler de un robot para la inserción de partes. Si Bartel lo alquila, el robot reducirá a $11 el costo variable de montaje. Elabore un modelo que permita proyectar las ganancias totales si se acepta esta oferta para cada una de las tres opciones de producción alternativas. ¿A qué nivel de la producción le sería indiferente a Bartel utilizar sus instalaciones existentes y subcontratar, o bien, alquilar el robot y subcontratar? Prepare un informe administrativo donde resuma sus recomendaciones para diferentes cantidades posibles de producción.

2-5. Supongamos que usted fundó una compañía orientada a la venta de computadoras para la industria alimentaria, que permiten el procesamiento de transacciones por Internet. Antes de invertir en la nueva compañía fundada por usted, un capitalista de riesgo solicita una declaración de ingresos proyectada a cinco años, en la cual aparezcan ventas unitarias, ingresos, costo variable total, gastos de mercadotecnia, gastos fijos y ganancias antes de impuestos. Usted cree que podrá vender 1600 unidades de esas computadoras a sus clientes en el primer año, al precio de $1800 cada una. En realidad, espera que las ventas de unidades se dupliquen cada año, impulsadas por el crecimiento de Internet, durante los próximos cinco años. Sin embargo, la competencia impondrá una reducción de 15% en los precios cada año. Afortunadamente, el progreso técnico permite que los costos variables de manufactura iniciales, que son $1000 por unidad, desciendan 6% al año. Usted estima que sus costos fijos serán $1,000,000 al año y ha proyectado que los gastos de mercadotecnia representarán 14% del ingreso anual. Cuando resulte lucrativo, alquilará una máquina automática de montaje, la cual reducirá 20% los costos variables de manufactura, pero duplicará el costo fijo anual; el nuevo costo variable de manufactura bajaría también 6% al año. El valor neto presente (VNP) se usará para agregar el flujo de ganancias anuales, descontadas 15% cada año. Sin considerar los impuestos, construya un modelo en hoja de cálculo electrónica para presentarlo al capitalista de riesgo. ¿Cuántas unidades tendrá usted que vender en el primer año (1) para alcanzar el punto de equilibrio en ese primer año, o (2) para alcanzar el punto de equilibrio en el segundo año? ¿A qué parámetros es más sensible el VNP? Prepare un informe administrativo con un resumen de sus hallazgos.

2-6. Simon ha decidido que su modelo (el ejemplo de Simon Pie) tiene que ser modificado para la temporada invernal, durante la cual disminuyen las ventas. En esa estación, sólo haciendo mucha publicidad a sus tartas puede alcanzar la cantidad de tartas demandadas a la semana que aparece en el modelo. Con menos publicidad, la cantidad de tartas demandadas llega solamente a cierto porcentaje de la cantidad señalada en el modelo. Simon calcula dicha relación mediante los datos siguientes, en los cuales un potencial de mercado de 100% significa que venderá la cantidad de tartas proyectada en el modelo original, y un potencial de mercado de 50% indica que venderá solamente la mitad de esa cantidad proyectada. Él elegirá un monto de publicidad semanal de entre

$5000 y $12,000. Modifique el modelo de Simon Pie a fin de incluir esta nueva información y recomiende las decisiones sobre precio y publicidad más apropiadas para Simon. Examine la sensibilidad de las ganancias semanales con respecto a las sumas gastadas en publicidad.

Publicidad ($000 por semana)	Porcentaje de potencial de mercado
$ 5	40%
7	65
10	80
12	88

Caso práctico Kayo Computer[1]

Kayo Computer arma y vende computadoras personales, cada una de las cuales requiere un tablero de circuito impreso (TCI) diseñado *ex profeso*. Kayo celebró un contrato con un fabricante externo, Apex Manufacturing, para la compra de los TCI. En ese contrato, con vigencia de un año, se estipula que Kayo pagará a Apex $200 por tablero hasta llegar a 2000 TCI. Si la cantidad de sus pedidos anuales rebasa los 2000 TCI, Apex tendrá la obligación de concederle un descuento de $40 por tablero, aplicable a todas las unidades que adquiera después de las primeras 2000, los cuales venderá a $160.

Kayo también puede comprar el mismo tipo de TCI que provee otro fabricante, la empresa TCI Electronics, la cual los vende a un precio más bajo que Apex, $120 por TCI, pero exige un pago único de $100,000 como cuota no reembolsable por su diseño de ingeniería. Los ingenieros de Kayo han comprobado que pueden utilizar los TCI de cualquiera de los dos fabricantes, o bien una mezcla de ambos, sin problema alguno por concepto de costos de manufactura o compatibilidad.

Los TCI, junto con otros componentes, son utilizados por Kayo en sus computadoras personales. El costo variable de montaje de una computadora personal Kayo es $450, con un costo fijo anual de $1,500,000. Kayo vende a $1000 cada una de sus computadoras ya ensambladas. Por ahora nadie está seguro de cuántas computadoras Kayo venderá la compañía el año entrante. Jenny Silk, vicepresidenta de finanzas de Kayo Computer, le ha informado a usted que el modelo actual de computadoras Kayo saldrá del mercado después del año próximo, de modo que cualquier pago único que se le hiciera a la TCI tendría que justificarse solamente con las ventas del año próximo. La funcionaria le pide ayuda para evaluar ciertas cuestiones económicas y legales que afectan su plan financiero para el año próximo.

Preguntas

1. En una hoja de cálculo electrónica construya un modelo que muestre la rentabilidad de las computadoras personales Kayo durante el próximo año. Para empezar, suponga que será posible vender 5000 computadoras el año próximo y que sólo se comprarán 1000 TCI de Apex (el resto será suministrado por la TCI).
2. Si las ventas totales fueran 5000 unidades, ¿cuántos TCI le recomendaría usted a Kayo que le comprara a Apex y cuántos a la TCI, para maximizar las ganancias del año entrante? (Use una Tabla de datos como ayuda para encontrar la recomendación de su preferencia.)
3. Al revisar el contrato de Apex, observa usted que Kayo está obligada a comprarle a esa firma por lo menos 20% de los TCI incluidos en las computadoras Kayo que venda (pero no podrán ser menos de 1000 TCI). El contrato incluye también una cláusula que establece una indemnización por daños si Kayo no paga los $100,000 convenidos. En caso de que fuera posible vender 5000 computadoras Kayo el año próximo, ¿cuál sería el efecto económico si Kayo no cumpliera con la disposición de compra mínima contratada, de 20%/1000, por cambios imprevistos (que la obligaran a usar más tableros de la TCI)? Suponiendo que Apex estuviera dispuesta a renegociar el contrato, ¿qué nuevas condiciones y/o qué monto de ajuste máximo le recomendaría usted a Silk para sus negociaciones con Apex? Justifique su recomendación con los anexos pertinentes en hojas de cálculo.
4. Un análisis de mercado revela que las ventas unitarias dependerán del precio de la computadora. Al precio de $1000 será posible vender 5000 unidades, pero por cada incremento (o decremento) de $100 las ventas disminuirán (o aumentarán, respectivamente) en 1000 unidades. Use la Tabla de datos 2 para maximizar las ganancias de Kayo durante el año próximo, hallando (a) el precio óptimo y (b) el número óptimo de tableros que esta firma puede comprar a Apex sin caer en el incumplimiento de su contrato original.

Caso práctico — Watson Truck Rental Company[1]

La Watson Truck Rental Company, una empresa poseedora de 50 grandes camiones que alquila a contratistas industriales, se ha puesto a la venta al precio de $1,000,000. El vendedor, Eric Watson, le solicita a usted que desarrolle un análisis económico a tres años, como ayuda para que los posibles compradores hagan una evaluación de la compañía.

Watson paga $35,000 al año por concepto de impuestos sobre la propiedad, y sus costos de administración y mantenimiento de los vehículos ascienden actualmente a $4800 por camión. Se ha previsto que los impuestos sobre la propiedad aumentarán a razón de 4% al año, y se estima que los costos de mantenimiento ascenderán a razón de 7% anual.

En la actualidad, el costo del alquiler de esos camiones es de $1000 mensuales por unidad. Aplicando esta tarifa, cada mes son alquilados el 60% de los camiones, en promedio. Watson ha calculado que si rebajara su tarifa de alquiler en la cantidad de $100 mensuales por camión, el porcentaje promedio de vehículos alquilados subiría siete puntos porcentuales, y que este incremento se aplicaría a cada una de las reducciones adicionales de $100 en la tasa de alquiler. Por ejemplo, con una tarifa de alquiler de $600, se alquilarían cada mes el 88% de los camiones. Cualquiera que sea la tarifa de alquiler elegida para el primer año, ésta tendrá un incremento anual de 9% durante los años 2 y 3. El porcentaje promedio de camiones alquilados en los años 2 y 3 será igual al que se haya determinado para el primer año, independientemente del incremento de la tarifa de alquiler durante esos años.

Watson supone que al término de esos tres años, el comprador revenderá la empresa de camiones para obtener una ganancia en efectivo. Se considera que, para esas fechas, el precio de venta será equivalente al triple de los ingresos obtenidos durante el tercer año.

Se ha supuesto que el flujo de caja correspondiente a cada año es igual al ingreso neto (ingresos menos gastos) de ese año. Los efectos de la depreciación y otros factores relacionados con los impuestos sobre ingresos pueden pasarse por alto. El flujo de caja en el año 3 incluye también el dinero obtenido por la venta de la empresa. La ganancia general sobre la inversión se define como el valor neto presente de los flujos de caja anuales (tasa de descuento = 10%) e incluye el precio de compra al *principio* del año 1. Supongamos que no se comprarán ni se venderán camiones durante esos tres años.

Preguntas

1. Identifique las variables de decisión, las variables exógenas, la medida del desempeño, las variables intermedias y cualquier restricción que exista en este problema, y use esos datos para construir un modelo en Excel.
2. Use una Tabla de datos para encontrar la tasa inicial de alquiler de camiones que permita obtener la más alta ganancia general sobre la inversión al cabo de tres años, una vez que la propiedad haya sido vendida.
3. Investigue la sensibilidad de la ganancia general sobre la inversión con respecto a las siguientes variables: precio de compra, costo de mantenimiento por camión, impuesto anual sobre la propiedad y factor multiplicador de ventas. (Para este análisis, use la tasa de alquiler calculada en la pregunta 2 anterior.) ¿A cuál de los factores antes mencionados le son más sensibles las ganancias?
4. Prepare un informe administrativo para Eric Watson en el cual resuma sus hallazgos y recomendaciones.

Caso práctico — Plan financiero personal[1]

Recientemente recibió usted una herencia de $100,000 de su tío abuelo Wiliberto. Usted y su cónyuge se han puesto a considerar qué les conviene hacer con su dinero.

Salario

Los salarios combinados de usted y su cónyuge suman $80,000 y esperan con la mayor confianza que ese total aumente 15% cada año. Entonces deciden atenerse a un presupuesto riguroso y limitar los gastos de la familia a un porcentaje fijo de sus salarios (provisionalmente, al 75%). Por supuesto, a medida que sus salarios aumenten, los gastos aumentarán también. Observe que estos datos están basados en los salarios brutos (no son salarios netos, después de impuestos).

Impuestos

El Congreso acaba de aprobar un nuevo proyecto de ley fiscal basado en una tasa fija. De acuerdo con esta ley, las parejas (como la de usted y su cónyuge) tienen derecho a una deducción de $15,000, y la tasa combinada de impuestos estatales y federales es equivalente al 35% de todos sus ingresos por encima de esa cifra base de $15,000. También se ha instituido un impuesto sobre ganancias de capital: 40% del total de las ganancias de capital será gravado como ingresos regulares.

Inversión al abrigo de impuestos

Usted tiene la opción de invertir la parte que desee de sus fondos en la compra de bienes raíces. Una ventaja de esta inversión es que disfruta de ciertas reducciones fiscales (rebajas al impuesto por concepto de depreciación) en cada uno de los próximos cinco años, al tiempo que reditúa un pequeño pago en efectivo (libre de impuestos). Al final de los cinco años usted podrá vender la propiedad, participará en los beneficios económicos y pagará impuestos sobre sus ganancias de capital por esos beneficios. Éstos son algunos de los factores que debe considerar por cada $1000 invertidos en el proyecto:

Deducción fiscal anual	$ 200
Pago anual en efectivo que usted recibe	$ 40 (no gravables)
Monto de los réditos al final del año 5	$1800
Adeudo de impuestos por ganancias de capital en el año 5	$2300

Inversión en un fondo mutualista

La única inversión alternativa que ha considerado usted es un fondo en el mercado de dinero. Dicho fondo paga intereses a razón de 14% anual y el ingreso que proviene de esos intereses es gravable. En este fondo usted puede invertir cualquier cantidad en el momento que lo desee.

Por comodidad, supongamos que los intereses de cualquier año se pagan sobre el saldo existente al principio de ese año (al final del año anterior). En plan de prueba, la herencia de $100,000 ha sido colocada en un fondo del mercado de dinero, pero puede retirarse de inmediato en caso necesario.

Usted y su cónyuge desean construir un modelo de finanzas personales que les permita observar cómo crecerá su riqueza (saldo de un fondo de mercado) al cabo de cinco años. En realidad ustedes quieren usar este modelo para decidir qué suma les convendría invertir en bienes raíces exentos de impuestos, y para examinar hasta qué punto es sensible su plan para algunas de las suposiciones que han hecho.

Preguntas

Use su modelo para responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto debe invertir en el plan exento de impuestos?
2. Suponiendo que la tasa de aumento de su salario fuera de sólo 10%, ¿cómo afectará eso su riqueza al término de cinco años? Explique este resultado.
3. Incremente 10% cada uno de los parámetros de la inversión libre de impuestos. (Cada uno por separado.) ¿Cuál tiene más impacto sobre su riqueza al cabo de cinco años?
4. ¿Cuál es el porcentaje máximo de sus salarios combinados que pueden ustedes consumir (gastar) sin caer en débito (de tal manera que su saldo de fondos en el mercado de dinero nunca resulte negativo)?
5. ¿Cuál tendría que ser el rendimiento de su fondo en el mercado de dinero para que a usted le resultara totalmente indiferente invertir todo su capital en bienes raíces o no invertir en dicho rubro?

Caso práctico — Benson Appliance Corporation[1]

La Benson Appliance Corporation fabrica dos tipos de aparatos domésticos pequeños en su planta única en Aurora, Illinois. Los dos productos de la compañía, cuchillos y abrelatas eléctricos, se fabrican exclusivamente por medio de representantes manufactureros que atienden a sus respectivos distribuidores de aparatos domésticos al menudeo. A los representantes se les paga un salario fijo, más una comisión por cada unidad que venden. La mayoría de los minoristas añaden un cargo estándar sobre el precio de Benson para ventas al mayoreo.

Durante los decenios de 1970 y 1980, las ventas de la industria crecieron uniformemente 10% anual, y todo el mundo siguió el liderazgo de precios de los grandes fabricantes de aparatos domésticos. Sin embargo, esta cómoda situación acabó por atraer a muchos competidores pequeños. Las ventas totales de la industria siguieron expandiéndose, pero después de 1990 ya ningún fabricante individual podía esperar que aumentaran sus ventas. En 1991 y a principios de 1992, muchos competidores de Benson aplicaron un activo recorte de precios. Benson había establecido una imagen de calidad para sus dos productos, por lo cual decidió mantener sus precios y emprender una modesta campaña de publicidad. Esto ocurrió en 1992, junto con ciertas manipulaciones experimentales de precios para determinar la sensibilidad de las ventas de cada producto al precio. Al final de 1992, los precios ya se habían estabilizado en toda la industria, lo cual hizo que los productos de Benson consolidaran su imagen de precio y calidad ligeramente por encima del promedio. En el Anexo 1 presentamos la declaración de ingresos de Benson en 1992.

La fabricación de aparatos domésticos pequeños permite a Benson expandir la manufactura de cualquiera de sus dos productos a casi cualquier nivel razonable, prácticamente de un momento a otro. Sin embargo, el costo de manufactura variable unitario de cualquiera de sus productos sube 25% si su respectivo volumen de producción anual total rebasa las 400,000 unidades. Así, si la producción de cuchillos fuera de 450,000 unidades, las primeras 400,000 unidades costarían $8 cada una, en términos de costo de manufactura variable, pero las 50,000 unidades restantes costarían $10 cada una. En forma similar, los primeros 400,000 abrelatas costarían $16 cada uno, pero todos los que rebasaran la cifra de 400,00 unidades costarían $20 cada uno. Los costos de manufactura variables son, en su mayoría, costos directos de materiales y mano de obra relativamente no calificada. Los costos fijos de manufactura se asignan por igual a los dos productos, independientemente de sus volúmenes de producción, porque sus respectivas instalaciones ocupan más o menos el mismo espacio en la planta. Los costos variables de mercadotecnia son principalmente comisiones sobre ventas y gastos de fletes. El Anexo 2 ilustra otros detalles de los costos de Benson.

Maximilian Benson, presidente, fundador y único accionista de la Benson Appliance Corporation, está en el proceso de preparar su presupuesto y plan de operaciones para 1993. Esta tarea había sido sencilla hasta fines de la década de 1970 y principios de la siguiente, cuando consistía simplemente en modificar el precio del mercado y proyectar un crecimiento anual de ventas de 10%. Sin embargo, ahora el señor Benson no sabe con certeza qué debe hacer. Por eso le ha pedido a la gerente de mercadotecnia, Clare Voyance, que le comunique sus conclusiones de los experimentos realizados en 1992 sobre precios y publicidad, y que le recomiende precios y presupuestos de publicidad para 1993.

Voyance le informa a Benson que el precio y la publicidad influyeron en las ventas de cada producto, aunque en formas un tanto diferentes. Ella considera que mientras los precios y los gastos de publicidad se mantengan dentro de determinados límites de operación razonables, le será posible proyectar con bastante precisión los resultados de las ventas para 1993.

"Cualquiera que sea el nivel de los gastos de publicidad, nuestras ventas unitarias de cuchillos varían en forma aproximadamente lineal con respecto al precio de ese producto, mientras mantengamos dicho precio entre \$12 y \$23", informa la funcionaria. "He elegido esos límites porque a un precio inferior a \$12 no lograríamos ni siquiera recuperar nuestros costos variables, y con precios muy superiores a \$23 nuestras ventas desaparecerían. Dentro de este intervalo, las ventas aumentan en 100,000 unidades cada vez que rebajamos un dólar más al precio del cuchillo. Esto es válido independientemente de que usemos o no publicidad. Para apreciar el efecto de la publicidad sobre las ventas, tracé el gráfico de las ventas unitarias de cuchillos (en el eje vertical) contra el precio cobrado por cuchillo (en el eje horizontal). Entonces, si gastamos en publicidad, su efecto consiste en desplazar hacia arriba la línea correspondiente a las ventas unitarias en cada nivel de precios, en un monto directamente proporcional a la cantidad que hayamos gastado en esos anuncios. Vendemos 400 cuchillos más por cada \$10,000 adicionales que gastamos en la publicidad de los cuchillos, por lo menos hasta llegar a la suma de \$300,000 que autorizaste el año pasado, Max. En realidad, solamente gastamos \$100,000 en publicidad para los cuchillos en 1992, y los vendimos al precio promedio de \$20 por unidad. El resultado fue la venta de 400,000 cuchillos. Si no hubiéramos usado la publicidad, como en todos los años anteriores a 1992, habríamos vendido 360,000 cuchillos.

"Para todos los niveles de gastos de publicidad, las ventas unitarias de nuestro abrelatas varían también en forma aproximadamente lineal con respecto al precio, mientras éste se mantenga entre \$20 y \$30", prosiguió la señora Voyance. "He elegido estos límites por las mismas razones que antes. Sin embargo, el efecto de la publicidad de los abrelatas depende del precio de éstos, lo cual es diferente del efecto de la publicidad sobre las ventas de cuchillos. Igual que en el caso de éstos, las ventas unitarias aumentan en proporción directa a los gastos de publicidad, pero el factor de proporcionalidad es distinto según los diversos precios de los abrelatas. De hecho, el factor de proporcionalidad parece ser una función lineal del precio de nuestro abrelatas. Al precio promedio de 1992, \$25 por unidad, venderíamos 1500 abrelatas más por cada \$10,000 adicionales que gastáramos en publicidad, por lo menos hasta los \$200,000 que autorizaste como límite máximo. Tal como ocurrió en realidad, gastamos \$100,000 en publicidad para los abrelatas y vendimos 400,000 unidades. Si hubiéramos elevado el precio a \$30, la publicidad no habría tenido impacto alguno sobre las ventas de abrelatas, no importa cuán intensamente los hubiéramos anunciado. Las ventas habrían permanecido invariables en 100,000 abrelatas. También en este caso tracé el gráfico de las ventas de abrelatas (en el eje vertical) contra el precio cobrado por cada abrelatas (en el eje horizontal), y el efecto de la publicidad de esos artículos consistió en una rotación de la línea de ventas unitarias en dirección de las agujas del reloj en torno al precio eje de \$30, siendo siempre dicho efecto proporcional a los gastos de publicidad, pero de un modo creciente a medida que baja el precio del abrelatas."

"Clare", pregunta el señor Benson, "¿por qué decidiste gastar \$100,000 el año pasado en la publicidad de cada uno de nuestros dos productos: cuchillos y abrelatas? Yo autoricé hasta 300,000 para los cuchillos y hasta \$200,000 para los abrelatas, y estoy dispuesto a gastar esas mismas sumas (para cada producto por separado) en 1993. Más aún, cuentas con mi aprobación para elegir el precio que quieras para cada producto, dentro de tus límites razonables de operación, durante el año próximo".

"Bien, Max", repuso la señora Voyance, "parece que caímos en esto por accidente. El gerente de producción, Truman Hardy, estaba muy ansioso por abatir los costos unitarios promedio de manufactura. Después de todo, la bonificación anual que le pagas depende de su éxito en ese renglón. En vista de que el costo unitario promedio de manufactura para cada uno de esos productos es la mitad del costo de manufactura fijo más el costo de manufactura variable de dicho producto, todo eso dividido entre el número de unidades producidas, y puesto que tú ya habías decidido no modificar en más de un dólar el precio de cualquiera de esos productos en 1992, con respecto a su precio en el año anterior, Truman pensó que podríamos mantener exactamente los mismos precios de hace un año y pagar solamente la publicidad necesaria para elevar las ventas de cada producto a 400,000 unidades. Así se minimizarían los costos promedio, según Truman. Esto sugirió también la idea de dividir el presupuesto de publicidad entre los dos productos, por partes iguales, lo cual nos pareció bien porque no teníamos bases para proceder en otra forma. El año pasado representó nuestro primer experimento con la publicidad".

"Otra cosa, Clare", continuó el señor Benson. "¿Sugieren los resultados del año pasado algún impacto recíproco entre los dos productos?"

"Afortunadamente no", respondió la señora Voyance. "Nuestros dos productos tienen nombres de marca diferentes. Hasta donde lo podemos prever, los cambios en los precios o la publicidad de cualquiera de ellos tienen un impacto insignificante sobre las ventas del otro."

"Muy bien, Clare, ¿qué recomiendas para 1993?", preguntó el señor Benson.

"Sugiero que nos esforcemos por incrementar el volumen de ventas, los ingresos y la participación en el mercado", respondió ella. "Podemos lograrlo si rebajamos los precios de ambos productos y les hacemos publicidad más intensamente que el año pasado. En vista de que el mercado se ha estabilizado y hay muy poca inflación, creo que 1993 será prácticamente una repetición de 1992. Por eso todas mis conclusiones del año pasado se aplican por igual al año próximo. Siento que éste es el momento oportuno para acrecentar nuestra participación en el mercado, ya que tenemos precios más altos que el promedio y hay cierta holgura en el presupuesto de publicidad. La reducción de nuestros precios al nivel de la industria no podrá interpretarse como una acción agresiva. La consolidación de nuestra participación en el mercado no será difícil si actuamos ahora, y eso contribuirá a la rentabilidad a largo plazo. Por otra parte, sin duda podríamos mantener los precios un tanto altos del año pasado sin sufrir perjuicios, si eso es lo que tú deseas, Max."

"Eso no estaría mal para ti, Clare", replicó el señor Benson. "Tu gratificación depende de los ingresos por ventas de Benson. ¿Pero qué efecto tendría sobre las ganancias en 1993? Me preocupan las ganancias de la compañía y no quiero esperar indefinidamente para empezar a recibirlas."

Preguntas

1. En una hoja de cálculo electrónica construya un modelo para 1993 con las proyecciones siguientes para los cuchillos y los abrelatas: costo unitario promedio de manufactura, ventas unitarias, ingresos en dólares por concepto de ventas, y ganancias generales en dólares.
2. Use Tabla(s) de datos para encontrar el valor óptimo de la ganancia en dólares de 1993 (dentro de los límites de operación especificados en el caso práctico correspondiente) y el valor óptimo para el costo unitario promedio de manufactura en ese mismo año.
3. Aunque Truman Hardy no utilizó una computadora para hacer su análisis, tuvo éxito al minimizar el costo unitario promedio de manufactura para 1992. Su razonamiento fue el siguiente: *"Para minimizar el costo unitario promedio de manufactura es necesario producir 400,000 unidades, a fin de que los costos fijos de manufactura puedan dispersarse en el mayor volumen de producción que sea posible, sin incurrir en el incremento de los costos variables de manufactura que corresponden a volúmenes más altos."* ¿Acepta usted, en general, el razonamiento del señor Hardy? ¿Por qué sí o por qué no?
4. Recomiende al señor Benson un par de precios y un par de gastos de publicidad para 1993. Explique en qué basa usted esas recomendaciones. Indique al señor Benson si sus recomendaciones pueden tropezar con la resistencia de alguno de sus empleados. Si es probable que surja tal resistencia, explique al señor Benson cómo podría solicitar la aprobación y obtener la cooperación de las personas afectadas.

ANEXO 1 Declaración de ingresos de Benson Appliance Corporation para 1992 (todas las cifras representan miles de dólares)

Ventas totales	$18,000
Costos totales de manufactura	11,100
Margen bruto	6,900
Costos totales de mercadotecnia	3,600
Costos generales y administrativos totales	860
Costos totales de publicidad	200
Ganancias antes de impuestos	$ 2,240

Nota: En 1992 se vendieron en total 400,000 cuchillos eléctricos, al precio unitario promedio de $20, y 400,000 abrelatas eléctricos al precio unitario promedio de $25.

ANEXO 2 Análisis de costos de Benson Appliance Corporation (todas las cifras están en dólares y se basan en los resultados de 1992)

		TIPO DE PRODUCTO	
		Cuchillos eléctricos	Abrelatas eléctricos
Costos variables:			
Costo variable unitario de manufactura			
Volumen =< 400,000 unidades		$8	$16
Volumen > 400,000 unidades		10	20
Costo variable unitario de mercadotecnia		$2	$ 2
Costos fijos:*			
Costo fijo de manufactura	$1,500,000		
Costo fijo de mercadotecnia	2,000,000		
Costo fijo general y administrativo	500,000		
Costos presupuestados†			
Publicidad	$200,000		

**Nota:* Además, se requiere el 2% del ingreso total por concepto de ventas, en dólares, para cubrir parcialmente los costos variables generales y administrativos.

†Todavía no se ha determinado el presupuesto para publicidad de 1993.

Referencias

Mark Bucciarelli y Kip Brown, "A Desktop-OR Success: Modeling Coast Guard Buoy Tender Operations", *Interfaces*, 25, núm. 4 (1995), págs. 1-11.

Parte 2

OPTIMIZACIÓN

Como resulta evidente en el análisis al final del capítulo 2, es de gran interés encontrar una solución óptima para un modelo. El comando Buscar objetivo, de Excel, sugiere claramente que se trata de una eficaz técnica de búsqueda para encontrar los valores de decisión que generen los resultados deseados. Sin embargo, Buscar objetivo tiene ciertas limitaciones:

1. Buscar objetivo no puede tomar en cuenta las restricciones sobre las variables durante la búsqueda.
2. Buscar objetivo solamente permite el ajuste de una variable exógena.
3. Buscar objetivo es necesario especificar con anticipación el valor deseado de la medida de desempeño; es decir, usted debe conocer de antemano el valor de retribución óptimo para que Buscar objetivo pueda localizar la decisión capaz de producir dicha retribución.

Los capítulos 3, 4 y 5 son la introducción a Solver, una herramienta de Excel que generaliza el comando Buscar objetivo y consigue contrarrestar las tres limitaciones antes mencionadas. Solver es casi tan fácil de aplicar a un modelo dado, como Buscar objetivo. No obstante, se trata de una herramienta poderosa cuya aplicación requiere cierto cuidado para evitar las trampas en las que puede caer el constructor de modelos desprevenido. Por ejemplo, al aplicar Solver a algunos modelos se puede obtener una solución que en realidad no es la óptima, mientras que en otros casos es frecuente interpretar erróneamente los resultados obtenidos. Para no caer en estas trampas, necesitamos comprender algunos conceptos referentes a la optimización de modelos. En principio, nuestro procedimiento consistirá en concentrar toda la atención en aquellos modelos donde existen relaciones lineales entre todas las variables. Los modelos lineales son mucho más sencillos de entender, manipular y optimizar cuando se utiliza Solver. En los capítulos 6 y 7 vamos a presentar diversas aplicaciones a fin de ilustrar las amplias posibilidades que nos ofrece el uso de la optimización lineal en situaciones administrativas. Además, la teoría que desarrollamos para comprender la optimización de los modelos lineales constituye la base para los modelos no lineales que desarrollaremos en el capítulo 8. Esta parte concluirá en el capítulo 9, con algunos comentarios acerca de la optimización cuando se manejan varias medidas de desempeño.

CAPÍTULO

3 Optimización lineal

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN — Asignación de flotillas en Delta Air Lines

Delta Air Lines realiza a diario más de 2500 escalas en sus vuelos nacionales, utilizando unas 450 aeronaves de 10 flotillas diferentes, cuyas velocidades, capacidades, nivel de ruido generado y otros parámetros pueden variar. Una escala de vuelo puede consistir en un Boeing 757 que vuele de Atlanta (saliendo a las 6:21 a.m.) a Boston (llegando a las 8:45 a.m.). El problema de asignación de flotillas consiste en hacer coincidir las aeronaves (por ejemplo, Boeing 747, 757, DC-10 o MD80) con las escalas de vuelo, de modo que los asientos vayan llenos de pasajeros que pagan. El patrón de vuelos de la aeronave dentro del sistema de rutas se llama itinerario. El itinerario es como el ritmo cardiaco de una línea aérea. Delta es una de las primeras líneas aéreas que ha resuelto por completo este problema de asignación de flotillas, uno de los problemas más grandes y difíciles para la industria de la aviación comercial.

Los asientos para los pasajeros de las líneas aéreas representan la mercancía más perecedera del mundo. Cada vez que despega una aeronave con un asiento vacío, se pierde para siempre una oportunidad de ingresos. En consecuencia, el itinerario debe diseñarse para capturar la mayor cantidad de ganancias posible, maximizando los ingresos con el menor costo directo de operación permisible. En la industria de la aviación comercial se combina lo peor de dos mundos: tiene la característica del sector manufacturero de ser intensiva en capital, y también la particularidad del sector del menudeo de obtener bajos márgenes de ganancias. Las aerolíneas requieren mucho capital, combustible y mano de obra. La supervivencia y el éxito dependen de la capacidad para operar los vuelos con la mayor eficiencia posible, de acuerdo con el itinerario.

Tanto el tamaño de la flotilla como la cantidad de las distintas aeronaves tienen un impacto importante en la planeación de los itinerarios. La desventaja fundamental es que, si la aerolínea asigna un avión demasiado pequeño a un mercado en particular, tendrá que dejar en tierra algunos pasajeros potenciales, mientras que si emplea un avión demasiado grande, tendrá que pagar el costo de transportar asientos vacíos. La meta es tener el avión adecuado en el lugar preciso y en el momento oportuno, pero esto se dificulta por las muchas restricciones que surgen en la operación real de los aviones.

Delta puso en práctica un programa lineal (PL) en gran escala para asignar los distintos tipos de flotillas a las diferentes escalas de vuelo, con el fin de minimizar una combinación de costos "derivados" sujetos a varias restricciones operativas. La restricción operativa más importante es la cantidad de aeronaves disponibles en cada flota. Algunos factores que complican la situación son: la planeación del mantenimiento programado (por ejemplo, ¿cuál es la mejor ciudad para realizar las operaciones de mantenimiento?); la correlación de las habilidades de los pilotos con los distintos tipos de aeronaves; la asignación del tiempo suficiente para que los pilotos descansen; y otros factores, como el alcance y la velocidad de la aeronave, y las restricciones de los aeropuertos (por ejemplo, el nivel de ruido permisible).

El tamaño típico del modelo de PL que Delta tiene que optimizar diariamente es de 40,000 variables de restricciones y 60,000 variables de decisión. Se espera que este modelo le ahorrará a Delta $300 millones durante los siguientes tres años. American Airlines también informa que ha empleado esos modelos de PL para que le ayuden a ahorrar millones de dólares. (Véase Subramanian *et al*.)

3.1 INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Como vimos en el ejemplo de Oak Products al final del capítulo 2, los modelos de optimización restringida son importantes porque captan la esencia de muchas situaciones de administración decisivas. Recuerde que en el ejemplo de Oak Products un modelo de optimización restringida toma la forma de una medida de desempeño que se optimizará a través de una gama de valores factibles de las variables de decisión. Dichos valores se determinan mediante un conjunto de restricciones de desigualdad. Es decir, que debemos escoger los valores de las variables de decisión de tal manera que se satisfagan las restricciones de desigualdad, mientras se consigue que la medida de desempeño sea tan grande (modelo de maximización) o tan pequeña (modelo de minimización) como sea posible. En el caso de Oak Products, esta tarea consistió en encontrar los valores de seis variables de decisión correspondientes a las cantidades que deberían producirse, una para cada tipo de silla, al mismo tiempo que se cumplían once restricciones referentes a los recursos disponibles.

Por supuesto, el uso de proyecciones del tipo "¿qué pasaría si?" con el modelo de Oak Products es una manera de investigar las consecuencias de diferentes mezclas de productos; es decir, los valores de cada una de las seis cantidades de producción de sillas. Nuestra meta ahora es más ambiciosa. En este capítulo queremos ir más allá de las proyecciones "¿qué pasaría si?" para cubrir la pregunta "¿qué es mejor?" y encontrar las decisiones óptimas. Al hacerlo, debemos evitar las búsquedas aleatorias o no sistemáticas sobre una gama de alternativas de decisión generadas por el miedo de pasar por alto la decisión óptima. Sin embargo, una búsqueda sistemática de "¿qué pasaría si?", en toda la gama de alternativas de decisión de un modelo típico de optimización restringida, muy pronto se tornaría tediosa, aun para el más obsesivo de los usuarios de hojas de cálculo electrónicas. Es más, usted no puede invocar el comando Tabla del menú Datos como una ayuda para automatizar la búsqueda, en virtud de que éste solamente tiene capacidad para manejar, a lo sumo, dos variables de decisión al mismo tiempo.

Incluso si pudiera usar una tabla de datos ampliada (más de dos variables), considere el tiempo que tardaría en efectuar una investigación "¿qué pasaría si?" para la producción de Oak Products, suponiendo que en cada una de las seis variables de decisión pudiesen considerarse como probables, digamos, 100 diferentes cantidades de producción. Es prácticamente imposible realizar una investigación exhaustiva de "¿qué pasaría si?" con todas las combinaciones de la primera variable de decisión (la cantidad de sillas Captain por producir) para cada uno de sus 100 valores candidatos, con cada una de las otras cinco variables de decisión, usando cada uno de sus 100 valores, a fin de determinar los efectos de cada combinación sobre las ganancias; no importa qué tan extendido pueda llegar a ser el comando Tabla de datos o qué tan veloz sea su computadora.

Cada uno de los 100 valores de la primera variable de decisión tendría que combinarse con las 100 cifras de la segunda variable (cantidad de sillas Mate por producir). Esto produce 10,000 entradas "¿qué pasaría si?" para alimentar al modelo de hoja de cálculo, la cual a su vez calculará las cifras de ganancias del modelo y las restricciones para estos 10,000 valores de entrada. Sin embargo, para cada una de estas 10,000 cifras de entrada hay 100 cantidades para la tercera variable de decisión por analizar, dando 1,000,000 entradas "¿qué pasaría si?" en la hoja de calculo para poder calcular sólo las primeras tres variables de decisión. ¿Se da cuenta del patrón que se está desarrollando? Cada variable de decisión añadida *multiplica* por 100 la cifra previa de combinaciones de entradas "¿qué pasaría si?". Puesto que hay en total seis variables de decisión para el modelo de Oak Products, la cantidad total de entradas "¿qué pasaría si?" por contar en el modelo de hoja de cálculo es de 100 multiplicado por sí mismo seis veces, lo cual significa 100^6 o 10^{12} alternativas distintas por investigar. Sería un billón de alternativas del tipo "¿qué pasaría si?" cuya factibilidad y ganancias tendríamos que examinar (¡sin violar las restricciones!).

(Como diversión, considere un número ligeramente más grande del modelo de Oak Products, con 20 tipos de sillas por producir, en lugar de seis. Nuevamente, suponga que la variable de decisión de cada tipo de silla puede tener como posibles 100 cantidades de producción. Como antes, la tarea es enumerar todas las combinaciones posibles de los 100 valores de entrada para cada uno de los 20 tipos de silla, con el fin de averiguar la combinación que maximiza las ganancias. Para hacer la situación más interesante, supongamos que se le autoriza a usted para que utilice en forma simultánea toda la capacidad de cómputo de los casi 40 millones de computadoras que están conectadas a Internet, cada una de las cuales podrá dedicarse exclusivamente a ejecutar el modelo de hoja de cálculo de Oak Products, a un ritmo de, digamos, 100,000 o hasta 1,000,000 proyecciones "¿qué pasaría si?" por segundo. Use Excel para calcular cuántos días tardarían esas computadoras conectadas a Internet en calcular todas las posibles proyecciones de "¿qué pasaría si?" correspondientes a este ejemplo de las 20 variables de decisión. Quizá le sorprenda la respuesta.)

Por supuesto, la gran mayoría de las combinaciones de producción de sillas del ejemplo de Oak Products no resulta interesante, ya que violarían una o varias de las restricciones del modelo o reportarían ganancias bajas. Pero, ¿cuáles son estas combinaciones de alternativas? Es difícil saberlo de antemano sin ensayar cada una con "¿qué pasaría si?" en Excel, lo cual da lugar a una situación contradictoria. En pocas palabras los modelos de optimización restringida son de una estirpe diferente de los modelos "¿qué pasaría si?" más sencillos que desarrollamos anteriormente. Debemos encontrar una forma más rápida y eficiente de efectuar búsquedas "¿qué pasaría si?" sobre el conjunto de alternativas de decisión. Para hacerlo, debemos literalmente "voltear la mesa al revés", tomando las *entradas* del modelo de la hoja de cálculo que se usan normalmente para el análisis "¿qué pasaría si?" (las variables de decisión, en este caso), y convirtiéndolas en las *salidas* del modelo. Esto nos permite pasar por alto la enumeración exhaustiva de muchos miles de alternativas "¿qué pasaría si?" y adoptar procedimientos de búsqueda más eficientes.

El ejemplo de Oak Products comprendía seis decisiones (la cantidad de sillas de cada tipo por fabricar) y once restricciones. Como en el modelo de Delta Air Lines antes descrito, algunos modelos de optimización comprenden miles y aun decenas de miles de variables de decisión y restricciones que requieren software especial y computadoras en gran escala. Sin embargo, muchos modelos de optimización orientados a la administración abarcan decenas o cientos de variables de decisión y restricciones. Para los modelos de esta última escala de tamaños, los paquetes de hojas de cálculo ofrecen una combinación casi perfecta de flexibilidad, comodidad en su construcción, facilidad de uso y poder de cómputo para la optimización.

Existen técnicas de búsqueda muy eficientes para optimizar los modelos lineales restringidos. Por razones históricas, a los modelos lineales restringidos se les llama *programas lineales PL* (o LP, por las siglas en inglés de *Linear Program*). No obstante, la flexibilidad de las hojas de cálculo electrónicas exige que se preste atención a la representación del modelo de PL en ellas, antes de poder proceder con los detalles del proceso de optimización propiamente dicho. Nuestras metas en el presente capítulo son (1) desarrollar algunas técnicas para la formulación de modelos de PL; (2) recomendar algunas reglas para la expresión de modelos de PL en una hoja de cálculo electrónica que facilitan la aplicación de Solver, el paquete de optimización que ha sido incorporado a Excel (y también a varios otros paquetes de hojas de cálculo); y (3) usar Solver para optimizar los modelos de PL en hojas de cálculo de un modo mucho más eficaz que la búsqueda exhaustiva.

3.2 FORMULACIÓN DE MODELOS DE PL

RESTRICCIONES

Para nuestros fines, un primer paso en la formulación de modelos será el reconocimiento de las **restricciones**. En el modelo de Oak Products del capítulo 2, vimos muchas causas por las cuales surgen restricciones. Podemos pensar que las restricciones son *limitaciones* impuestas al grupo de decisiones permisibles. Algunos ejemplos específicos de tales restricciones resultan particularmente evidentes cuando se trata de problemas de administración. Por ejemplo:

1. Un administrador de cartera tiene determinada cantidad de capital a su disposición. Las decisiones están limitadas por la cantidad de capital disponible y por las regulaciones gubernamentales, por ejemplo, las de la Comisión de supervisión de actividades financieras.
2. Las decisiones del administrador de una planta están limitadas por la capacidad de dicha planta y por la disponibilidad de recursos.
3. Los planes de una aerolínea para llevar a cabo la asignación del personal y los vuelos están restringidos por las necesidades de mantenimiento de los aviones y por la cantidad de empleados disponibles.
4. La decisión de una compañía petrolera de utilizar determinado tipo de hidrocarburo en la producción de gasolina está restringida por las características de dicho combustible (por ejemplo, el valor nominal del octanaje requerido y la capacidad antidetonante de la gasolina en cuestión).

En el contexto de la construcción de modelos, las limitaciones o restricciones impuestas sobre las decisiones permisibles tienen especial importancia. Las restricciones se presentan generalmente en dos formas: *limitaciones* y *requerimientos*. Las restricciones pueden subdividirse aún más para reflejar las limitaciones y requerimientos físicos, las limitaciones y requerimientos económicos y las limitaciones y exigencias de política operativa. En los ejemplos anteriores:

1. El administrador de cartera está restringido por ciertas limitaciones de capital (limitación económica) y por las disposiciones de la Comisión de supervisión de actividades financieras (limitaciones y requisitos de políticas).
2. Las decisiones de producción están restringidas por limitaciones de capacidad (limitaciones físicas) y por la disponibilidad de los recursos necesarios (limitaciones físicas y económicas).
3. Las aerolíneas están restringidas por la disposición de que la tripulación pase cuando menos 24 horas en tierra entre vuelos (requisito de políticas).
4. La compañía explotadora de petróleo trabaja bajo la restricción impuesta por los tipos de petróleo disponibles (limitación física) y por el requisito de que la gasolina tenga un valor nominal de octanaje mínimo específico (requerimiento de políticas).

LA FUNCIÓN OBJETIVO

Todos los modelos de programación lineal tienen dos características importantes en común. La primera, ilustrada en los ejemplos anteriores, es la existencia de restricciones. La segunda es que en cada modelo de programación lineal hay una sola medida de desempeño por maximizar o minimizar.[1]

Para demostrar esto, consideremos nuevamente los mismos cuatro ejemplos precedentes. El administrador de cartera podría tener interés en maximizar el rendimiento de la misma, y el gerente de producción podría estar interesado en satisfacer la demanda con un costo de producción mínimo. En esa misma tónica, supongamos que la aerolínea se ha propuesto cubrir un itinerario determinado al mínimo costo posible, y que la compañía petrolera desea utilizar el crudo con el que se cuenta, de tal modo que se maximicen las ganancias.

Por consiguiente, usted puede ver que en cada uno de estos ejemplos hay alguna medida de desempeño y que, quien toma las decisiones desea maximizar (generalmente ganancias, rendimiento, eficiencia o efectividad) o minimizar (por lo común, costo o tiempo). En el léxico de la optimización, la medida de desempeño por optimizar se llama **función objetivo**.

Cada modelo de programación lineal tiene dos características importantes: una *función objetivo* por maximizar o minimizar y ciertas *restricciones*.

La programación lineal proporciona un ejemplo de lo que se conoce de manera más general como *modelo de toma de decisiones con restriciones*, también llamado **modelo de optimización con restricciones**. Una descripción común de dicho modelo es:

Un modelo de optimización restringido representa el problema de la asignación de recursos escasos de tal modo que se optimice un objetivo de interés.

En esta descripción, la frase "recursos escasos" se refiere a los recursos que están sujetos a restricciones.

Aunque existen otros tipos distintos y más generales de modelos de toma de decisiones con restricciones, no deja de ser cierto que, en muchas aplicaciones, la programación lineal es la más útil. Se ha aplicado con éxito a miles de problemas administrativos de toma de decisiones, y por eso prestaremos considerable atención a este tema. Comenzaremos por presentar un ejemplo numérico específico de formulación de programación lineal para la compañía PROTRAC, presentada en el capítulo 1. Luego mostraremos cómo puede Solver encontrar la solución a este problema usando el modelo de toma de decisiones con restricción.

PROTRAC, INC.

PROTRAC, Inc. produce dos líneas de maquinaria pesada. Una de sus líneas de productos, llamada equipo de excavación, se utiliza de manera primordial en aplicaciones de construcción. La otra línea, denominada equipo para la silvicultura, está destinada a la industria maderera. Tanto la máquina más grande de la línea de equipo de excavación (la E-9), como la mayor de toda la línea de equipo para la silvicultura (la F-9) son fabricadas en los mismos departamentos y con el mismo equipo. Empleando las proyecciones económicas correspondientes al siguiente mes, el gerente de mercadotecnia de PROTRAC ha considerado que durante ese periodo será posible vender todas las E-9 y F-9 que la compañía sea capaz de producir. La gerencia tiene que recomendar ahora una meta de producción para el mes próximo. Es decir, ¿cuántas E-9 y F-9 deberán fabricar si la dirección de PROTRAC desea maximizar la contribución del mes entrante a

[1]En muchos casos, no será fácil desarrollar una sola medida de desempeño que sea aceptable para todos. Sin embargo, la optimización es posible aun en estos casos y hablaremos de ella en el capítulo 9.

las ganancias (es decir, el margen de contribución, definido como los ingresos menos los costos variables)?

Los datos de PROTRAC La toma de esta decisión requiere la consideración de los siguientes factores importantes:

1. El margen de contribución unitaria de PROTRAC es de \$5000 por cada E-9 vendida y de \$4000 por cada F-9.
2. Cada producto pasa por las *operaciones de maquinado*, tanto en el departamento A como en el B.
3. Para la producción correspondiente al mes próximo, estos dos departamentos tienen tiempos disponibles de 150 y 160 horas, respectivamente. La fabricación de cada E-9 requiere 10 horas de maquinado en el departamento A y 20 horas en el departamento B, mientras que la de cada F-9 requiere 15 horas en el departamento A y 10 en el B. Estos datos aparecen resumidos en la tabla 3.1.
4. Para que la administración cumpla un acuerdo concertado con el sindicato, las horas totales de trabajo invertidas en la *prueba de productos terminados* del siguiente mes no deben ser más allá del 10% inferior a una meta convenida de 150 horas. Estas pruebas se llevan a cabo en un tercer departamento y no tienen nada que ver con las actividades de los departamentos A y B. Cada E-9 es sometida a pruebas durante 30 horas y cada F-9 durante 10. Dado que el 10% de 150 es 15, las horas destinadas a las pruebas no pueden ser menores que 135. Esta información se resume en la tabla 3.2.
5. Con el fin de mantener su posición actual en el mercado, la alta gerencia ha decretado como política operativa que: deberá construirse cuando menos una F-9 por cada tres E-9 que sean fabricadas.
6. Uno de los principales distribuidores ha ordenado un total de cuando menos cinco E-9 y F-9 (en cualquier combinación) para el próximo mes, por lo cual tendrá que producirse por lo menos esa cantidad.

A partir de estas consideraciones, el problema de la gerencia es decidir cuántas E-9 y F-9 fabricará el próximo mes. En términos de modelos, la gerencia intenta determinar la **mezcla de productos óptima**, también llamada **plan de producción óptimo**. Procedamos ahora a mostrar la manera de expresar este problema como un modelo de optimización y particularmente como un programa lineal. Para ello, tendremos que identificar las restricciones y la función objetivo.

Las restricciones Hemos indicado que en cada departamento es limitado el tiempo disponible para las operaciones de maquinado durante la fabricación de las E-9 y F-9. Por ejemplo, para el periodo considerado, no hay más de 150 horas disponibles en el departamento A. Esta disponibilidad limitada de horas es una restricción. Para formular de manera concisa tal restricción, comencemos por determinar las horas que se invertirán en el departamento A. Recuerde que tanto las E-9 como las F-9 deben tornearse en el departamento A. Sabemos que cada E-9 requerirá

TABLA 3.1 Datos de torneado de PROTRAC

	HORAS		
DEPARTAMENTO	por E-9	por F-9	Total disponible
A	10	15	150
B	20	10	160

TABLA 3.2 Datos de prueba de PROTRAC

	1 E-9	1 F-9	HORAS TOTALES REQUERIDAS
Horas de prueba	30	10	135

10 horas de maquinado en dicho departamento. Cada F-9 empleará 15 horas en el departamento A. Por tanto, para cualquier plan de producción,

10(número de E-9 producidas) + 15(número de F-9 producidas) = horas totales en el depto.A.

Esto puede expresarse mejor si introducimos una notación sencilla. Sea

$$E = \text{cantidad de E-9 por producir}$$
$$F = \text{cantidad de F-9 por producir}$$

Entonces la expresión del total de horas usadas en el departamento A se convierte en

$$10E + 15F = \text{total de horas empleadas en el departamento A.}$$

Pero como hay un máximo de 150 horas disponibles en el departamento A, según hemos dicho, de aquí se desprende que las variables de decisión E y F tendrán que satisfacer la condición (es decir, la restricción)

$$10E + 15F \leq 150 \tag{3.1}$$

Esto expresa la restricción de horas para el departamento A. El símbolo $\leq$ significa *menor o igual que* y a la condición (3.1) se le llama **restricción de desigualdad.** El número 150 se conoce como **lado derecho** (LD) de la desigualdad. Resulta claro que el lado izquierdo (LI) de la desigualdad depende de los valores desconocidos o incógnitas E y F y recibe el nombre de **función de restricción**. La desigualdad (3.1) es una forma simbólica y concisa de expresar la restricción por la cual la cantidad total de horas empleadas en el departamento A para producir E unidades de la E-9 y F unidades de la F-9 no deberá sobrepasar las 150 horas disponibles.

También observamos que por cada E-9 producida se utilizarán 20 horas y por cada F-9 se emplearán 10 horas de torneado en el departamento B. Dado que hay a lo sumo 160 horas disponibles en el departamento B, se desprende que los valores de E y F tendrán que cumplir también con

$$20E + 10F \leq 160 \tag{3.2}$$

Las desigualdades (3.1) y (3.2) representan dos de las restricciones del problema actual. ¿Existen otras? El estudio previo de las consideraciones principales nos muestra que existe también un acuerdo con el sindicato que debe ser respetado (es decir, la consideración principal 4). Para cada E-9 fabricada se requerirán 30 horas de pruebas y para cada F-9, 10 horas. Por consiguiente

$$30E + 10F = \text{horas totales empleadas para las pruebas}$$

El total de las horas de mano de obra para las pruebas no puede ser menor que 135. Así, obtenemos la restricción

$$30E + 10F \geq 135 \tag{3.3}$$

El símbolo $\geq$ significa *mayor o igual que* y la condición (3.3) se conoce también como **restricción de desigualdad**. Observe usted que la condición (3.3) es una desigualdad del tipo $\geq$ (un requerimiento), en oposición a las condiciones (3.1) y (3.2), que son desigualdades del tipo $\leq$ (limitaciones).

Otra restricción indica que debe producirse cuando menos una F-9 por cada tres E-9. Esa situación se expresa con símbolos en esta forma

$$\frac{E}{3} \leq F$$

Dado que ambos lados de la desigualdad pueden multiplicarse por el mismo número positivo sin cambiar la dirección de la desigualdad, podemos multiplicar por 3 ambos lados de esta última restricción para obtener

$$E \leq 3F$$

Más adelante, en el capítulo 5, veremos que la interpretación adecuada de la optimización de los informes de la hoja de cálculo se simplifica si dicha desigualdad se expresa con todas las variables de decisión del lado izquierdo (formando así la función de restricción). Por tanto, en este caso restamos $3F$ de ambos lados para obtener la expresión apropiada

$$\mathrm{E} - 3F \leq 0 \tag{3.4}$$

Es frecuente que los coeficientes de este tipo de restricciones sean escritos incorrectamente. Por ejemplo, alguien podría escribir $3E \leq F$. Para empezar, escriba usted cualquier restricción y luego compruebe que expresa algebraicamente lo mismo que en español.

La sexta de las consideraciones principales establece que es preciso producir cuando menos cinco unidades el próximo mes, en cualquier combinación. Esta restricción se expresa sencillamente así

$$E + F \geq 5 \tag{3.5}$$

Hasta ahora hemos especificado en forma simbólica y precisa cinco restricciones de desigualdad asociadas al problema de producción de PROTRAC. Puesto que no tiene sentido producir una cantidad negativa de equipos E-9 o F-9, tendremos que incluir dos condiciones adicionales

$$E \geq 0, F \geq 0 \tag{3.6}$$

Las condiciones como la (3.6), en la cual se requiere que E y F sean no negativos, se llaman **condiciones de no negatividad**. Es importante tener presente que el término *no negativo* no es equivalente al término *positivo*. La diferencia es que *no negativo* permite que el valor sea cero, mientras que *positivo* prohíbe el uso de dicho valor.

En resumen, estas son todas las restricciones y las condiciones de no negatividad del modelo de PROTRAC, Inc.:

$$
\begin{array}{lll}
10E + 15F & \leq 150 & \textbf{(3.1)} \\
20E + 10F & \leq 160 & \textbf{(3.2)} \\
30E + 10F & \geq 135 & \textbf{(3.3)} \\
E - 3F & \leq 0 & \textbf{(3.4)} \\
E + F & \geq 5 & \textbf{(3.5)} \\
E \geq 0, F \geq 0 & & \textbf{(3.6)}
\end{array}
$$

EVALUACIÓN DE VARIAS DECISIONES

En el modelo anterior, la selección de valores para el par de variables (E, F) se conoce como una decisión; E y F se llaman **variables de decisión** porque se trata de cantidades controladas por la administración. Queda claro que en este problema una decisión es una mezcla de producción. Por ejemplo, $E = 6$ y $F = 5$ es una decisión para fabricar seis E-9 y cinco F-9. Algunas decisiones no negativas satisfarán todas las restricciones (3.1) a (3.5) de nuestro modelo, pero otras no lo harán. Por ejemplo, podemos observar que la decisión $E = 6$, $F = 5$ satisface las restricciones (3.1), (3.3), (3.4) y (3.5) y viola la restricción (3.2). Para apreciar la situación, sustituimos $E = 6$, $F = 5$ en las restricciones (3.1) a (3.5) y evaluamos los resultados. Al hacer esto, obtenemos

Restricción 1.

$$
\begin{array}{rl}
10E + 15F & \leq 150 \\
10(6) + 15(5) & \leq 150 \\
60 + 75 & \leq 150 \\
135 & \leq 150 \text{ verdadero}
\end{array}
$$

Por tanto, esta restricción se cumple cuando $E = 6$, $F = 5$.

Restricción 2.

$$
\begin{array}{rl}
20E + 10F & \leq 160 \\
20(6) + 10(5) & \leq 160 \\
120 + 50 & \leq 160 \\
170 & \leq 160 \text{ falso}
\end{array}
$$

Por lo cual esta restricción se viola cuando $E = 6$, $F = 5$.

De la misma manera, la decisión $E = 6$, $F = 5$ satisface las restricciones (3.3), (3.4) y (3.5). De modo semejante, la mezcla de producción $E = 5$, $F = 4$ satisface todas las restricciones.

La mezcla, o decisión, $E = 6$, $F = 5$ no es permisible pues, como acabamos de ver, no hay bastantes horas disponibles en el departamento B (restricción 3.2) para aplicar esta decisión. Otra manera de decir lo mismo es que esta decisión no es permisible porque ha violado una de las restricciones. Entre la infinita cantidad de parejas no negativas de números (E, F), algunas parejas, o decisiones, violarán cuando menos una de las restricciones y algunas las satisfarán todas. En nuestro modelo, sólo se permiten las decisiones que satisfacen *todas* las restricciones. A esas decisiones se les conoce como **decisiones factibles**.

La función objetivo. De todas las decisiones permisibles, o factibles, ¿cuál deberá aplicarse? Como dijimos anteriormente, cada modelo de programación lineal tiene un objetivo específico, además de restricciones. La dirección de PROTRAC, Inc. se propone maximizar las ganancias del próximo mes; por lo cual éstas son el objetivo. Resulta claro que las ganancias de PROTRAC provienen de dos fuentes.

1. Una contribución a las ganancias proviene de la venta de equipos E-9.
2. Otra contribución a las ganancias proviene de la venta de equipos F-9.

En nuestro estudio previo de los principales factores por considerar, indicamos que el margen de contribución unitaria es de \$5000 por cada E-9 y de \$4000 por cada F-9. Dado que PROTRAC gana \$5000 por cada E-9 y que E indica la cantidad de máquinas E-9 por producir, vemos que

$$5000E = \text{contribución a las ganancias por la producción de } E \text{ unidades de E-9}$$

En forma similar,

$$4000F = \text{contribución a las ganancias por la producción de } F \text{ unidades de F-9}$$

Por tanto, la decisión de producir E unidades de E-9 y F unidades de F-9 alcanza una contribución total a las ganancias expresada por

$$\text{contribución total a las ganancias} = 5000E + 4000F \tag{3.7}$$

Nótese que, en general, cuando solamente se dan (o sólo están disponibles) los datos de ingresos, lo único que se puede hacer es maximizar los ingresos sujetándose a las restricciones. Si sólo se cuenta con la información referente a los costos, entonces todo lo que puede hacerse es minimizar el costo de producir una mezcla determinada de productos. Sin embargo, si se dispone de información sobre costos e ingresos, por lo general es más conveniente maximizar la contribución a las ganancias, antes que el ingreso.

Una solución óptima. De la infinidad de decisiones que satisfacen todas las restricciones (es decir, de todas las decisiones factibles), aquella que aporte la mayor contribución total a las ganancias se llamará *solución* al problema de PROTRAC o, como se le conoce con frecuencia, **solución óptima**. Por tanto, buscamos una solución que permita *maximizar* la contribución total a las ganancias en relación con el conjunto de las decisiones factibles. Tal decisión se llama **decisión óptima**. Dado que la contribución total a las ganancias es una *función* de las variables E y F, nos referiremos a la expresión $5000E + 4000F$ como la *función objetivo* y trataremos de encontrar valores factibles de E y F que **optimicen** (que en este caso significa maximicen) la función objetivo. Entonces, nuestro objetivo, en términos simbólicos, se expresa concretamente como

$$\text{maximizar } 5000E + 4000F$$

o, de manera aún más sencilla, esto se escribe como

$$\text{Max } 5000E + 4000F \tag{3.8}$$

La función objetivo debe maximizarse *sólo* sobre el conjunto de decisiones factibles.

Por ejemplo, antes vimos que la decisión $E = 5$, $F = 4$ es factible porque satisface todas las restricciones. El *valor objetivo* que corresponde a esta decisión sería

$$\begin{aligned}\text{ganancia total} &= 5000E + 4000F \\ &= 5000(5) + 4000(4) = 41{,}000\end{aligned}$$

Asociada con la decisión E = 6, F = 5, el valor objetivo sería

$$\begin{aligned}\text{contribución total a las ganancias} &= 5000E + 4000F \\ &= 5000(6) + 4000(5) = 50{,}000\end{aligned}$$

Mejoramiento del valor objetivo. Aunque este valor objetivo es mayor que el anterior y, por tanto, es más atractivo, recordamos que $E = 6$ y $F = 5$ no es una decisión factible, ya que viola una de las restricciones. Por tanto, PROTRAC no puede considerar esta decisión y debe descartarla. ¿Existe una decisión *factible* preferente; es decir, una decisión para la cual el valor objetivo rebase los 41,000? Por ejemplo, la decisión $E = 6$, $F = 3.5$ satisface las restricciones y arroja un valor objetivo de 44,000, que ciertamente es mejor que 41,000. ¿Es realmente este plan de producción ($E = 6$, $F = 3.5$) una decisión óptima (es decir, una solución de nuestro modelo), o es posible conseguir algo mejor? Recuerde que sólo puede considerar las decisiones factibles, es decir, las alternativas de producción que satisfagan *todas* las restricciones.

OBSERVACIONES SOBRE EL MODELO PROTRAC

En la siguiente sección veremos cómo optimizar rigurosamente (es decir, sin adivinar las respuestas) este modelo y muchos otros semejantes, a partir de su representación en hojas de cálculo. Además, veremos cómo se puede emplear Solver para que realice una buena parte del trabajo por nosotros. Sin embargo, dedicaremos primero un momento a repasar la formulación simbólica completa del modelo de PROTRAC, Inc. y haremos luego varias observaciones acerca de su forma.

En el análisis precedente tradujimos la descripción verbal de una situación real en un modelo simbólico completo, con una función objetivo y restricciones. Este modelo, que llamaremos **modelo de PL simbólico**, es

$$\begin{array}{lll}
\text{Max } 5000E + 4000F & & \text{(función objetivo)} \\
\text{sujeto a (s.a.)} & & \\
10E + 15F & \le 150 & \text{(horas en el departamento A)} \\
20E + 10F & \le 160 & \text{(horas en el departamento B)} \\
30E + 10F & \ge 135 & \text{(horas de pruebas)} \\
E - 3F & \le 0 & \text{(restricción de mezcla)} \\
E + F & \ge 5 & \text{(requerimiento del total de unidades)} \\
E, F & \ge 0 & \text{(condiciones de no negatividad)}
\end{array}$$

Funciones lineales. Adviértase que en el modelo de PL anterior todas las funciones de restricción (recuerde que tales funciones son la parte izquierda de las restricciones de desigualdad) y la función objetivo son **funciones lineales** de las variables de decisión. Como recordará, el gráfico de una función lineal de dos variables es una recta. En general, una función lineal es aquélla en la que cada variable aparece en un término separado junto con su coeficiente (es decir, no hay productos o cocientes de las variables; aquí no hay exponentes que no sean 1; no existen términos logarítmicos, exponenciales, de postulados SI() ni trigonométricos). Como puede usted apreciar, estas consideraciones son válidas para cada una de las funciones del modelo anterior. En contraste, la función $14E + 12EF$ es no lineal porque el término $12EF$ implica un producto de variables. Tampoco la función $9E^2 + 8F$ es lineal, puesto que la variable E está elevada a la potencia 2. Otros ejemplos de funciones no lineales son $6\sqrt{E} + F$ y $19\ Log\ E + 12E^2F$. Algunos ejemplos de las funciones de Excel que muy frecuentemente introducen características de no linealidad en los modelos son SI(), MAX(), MIN(), LN() y ABS().

Como podrá usted imaginar, las funciones no lineales son más difíciles de manejar desde el punto de vista matemático. El poder de la programación lineal en estas aplicaciones proviene de la potencia de las relaciones lineales (igualdades y desigualdades) y del hecho de que los modelos lineales pueden ser aplicados fácilmente en situaciones reales por administradores con pocos conocimientos de las matemáticas que intervienen en ellos. Para nuestros fines actuales, los principios importantes que conviene recordar son

1. Un programa lineal siempre tiene una función objetivo (que deberá maximizarse o minimizarse) y restricciones.
2. Todas las funciones (objetivo y restricciones) del problema son *funciones lineales*.

Consideraciones sobre integralidad. Como observación final, veamos de otra manera la formulación completa del modelo de PROTRAC, Inc. Conviene indicar que, a menos que se establezcan restricciones específicas adicionales (para obligar a que las variables de decisión sean de enteros) debemos estar dispuestos a aceptar soluciones fraccionarias. En muchos modelos de PL, como el de PROTRAC, Inc., será verdad que los valores fraccionarios de las variables de decisión no tienen interpretaciones físicas significativas. Por ejemplo, tal vez no se pueda poner en práctica directamente una solución que indique "produzca 3.12 equipos E-9 y 6.88 F-9". Por otra parte, hay muchos problemas en que las fracciones evidentemente tienen significado (por ejemplo, "produzca 98.65 litros de petróleo"). Para los casos en los cuales las respuestas fraccionales no tienen significado, existen cuatro recursos posibles:

1. Añada una **condición de integralidad** al modelo de PL, con lo cual se obligará a una o más variables de decisión a adoptar sólo valores enteros. Esto transforma el modelo en lo que se llama modelo de optimización de enteros, o **programa de enteros**. En estos modelos intervienen muchas consideraciones adicionales, además del programa lineal ordinario. Los programas de enteros serán estudiados con todo detalle en el capítulo 7.
2. Resuelva el modelo como si fuera un PL ordinario y después redondee (por ejemplo, al entero más cercano) cualquier variable de decisión para la cual no resulte aceptable una respuesta fraccionaria. En muchos casos, esta táctica sencilla y aceptable genera soluciones que posiblemente no sean factibles u óptimas. En el capítulo 7 estudiaremos las ventajas y desventajas de este procedimiento.
3. Considere que los resultados del modelo de PROTRAC durante un mes son la producción *promedio* mensual para un modelo de varios meses. Por ejemplo, una solución que diga "produzca 3.5 E-9 y 6.25 F-9" puede aplicarse como si dijera "imponga un plan de producción que fabrique 3.5 E-9 cada mes pero (a) venda 3 E-9 en un mes, dejando una mitad de un E-9 como inventario de 'producto en proceso' que se acumula para terminarse el siguiente mes y (b) venda 4 E-9 cada segundo mes. De igual modo, produzca 6.25 F-9 cada mes pero (a) venda solamente 6 F-9 cada mes, acumulando cualquier F-9 fraccionario como inventario de 'producto en proceso' para el mes siguiente, excepto (b) venda 7 F-9 cada cuarto mes". Queda claro que dicha regla da como resultado una producción y venta promediada cada intervalo de cuatro meses de 3.5 E-9 y 6.25 F-9 por mes, como lo estipula la solución PL. Las ventajas y desventajas de emplear un modelo de promedio mensual como sustituto de las decisiones de producción a lo largo de varios meses se estudiarán en el capítulo 6 al formular "modelos dinámicos", es decir, modelos para múltiples periodos.
4. Considere que los resultados del modelo de PROTRAC correspondiente a un mes sólo tienen propósitos de planeación, pero no son decisiones operativas que vayan a implantarse *per se*. Es decir, los resultados del modelo sólo servirán como guía para la decisión final, que necesariamente comprenderá muchas otras consideraciones reales no captadas por el modelo de PL más abstracto. De todas maneras, tales consideraciones muy probablemente obligarán a que las decisiones finales de la gerencia se desvíen de las decisiones del PL referentes a valores fraccionarios. En este caso, la solución del modelo de PL ofrece un punto de partida para ese tipo de consideraciones o la base para el discernimiento y los conocimientos administrativos que, como recordará usted, fue el objetivo original que expusimos en el capítulo 1 en nuestro argumento a favor de la construcción de modelos.

En la práctica se adoptan todos estos enfoques. Por ahora nos bastará suponer que ambas soluciones fraccionarias son significativas para fines de aplicación y que el modelo constituye la base para la planeación y el discernimiento (opción 4, anterior).

3.3 GUÍAS Y COMENTARIOS ACERCA DE LA FORMULACIÓN DE MODELOS

En el proceso de representar una situación administrativa mediante un modelo simbólico, tal vez encuentre útil crear primero un modelo en términos verbales. Esto significa que, podría proceder en la siguiente forma:

1. Exprese cada restricción con palabras; cuando lo haga, preste especial atención a si la restricción es un requerimiento de la forma $\geq$ (cuando menos tan grande como), una limitación de la forma $\leq$ (no mayor que), o bien, = (exactamente igual que).

2. A continuación, exprese con palabras el objetivo y la función objetivo para la medición de su desempeño.

Con los pasos 1 y 2 le deberá ser posible

3. Identifique verbalmente las variables de decisión.

En casi todos los casos es muy importante que sus variables de decisión estén definidas correctamente. A veces puede sentir que hay varias posibilidades. Por ejemplo, ¿las variables deben representar kilos de producto terminado o de materia prima? Una guía útil es preguntarse, *¿qué decisiones deben tomarse para optimizar la función objetivo?* La respuesta le ayudará a identificar correctamente las variables de decisión.

Al completar los pasos 1 a 3 invente una notación simbólica para las variables de decisión. Entonces

4. Exprese cada restricción con símbolos (es decir, en términos de variables de decisión).
5. Exprese la función objetivo con símbolos (en términos de las variables de decisión).

En este punto, es recomendable comprobar la consistencia de su trabajo en cuanto a las unidades de medición. Por ejemplo, si los coeficientes de la función objetivo se refieren a dólares por *kilo*, las variables de decisión de la función objetivo deberán estar en kilos, no en toneladas ni en libras. De igual modo, revise en las restricciones que las unidades del lado derecho sean iguales a las del lado izquierdo. Por ejemplo, si una de las restricciones es una limitación de la forma $\leq$ referente a las horas de trabajo, el lado derecho será horas de trabajo. Entonces si las variables de decisión están en kilos, como antes, los datos de esta función de restricción (es decir, los coeficientes numéricos de cada variable de decisión del lado izquierdo de la restricción) deberán estar expresados en horas de trabajo por kilo. En términos sencillos, no querrá usted que haya horas en uno de los lados de una igualdad o desigualdad, y minutos, segundos, kilos o toneladas en el otro.

En este punto, sería oportuno comentar otro aspecto de la formulación de modelos. Hemos visto que las restricciones de desigualdad pueden ser de las formas $\leq$ y $\geq$. Los estudiantes con frecuencia se preguntan si un modelo de programación lineal puede tener una restricción de *desigualdad estricta*, como $<$ o $>$. La respuesta es *no* y la razón de esto es asegurarse de que un modelo bien formulado tenga solución. Los detalles matemáticos necesarios para justificar esta aseveración no son parte de lo que aquí nos interesa. No obstante, ésta prohibición no es costosa, pues en casi todas las situaciones que se pueda imaginar donde haya restricciones de desigualdad, es verdad que la representación $\leq$ o $\geq$ capta por completo el significado real. Por ejemplo, si una variable X debe ser < 15, entonces el uso de la expresión $X \leq 14.9999999999$ en el modelo seguramente será adecuado para propósitos administrativos.

Estudiemos ahora uno de los puntos finales de la formulación de modelos, que tiene que ver con la naturaleza de la información de costos por emplear.

3.4 COSTOS FIJOS *VERSUS* COSTOS VARIABLES

En muchas situaciones reales suele haber dos tipos de costos: costos fijos y costos variables. Contrariamente a la primera impresión que a veces tienen los estudiantes, los costos fijos no intervienen en la optimización.

> Sólo son relevantes los costos variables en los modelos de optimización.

Los costos fijos ya se han pagado, lo que significa que ninguna decisión futura puede afectar estos gastos. Por ejemplo, suponga que la firma compró 800 kilos y otros 500 kilos de dos calidades de aluminio (calidad 1 y calidad 2) para entrega futura, a precios especificados de \$5 y \$10 por kilo, respectivamente, y que ya fue firmado el contrato. El problema de la administración consiste, en parte, en determinar el empleo óptimo de esos 1300 kilos de aluminio, tal vez, para maximizar las ganancias obtenidas con la producción de juntas y conductos de aluminio. Por la producción asociada a estos dos productos se incurrirá en ingresos y costos variables (costos de torneado, troquelado, etc.). En las formulaciones de este tipo de modelo, son irrelevantes los costos fijos de \$9000 relacionados con la compra contratada. Esta cantidad ya se ha gastado y, por tanto, las *cantidades por comprar* han dejado de ser variables de decisión. Las variables serán: cuánto producto habrá que producir, y el costo relevante en esta determinación es el único costo variable. Más específicamente, la formulación correspondiente a la descripción anterior podría ser como sigue. Sea

K = cantidad de juntas por producir (variable de decisión)
C = cantidad de conductos por producir (variable de decisión)
\$10 = ingreso por junta
\$30 = ingreso por conducto
\$4 = costo de producción de una junta (costo variable)
\$12 = costo de producción de un conducto (costo variable)

Para cada producto debemos calcular lo que los contadores llaman *margen de contribución unitaria*; es decir, la diferencia entre el ingreso por unidad y el costo variable por unidad. Los márgenes de contribución unitaria son

$$\text{para juntas: } \$10 - \$4 = \$6$$
$$\text{para conductos: } \$30 - \$12 = \$18$$

Supongamos que en cada junta se emplean una unidad de aluminio de calidad 1 y dos unidades de aluminio de calidad 2. Para cada conducto se necesitan tres unidades de calidad 1 y cinco de calidad 2. Con esto obtenemos el siguiente modelo simbólico de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Max } 6K + 18C \\ &\text{s.a. } K + 3C \quad \leq 800 \text{ (limitación de grado 1)} \\ &\quad 2K + 5C \quad \leq 500 \text{ (limitación de grado 2)} \\ &\quad K \geq 0, \quad C \geq 0 \end{aligned}$$

Una manera de apreciar la irrelevancia del costo fijo consiste en observar que, en la formulación, la función objetivo es la contribución total a las ganancias. El ingreso, o ganancia neta, sería entonces

$$\begin{aligned} \text{ganancia neta} &= \text{contribución a las ganancias} - \text{costo fijo} \\ &= 6K + 18C - 9000 \end{aligned}$$

Sin embargo, encontrar valores factibles para K y C que maximicen $6K + 18C - 9000$ es lo mismo que encontrar valores factibles que maximicen $6K + 18C$. Por tanto, el término constante 9000 puede ignorarse. La cuestión es que la maximización de una función más una constante, e inclusive de una constante positiva por una función, produce en ambos casos el mismo resultado, en términos de los valores óptimos de las variables de decisión, que obtendría usted si no hubiera incluido la constante. Sin embargo, la suma (o resta) de la misma constante a (o de) cada *coeficiente* de la variable de decisión de la función objetivo puede modificar el resultado.

En resumen, los costos fijos sólo afectan el reporte de contabilidad de ingresos o ganancias netas de los estados financieros. Los costos fijos no intervienen en absoluto en el proceso de toma de decisiones porque, por definición, no están relacionados con las decisiones futuras que son el tema de la construcción de modelos. Por supuesto que no se causará perjuicio alguno si en el modelo se resta el costo fijo de la función objetivo; en realidad, se llegará a las mismas decisiones óptimas cuando se optimice el modelo. No obstante, sí podrá ocasionar grandes daños el intento de asignar los costos fijos a las actividades de producción, si dicha asignación implica la introducción de ajustes a los coeficientes de los costos variables, en lugar de sólo restar los costos asignados totales, de la contribución total.

Un error común de los administradores consiste en confundir las políticas de contabilidad destinadas a la asignación de costos fijos para las actividades de una organización, con la toma de decisiones propiamente dicha (a corto plazo) que incluye esas actividades. Por ejemplo, suponga que la compañía anterior tiene una política operativa para, digamos, dividir el costo fijo de \$9000 a la mitad, cargando \$4500 al departamento de juntas y \$4500 al departamento de conductos. Esto no tendría ningún efecto sobre la toma de decisiones departamental: las ganancias reportadas por cada departamento se reducirán en \$4500 y las ganancias corporativas globales reflejarán el mismo costo de \$4500. Pero si el departamento de juntas ajusta el coeficiente de estos costos de producción del costo variable original de \$4 a $\$4 + \$4500/K$, donde el término $\$4500/K$ es el promedio del costo fijo prorrateado por junta, entonces se obtendrán decisiones no recomendables al optimizar el modelo. ¿Por qué? Porque el costo incremental real de la producción de cada junta adicional es de \$4, ni más ni menos. Por tanto, la suma del término adicional al costo variable de la junta para reflejar un promedio de los costos fijos determina erróneamente el costo incremental (marginal) de la producción de juntas, y en realidad el comportamiento de los costos incrementales es lo importante en las decisiones de optimización.

Para ver esto, suponga que $K = 1000$ juntas que se estaban produciendo cuando se realizó la asignación de costos fijos. Bajo el esquema de “promediar los costos fijos”, el departamento de juntas registraría que su costo promedio por tal producción era de \$4 + \$4500/1000 = \$8.50 por cada una. Sabemos que la producción de la junta $K + 1$ costará \$4 adicionales, su costo variable de producción. Sin embargo, la sustitución de \$8.50 como coeficiente de costo de producción en el modelo de PL establece falsamente la dinámica de costos, al obligar a que el modelo emplee \$8.50 como el costo incremental de la junta. Esto, a su vez, llevará a cifras de producción de juntas mucho menores que las óptimas durante la optimización del modelo. En pocas palabras, el cálculo de un costo promedio a partir de un costo fijo prorrateado y su posterior manejo, como si se tratara de un costo marginal o variable, es un error de administración muy común que conviene evitar en la formulación de un modelo de PL (o de cualquier otro tipo).

El manejo de los costos fijos y variables quedará bien ilustrado en el caso de Red Brand Canners, al final del capítulo. Este caso es una buena representación de cómo surgen los costos fijos y variables en las situaciones reales.

3.5 MODELO DE PROTRAC EN HOJAS DE CÁLCULO ELECTRÓNICAS

CREACIÓN DE LA HOJA DE CÁLCULO DE PROTRAC

El modelo de PL para la producción de PROTRAC, en términos de las variables de decisión E (igual al número de equipos E-9 por producir) y F (igual a la cantidad de equipos F-9 por producir) está dado por:

Max $5000E + 4000F$		(maximiza la contribución a las ganancias)
Sujeto a		
$10E + 15F$	≤ 150	(capacidad del departamento A)
$20E + 10F$	≤ 160	(capacidad del departamento B)
$E - 3F$	≤ 0	(balance de la posición en el mercado)
$30E + 10F$	≥ 135	(horas empleadas para pruebas)
$E + F$	≥ 5	(requerimiento mínimo de producción)
$E \geq 0$ y $F \geq 0$		(condiciones de no negatividad)

Observe que las restricciones se han agrupado para poner juntas todas las restricciones de tipo de desigualdad semejante. La razón por la cual se agrupan las restricciones quedará clara cuando presentemos Solver. En la figura 3.1 se muestra una versión del modelo PROTRAC en una hoja de cálculo electrónica, llamada PROTRAC.XLS. En la figura se muestran los resultados del modelo para la producción de 6 E-9 y de 5 F-9, ilustrada en la sección precedente. Nótese que, como antes, estas cifras de producción violan la restricción de capacidad del departamento B, pues requieren más horas que las disponibles en ese departamento durante el mes siguiente.

Aunque la mayoría de las entradas de la hoja de cálculo se explican por sí mismas, debe consultar sus fórmulas para comprobar que se ha captado fielmente en ellas el modelo simbólico de producción de PROTRAC. (Como siempre, consulte el apéndice de Excel para información adicional sobre los elementos de la hoja de cálculo que no comprenda bien.)

Además, en la figura 3.1, preste atención a la distribución del modelo de hoja de cálculo y a cómo se emplean los rótulos, coeficientes y variables de decisión, y fíjese también en el cálculo de la “holgura”.

Rótulos. En forma particular, algunas celdas contienen rótulos. Estos rótulos se usan de la misma manera que cuando se incluyen en una tabla de datos para facilitar la lectura. Su finalidad es aclarar el significado de otras entradas de la hoja de cálculo electrónica.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Plan de producción de Protrac**						
2	Producto:	E-9	F-9				
3	Cant. de producción	6	5	Ganancia			
4	Margen contrib. unit.	$5,000	$4,000	$50,000			
5	Restricciones	Uso de recursos		Total LI		LD	Holgura
6	Depto. A	10	15	135	≤	150	15
7	Depto. B	20	10	170	≤	160	-10
8	Requerimiento de mezcla	1	-3	-9	≤	0	9
9	Horas de pruebas	30	10	230	≥	135	95
10	Total de unidades	1	1	11	≥	5	6

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Plan de pro**						
2	Producto	E-9	F-9				
3	Cant. de proc	6	5	Ganancia			
4	Margen contr	5000	4000	=SUMAPRODUCTO($B$3:$C$3,B4:C4)			
5	Restriccioneso de			Total LI		LD	Holgura
6	Depto. A	10	15	=SUMAPRODUCTO($B$3:$C$3,B6:C6)	≤	150	=F6-D6
7	Depto. B	20	10	=SUMAPRODUCTO($B$3:$C$3,B7:C7)	≤	160	=F7-D7
8	Requerimient	1	-3	=SUMAPRODUCTO($B$3:$C$3,B8:C8)	≤	0	=F8-D8
9	Horas de pru	30	10	=SUMAPRODUCTO($B$3:$C$3,B9:C9)	≥	135	=D9-F9
10	Total de unid	1	1	=SUMAPRODUCTO($B$3:$C$3,B10:C10)	≥	5	=D10-F10

SUGERENCIA: ***La manera más sencilla de producir símbolos de desigualdad, como el ≤ de la celda E6, es teclear el carácter < en la celda y subrayarlo después con la herramienta de Excel para subrayar.***

FIGURA 3.1

Modelo en PL de la producción de PROTRAC

Coeficientes y variables de decisión. Otras celdas contienen números. Por lo general, estos números representarán

1. El valor numérico de los coeficientes que son los *datos* para el modelo de PL en cuestión
2. Cifras llamadas **valores de decisión** o, para simplificar, **decisiones**.

Fórmulas. Otras celdas contienen *fórmulas*. En la representación de un modelo de PL en hojas de cálculo electrónicas, se requieren fórmulas para representar la función objetivo y las funciones de restricción. En algunos casos, puede haber fórmulas subyacentes que determinen el valor numérico de varios coeficientes del modelo. Para algunos coeficientes se introducirán valores numéricos directamente. Otros coeficientes podrían calcularse a partir de ciertas fórmulas.

Con excepción de la columna G, las entradas de la hoja de cálculo electrónica deben ser autoexplicativas. Usted puede ver que los datos de las columnas B y C de las filas 6 a 10 provienen directamente del modelo de PL simbólico de PROTRAC. Aunque estos datos se han rotulado como "uso de recursos", los únicos "recursos" que intervienen en este problema son las horas de trabajo de los departamentos A y B, respectivamente, y el rótulo sólo es apropiado para las filas 6 y 7. No es necesaria la presunción. Al crear la representación en hoja de cálculo, usted puede escoger los rótulos que mejor le convengan. Nuestro propósito aquí es únicamente ilustrar el proceso.

Cálculo de la holgura. Las entradas que aparecen en G6:G10 se conocen con frecuencia como las *holguras*.

> En los modelos de PL en hojas de cálculo electrónicas, la *holgura* es la diferencia entre la función de restricción y el lado derecho, calculada de modo que no sea negativa.

El cálculo de la holgura en el modelo de PL en hojas de cálculo es opcional. Nos da un indicio de qué tan cerca está la restricción de ser **activa**, es decir, de evaluarse como una igualdad; una holgura de cero indica una restricción activa o satisfecha en su frontera. Por ejemplo, vea la fórmula de holgura de la celda G6. Esta holgura corresponde a la restricción de capacidad del departamento A, que es $10E + 15F \leq 150$. La hoja de cálculo muestra que la fórmula F6 – D6 determina la holgura. Si sustituimos F6 y D6 por su contenido, veremos que F6 – D6 es

$$150 - 135$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Plan de producció**						
2	Producto	E-9	F-9				
3	Cant. de producción	2	8	Ganancia			
4	Margen contrib. unit	$5,000	$4,000	$42,000			
5	Restricciones	Uso de recursos		Total LI		LD	Holgura
6	Depto. A	10	15	140	≤	150	10
7	Depto. B	20	10	120	≤	160	40
8	Requerimiento de me	1	-3	-22	≤	0	22
9	Horas de pruebas	30	10	140	≥	135	5
10	Total de unidades	1	1	10	≥	5	5

FIGURA 3.2

Modelo de PL de producción de PROTRAC para $E = 2$ y $F = 8$

que es el "lado derecho de la primera restricción, menos el lado izquierdo". Por tanto, el valor de la holgura de esta restricción es la capacidad no empleada. Considere ahora la restricción de las horas de prueba, $30E + 10F \geq 135$. La entrada de la celda G9 de la hoja de cálculo muestra que la fórmula de holgura de la restricción de las horas de prueba es "el lado izquierdo menos el lado derecho", que es el orden de la resta requerido para hacer que este valor sea no negativo. Lo que acabamos de ilustrar es la siguiente regla:

> Para una restricción ≤, la holgura es el lado derecho menos el lado izquierdo.
> Para una restricción ≥, la holgura es el lado izquierdo menos el lado derecho.

Con frecuencia se usan rótulos más descriptivos que simplemente *holgura*. Para las restricciones ≤, podría preferirse un rótulo como *No usado*, *Restante*, *Residuo* o *Saldo*. Para las restricciones ≥, tal vez sea mejor usar *Sobrante*, *Sobreoferta, Excedente* o *Exceso*.

El propósito obvio al emplear el modelo de PROTRAC en la hoja de cálculo electrónica es efectuar proyecciones "¿qué pasaría si?" para distintas decisiones de producción (es decir, valores de E-9 y F-9), escribiendo las cifras en las celdas B3 y C3, respectivamente, y observando en la celda D4 la contribución a las ganancias resultante, mientras se mantienen valores no negativos en las celdas de holgura, G6 a G10. Si, por ejemplo, registramos 2 en la celda B3 y 8 en la celda C3 (lo que significa que $E = 2$ y $F = 3$), entonces la hoja de cálculo presentará los resultados de la figura 3.2.

Por ejemplo, ahora la celda D6 contiene el número 140, que es la cantidad de horas de trabajo en el departamento A cuando PROTRAC produce la mezcla ($E = 2$, $F = 8$). Correspondiendo a esta restricción vemos, en la celda G6, que la holgura es de 10, el resultado de 150 - 140. Por tanto, hay 10 horas de mano de obra no utilizadas en el departamento A. Vea si puede usted encontrar una alta ganancia ensayando en forma repetida con distintas cifras de decisión para E y F, en el más puro estilo "¿qué pasaría si?". Pronto se dará cuenta de que no es tan sencillo dar con una alta ganancia sin violar alguna restricción (evitando una holgura negativa), incluso con un modelo de PL sencillo, como el de PROTRAC.

OPTIMIZACIÓN DE LA HOJA DE CÁLCULO

Con Solver usted puede transformar cualquier modelo de hoja de cálculo en un modelo optimizado, efectuando simplemente unas cuantas operaciones con el ratón. La figura 3.3 muestra la hoja de cálculo optimizada del modelo en PL de PROTRAC. Esta hoja de cálculo optimizada tiene valores óptimos, calculados a partir de las variables de decisión E y F. Por tanto, leyendo las celdas B3 y C3, los valores de decisión óptimos que denotamos como E^* y F^* son ($E^* = 4.5$, $F^* = 7$). La hoja de cálculo muestra también valores numéricos óptimos en la función de restricción LI y en las columnas de la holgura.

3.6 EL MODELO DE PL Y LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS EN HOJAS DE CÁLCULO

Usted ya ha observado cómo captar el modelo de producción de PROTRAC de dos maneras distintas: usando el modelo simbólico y mediante la representación del modelo de PL en hojas de cálculo electrónicas.

Tal vez se pregunte, "¿acaso necesito escribir ambos, el modelo de PL simbólico y el modelo en hoja de cálculo para cada situación administrativa que desee representar en un modelo? Además, ¿por qué diseñé de tal forma el modelo de PROTRAC en hoja de cálculo? Por último, ¿cómo logré que Solver diera la solución óptima en la figura 3.3?".

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Plan de producción de Protrac**						
2	Producto	E-9	F-9				
3	Cant. de producción	4.5	7	Ganancia			
4	Margen contrib. unit	$5,000	$4,000	$50,500			
5	Restricciones	Uso de recursos		Total LI		LD	Holgura
6	Depto. A	10	15	150	≤	150	0
7	Depto. B	20	10	160	≤	160	0
8	Requerimiento de mezcla	1	-3	-16.5	≤	0	16.5
9	Horas de pruebas	30	10	205	≥	135	70
10	Total de unidades	1	1	11.5	≥	5	6.5

FIGURA 3.3

Valores de *E* y *F* que maximizan las ganancias

La mejor respuesta a su primera pregunta es “sí, hasta que usted se vuelva más hábil, tendrá que escribir tanto el modelo de PL simbólico (algebraico) como su versión en la hoja de cálculo”. Las hojas de cálculo son muy útiles para representar modelos administrativos de PL y son particularmente prácticas para las manipulaciones posteriores del tipo “¿qué pasaría si?”. Sin embargo, para los novatos, las hojas de cálculo electrónicas no siempre son el mejor camino para formular el modelo de PL inicial. La experiencia ha demostrado que, hasta que usted se vuelva más hábil con el modelado directo de PL en Excel, la forma preferible de generar un modelo de PL sin errores consiste en dividir el proceso en dos etapas:

1. **Escriba y depure el modelo simbólico de PL:** Describa su modelo en una hoja de papel, como un PL simbólico. Depúrelo, es decir, examine su formulación escrita y busque posibles errores en la lógica de la formulación.
2. **Traduzca y depure la representación del modelo simbólico de PL en la hoja de cálculo:** Use el modelo simbólico de PL como guía para crear la representación en la hoja de cálculo. Después continúe depurando la representación del modelo en la hoja de cálculo, ensayando los distintos grupos de valores candidatos para las variables de decisión, a fin de comprobar si se producen errores obvios (violación de restricciones en el caso de decisiones que se sabe son factibles, valores sin sentido en el LI o en las celdas de medición del desempeño, etcétera).

A continuación, intente optimizarlo con Solver. Un modelo mal formulado con frecuencia disparará un mensaje de error en Solver. Ahora debe depurar de nuevo su trabajo, posiblemente regresando al paso 1.

El modelo simbólico del paso 1 es útil para propósitos de documentación y le permite “ver” el modelo completo antes de abordar todos los detalles de su representación en la hoja de cálculo. Las fórmulas introducidas en las hojas de cálculo frecuentemente son un mal sustituto de esta perspectiva global del modelo de PL y de cómo se relaciona éste con la situación real original. Para modelos bastante complicados, es más fácil examinar y analizar primero mentalmente la estructura del modelo simbólico de PL. De hecho, dilucidar la estructura del modelo de PL subyacente ocupará una buena parte de nuestra atención en los siguientes capítulos, una vez que hayamos respondido sus dos últimas preguntas.

En respuesta a su segunda pregunta (“¿por qué diseñé de tal forma el modelo de PROTRAC en la hoja de cálculo?”), la distribución del modelo de producción de PROTRAC refleja un estilo de formulación de modelos de hojas de cálculo al que le recomendamos que se apegue en un inicio. La construcción arbitraria de la versión de hoja de cálculo del modelo de PL es, por mucho, la razón más frecuente de frustración de los estudiantes y de la falta de resultados en la fase de optimización con Solver, que cubriremos a continuación. La detección de errores sutiles en las interrelaciones entre las celdas de las fórmulas y la prevención de ciertos problemas de interpretación en los informes generados por Solver, se simplifican en gran medida si usted se apega inicialmente al estilo que se evidencia en el modelo para la producción de PROTRAC. Después, en el capítulo 6, a medida que usted se vuelva más hábil con las formulaciones en PL, le presentaremos distribuciones más compactas y sofisticadas de modelos de PL en hojas de cálculo. Hasta entonces, si usted se inicia en la construcción de modelos de PL, observe las siguientes recomendaciones para diseñar un modelo de PL en una hoja de cálculo electrónica:

- Cada variable de decisión se asigna a una columna por separado y cada restricción a una fila individual de la hoja de cálculo.

- Excepto para los rótulos opcionales, las variables de decisión se agrupan en un bloque contiguo de columnas y, excepto para los rótulos opcionales, las restricciones se agrupan en un bloque contiguo de filas.
- Cada celda de variable de decisión y también la celda de la función objetivo tienen un rótulo en la parte superior de su respectiva columna, y cada restricción tiene a su vez un rótulo en la celda del extremo izquierdo de su respectiva fila. (No divida un rótulo escribiendo las distintas partes del mismo en varias celdas. Si el rótulo no cabe en una sola celda, amplíe la celda o utilice la opción "Ajustar texto" bajo la ficha Alineación en el menú Formato de celdas, para expandir verticalmente las dimensiones de dicha celda.)
- Los coeficientes de retribución unitaria (por ejemplo, el margen de contribución o el costo) están contenidos en una fila de celdas independiente, justamente arriba o abajo de sus respectivas variables de decisión, y la fórmula de la función objetivo aparece en una celda de la misma fila.
- A las celdas de variables de decisión y a la celda de función objetivo (retribución) se les da formato con bordes y/o sombreado, para hacer más clara la lectura.
- Para cada restricción, el coeficiente que corresponde a una variable de decisión determinada se introduce como información en la celda que se encuentra en la intersección de la columna donde está dicha variable y la fila donde se encuentra la restricción.
- A continuación de los coeficientes, en cada fila de restricciones, se incluye una celda que calcula la función de restricción (totales del lado izquierdo, LI), seguida por una celda que indica la dirección de la desigualdad, y después por la celda que contiene la condición del lado derecho (LD). Opcionalmente se puede incluir una fórmula de celda de "holgura" para contener la diferencia entre las cifras del LI y el LD, calculadas de manera que el valor de la celda sea no negativo siempre que se cumpla la restricción:

  La celda de holgura es = LD – LI para las restricciones $\leq$ (por limitación) y

  La celda de holgura es = LI – LD para las restricciones $\geq$ (por requerimiento)
- En el caso de las filas de restricción, las celdas del lado derecho deben contener constantes o fórmulas en las que no intervengan las variables de decisión. Para evitar problemas posteriores durante la interpretación del informe de Solver, cualquier fórmula del lado derecho de una restricción que esté relacionada directa o indirectamente con las variables de decisión deberá moverse en forma algebraica al lado izquierdo de dicha restricción.
- *No* emplee SI(), ABS(), MAX(), MIN() y demás funciones, o alguna otra función no lineal, dentro de las celdas que use para la formulación de su modelo de PL. Tales funciones son aceptables en las demás celdas de la hoja de cálculo, pero *sólo* si su evaluación no puede afectar directa o indirectamente el cálculo de la celda de la función objetivo durante el proceso de optimización de Solver, en el cual se ensaya con valores de decisión alternativos.
- La inclusión de cualquier restricción de no negatividad para las variables de decisión en la hoja de cálculo misma es opcional y por lo común se omite, pues se prefiere especificarla directamente en el cuadro de diálogo de Solver.

REGLAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE PL EN HOJAS DE CÁLCULO

Una consecuencia del método que hemos recomendado para distribuir un modelo en hojas de cálculo es que todos los coeficientes importantes del modelo están contenidos en celdas que pueden cambiarse fácilmente sin tener que editar alguna de las fórmulas. Además, el agrupamiento de las variables de decisión y las restricciones permite el uso del comando Copiar para repetir fórmulas a través de las celdas, como en el caso de los totales de las funciones de restricción del LI. La distribución resultante de la aplicación de estas reglas se ilustra en la figura 3.4. Por ahora, le recomendamos que se apegue a este esquema de distribución en sus modelos de PL.

En la figura 3.5 se presenta un ejemplo de una versión incorrectamente distribuida en la hoja de cálculo del modelo en PL de PROTRAC.

Adviértase que, aunque es equivalente desde el punto de vista lógico al modelo de PL simbólico, en esta versión de hoja de cálculo todas las relaciones del modelo han quedado encubiertas dentro de las fórmulas de las celdas (normalmente invisibles). Tal como se dijo en el capítulo 2, este "ocultamiento" de las relaciones simbólicas en las fórmulas se considera una práctica

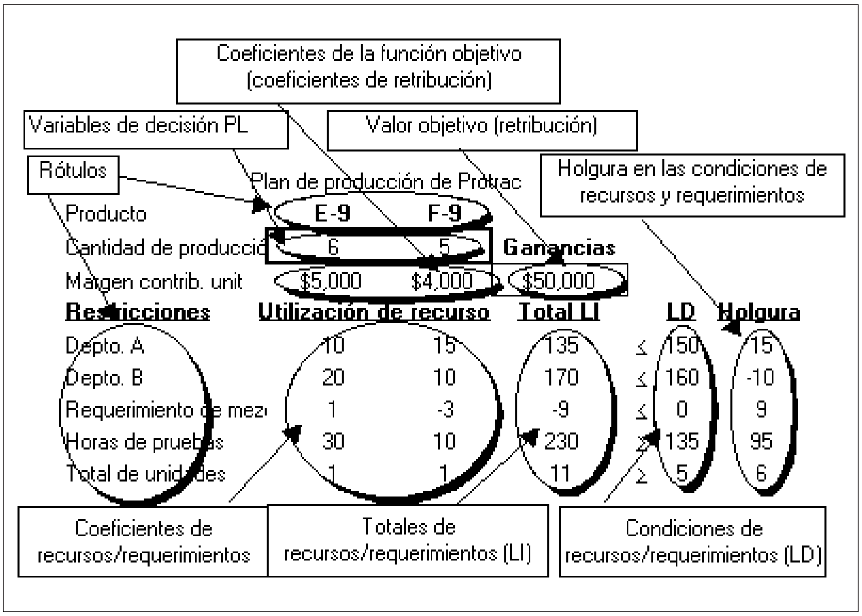


FIGURA 3.4

Distribución recomendada del modelo en PL de PROTRAC

	A	B	C	D
1	Plan de producción de Protrac			
2	Producto	E-9	F-9	Ganancias
3	Cantidad de producción	6	5	$50,000
4		Demanda de recursos		
5	Depto. A	Bien		
6	Depto. B	No está bien		
7		Requerimientos		
8	Requerimiento de mezcla	Se cumple		
9	Horas de prueba	Se cumple		
10	Unidades totales	Se cumple		

	A	B	C	D
1	Plan de pro			
2	Producto	E-9	F-9	Ganancias
3	Producción	6	5	=5000*B3+4000*C3
4		Demanda de recursos		
5	Depto. A	=SI(10*$B$3+15*$C$3<=150,"Bien","No está bien")		
6	Depto. B	=SI(20*$B$3+10*$C$3<=160,"Bien","No está bien")		
7		Requerimientos		
8	Requerimier	=SI($B$3-3*$C$3<=0,"Se cumple","No se cumple")		
9	Horas de pru	=SI(30*$B$3+10*$C$3>=135,"Se cumple","No se cumple")		
10	Unidades tot	=SI($B$3+$C$3>=5,"Se cumple","No se cumple")		

FIGURA 3.5

Modelo alternativo de producción de PROTRAC en hoja de cálculo

deficiente en la construcción de modelos. Esto es especialmente válido en el caso de los modelos que se pretende optimizar. La depuración de una ejecución fallida de Solver resulta muy difícil en el caso de un modelo que esté distribuido como el que aparece en la figura 3.5.

En la figura 3.5 se indica una diferencia importante que se presenta al usar hojas de cálculo para la optimización. Si se esconden en fórmulas los coeficientes del modelo de PL, se logra tener una hoja de cálculo de apariencia limpia para fines de información administrativa externa, pero que resulta engorrosa cuando el modelo se utiliza como material de apoyo para la toma de decisiones. Por lo general, debe pensarse la finalidad del modelo de hoja de cálculo antes de construirla, a fin de evitar una distribución del modelo difícil de mantener, modificar e interpretar.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		**Plan de producción de PROTRAC**						
3		Producto	E-9	F-9				
4		Cantidad de producción	6	5	Ganancias			
5		Margen contrib. unit.	$5,000	$4,000	$50,000			
6		Restricciones	Uso de recursos		Horas totales		Horas dispon.	Holgura
7		Depto. A	10	15	135	≤	150	15
8		Depto. B	20	10	170	≤	160	-10
9					Horas totales		Horas requeridas	
10		Pruebas	30	10	230	≥	135	95
11					Cantidad total		Prod. requer.	
12		Producción	1	1	11	≥	5	6
13		Requerimiento de mezcla	1	-3	-9	≤	0	9
14								
15		Demandas de recursos			Totales		E-9	F-9
16		Depto. A	Bien		Ganancias		$30,000	$20,000
17		Depto. B	No bien		Cantidad producción		6	5
18		Requerimientos			Horas depto. A		60	90
19		Horas de prueba	Se cumple		Horas depto. B		120	60
20		Producción total	Se cumple		Horas de prueba		180	60
21		Requerimiento de mezcla	Se cumple					
22								

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Pl						
3		Producto	E-9	F-9				
4		Cantidad de	6	5	Ganancias			
5		Margen cont	5000	400	=SUMAPRODUCTO($C$4:$D$4,C5:D5)			
6		Restriccione	Uso de recursos		Horas totales		Horas dispon.	Holgura
7		Depto. A	10	15	=SUMAPRODUCTO($C$4:$D$4,C7:D7)	≤	150	=G7-E7
8		Depto. B	20	10	=SUMAPRODUCTO($C$4:$D$4,C8:D8)	≤	160	=G8-E8
9					Horas totales		Horas requeridas	
10		Pruebas	30	10	=SUMAPRODUCTO($C$4:$D$4,C10:D10)	≥	135	=E10-G10
11					Cantidad total		Prod. requer.	
12		Produccióı	1	1	=SUMAPRODUCTO($C$4:$D$4,C12:D12)	≥	5	=E12-G12
13		Requerimie	1	-3	=SUMAPRODUCTO($C$4:$D$4,C13:D13)	≤	0	=G13-E13
14								
15		Demandas d			Totales		E-9	F-9
16		Depto. A	=SI(H7>=0,"Bien","No está bien")		Ganancias		=$C$4*C5	=$D$4*D5
17		Depto. B	=SI(H8>=0,"Bien","No está bien")		Cantidad producción		=C4	=D4
18		Requerimiento			Horas depto. A		=$C$4*C7	=$C$4*D7
19		Horas de pru	=SI(H10>=0,"Se cumple","No se cumple")		Horas depto. B		=$C$4*C8	=$C$4*D8
20		Producción t	=SI(H12>=0,"Se cumple","No se cumple")		Horas de prueba		=$C$4*C10	=$C$4*D10
21		Requerimien	=SI(H13>=0,"Se cumple","No se cumple")					
22								

FIGURA 3.6

Modelo combinado de modelado e informe de PROTRAC

Mientras se mantenga la consistencia con las recomendaciones, es posible hacer mejoras a la distribución de los modelos anteriores de PL para (1) sombrear las celdas no usadas, (2) añadir rótulos apropiados al modelo de PL y (3) incluir módulos informativos por separado, como se ejemplifica en la figura 3.6.[2] Los módulos de información por separado, ya sea incorporados a la hoja de cálculo, como se aprecia en las filas 15 a 21, o en una hoja de informe administrativo separada, pero perteneciente al mismo libro (empleando celdas apropiadas para la vinculación de fórmulas), le pueden ayudar aún más a depurar sus modelos de PL, y también a comunicar a otras personas los resultados del modelo. Con frecuencia es necesario tener un poco de creatividad para encontrar la mejor manera de representar el modelo de PL sin dejar de apegarse a las recomendaciones sobre la distribución general o esquema de dichos modelos.

3.7 GENERALIDADES DE SOLVER

Solver es un paquete agregado para Excel que optimiza numéricamente los modelos sujetos a restricciones, como los modelos de PL. Solver emplea una técnica llamada algoritmo matemático de programación, con la cual encuentra las decisiones óptimas para un modelo determina-

[2]Las instrucciones SI de esta hoja de cálculo son aceptables porque la fórmula de la función objetivo, en la celda D4, es independiente de ellas. Por tanto, no se violan los requerimientos de linealidad del modelo de PL.

do en una hoja de cálculo. Los algoritmos son sencillamente rutinas escritas en código de computadora que aplican en forma iterativa una receta, con la cual logran hallar las decisiones óptimas. Para la PL, Solver usa un algoritmo de optimización muy eficiente (que sólo trabaja con modelos de PL) llamado "método símplex". No debe sorprendernos que sea necesario pagar un precio a cambio de las ventajas de esta poderosa capacidad. Como dijimos con anterioridad, para que Solver pueda optimizar un modelo, usted debe preparar éste en una hoja de cálculo de la manera adecuada; debe apegarse a ciertas restricciones técnicas que este paquete impone a los modelos; y, lo más importante, si quiere interpretar adecuadamente los resultados de Solver, debe entender las limitaciones de los modelos de optimización.

Solver puede optimizar tanto los modelos lineales como los no lineales. Por ahora, nos concentraremos sólo en los modelos lineales pues son mucho menos susceptibles a los problemas técnicos. Recuerde: para la optimización de PL, *debe* ser lineal *cada una* de las fórmulas de su modelo que incluyan las variables de decisión directamente (o indirectamente, por medio de una cadena de referencias a celdas), y que directa o indirectamente afecten a la celda de la función objetivo. La restricción (de linealidad) es impuesta por el método símplex de programación lineal de Solver, el cual sólo funciona correctamente con las fórmulas de hojas de cálculo en las que intervienen relaciones lineales. No olvide que muchas funciones incorporadas a Excel —las operaciones que están precedidas de *nombre-de-función*()— incluyen relaciones no lineales y no deberá usarlas en su modelo de PL si tiene el propósito de emplear la opción de optimización lineal de Solver. En particular,

- La presencia de aspectos exponenciales en las ecuaciones de Excel,
- La utilización de las funciones SI(), ABS() y LOG() de Excel, para nombrar solamente tres, y
- La formación de variables de relación (*X/Y*) o productos (*X*Y*) de variables (de decisión)

provocarán, con mucha probabilidad, que su modelo viole directa o indirectamente la linealidad, si afectan valores de su función objetivo de manera directa o indirecta al aplicar las restricciones.

> Todas las fórmulas de Excel que emplee en su modelo de PL construido en hojas de cálculo deben referirse de manera exclusiva a relaciones lineales entre las variables (de decisión), directa o indirectamente, según sea pertinente para el cálculo de la celda de la función objetivo y para la especificación de cualquiera de las restricciones.

Como dijimos antes, es válido tener fórmulas no lineales en su hoja de cálculo, incluso si utilizan celdas de las variables de decisión, si dichas fórmulas no se relacionan directamente, o indirectamente a través de cualquiera de las restricciones, para determinar el valor de la celda de la función objetivo. Un ejemplo de esto es el cálculo de una estadística no lineal elaborada solamente para presentar un informe administrativo, pero que no se usará en ninguna otra parte con las fórmulas de PL incluidas en la hoja de cálculo.

CÓMO SE USA SOLVER

El paquete suplementario Solver consiste esencialmente en dos programas. El primero es un programa de Visual Basic para Excel que traduce el modelo de la hoja de cálculo en una representación interna utilizada por el segundo programa. El segundo programa, que reside en la memoria como módulo de software independiente, fuera de Excel, realiza la optimización y devuelve la solución al primero, para que actualice la hoja de cálculo. Ambos se comunican mediante la interfaz de programación para aplicaciones de Microsoft, cuyos detalles no nos interesan aquí. Cuando selecciona el comando "Solver..." del menú Herramientas de Excel, usted ejecuta el primero de esos programas de Solver, el cual prepara la hoja de cálculo para optimizarla y llama al segundo programa, que efectúa la optimización.

El uso que usted haga de Solver, por tanto, incluye varios pasos:

1. Arranque Excel y ejecute normalmente las operaciones de construcción del modelo. Usted puede desarrollar su modelo Excel, efectuar análisis de "¿qué pasaría si?" y de depuración, e imprimir los resultados en la forma habitual.
2. Una vez desarrollado y depurado el modelo (¡y guardado en disco!), optimícelo eligiendo el comando "Solver..." del menú Herramientas de Excel.

3. El programa complementario Solver y su módulo de optimización se cargarán en la memoria.[3] Al terminar el proceso de carga, Solver presenta un cuadro de diálogo en el cual solicita información para el proceso de optimización.
4. Después de especificar ciertos detalles de reorganización, como la celda que contiene la fórmula de la función objetivo por optimizar y las celdas con las variables de decisión, haga clic en el botón "Resolver" del cuadro de diálogo.
5. Entonces, Solver traducirá su modelo e iniciará el proceso de optimización. Cuando se trata de modelos pequeños de PL, este proceso tarda algunos segundos; con modelos grandes, tarda varios minutos o más.
6. Suponiendo que no haya errores en el modelo de PL de su hoja de cálculo, Solver le presentará un cuadro de diálogo de Resultados en el que usted podrá solicitar informes y ordenar que Solver actualice las celdas de decisión de su modelo original con los valores óptimos. Solver crea cada uno de los informes solicitados en una hoja electrónica de cálculo nueva, que puede usted guardar o imprimir.
7. Ahora ya está usted listo para continuar con las proyecciones "¿qué pasaría si?" para, por ejemplo, llevar a cabo diversos análisis de sensibilidad en la región vecina a las decisiones óptimas.

La figura 3.7 es un diagrama de la secuencia de pasos necesarios para ejecutar Solver.

TERMINOLOGÍA DE SOLVER

Ahora que ya tiene una idea general del funcionamiento de Solver, vamos a ver en detalle cómo se le dan instrucciones para optimizar su modelo de PL. Primero, necesitamos dejar en claro la terminología que emplea Solver para visualizar el modelo. Este cambio de terminología es necesario porque Solver sólo ve el mundo a través de las celdas de una hoja de cálculo y no como la representación simbólica que usamos en los modelos de PL. Por lo demás, las diferencias son nominales. La tabla 3.3 resume las diferencias entre la nomenclatura que usamos en nuestros modelos de PL y la de Solver.

Es importante recordar una consideración adicional con respecto a los modelos de PL. Por lo regular, las decisiones negativas no tienen significado alguno y, por tanto, con frecuencia debe aplicarse una restricción de no negatividad a las variables de decisión de la PL. En virtud de que son muy obvias, estas restricciones de no negatividad pocas veces se mencionan explícitamente en la versión del modelo de PL construido en hojas de cálculo Excel. Cuando se utiliza Solver para optimizar modelos de PL, la falla más común que se comete es pasar por alto la especificación de no negatividad para las variables de decisión.

Si las decisiones negativas carecen de significado, recuerde que debe especificar las restricciones de no negatividad en las variables de decisión de su modelo de PL antes de optimizarlo con Solver.

TABLA 3.3 Terminología de Solver

TERMINOLOGÍA DE LOS MODELOS DE PL	TERMINOLOGÍA DE SOLVER
Función objetivo	Celda objetivo
Variables de decisión	Cambiando las celdas
Restricciones	Restricciones
Función de restricción (LI)	Referencia de celda de restricción
LD	Restricción
Modelo de PL	Asumir modelo lineal

[3] Los usuarios de Solver en Macintosh tienen que aumentar la asignación predeterminada de memoria en 1 Mbyte aproximadamente para poder acomodarlo (junto con otros complementos). De otra manera, la falta de memoria hará que Excel se ejecute a un ritmo notablemente más lento.

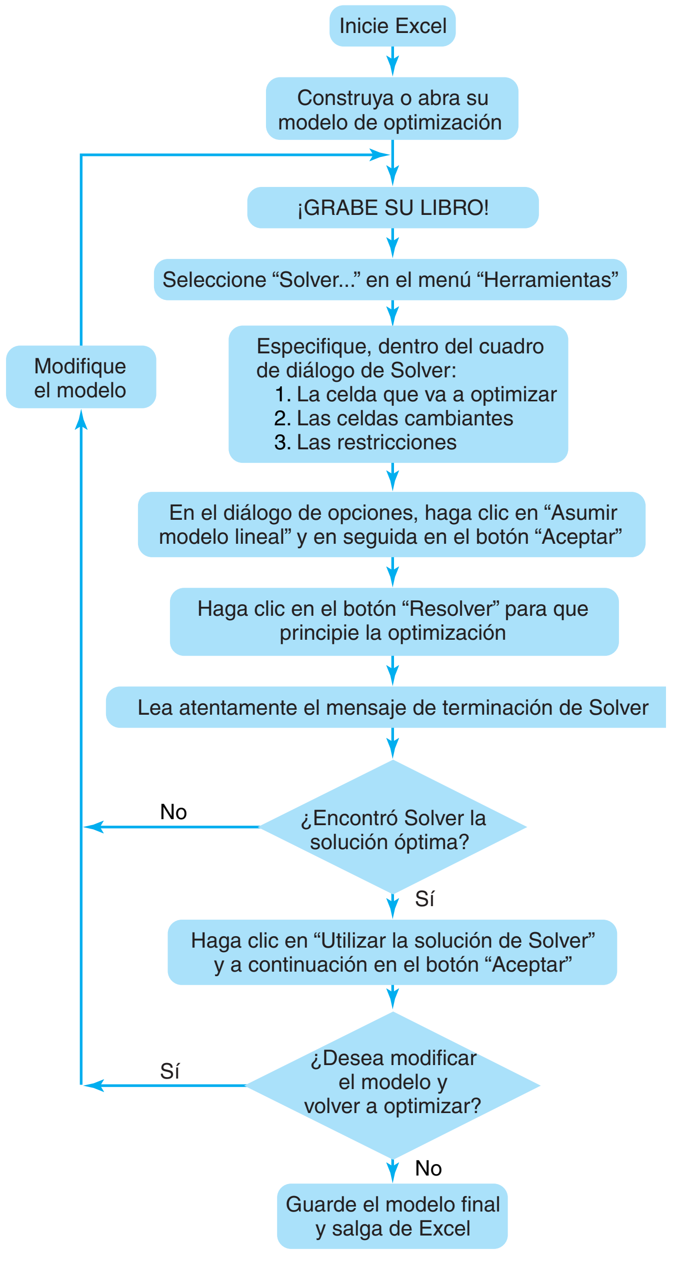


FIGURA 3.7

Diagrama de flujo de Solver

3.8 OPTIMIZACIÓN DEL MODELO DE PROTRAC CON SOLVER

Para que aprenda a usar Solver, lo mejor es que siga usted los pasos indicados en esta sección mientras se encuentra frente a su computadora. (Si durante este proceso se le presenta alguna dificultad con la utilización de Solver, consulte el apéndice Solver.) Como se indica en los pasos del diagrama de flujo de la figura 3.7, si no lo ha hecho todavía, inicie Excel y abra el "libro" PROTRAC.XLS, el cual contiene el modelo que construimos anteriormente. Inicie el programa complementario Solver seleccionando el comando "Solver..." en el menú Herramientas, como muestra la figura 3.8.[4]

[4]Por lo común, el programa complementario Solver no se instala automáticamente durante el procedimiento de instalación convencional de Excel. Si el comando Solver no aparece en el menú Herramientas, vuelva a ejecutar Instalar (Setup) utilizando el CD-ROM de Microsoft Office, o bien, los discos de Excel, e instale Solver seleccionando la opción Personalizar. Para conocer los detalles, consulte lo referente a Programas complementarios en el apéndice sobre Excel.

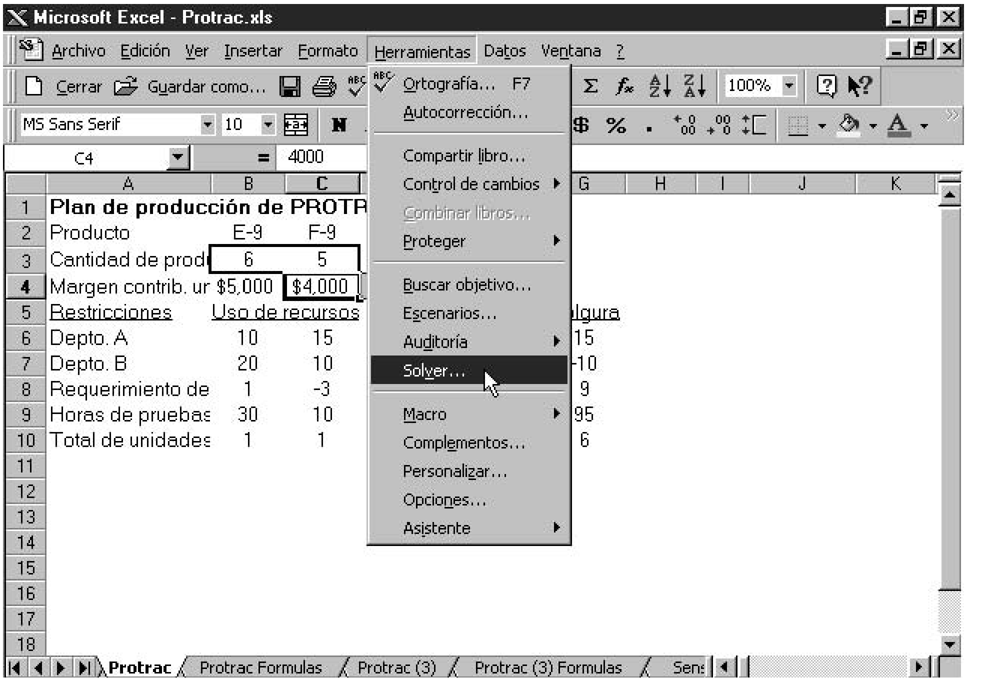


FIGURA 3.8

Cuando se activa Solver

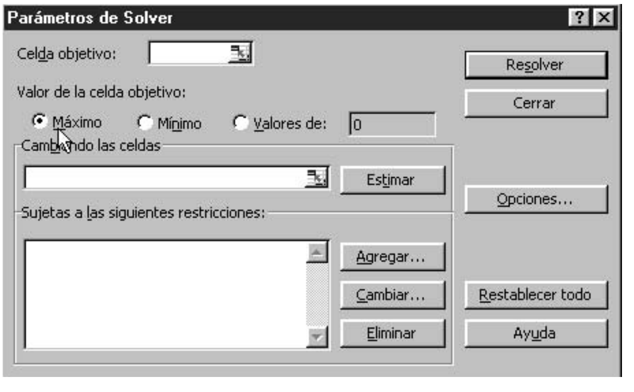


FIGURA 3.9

Cuadro de diálogo de Parámetros de Solver

Una vez que se haya cargado en memoria el programa complementario Solver, lo cual puede tardar algunos segundos, deberá aparecer el cuadro de diálogo de Parámetros de Solver, semejante al de la figura 3.9. Nótese que el modelo predeterminado de Solver es uno de "Max"-imización y que el cursor del cuadro de diálogo se encuentra en el primer campo: "Celda objetivo."

Podrá mover por toda la pantalla el cuadro de diálogo de los Parámetros de Solver, para lo cual bastará que haga usted *clic* y arrastre la barra de título. De este modo podrá ver todas las partes de la hoja de cálculo electrónica. Este recurso puede resultar sumamente útil porque la manera más sencilla de especificar celdas al escribir datos en el cuadro de diálogo consiste en hacer *clic* en la celda correspondiente del modelo construido en la hoja de cálculo. Cuando usted hace *clic* en la(s) celda(s) deseada(s) elimina cualquier posibilidad de cometer errores de mecanografía y utiliza un método que funciona más rápidamente en general.

El primer campo, acompañado por el rótulo "Celda objetivo", solicita que indique usted cuál de las celdas va a optimizar, es decir, la medida del desempeño incorporada a su modelo que desea utilizar en el proceso de optimización. En el caso de nuestro modelo de PROTRAC, se podría escribir la referencia D4 o, mejor todavía, podríamos activar dicha celda para ingresar su referencia automáticamente. Este último método fue el que utilizamos en la figura 3.10. Pa-

SUGERENCIA: ***Si hace usted clic en el icono que aparece a la derecha de cualquiera de los campos de Parámetros de Solver (debajo de la flecha del cursor ilustrado en la figura 3.10), minimizará el cuadro de diálogo, mostrando únicamente ese campo, como podemos apreciar en la figura 3.11. Esto le permitirá mirar una porción más amplia de la hoja de cálculo, con lo cual se simplificarán las operaciones para seleccionar celdas. Si desea maximizar nuevamente el cuadro de diálogo, pulse la tecla Entrada o haga clic en el icono que está a la derecha del campo de la figura 3.11.***

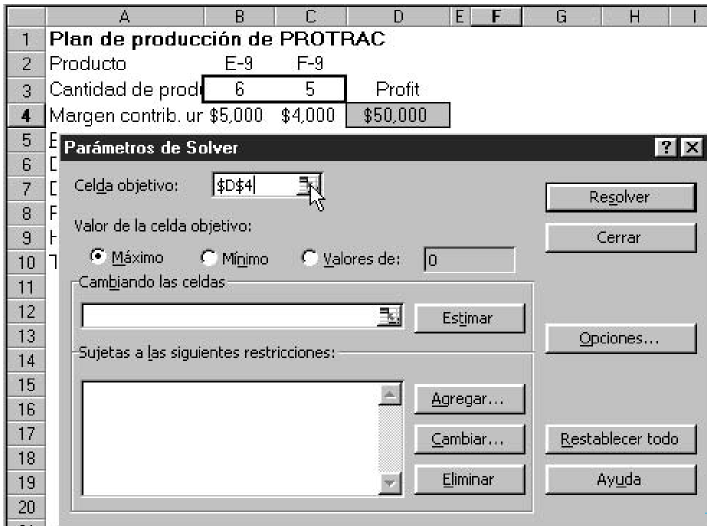


FIGURA 3.10

Especificación de la celda objetivo en Solver

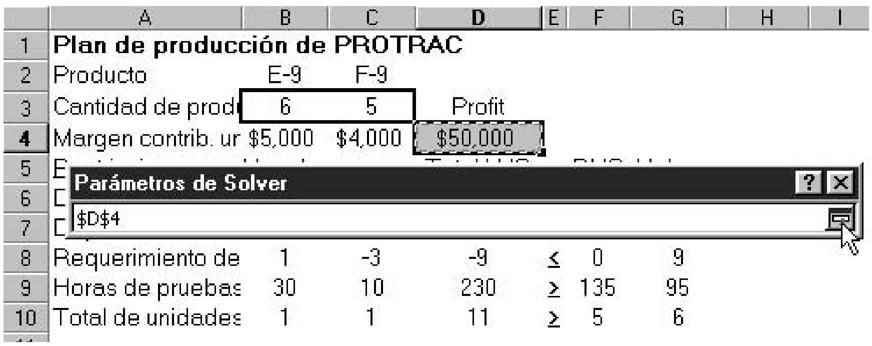


FIGURA 3.11

Minimización del cuadro de diálogo de los Parámetros de Solver

ra confirmar lo que hemos dicho, observe con atención el recuadro de la celda D4. (Cuando hacemos *clic* en la hoja de cálculo para ingresar referencias a celdas, Solver inserta dichas referencias agregándoles signos $, lo cual significa que se trata en realidad de referencias absolutas. Usted puede emplear tanto referencias absolutas —activando las celdas apropiadas— como referencias relativas —tecleando directamente las referencias de las celdas—. Con ambos sistemas obtendrá el mismo resultado.)

El siguiente campo del cuadro de diálogo, rotulado “Valor de la celda objetivo”, le permite definir el tipo de optimización que desea realizar. En este caso desea usted maximizar la celda de medición de desempeño de Ganancia de PROTRAC. Para seleccionar esta opción, haga *clic* en el botón que aparece junto a “Max”. Si deseara minimizar el valor de la celda (por ejemplo, si la medida de desempeño elegida para el modelo fuera el costo total) haría *clic* en “Min”, y en “Igual a” si quisiera que el valor de la celda objetivo fuera igual que una cantidad especificada. (Esta última opción permite que Solver efectúe una búsqueda de objetivos en modelos bajo restricciones con varias variables de decisión, opción que no puede manejarse con el comando Buscar objetivo “no restringido, con una sola variable de decisión” que vimos en el capítulo 2.)

El siguiente campo, rotulado “Cambiando las celdas” permite especificar las variables de decisión del modelo, que en este caso se encuentran en las celdas B3 y C3. Por tanto, haga *clic* en el cuadro “Cambiando las celdas” y después, en la hoja de cálculo, haga *clic* y arrastre el cursor para marcar las celdas B3:C3. Con esta operación copiará usted el intervalo correcto de celdas de variables de decisión en el cuadro de diálogo, como muestra la figura 3.12; nuevamente, confirme la selección observando el recuadro alrededor de las celdas de variables de decisión. (Puede ahorrar tiempo probando con el botón “Estimar”, de los Parámetros de Solver, pero esta opción produce con frecuencia elecciones erróneas al determinar como referencia celdas de variables de decisión.)

A continuación deberá definir las restricciones del modelo para el uso de Solver. Haciendo *clic* en el botón “Agregar”, a la derecha del cuadro “Sujetas a las siguientes restricciones”, se presenta el diálogo Agregar restricción, donde podrá añadir restricciones, como muestra la figura 3.13. Advierta que lo predeterminado en Agregar restricción es una restricción del tipo menor o igual que.

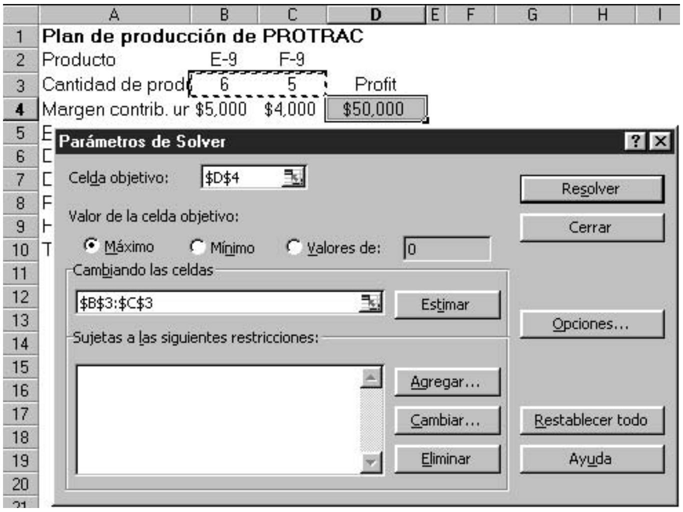


FIGURA 3.12

Especificación de las celdas cambiantes en Solver

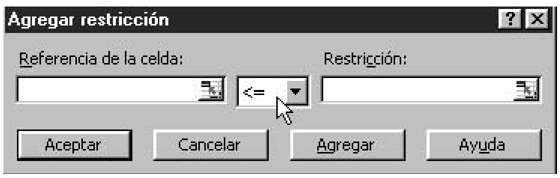


FIGURA 3.13

Especificación en Solver de las celdas que contienen restricciones

FIGURA 3.14

Especificación del LI de las restricciones "≤" de PROTRAC

SUGERENCIA: ***A veces el cuadro de diálogo Agregar restricción protesta, lanza un pitido cuando uno intenta hacer clic y arrastrar el cursor, y se niega a responder. Es posible "destrabar" esta situación de bloqueo, pulsando repetidas veces la tecla de tabulación para pasar por todas las opciones del diálogo Agregar restricción, hasta regresar finalmente al campo original. Entonces podrá completar la especificación del intervalo de celdas haciendo clic y arrastrando el cursor.***

Si desea reordenar varias filas de restricciones contiguas, con el fin de reagrupar las que sean del mismo tipo de desigualdad, es decir, todas las que son "< =" o "> =", puede indicarlas todas al mismo tiempo por medio de intervalos de celdas. De otra manera, tendrá que ingresar las restricciones una por una, haciendo *clic* cada vez en el botón "Agregar" del cuadro de diálogo Agregar restricción.

Con el cursor colocado en el campo "Referencia de la celda" del cuadro de diálogo Agregar restricción, haga *clic* y arrastre el cursor sobre las celdas de la hoja de cálculo que comprendan el Total LI correspondiente a las tres restricciones "≤", es decir D6:D8, como muestra la figura 3.14. *Nota:* Solver no aceptará la inclusión de fórmulas en el campo correspondiente a "Referencia de la celda"; todas las entradas que usted haga tendrán que ser referencias a celdas de la hoja de cálculo (que por lo común sí contienen fórmulas).

A continuación, coloque el cursor en el cuadro de la derecha del cuadro de diálogo Agregar restricción y haga *clic* y arrastre sobre las tres celdas del LD: F6:F8. Sus tres limitaciones de recursos o restricciones "de límite superior" deberán aparecer como muestra la figura 3.15.

FIGURA 3.15

Especificación del LD de las restricciones "≤" del modelo de PROTRAC

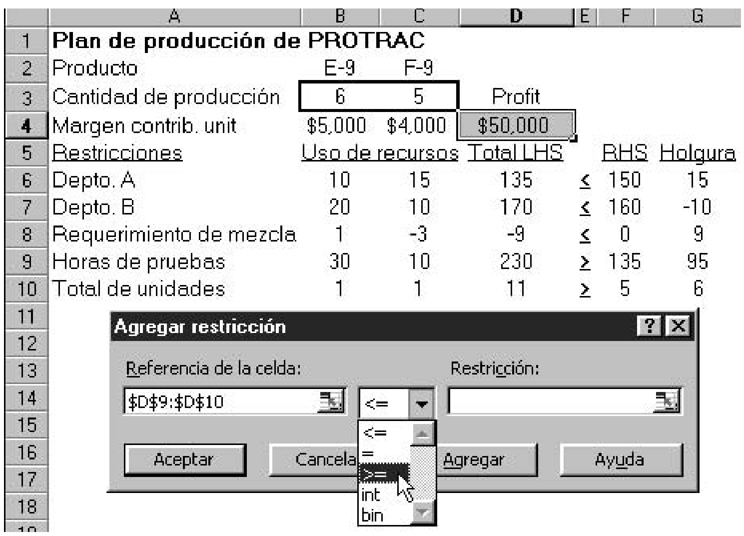


FIGURA 3.16

Especificación del LI de las restricciones "≥" de PROTRAC

Por último, haga *clic* en el botón "Agregar" del cuadro de diálogo Agregar restricción para añadir estas tres restricciones a la especificación de Solver y despejar el cuadro de diálogo, a fin de poder introducir más restricciones.

Ahora estamos listos para indicar las restricciones "≥" del modelo. El procedimiento es el mismo que antes. Con el cursor en el campo "Referencia de la celda", haga *clic* y arrastre el cursor sobre las celdas de la hoja de cálculo que comprenden el Total LI de las dos restricciones "≥", es decir, D9:D10. En el centro del cuadro de diálogo Agregar restricción, seleccione el símbolo "mayor que o igual que" ("> ="), como se aprecia en la figura 3.16. Observe que las tres opciones de desigualdad ("< =", "=" y "> =") están disponibles en la lista desplegable central. (Por ahora, pase por alto la cuarta y quinta opciones de la lista, "ent" y "bin"; éstas se utilizan cuando se trata de modelos en los cuales es necesario que algunas celdas tengan valores enteros, como veremos en el capítulo 7.)

A continuación, coloque el cursor en el cuadro del lado derecho del cuadro de diálogo Agregar restricción, haga *clic* y arrastre el cursor sobre las dos celdas del LD correspondientes, F9:F10. Sus dos requerimientos o "con límite inferior" deberán verse como en la figura 3.17.

Con esto se ha completado la especificación de las cinco restricciones del modelo de PROTRAC. No obstante, *no* hemos terminado de especificar las restricciones del modelo: debemos especificar las restricciones de no negatividad de las celdas B3 y C3, lo cual haremos en un paso posterior, bajo las Opciones de Solver.

Ahora haga clic en el botón Aceptar del cuadro de diálogo Agregar restricción para terminar la introducción de las restricciones y regresar al cuadro de diálogo de Parámetros de Solver.

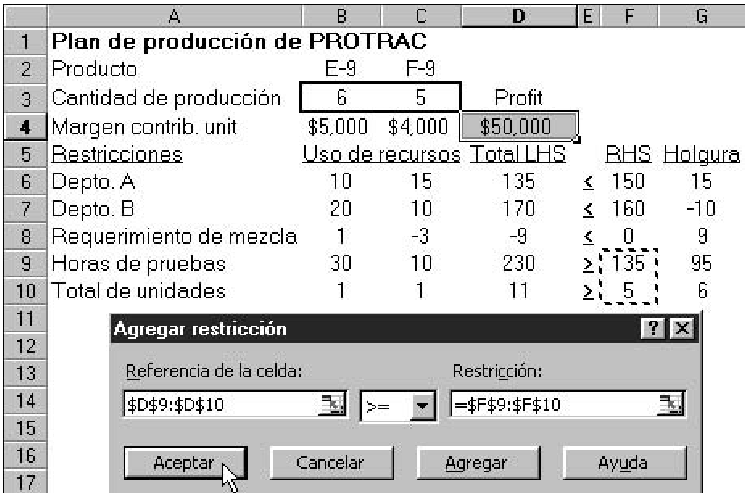


FIGURA 3.17

Especificación del LD de las restricciones "≥" en el modelo de PROTRAC

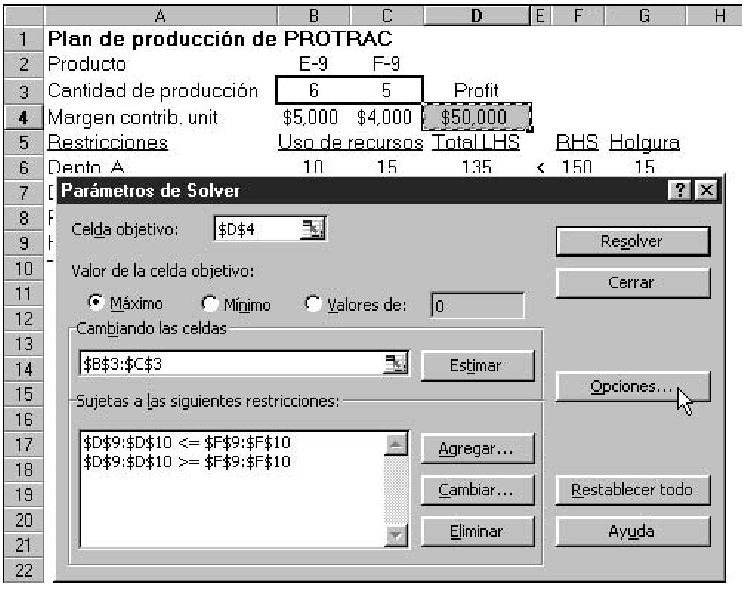


FIGURA 3.18

Especificación de parámetros para Solver en el modelo de PROTRAC

(Si inadvertidamente activa usted "Agregar", será suficiente que pulse "Cancelar" para que pueda regresar al cuadro de diálogo de Parámetros de Solver.)

Sus especificaciones del modelo de PROTRAC para Solver deberán tener ahora el aspecto que muestra la figura 3.18. (Aunque en este caso no los necesitamos, los botones de restricción "Cambiar" y "Eliminar", que aparecen debajo del botón "Agregar" en el cuadro de diálogo de Parámetros de Solver, funcionan de manera parecida a "Agregar". En primer lugar, resalte la restricción que desea cambiar o eliminar y haga *clic* en cualquiera de estos botones. A continuación, siga un procedimiento similar a la serie de pasos correspondientes a "Agregar". *Nota:* el botón "Restablecer todo" borra todas las entradas del cuadro de diálogo de Parámetros de Solver, en caso de que desee volver a empezar la operación de especificación.)

Por último, dado que estamos trabajando con un modelo de programación lineal, en el cual todas las relaciones son estrictamente lineales, *tendrá* usted que hacer *clic* en el botón de "Opciones" del cuadro de diálogo de Parámetros de Solver, tal como se ilustra debajo de la flecha del cursor en la figura 3.18. Entonces aparecerá el cuadro de diálogo de Opciones de Solver, como se aprecia en la figura 3.19.

Marque las casillas de verificación que están junto a "Asumir modelo lineal" y "No negativo". La primera le indica a Solver que es un modelo de PL y la segunda aplica las restricciones de no negatividad a las variables de decisión. (Por el momento, pase usted por alto todas las demás opciones; están relacionadas con la optimización de modelos enteros y no lineales, la pre-

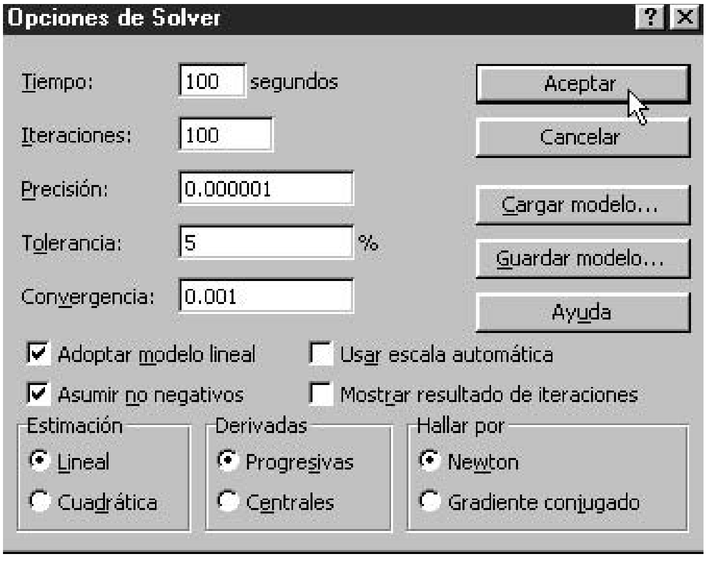


FIGURA 3.19

Especificación de las restricciones de linealidad y no negatividad

sentación de resultados intermedios, las operaciones de guardar y cargar para poder incluir más de una formulación de modelo en Solver por cada hoja de cálculo, etc.) Haga *clic* en "Aceptar" para regresar al cuadro de diálogo de los Parámetros de Solver.

Usted ha especificado completamente el modelo indicando a Solver lo referente a:

- Las restricciones,
- El intervalo de celdas que debe cambiar Solver (las variables de decisión),
- La celda con la función objetivo que va a optimizar (la celda que va a maximizar, en este caso) y
- Que su modelo es de PL.

Por último, pulse el botón Resolver. Puede observar cómo avanza el algoritmo símplex de búsqueda iterativa de Solver, observando el cuadro de mensajes de Excel que aparece dentro de la barra de estado, la cual se localiza en la esquina inferior izquierda de la ventana de Excel. La optimización se realizará muy rápidamente con este modelo porque es muy pequeño. Por esa razón, es posible que en esta ocasión no tenga usted oportunidad de ver el mensaje de Solver.

En general, Solver presentará el mensaje "Planteando el problema...", mientras el programa Solver en Visual Basic realiza la traducción de su modelo construido en la hoja de cálculo. Entonces Solver pasará el control al módulo de optimización. Durante este proceso, el módulo de optimización presenta la cantidad de "iteraciones" y el valor de la celda de función objetivo, mientras explora el conjunto de decisiones factibles. Esta información es útil para supervisar el progreso de Solver en el caso de modelos grandes, cuya resolución puede tardar muchos segundos o minutos.

Si no se ha equivocado hasta ahora, al cabo de un par de segundos deberá presentarse el cuadro de diálogo de Resultados de Solver con un mensaje de terminación, como muestra la figura 3.20. *Asegúrese de leer las declaraciones que aparecen en la parte superior del cuadro de diálogo.* Es posible que Solver termine sin haber encontrado el valor óptimo. Desafortunadamente, el cuadro de diálogo correspondiente a los Resultados de Solver siempre se presenta en forma idéntica, con excepción de esas primeras declaraciones. Si, por la premura de deshacerse del cuadro de diálogo, hace usted *clic* en el botón "Aceptar" sin antes haber leído el mensaje, es posible que pase por alto información importante acerca de la solución correspondiente.

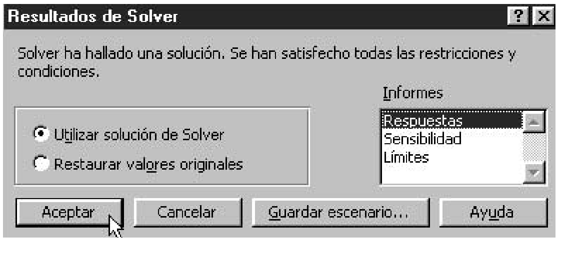


FIGURA 3.20

Cuadro de diálogo de Resultados de Solver

Microsoft Excel 8.0 Informe de respuestas

Celda objetivo (Max)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$4	Margen contrib. unit. Ganancia	$50,500	$50,500

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$3	Cantidad producción E-9	4.5	4.5
$C$3	Cantidad producción F-9	7	7

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Holgura
$D$6	Depto. A, Total LI	150	$D$6<=$F$6	Obligatorio	0
$D$7	Depto. B, Total LI	160	$D$7<=$F$7	Obligatorio	0
$D$8	Requerimiento mezcla Total LI	-16.5	$D$8<=$F$8	Opcional	16.5
$D$9	Horas de pruebas Total LI	205	$D$9>=$F$9	Opcional	70
$D$10	Total unidades, Total LI	11.5	$D$10>=$F$10	Opcional	6.5

FIGURA 3.21

Informe de respuestas de Solver para el modelo de PROTRAC

Por ejemplo, el simple hecho de que Solver termine su operación no significa que haya encontrado la solución óptima. Por tanto, procure leer siempre el mensaje. Las dos declaraciones importantes que debe buscar en este caso son:

- Solver ha hallado una solución y
- Se han satisfecho todas las restricciones y condiciones.

Si no aparecen *las dos* declaraciones anteriores, significa que Solver no ha optimizado su modelo de PL. En ese caso, (1) pulse el botón "Ayuda" para obtener mayor información (aunque generalmente ésta es inadecuada) acerca del cuadro de diálogo de los Resultados de Solver, o (2) busque en el apéndice Solver sugerencias sobre cómo proceder.

Si recibió el mensaje de terminación exitosa, como muestra la figura 3.20, tendrá usted la opción de "Utilizar solución de Solver" o descartarla con "Restaurar valores originales", lo cual deja las variables de decisión exactamente como estaban antes de iniciar Solver. También dispone usted de la opción capaz de generar hasta tres informes acerca de la solución, cada uno de ellos formateado como una nueva hoja de trabajo que es añadida a su "libro" PROTRAC.XLS.

Seleccione el informe de Respuestas, acepte la opción predeterminada "Utilizar solución de Solver" y seleccione Aceptar. Por el momento, puede usted hacer caso omiso del Informe de sensibilidad y el Informe de límites, porque más tarde nos ocuparemos de ellos.[5]

SUGERENCIA: ***Si olvida seleccionar un informe y da por terminado el cuadro de diálogo de Resultados de Solver, no hay manera de recrearlo sin volver a optimizar el modelo y regresar a dicho cuadro.***

En la figura 3.21 podemos apreciar el Informe de respuestas correspondiente al modelo de PROTRAC. El informe de respuestas deberá aparecer en el "libro" PROTRAC.XLS, bajo la ficha "Informe de respuestas 1", si no existe todavía ese nombre como identificador de otra hoja de trabajo del mismo libro. Recuerde que el Informe de respuestas (al igual que los demás informes) es sencillamente otra hoja de trabajo de Excel en la cual se ha elegido la opción de ocultar los nombres de las filas y columnas y la retícula. Usted puede hacer que éstas sean visibles de nuevo, marcando los cuadros adecuados en la ficha del cuadro de diálogo "Ver" del comando "Opciones..." en el menú de Herramientas de Excel. Como resultado de esto, puede usted dar nuevo formato, imprimir y copiar las celdas de cualquier informe de Solver, exactamente en la misma forma que lo haría con cualquier otra hoja de cálculo. Por ejemplo, en el Informe de respuestas ilustrado en la figura 3.21, fueron borradas las filas superfluas y se centraron algunas de las columnas.

La hoja de cálculo electrónica deberá tener, a estas alturas, el mismo aspecto que la hoja ilustrada en la figura 3.22, en la cual Solver ha registrado los valores de decisión óptimos para la fabricación de equipos E-9 y F-9, 4.5 y 7, respectivamente. A continuación, la hoja de cálculo electrónica tiene que llevar a cabo el cálculo una última vez, ahora para generar la retribución de maximización de las ganancias correspondiente al valor de $50,500.

Nótese que las celdas de la columna Holgura han cambiado y ahora reflejan las decisiones de producción óptimas. Si la celda de holgura de una restricción indica una holgura de 0, entonces se dice que la restricción está "activa en el punto óptimo". Las restricciones activas impiden que Solver genere mayores ganancias. Es decir, si se pretendiera incrementar las ganancias aumentando la producción de las E-9 o las F-9, se reduciría a menos de 0 el valor de una o varias de las celdas de holgura, violando una o varias restricciones. Las restricciones que tienen una holgura distinta de cero (y por tanto, en virtud del diseño, tienen holgura positiva) no son obligatorias en el punto óptimo. Las restricciones no obligatorias no pueden entorpecer en modo alguno la capacidad de Solver para generar una retribución adicional. Esta

[5]Como referencia futura: en las versiones anteriores a Excel 97 puede usted seleccionar más de un informe si mantiene pulsada la tecla de Control (Windows) o de Comando (Macintosh), al mismo tiempo que hace clic en cada uno de los informes que desea seleccionar.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Plan de producción de PROTRAC**						
2	Producto:	E-9	F-9				
3	Cantidad de producción	4.5	7	Ganancias			
4	Margen contrib. unit.	$5,000	$4,000	$50,500			
5	Restricciones	Uso de recursos		Total LI		LD	Holgura
6	Depto. A	10	15	150	≤	150	0
7	Depto. B	20	10	160	≤	160	0
8	Requerimiento de mezcla	1	-3	-16.5	≤	0	16.5
9	Horas de pruebas	30	10	205	≥	135	70
10	Total de unidades	1	1	11.5	≥	5	6.5

FIGURA 3.22

Valores de E y F con los cuales se maximizan las ganancias

afirmación será válida, independientemente de que el modelo que se esté optimizando sea de maximización o de minimización. En consecuencia, las restricciones obligatorias o activas son las que le habrán de interesar a usted en cualquier modelo de PL. La holgura con valor cero en las restricciones de recursos para el Depto. A y el Depto. B significa que éstas son las dos restricciones activas o satisfechas en su frontera; es decir, son otros tantos "cuellos de botella" que impiden lograr mejoras adicionales en la retribución de PROTRAC.

Si comparamos la figura 3.22 con el informe de respuestas que muestra la figura 3.21, veremos que en la distribución que hemos decidido para la hoja de cálculo de PROTRAC se presenta directamente toda la información contenida por el informe de respuestas. Es decir que, con excepción de las diferencias de formato, los datos del informe de respuestas aparecen duplicados en la hoja de cálculo original de PROTRAC. A causa de esto, el informe de respuestas es en gran medida redundante, razón por la cual prescindiremos de él en las futuras optimizaciones que realicemos con Solver.

Si lo desea usted, puede explorar ahora las alternativas en la región del punto óptimo utilizando nuevas proyecciones "¿qué pasaría si?" con cantidades de producción de las E-9 o F-9 cercanas a sus valores óptimos. Por ejemplo, ¿cuáles serían las consecuencias sobre las ganancias y sobre las holguras de las restricciones si redondeáramos la decisión de producción de la E-9 a 5 o la redujéramos a 4?

Como otra opción, usted podrá observar el efecto intermedio que se produciría sobre las ganancias si se asignaran más horas de capacidad al departamento A o B, cambiando la celda del lado derecho pertinente y luego ejecutando Solver una vez más para volver a optimizar el modelo con estos nuevos valores. De esta manera se puede investigar cuál sería la contribución o la merma para las ganancias a causa de tales cambios. Por ejemplo, una propuesta de aumentar las capacidades de los departamentos agregando las horas de un segundo turno de trabajo, podría evaluarse examinando las nuevas ganancias, los costos netos correspondientes a cualquier incremento de la capacidad, después de volver a optimizar el nuevo modelo con valores de capacidad más altos. Resulta claro que usted puede cambiar los coeficientes de los márgenes de contribución o los coeficientes técnicos indicados en las restricciones, con el propósito de examinar la manera en que afectan también a las ganancias. Recuerde que, por cada cambio, usted debe volver a activar el cuadro de diálogo de Solver y pulsar el botón Resolver para obtener un nuevo valor óptimo.

3.9 RECOMENDACIONES PARA LOS MODELOS DE PL EN SOLVER

Para facilitar el empleo de Solver, usted debe desarrollar tres hábitos que son muy útiles para la construcción de modelos de PL.

Primero, asegúrese de que las cifras de su modelo de PL tengan una escala tal, que la diferencia entre los números más pequeños y los más grandes de la hoja de cálculo electrónica que va a optimizar no sea mayor de 6 o 7 órdenes de magnitud. Por ejemplo, un modelo en el cual una de las variables de decisión se define como "Porcentaje de utilización" (con un valor de, digamos, 5%) junto con una medida de retribución expresada en dólares, puede ser la causa de que Solver genere soluciones incorrectas en casos en los que la celda de medición del desempeño en dólares aumenta, por ejemplo, a ocho dígitos (decenas de millones de dólares). Esto da lugar a una gama de 10 órdenes de magnitud entre la celda con el valor más pequeño (.05) y la que contiene el valor más grande ($10,000,000, por mencionar una cifra), en su modelo en hoja de cálculo. Los errores internos de redondeo y truncado provocados por esa causa, los cuales se acumulan durante la optimización de Solver, podrían ocasionar una pérdida de precisión interna tan considerable, que los resultados de la terminación del proceso por Solver podrían no ser dignos de confianza. Esta situación puede producir soluciones no óptimas o mensajes de terminación falsos en el cuadro de diálogo de Resultados de Solver (podría aparecer, por ejemplo, el mensa-

SUGERENCIA: ***A partir de Excel 97, si se marca el comando "Usar escala automática" en el cuadro de diálogo de Opciones de Solver (véase la figura 3.19), se puede resolver la mayoría de los problemas de escala, pero esto no garantiza que se eliminen por completo todos los problemas de este tipo. (Esta opción no funciona con los modelos de PL en las versiones de Solver anteriores a Excel 97.)***

je: "No se satisfacen las condiciones para adoptar un modelo lineal", siendo que en realidad sí se han satisfecho).

En este caso, y en otros parecidos, el remedio es sencillo: cambie en su modelo en hoja de cálculo electrónica la escala de medición de los números muy grandes o muy pequeños. En este ejemplo, podríamos definir las sumas de dinero en el modelo de PL como millones de dólares, en lugar de dólares. Esto no provocará que se pierda la generalidad del modelo y mantendrá reducido el intervalo de los números; en este ejemplo revisado, la diferencia entre el número más pequeño (0.5) y el más grande ($10) es ahora de sólo 4 órdenes de magnitud.

Además de la posible omisión de las restricciones de no negatividad, la mayor parte de los problemas que surgen en la optimización de modelos de PL con Solver son provocados por el uso de escalas incorrectas.

En general, las causas menos engañosas de las fallas que se podrían presentar al usar Solver pueden detectarse más fácilmente, como es el caso de los modelos que tienen demasiadas restricciones (el mensaje de terminación es: "Solver no ha encontrado una solución válida").

Segundo, Solver acepta entradas del LD en el cuadro de diálogo de Parámetros de Solver constituidas por constantes numéricas o referencias a celdas o a fórmulas, y el ingresarlas en la construcción de su modelo no afecta el proceso de optimización. En cualquier caso, esta práctica debe evitarse en la construcción correcta de modelos para Solver. Es decir, que nunca deberá usted incluir constantes o direcciones de celdas con variables cuyos valores puedan cambiar durante la optimización del LD de una restricción que se indique en este cuadro de diálogo de los Parámetros de Solver. En otras palabras, todos los LD de la sección de Restricciones del cuadro de diálogo de Parámetros de Solver deben contener (1) constantes o (2) fórmulas cuya evaluación no cambiará durante la optimización con Solver, es decir, fórmulas *no* relacionadas directa o indirectamente con los valores de las variables de decisión.

Si tales prácticas son aceptables para Solver, ¿por qué razón tenemos que evitarlas? Ilustremos esta recomendación con un ejemplo, en este caso una modificación del modelo de PROTRAC original. Supongamos que la administración de PROTRAC ha decidido que no se deben producir más de 4 E-9 y 6 F-9 durante el próximo mes. Es evidente que las decisiones óptimas del modelo de PL de PROTRAC que acabamos de optimizar con Solver contradicen estas nuevas restricciones de política operativa, por lo cual será necesario modificar el modelo de PROTRAC para incluir dos nuevas restricciones y después volver a optimizar. Una forma de hacerlo está ilustrada en la figura 3.23. Nótense las dos nuevas restricciones de límite superior en el cuadro de diálogo de Parámetros de Solver.

Cuando haga usted *clic* en el botón "Resolver", Solver optimizará correctamente este modelo modificado, dando una nueva solución como la mostrada en la figura 3.24.

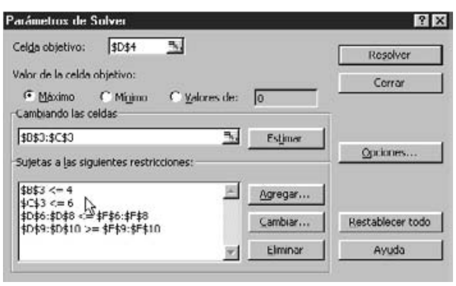
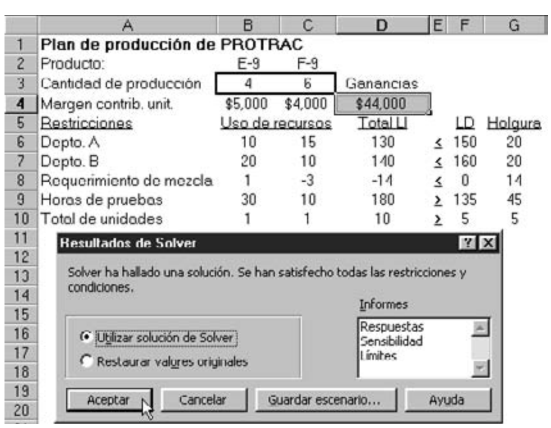


FIGURA 3.23

Especificación de parámetros de Solver para el modelo de PROTRAC modificado



	A	B	C	D	E	F	G
1	Plan de producción de PROTRAC						
2	Producto:	E-9	F-9				
3	Cantidad de producción	4	6	Ganancias			
4	Margen contrib. unit.	$5,000	$4,000	$44,000			
5	Restricciones	Uso de recursos		Total LI		LD	Holgura
6	Depto. A	10	15	130	≤	150	20
7	Depto. B	20	10	140	≤	160	20
8	Requerimiento de mezcla	1	-3	-14	≤	0	14
9	Horas de pruebas	30	10	180	≥	135	45
10	Total de unidades	1	1	10	≥	5	5

FIGURA 3.24

La solución óptima para el modelo de PROTRAC modificado

Observe usted la desventaja de la formulación de este modelo de PROTRAC modificado: no encontramos ninguna pista en la hoja de cálculo electrónica acerca de dos de las restricciones incluidas en el modelo modificado; según la hoja de cálculo de la figura 3.24, tal parece que ninguna restricción es obligatoria. Por consiguiente, usted tendría que (1) generar y consultar el Informe de respuestas al final de cada optimización y (2) traducir nuevamente esa información al modelo de hoja de cálculo electrónica para poderlo interpretar, lo cual es un procedimiento por demás engorroso. Además, este estilo de construcción de modelos con Solver es otra forma de "ocultamiento" de datos; en este caso se ocultan en el cuadro de diálogo de Parámetros de Solver y no en una fórmula, aunque se produce el mismo efecto: la estructura del modelo no resulta obvia y cualquier cambio al modelo exige un procedimiento de "edición", por medio del cuadro de diálogo de Parámetros de Solver en la situación que nos ocupa. El enfoque recomendado consiste en añadir las dos restricciones nuevas al mismo modelo de PROTRAC, como dos filas de restricciones en la hoja de cálculo electrónica, y modificar después el cuadro de diálogo de Parámetros de Solver, de tal modo que su especificación se incluya junto con las restricciones originales.

En vista de que no se pierde generalidad al distribuir de esta manera la hoja de cálculo, le recomendamos que

SUGERENCIA: ***Cuando usted graba en disco su "libro" o cuaderno de trabajo, con él se almacenan las configuraciones del cuadro de diálogo de Parámetros de Solver para las diferentes hojas de trabajo.***

1. Los LD de las restricciones indicadas en el cuadro de diálogo de Parámetros de Solver siempre deberán contener referencias a celdas (a las celdas de los LD de este modelo en la hoja de cálculo), y
2. Las celdas de los LD de este modelo en la hoja de cálculo deben contener constantes y no fórmulas (o, para ser más precisos, no deben contener fórmulas que involucren directa o indirectamente variables de decisión).

SUGERENCIA: ***Si usted pulsa la tecla ImprimirPantalla, copiará la imagen presente en su pantalla al portapapeles, incluidos los cuadros de diálogo de Solver que estén visualizados en ella. Con Alt-ImprimirPantalla copiará al portapapeles la imagen de la ventana activa o la del cuadro de diálogo de Solver. Una vez colocada en el portapapeles, usted podrá pegar la imagen en una hoja de trabajo de Excel o en un documento de Word, para documentar el modelo.***

Tercero, con modelos de PL de mayores dimensiones es posible simplificar la documentación empleando los comandos de Excel para insertar nombres de campos, como lo describimos en el capítulo 2, a fin de dar un nombre de dominio o intervalo a la celda de la medida de desempeño, a las celdas de decisión, a las celdas de funciones de restricción (Total LI) y a las celdas del LD del modelo. Si hace usted esto, Solver sustituirá automáticamente los nombres de campo con los intervalos de celdas del cuadro de diálogo de Parámetros de Solver.

Esto completa nuestro repaso de Solver. Y aquí es cuando usted debe respaldar su libro de trabajo PROTRAC en un disco para guardar las decisiones óptimas del modelo de PL y el Informe de Resultados.

3.10 CRAWLER TREAD: EJEMPLO DE INTEGRACIÓN

Si bien es cierto que la formulación de PROTRAC, Inc. resultó ser un modelo de maximización, muchos modelos reales se presentan en un contexto de minimización. Cuando el objetivo son las ganancias, entonces resulta claro que lo que se busca es la maximización; en cambio, por ejemplo, si el objetivo es el costo, entonces lo que se requiere es la minimización. Como ejemplo de modelo de minimización, consideraremos ahora el siguiente modelo de Crawler Tread.

Se desea mezclar mineral de hierro de cuatro minas distintas para fabricar rodamientos destinados a un nuevo producto de PROTRAC: un tractor tipo oruga de tamaño mediano, el E-6, diseñado especialmente para competir en el mercado europeo. Por medio de análisis se ha demostrado que, para producir una mezcla dotada de las cualidades de tracción adecuadas, deben cumplirse requerimientos mínimos en relación con tres elementos básicos que, para simplificar, señalaremos aquí como A, B y C. En términos específicos, cada tonelada de mineral deberá contener cuando menos 5 libras del elemento básico A, 100 libras del elemento básico B y 30 libras del elemento básico C. Estos datos se presentan resumidos en la tabla 3.4.

TABLA 3.4 Requerimientos de elementos básicos

ELEMENTO BÁSICO	REQUERIMIENTO MÍNIMO POR TONELADA DE MEZCLA (libras de cada elemento)
A	5
B	100
C	30

El mineral extraído de cada una de las cuatro minas posee los tres elementos básicos, pero en cantidades distintas. Estas composiciones, expresadas en libras por tonelada, se enumeran en la tabla 3.5.

Nótese que una tonelada del mineral procedente de la primera mina contiene 10 libras del elemento básico A, y esto satisface los mínimos requerimientos de este elemento en 5 libras por tonelada. En forma similar, la misma tonelada contiene 90 libras del elemento básico B y 45 libras del elemento básico C, por lo cual logra satisfacer el requerimiento del elemento básico C, pero no el del elemento básico B. De igual manera, se puede comprobar que una tonelada de mineral de la segunda mina no logrará satisfacer los requerimientos de los elementos A o C. Una tonelada de la mina 3 no cumplirá los requerimientos de B o C y una tonelada extraída de la mina 4 no satisfará el requerimiento de A. Sin embargo, podemos encontrar muchas mezclas diferentes que satisfagan los requerimientos mínimos de los tres elementos básicos. Un ejemplo de dichas mezclas sería la combinación de media tonelada de material proveniente de la mina 1 y media tonelada de material de la mina 4. La cantidad del elemento básico A de esta tonelada de mezcla resultante se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}\text{libras de A} = &\ (\text{libras de A en 1 tonelada de la mina 1})(1/2)\\ &+ (\text{libras de A en 1 tonelada de la mina 4})(1/2)\end{aligned}$$

Por tanto

$$\text{libras de A} = 10(1/2) + 2(1/2) = 5 + 1 = 6$$

Puesto que $6 \geq 5$, esta mezcla cumple con el requerimiento mínimo del elemento básico A. Según la misma lógica, para nuestra tonelada de mezcla podemos calcular

$$\begin{aligned}\text{libras de B} = &\ (\text{libras de B en 1 tonelada de la mina 1})(1/2)\\ &+ (\text{libras de B en 1 tonelada de la mina 4})(1/2)\end{aligned}$$

Por tanto

$$\text{libras de B} = 90(1/2) + 175(1/2) = 132.5$$

De igual manera

$$\text{libras de C} = 45(1/2) + 37(1/2) = 41$$

Si comparamos la cifra 132.5 con el requerimiento de 100 libras de B, y la cifra 41 con el requerimiento de 30 libras de C, podemos apreciar que esta mezcla, constituida por media tonelada de material de la mina 1 y media tonelada de la mina 4, cumple con los requerimientos mínimos y, por esa razón, decimos que es una *mezcla factible*. Hay muchas otras mezclas posibles de 1 tonelada que lograrían satisfacer los requerimientos mínimos y que también serían factibles. Sin embargo, en virtud de que el mineral de cada mina tiene un costo diferente, las distintas mezclas también tendrían costos diferentes. Las cifras de costos aparecen en la tabla 3.6

TABLA 3.5 Composiciones obtenidas de cada mina

	MINA (libras por tonelada de cada elemento)			
ELEMENTO BÁSICO	1	2	3	4
A	10	3	8	2
B	90	150	75	175
C	45	25	20	37

TABLA 3.6 Costo del mineral de cada mina

MINA	COSTO EN DÓLARES POR TONELADA DE MINERAL
1	800
2	400
3	600
4	500

Por ejemplo, el costo de la mezcla factible compuesta por media tonelada de la mina 1 y media tonelada de la mina 4 es

$$\begin{array}{ccc}(\text{costo por tonelada de la mina 1})(1/2) & + & (\text{costo por tonelada de la mina 4})(1/2) = \\ 800(1/2) & + & 500(1/2) \quad = \$650\end{array}$$

Compare este costo con los de otras mezclas factibles que haya descubierto. El objetivo de la administración, en el caso del problema de Crawler Tread, es descubrir una *mezcla factible de costo mínimo*. Veamos la manera de formular este problema como un modelo de PL.

CREACIÓN DEL MODELO DE PL

En virtud de que nos interesa encontrar una mezcla *óptima* de 1 tonelada, establecemos las *variables de decisión* en la siguiente forma:

T_1 = fracción de una tonelada que se tomará de la mina 1

T_2 = fracción de una tonelada que se tomará de la mina 2

T_3 = fracción de una tonelada que se tomará de la mina 3

T_4 = fracción de una tonelada que se tomará de la mina 4

A continuación, tomando los datos de la tabla 3.5, las cantidades de los elementos básicos en 1 tonelada de mezcla se calculan como sigue:

libras del elemento básico A en 1 tonelada de mezcla

$$= 10T_1 + 3T_2 + 8T_3 + 2T_4 \qquad \textbf{(3.9)}$$

libras del elemento básico B en 1 tonelada de mezcla

$$= 90T_1 + 150T_2 + 75T_3 + 175T_4 \qquad \textbf{(3.10)}$$

libras del elemento básico C en 1 tonelada de mezcla

$$= 45T_1 + 25T_2 + 20T_3 + 37T_4 \qquad \textbf{(3.11)}$$

Ahora podemos combinar las expresiones (3.9), (3.10) y (3.11) con los requerimientos mínimos indicados en la tabla 3.4 para obtener las tres restricciones (requerimientos):

$$10T_1 + 3T_2 + 8T_3 + 2T_4 \geq 5 \qquad \textbf{(3.12)}$$

$$90T_1 + 150T_2 + 75T_3 + 175T_4 \geq 100 \qquad \textbf{(3.13)}$$

$$45T_1 + 25T_2 + 20T_3 + 37T_4 \geq 30 \qquad \textbf{(3.14)}$$

¿Tiene otras restricciones este modelo? Claro está que será necesario incluir en él las condiciones habituales de no negatividad $T_1, T_2, T_3, T_4 \geq 0$, pero todavía existe otra restricción importante que debemos agregar. En vista de que, excepto por las cuatro minas, no hay ninguna otra fuente que contribuya a formar la tonelada de material, la suma de las contribuciones fraccionales de dichas minas deberá ser igual a 1. Esto quiere decir que deberemos incluir también la siguiente restricción

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 1 \qquad \textbf{(3.15)}$$

Esta última restricción, conocida a veces como la *condición de balance de material*, es una **restricción de igualdad** y restringe los valores de las variables de decisión, de tal modo que el lado izquierdo sea *igual* que el lado derecho. Esto ilustra un principio importante:

> Las restricciones de un modelo de programación lineal pueden ser tanto igualdades como desigualdades.

Con base en la tabla 3.6, podemos ver que el costo de cualquier mezcla se da como sigue

$$\text{costo de 1 tonelada de mezcla} = 800T_1 + 400T_2 + 600T_3 + 500T_4$$

Haciendo énfasis en que nuestro objetivo consiste en minimizar el costo, ahora podemos escribir el modelo simbólico completo de Crawler Tread:

MODELO PL DE CRAWLER TREAD

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } 800T_1 + 400T_2 + 600T_3 + 500T_4 \\
\text{s.a.}\quad &10T_1 + 3T_2 + 8T_3 + 2T_4 \geq 5 \\
&90T_1 + 150T_2 + 75T_3 + 175T_4 \geq 100 \\
&45T_1 + 25T_2 + 20T_3 + 37T_4 \geq 30 \\
&T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 1 \\
&T_1, T_2, T_3, T_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Usted deberá comprobar que todas las funciones de este modelo sean lineales y que, en consecuencia, se trata realmente de un modelo de PL.

Con esta observación completamos nuestra introducción a las formulaciones de PL para utilizar Solver. A continuación, regresaremos al tema principal de este libro: la formulación de modelos útiles que representan material de apoyo para la toma de decisiones. Sin embargo, antes de iniciar la siguiente sección, ponga usted a prueba sus habilidades para la construcción de modelos y su destreza con Solver: tome el modelo simbólico de PL de Crawler Tread y aplíquelo a un modelo de hoja de cálculo electrónica utilizando el mismo estilo de formulación en hojas de cálculo aplicado en este capítulo. Optimícelo a continuación con Solver. Nuestra versión de Crawler Tread se encuentra al final de este capítulo, pero no la mire todavía porque si lo hiciera desperdiciaría la oportunidad de poner a prueba el nivel de entendimiento que ha logrado alcanzar. En primer lugar, construya el modelo de PL en una hoja de cálculo electrónica y trate de resolverlo. Después de trabajar con el problema de Crawler y algunos de los problemas más estructurados de la siguiente sección, comenzará a parecerle natural apegarse a la larga lista de reglas para la formulación en hojas de cálculo que nosotros le hemos recomendado.

3.11 CÓMO FORMULAR MODELOS DE PL

El resto de este capítulo contiene ejemplos de algunas formulaciones que pueden servirle para consolidar su capacidad para transitar de las situaciones administrativas del mundo real a los modelos simbólicos de PL (y, por tanto, a los modelos construidos en hojas de cálculo electrónicas listos para el uso de Solver). Esta transición (la manera en que se ha planteado el modelo y los modos como se han formulado los objetivos) es de vital importancia.

Para obtener experiencia en la formulación de modelos, intente construir por su cuenta modelos de los siguientes problemas. Desarrolle el modelo simbólico de PL con la mayor rapidez posible y *no interprete en los problemas más de lo que hay en ellos; apéguese únicamente a lo que se le indica*. Por ahora, no agregue restricciones ni se deje llevar por minucias lógicas ni por divagaciones con las que, a su juicio, sería más realista el modelo. Por ejemplo, no se preocupe por "lo que sucederá la próxima semana" si el problema no hace mención alguna de la siguiente semana. Los problemas que presentamos han sido seleccionados con el propósito de ayudarle a desarrollar su habilidad para formular modelos, suponiendo que ya ha completado el paso correspondiente a hacer una abstracción a partir de la situación real. A fin de lograr esto, y para que usted pueda revisar su trabajo y medir sus progresos, tendrá que hacer honor al principio de que, en el contexto descrito, las formulaciones correctas nunca deben ser ambiguas. En otras palabras, a diferencia de lo que pasa en las situaciones reales, para este reducido grupo de problemas-ejemplo sí existe una "respuesta correcta". Más adelante, cuando haya adquirido usted mayor experiencia, se ampliará su espectro de matices para la interpretación e inclusión de sutilezas del mundo real. En virtud de que el tema de la formulación es de suma importancia y puesto que la práctica es el único camino para llegar a dominarlo, al final del presente capítulo encontrará una larga lista de problemas.

Una vez más, le repetimos nuestro consejo: no sólo lea el problema e inmediatamente después vea la fórmula que se da al final del capítulo. Esa sería la mejor manera en que usted dejara de entender el problema. No lea la solución hasta que (1) esté seguro de que ha seleccionado el modelo adecuado para el problema y (2), esté absolutamente convencido de que es mayor la dificultad para solucionar el problema. Si usted intenta obtener la respuesta aprenderá más sobre la formulación de modelos, y en especial, sobre cómo formular los modelos de PL.

3.12 EJEMPLO 1: ASTRO Y COSMO (UN PROBLEMA DE MEZCLA DE PRODUCTOS)

Una compañía fabricante de TV produce dos modelos de aparatos televisores, el Astro y el Cosmo. Hay dos líneas de producción, una para cada modelo, e intervienen dos departamentos en la producción de cada modelo. La capacidad de la línea de producción del Astro es de 70 apara-

TABLA 3.7 Información sobre Astro y Cosmo

	CAPACIDAD DIARIA	MANO DE OBRA POR TELEVISOR (HRS.) Depto. A	Depto. B	GANANCIAS POR TELEVISOR ($)
Astro	70	1	1	20
Cosmo	50	2	1	10
Disponibilidad total		120	90	

TABLA 3.8 Información sobre la mezcla de alimentos

Alimento	CONTENIDO Y PRECIO POR CADA 16 ONZAS DE ALIMENTO Proteínas (onzas)	Carbohidratos (onzas)	Grasas (onzas)	Precio ($)
1	3	7	5	4
2	5	4	6	6
3	2	2	6	3
4	3	8	2	2

tos de TV por día. La capacidad de la línea Cosmo es de 50 televisores diarios. En el departamento A se fabrican los cinescopios. En este departamento, se requiere una hora de trabajo para cada modelo Astro y dos horas de trabajo para cada aparato Cosmo. En la actualidad, puede asignarse un máximo de 120 horas de trabajo diarias para la producción de ambos tipos de aparato en el departamento A. En el departamento B se construye el chasis. Aquí se requiere una hora de trabajo para cada televisor Astro y también una hora para cada modelo Cosmo. Actualmente se pueden asignar 90 horas de trabajo al departamento B para la producción de ambos modelos. La contribución a las ganancias es de 20 y 10 dólares, respectivamente, por cada televisor Astro y Cosmo. Esta información se presenta resumida en la tabla 3.7.

Si la compañía sabe que podrá vender todos los aparatos Astro y Cosmo que sea capaz de fabricar, ¿cuál deberá ser el plan de producción por día (es decir, la producción diaria) para cada modelo? Repase usted el modelo *E* y *F* de PROTRAC, Inc. e intente formular la situación descrita de Astro y Cosmo como un modelo de programación lineal. Escriba el modelo simbólico de PL, luego desarrolle el modelo de PL en una hoja de cálculo electrónica y optimícelo después con Solver.

3.13 EJEMPLO 2: MEZCLA DE ALIMENTOS (UN PROBLEMA DE MEZCLA)

Una lata de 16 onzas de alimento para perro debe contener, cuando menos, las siguientes cantidades de proteínas, carbohidratos y grasas: proteínas, 3 onzas; carbohidratos, 5 onzas; grasas, 4 onzas. Es necesario mezclar distintas proporciones de 4 tipos de alimentos a fin de producir una lata de comida para perro, con el mínimo costo, que satisfaga este requerimiento. La tabla 3.8 muestra el contenido y precio de 16 onzas de cada una de las diferentes mezclas de alimentos.

Repase usted el modelo de integración que construimos para Crawler Tread y formule este problema de mezcla de alimentos como un programa lineal. Desarrolle por escrito el modelo simbólico de PL, formule dicho modelo en una hoja de cálculo electrónica y optimícelo con la ayuda de Solver. SUGERENCIA: haga que X_i represente la proporción de alimento i por cada lata de comida para perro, $i = 1, 2, 3, 4$.

3.14 EJEMPLO 3: PROGRAMACIÓN DE LAS FUERZAS DE SEGURIDAD (UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN)

Un administrador de personal debe programar las fuerzas de seguridad, de manera que se satisfagan los requisitos de personal de guardia indicados en la tabla 3.9.

TABLA 3.9 Requerimientos de personal de guardia de seguridad

HORA	CANTIDAD MÍNIMA REQUERIDA DE OFICIALES
Medianoche - 4 a.m.	5
4 a.m. - 8 a.m.	7
8 a.m. - mediodía	15
Mediodía - 4 p.m.	7
4 p.m. - 8 p.m.	12
8 p.m. - medianoche	9

TABLA 3.10 Programa de turnos

TURNO	HORA DE INICIO	HORA DE TERMINACIÓN
1	Medianoche	8:00 a.m.
2	4:00 a.m.	Mediodía
3	8:00 a.m.	4:00 p.m.
4	Mediodía	8:00 p.m.
5	4:00 p.m.	Medianoche
6	8:00 p.m.	4:00 a.m.

Los oficiales trabajan por turnos de ocho horas. Cada día hay seis de esos turnos. La hora de inicio y final de cada turno aparece en la tabla 3.10.

El gerente de personal quiere determinar la cantidad de oficiales que deberán trabajar en cada turno, de manera que se logre minimizar el total de oficiales empleados, pero sin dejar de satisfacer los requerimientos correspondientes a los turnos de guardia. Podemos definir las variables de decisión en la forma siguiente:

$$X_1 = \text{cantidad de oficiales que estarán en servicio durante el turno 1}$$
$$X_2 = \text{cantidad de oficiales que estarán en servicio durante el turno 2}$$
$$\vdots$$
$$X_6 = \text{cantidad de oficiales que estarán en servicio durante el turno 6}$$

Al formular la función objetivo, observe que el total de los oficiales es la suma de la cantidad de oficiales asignados a cada turno. Escriba ahora la función objetivo, tomando en cuenta que el gerente de personal quiere minimizar dicha suma. La función objetivo es

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

Al formular las restricciones, deseará asegurarse de que un conjunto particular de valores de $X_1,\ldots,X_6$ cumpla los requisitos impuestos a los turnos de los guardias. Se requiere algún mecanismo para ver cuáles de los oficiales estarán de guardia durante cada uno de los intervalos de cuatro horas que aparecen en la tabla 3.9. Las distribuciones de tipo tabular, como la que muestra la tabla 3.11, son útiles para efectuar esta determinación. Aquí veremos que los oficiales que trabajen durante el turno 1 estarán de guardia durante los primeros dos intervalos de tiempo, etc. La tabla también muestra (añadiendo dos columnas) la cantidad de oficiales que trabajarán durante cada intervalo de tiempo (por ejemplo, durante el primer intervalo, estarán de guardia $X_1 + X_6$ oficiales; por tanto, escribimos la primera restricción como $X_1 + X_6 \geq 5$).

Intente escribir ahora las demás restricciones de este modelo. Escriba el modelo de PL simbólico, desarrolle el modelo de PL en su hoja de cálculo electrónica y a continuación optimícelo con Solver.

TABLA 3.11 Oficiales de guardia durante cada intervalo

TURNO	INTERVALO DE TIEMPO Medianoche a 4:00 a.m.	4:00 a.m. a 8:00 a.m.	8:00 a.m. a mediodía	Mediodía a 4:00 p.m.	4:00 p.m. a 8:00 p.m.	8:00 p.m. a medianoche
1	X_1	X_1				
2		X_2	X_2			
3			X_3	X_3		
4				X_4	X_4	
5					X_5	X_5
6	X_6					X_6
Requerimientos	5	7	15	7	12	9

Los ejemplos presentados hasta ahora han sido: uno de mezcla de productos (Astro y Cosmo), uno de integración (de alimentos) y uno de programación (de fuerzas de seguridad). Todos son ejemplos de *tipos* de PL que encontrará en el modelado real. A continuación presentamos otro tipo de PL que se conoce como *modelo de punto de equilibrio*

3.15 EJEMPLO 4: LONGER BOATS YACHT COMPANY (UNA PEQUEÑA DESCRIPCIÓN ACERCA DEL ANÁLISIS DE PUNTO DE EQUILIBRIO RESTRINGIDO)

Longer Boats Yacht Company produce tres modelos de lanchas de alto desempeño para competición. Estos tres modelos se llaman Sting, Ray y Breaker. La información acerca de ingresos y costos para el próximo periodo de planeación aparecen en la tabla 3.12.

Como puede observar en esta información, el *costo fijo* de cada una de estas actividades es considerable. Costo fijo es un costo estático que se tiene que pagar, independientemente de la cantidad que se vaya a producir. Por tanto, se pagará el mismo costo fijo de $3,000,000, en el caso de los Ray, sin importar que la partida de producción consista en 0, 1 o 40 lanchas. Los elevados costos fijos incluyen el costo de modificaciones de los diseños, la reconstrucción de moldes y las pruebas de los yates en un estanque.

En la figura 3.25 se muestra un análisis de punto de equilibrio correspondiente al modelo Sting. Vemos que si Longer Boats produjera solamente unidades del modelo Sting, tendría que producir por lo menos 1,000 lanchas para poder alcanzar el punto de equilibrio.

Sin embargo, el problema de Longer Boats es más complicado. Por principio de cuentas, para el siguiente periodo de planeación, la administración ya ha firmado contratos comprometiéndose a producir 700 Sting. Otro cliente ha solicitado 400 Breaker, solicitud que la administración quisiera cumplir. Los estudios de mercado de Longer Boats han convencido a la dirección de que se deben fabricar a lo sumo 300 Ray. La gerencia todavía está interesada en averiguar cuánto tendrá que vender para llegar al punto de equilibrio, pero ahora existen tres productos, además de compromisos previos, o restricciones, que será preciso tomar en consideración. Partiendo de los principios básicos, la gerencia ha observado que, para alcanzar el punto de equilibrio, deberá cumplirse la condición

$$\text{ingreso total} = \text{costo total}$$

TABLA 3.12 Información de Longer Boats

LANCHA	PRECIO DE VENTA POR UNIDAD ($)	COSTO VARIABLE POR UNIDAD ($)	COSTO FIJO ($)
Sting	10,000	5,000	5,000,000
Ray	7,500	3,600	3,000,000
Breaker	15,000	8,000	10,000,000

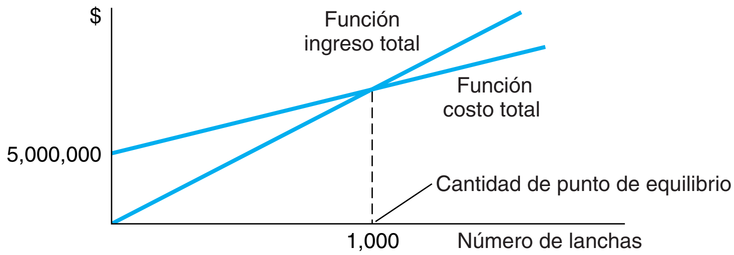


FIGURA 3.25

Análisis de punto de equilibrio para las lanchas modelo Sting

Por el hecho de que Longer Boats es una compañía relativamente nueva y ahora está padeciendo los problemas de flujo de efectivo asociados a su rápido crecimiento, la administración desearía minimizar el flujo de salida de capital. Por necesidad, será menester incurrir en la totalidad de los costos fijos y, en consecuencia, la meta se convertirá en minimizar los costos variables totales. La meta de la gerencia es determinar el plan de producción que tenga el menor costo variable, que cumpla con las restricciones y produzca un ingreso total igual al costo total. Exponga por escrito el modelo simbólico de PL, desarrolle el modelo de PL en una hoja de cálculo electrónica y optimícelo con la ayuda de Solver.

3.16 MÁS SUGERENCIAS PARA EL DESARROLLO DE MODELOS DE PL

Como puede apreciar en los modelos que hemos formulado en este capítulo, la construcción de modelos de PL consiste sencillamente en la especificación razonada y cuidadosa de los ingredientes del modelo (variables de decisión, restricciones, función objetivo, etc.) apropiados para un modelo de optimización lineal. Sin embargo, como en el caso de los "costos fijos" que analizamos anteriormente, existen otras trampas que es necesario evitar durante la formulación de modelos de PL. A continuación identificaremos algunas de las más comunes y las describiremos brevemente.

- Como todo lo demás en cuanto a la construcción de modelos, evite detallar demasiado su modelo o nunca logrará formularlo completo y consistente. De lo contrario, cuando más adelante maneje la formulación del modelo (que será demasiado complicado) en una hoja de cálculo electrónica, se trasladarán a él esas inconsistencias, las cuales aparecerán como errores difíciles de detectar. Es mejor formular un conjunto apenas suficiente de variables de decisión y restricciones, las indispensables para iniciar. Después será mucho más fácil añadirle complejidad mediante nuevas variables y restricciones a un modelo sencillo que usted ya ha comprendido a fondo.
- Evite las relaciones no lineales en sus construcciones de modelos, por lo menos al principio. En cambio, válgase de ecuaciones lineales, posiblemente limitando los valores de sus variables por medio de restricciones, como aproximaciones en la región de interés de relaciones no lineales, más realistas pero también más complejas. Aun cuando más adelante, en el capítulo ocho, nos ocuparemos de los modelos no lineales, la optimización no lineal es mucho más difícil de realizar y está plagada de trampas que le son propias. Aun en el caso de que usted tenga necesidad de introducir algunas relaciones no lineales en su modelo, es preferible que desarrolle primero un modelo lineal sencillo y que más tarde le agregue todas las relaciones no lineales que el caso requiera.

  Tenga presente que, al igual que P2 (5 P*P) produce una no linealidad en un modelo si P es una variable de decisión; también P*Q produce una no linealidad si P y Q son variables de decisión. En otras palabras, usted no puede multiplicar (ni dividir) dos variables de decisión sin introducir el carácter de no linealidad en el modelo.

  Conviene observar que algunas relaciones no lineales pueden convertirse en lineales con facilidad y sin que el modelo sufra la menor pérdida de generalidad. Por ejemplo, la restricción de "Mezcla de productos" del modelo de PROTRAC requería que se produjera cuando menos 1 F-9 por cada 3 E-9. La expresión de esta restricción como $E/F \le 3$ es correcta desde el punto de vista algebraico, pero también es una función no lineal de una de las variables de decisión, F, en el denominador de la relación. No obstante, las manipulaciones normales de la ecuación producen la restricción equivalente, $E - 3F \le 0$, que es lineal para ambas variables de decisión. (Comentario al margen: todas las manipulaciones algebraicas normales aplicadas a ambos lados de una ecuación también funcionan de manera idéntica cuando se aplican a ambos lados de una desigualdad, con la siguiente excepción:

la multiplicación o la división de los dos lados de una desigualdad por un número negativo *invierte* la dirección de dicha desigualdad. Por ejemplo, si $E - 3F \leq 0$, entonces la multiplicación de ambos lados por –1 producirá la desigualdad equivalente $-E + 3F \geq 0$.)

- No se preocupe prematuramente por las consecuencias reales de los valores no enteros en las variables de decisión que podrían presentarse al optimizar el modelo. En el capítulo siete también nos ocuparemos de los modelos en los cuales se requiere que las variables de decisión tengan valores enteros. Sin embargo, igual que en el caso de las relaciones no lineales, el requisito de utilizar valores enteros en las variables de decisión añade una complejidad a la optimización, que al principio es preferible pasar por alto.
- Muchos modelos de PL interesantes se refieren a la toma de decisiones a lo largo de periodos múltiples, como ocurre en los casos en que es necesario seleccionar las cantidades de producción mensual para varios meses, en situaciones en que los meses no son independientes unos de otros. Aunque esto es de gran interés desde el punto de vista administrativo, lo mejor es construir primero el modelo de la situación correspondiente a un solo periodo (en este caso, un mes), y modificarlo después agregando la formulación más complicada que abarque los diferentes meses. Examinaremos estos modelos con detalle en el capítulo seis.
- Asegúrese de que el modelo de PL tenga incorporado algún tipo de "tensión" que lo obligue a ensayar las concesiones no obvias durante la optimización. Por ejemplo, es muy probable que un modelo de minimización de costos que no incluya restricciones $\geq$ (requerimientos) produzca el resultado absurdo, en el mundo real, de asignar el valor 0 a todas las variables de decisión al cabo de la optimización, lo cual querría decir que los costos se minimizarían cuando la empresa saliera del mercado. En forma semejante, un modelo de maximización de ganancias sin restricciones del tipo $\leq$ (de recursos), con toda probabilidad nos presentaría una ganancia infinita, cosa muy agradable pero poco realista, debido a que una o más de las variables de decisión crece hasta el infinito durante el proceso de optimización del modelo. A este último caso se le llama "solución sin límites", en el léxico de la PL.
- Tenga mucha precaución cuando utilice restricciones de igualdad: limítelas en la construcción de sus modelos de PL, de ser posible, a los casos en que deba mantenerse una relación de definición. Por ejemplo, resulta aceptable incluir una restricción que señale Ganancias = Ingresos por ventas – Costos totales, lo cual es una identidad de contabilidad; o bien, una restricción que exprese Inventario final = Inventario inicial + Producción – Embarques, que es una restricción de saldo de materiales. Sin embargo, aun estas ecuaciones deben ser examinadas por la administración. Los inventarios podrían "contraerse" a causa de daños o robo; los Ingresos registrados tal vez no han sido recolectados aún, etc. Por tanto, la formulación adecuada podría expresarse mediante restricciones de desigualdad, es decir, "Ganancias $\leq$ ..." e "Inventario final $\leq$...", respectivamente. Por lo general, procure usted expresar las relaciones como desigualdades, aun cuando considere que, en condiciones ideales, deberían ser igualdades. Posteriormente, cuando ya haya optimizado el modelo, podrá comprobar si la restricción de desigualdad es obligatoria, es decir, si se satisface como una igualdad tal como usted esperaba. De no ocurrir así, entonces puede buscar la razón, y aprenderá durante el proceso.

  La mayor dificultad cuando se incluyen restricciones de igualdad consiste en el peligro de restringir excesivamente su modelo, el cual, al ser optimizado, podría producir decisiones de baja retribución o, en el peor de los casos, no proporcionar ninguna decisión factible. Tenga especial cuidado con la inclusión de restricciones implícitas de política "organizacional" que se manifiesten como igualdades en su modelo. Por ejemplo, una política no escrita de la compañía podría ser ésta: "En la práctica, nosotros en la compañía XYZ siempre hemos asignado un supervisor (S) por cada 10 trabajadores (W). Por tanto, debemos imponer la restricción $W = 10S$". Si no hay razones de peso para incluir semejante política, se podría mejorar la retribución posible dejando esa restricción fuera del modelo. Por otra parte, si las restricciones de política operativa son importantes en el modelo, considere la opción de incluirlas como desigualdades y no como igualdades. Por ejemplo, esta última restricción podría relajarse hasta convertirse en "...no se asignarán más de 10 trabajadores por supervisor", lo cual nos da la restricción $W \leq 10S$. Con esto disminuye la probabilidad de obtener como resultado "no hay decisiones factibles" durante la optimización del modelo y, por añadidura, abre la posibilidad de descubrir que el rechazo de la política tradicional de exactamente "10 a 1" sea la mejor estrategia.
- *No* añada restricciones, a menos que de verdad sean necesarias para la situación, a partir de las cuales se esté construyendo el modelo. Esto sucede comúnmente cuando usted permite que su intuición (con frecuencia equivocada) acerca de la naturaleza de la solución óptima

imponga condiciones al modelo de PL desde un principio. Es decir, en esos casos usted crea una profecía que se cumple por sí misma, pues ha predeterminado la solución del modelo ¡desde antes de su optimización! Como resultado de esto, nunca sabrá si su intuición era la correcta y, peor aún, si su intuición estaba equivocada corre el riesgo de recibir el resultado de "no hay decisiones factibles" cuando optimice el modelo. Por ejemplo, un gerente podría afirmar "me parece obvio que, en las presentes circunstancias y en términos de costos, nunca nos beneficiaría tener un inventario final que no fuera cero. Por tanto, voy a añadir al modelo la restricción: Inventario final = 0, para asegurarme". Si en efecto lo hace, el gerente no sólo se arriesgará a restringir excesivamente el modelo, como en los casos que vimos con anterioridad, sino perderá la oportunidad de descubrir si la solución óptima de su modelo podría presentarse con un inventario final positivo.

En los siguientes capítulos encontrará más ejemplos de formulaciones que le pueden resultar útiles para cimentar sus capacidades al efectuar la transición entre una situación real y su correspondiente modelo de PL. Esta transición (que incluye la manera en que se ha distribuido el modelo de PL, la forma en que se han formulado las restricciones y los objetivos) es de vital importancia. A medida que usted desarrolle sus habilidades para formular modelos de PL, irá añadiendo sus propias "sugerencias" a la lista anterior.

3.17 RESUMEN

Hemos definido las restricciones como condiciones matemáticas que excluyen ciertas combinaciones de valores para las variables de decisión, y definimos como decisiones factibles o permisibles aquellos valores de las variables que satisfacen *todas* las restricciones. También vimos que la programación lineal comprende la búsqueda de una decisión factible que optimice una función objetivo. Más específicamente, definimos la programación lineal como un modelo matemático en el cual se presentan las siguientes propiedades:

1. Cuenta con una función objetivo lineal que debe maximizarse o minimizarse.
2. También incluye restricciones lineales, cada una de las cuales es una desigualdad (ya sea $\leq$ o $\geq$) o una igualdad matemática.

La flexibilidad que ofrecen las hojas de cálculo electrónicas para la formulación de modelos nos impone la necesidad de trabajar con un poco de disciplina, a fin de desarrollar representaciones simplificadas en hojas de cálculo que sean (1) fieles al modelo de PL, (2) documentables por sí mismas, (3) adecuadas para la optimización con Solver y (4) que no provoquen problemas posteriores en la interpretación de los informes de Solver. Le conviene recordar cuatro cosas para no caer en trampas cuando trabaje con Solver.

1. Cualquier fórmula que afecte la celda de función objetivo o las restricciones debe ser lineal si involucra las variables de decisión directa o indirectamente, a través de las fórmulas de otras celdas.
2. Desde el punto de vista algebraico, los modelos lineales son solamente un caso especial de los modelos no lineales. Sin embargo, esto no es válido en el caso del programa de optimización de Solver, pues emplea un software diferente para la optimización de cada tipo de modelo. Si inadvertidamente usted se olvida de marcar la opción "Asumir modelo lineal" y optimiza un modelo de programación lineal utilizando el sistema de optimización no lineal de Solver, es probable que no obtenga la solución óptima; aun en caso de que la obtenga verá que los informes de Solver, de los cuales nos ocuparemos más adelante, son diferentes para ambos tipos de procedimientos.
3. El cambio del lado derecho (LD) de cada restricción del cuadro de diálogo de Parámetros de Solver debe hacer referencia a celdas de la hoja de cálculo que sean constantes o cuyos valores numéricos sean constantes y no cambien durante la optimización. Además, usted no puede introducir alguna fórmula en el campo de lado *izquierdo* de una restricción indicada en el cuadro de diálogo de Restricciones de Solver. Por tanto, lo mejor es evitar las confusiones y no indicar fórmulas ni constantes explícitas en el campo del LI ni en el del LD en el cuadro de diálogo Agregar restricción de Solver. Le recomendamos que inserte las fórmulas y constantes en las celdas de la hoja de cálculo electrónica e indique en los campos del cuadro de diálogo Agregar restricción todas las referencias que correspondan a las celdas de la hoja de trabajo.
4. El hecho de asignar nombres a los intervalos de celdas correspondientes a variables de decisión, a la celda de medición del desempeño, a los grupos de celdas de restricción del LI que corresponden al mismo tipo de desigualdad y a los grupos de celdas del LD correspondientes al mismo tipo de desigualdad, son pasos útiles para la debida documentación de los modelos de PL más grandes.

Para llenar el cuadro de diálogo de Parámetros de Solver, es necesario especificar los campos Celda objetivo y Cambiando las celdas, y las restricciones, además de marcar la opción Asumir modelo lineal, antes de resolver el modelo. Después de la optimización, Solver presentará el cuadro de diálogo de Resultados, el cual contiene importantes mensajes de terminación y permite generar uno o varios informes de Solver. Al terminar el proceso, la hoja de cálculo presentará la solución óptima generada por Solver.

Desarrollamos varios ejemplos a fin de traducir las situaciones reales en modelos simbólicos de PL. Estos ejemplos nos mostraron que, cuando el objetivo son las ganancias, se obtiene un modelo de maximización (Max) y que cuando el objetivo son los costos, se produce un modelo de minimización (Min). También vimos que las restricciones del tipo "limitación" se traducen generalmente como desigualdades de la forma $\leq$ mientras que las restricciones del tipo "requerimiento" por lo común se traducen como desigualdades $\geq$. En algunos casos, como en los problemas de integración, las consideraciones lógicas impondrán la necesidad de incluir restricciones de igualdad. Asimismo, presentamos guías referentes al proceso que conviene seguir para desarrollar el modelo de PL y para su formulación en una hoja de cálculo electrónica.

3.18 SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PRESENTADOS COMO EJEMPLOS

SOLUCIÓN DE CRAWLER TREAD

El modelo en hoja de cálculo electrónica con la solución óptima aparece en la figura 3.26, junto con los parámetros de Solver y ciertas porciones relevantes de las opciones y las fórmulas de Solver.

SOLUCIÓN DEL EJEMPLO 1: ASTRO Y COSMO

El modelo simbólico de PL de Astro y Cosmo está dado por:

A = producción diaria de aparatos Astro (televisores/día)

C = producción diaria de aparatos Cosmo (televisores/día)

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } 20A + 10C \\
&\text{s.t.} \quad A \leq 70 \\
&\qquad C \leq 50 \\
&\qquad A + 2C \leq 120 \\
&\qquad A + C \leq 90 \\
&\qquad A, C \geq 0
\end{aligned}
$$

En este modelo no aparecen todas las variables de decisión en todas las restricciones. La variable C no aparece en la restricción $A \leq 70$. No es necesario que todas las variables de decisión aparezcan explícitamente en todas las restricciones.[6] El modelo formulado en hoja de cálculo está en la figura 3.27, al igual que los parámetros de Solver y la solución óptima. Las fórmulas SUMAPRODUCTO() de Ganancias y Total LI son parecidas a las del ejemplo de Crawler Tread presentado con anterioridad y se han omitido en éste y los siguientes ejemplos. Las restricciones obligatorias de "Depto. trabajo B" y "Capacidad prod. Astro" no muestran una holgura con valor de cero. En muchas soluciones de Solver aparecen números negativos y positivos pequeños debido a la precisión aritmética finita de Excel. En éste y otros casos semejantes, dichos valores representan números extremadamente pequeños que colindan con los límites de la precisión de cálculo de Excel y que, para los efectos prácticos, pueden considerarse como ceros.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Plan de producción de Crawler Tread								
2	Mina	T1	T2	T3	T4				
3	Fracciones tonelada	0.259	0.704	0.037	0	Total			
4	Costo/tonelada	$800	$400	$600	$500	$511.11			
5	Restricciones	Composición por tonelada				Total elementos		Requerimientos	Excedente
6	A	10	3	8	2	5.00	≥	5	0
7	B	90	150	75	175	131.67	≥	100	31.67
8	C	45	25	20	37	30.00	≥	30	0
9	Saldo	1	1	1	1	1.00	=	1	0

	F	G	H	I
3	Total			
4	=SUMAPRODUCTO($B$3:$E$3,B4:E4)			
5	Total de elementos		Requerimientos	Excedente
6	=SUMAPRODUCTO($B$3:$E$3,B6:E6)	≥	5	=F6-H6
7	=SUMAPRODUCTO($B$3:$E$3,B7:E7)	≥	100	=F7-H7
8	=SUMAPRODUCTO($B$3:$E$3,B8:E8)	≥	30	=F8-H8
9	=SUMAPRODUCTO($B$3:$E$3,B9:E9)	=	1	=F9-H9

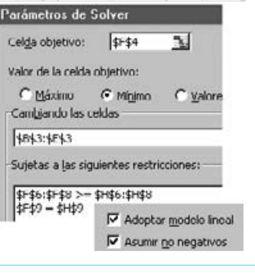


FIGURA 3.26

Modelo de Crawler Tread

[6]Se podría pensar que se han incluido todas las variables de decisión, pero con coeficiente cero en algunas posiciones. Por tanto, la restricción $A \leq 70$ es lo mismo que $A + 0*C \leq 70$.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Astro y Cosmo						
2		Astro	Cosmo				
3	Cantidades de producción	70.0	20.0	Ganancias			
4	Márgenes de contribución	$ 20	$ 10	$ 1,600			
5	Restricciones	Uso de recursos		Total		Dispon.	Holgura
6	Trabajo Depto. A	1	2	110	≤	120	10
7	Trabajo Depto. B	1	1	90	≤	90	-1.6E-10
8	Capacidad prod. Astro	1		70	≤	70	-7.6E-12
9	Capacidad prod. Cosmo		1	20	≤	50	30

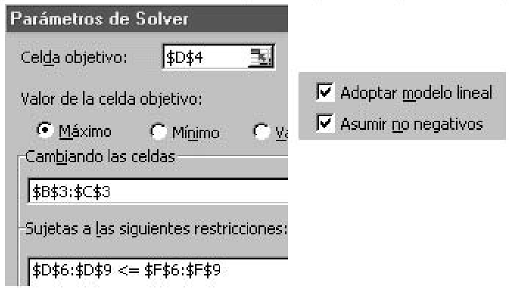


FIGURA 3.27

Modelos Astro y Cosmo

SOLUCIÓN DEL EJEMPLO 2: MEZCLA DE ALIMENTOS

El modelo de PL para la mezcla de alimentos está dado por:

$$
\begin{aligned}
\text{Min } & 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\
\text{s.a. } & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 3 \\
& 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 \geq 5 \\
& 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 2x_4 \geq 4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

El modelo formulado en una hoja de cálculo electrónica aparece en la figura 3.28, así como los parámetros de Solver y la solución óptima.

Observe que, en el ejemplo 1, desde el punto de vista de la implantación, probablemente sería inaceptable tener valores fraccionales en las variables de decisión. Sin embargo, en el ejemplo 2, se espera obtener valores fraccionales y éstos se consideran aceptables.

SOLUCIÓN DEL EJEMPLO 3: PROGRAMACIÓN DE LAS FUERZAS DE SEGURIDAD

El modelo de programación de las fuerzas de seguridad ha sido expresado como:

$$
\begin{aligned}
\text{Min } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
\text{s.a. } & x_1 + x_6 \geq 5 \\
& x_1 + x_2 \geq 7 \\
& x_2 + x_3 \geq 15 \\
& x_3 + x_4 \geq 7 \\
& x_4 + x_5 \geq 12 \\
& x_5 + x_6 \geq 9 \\
& x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

El ejemplo 3 ilustra otro escenario en el cual se necesitarían valores enteros.

El modelo de hoja de cálculo se muestra en la figura 3.29, además de los parámetros de Solver y de la solución óptima. (Solver le podría dar a usted otra solución, pero tendría el mismo Total # mínimo. Esto se debe a que este modelo tiene varios programas óptimos alternativos.)

Este tipo de problema ha servido para programar a los operadores de varias empresas telefónicas y de compañías con números “800” de acceso gratuito. Por lo común, cada hora se divide en segmentos de 15 minutos; por tanto, cada día de 24 horas tiene 96 restricciones. La cantidad de variables está determinada por los distintos turnos permitidos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Mezcla de alimentos								
2	Alimento	#1	#2	#3	#4				
3	Proporción de alimento	0	0.167	0.333	0.5	Costo			
4	Costo/16 oz.	$ 4	$ 6	$ 3	$ 2	$ 3.00			
5	Restricciones	Recurso proporcionado				Total		Requerimientos	Excedente
6	Proteínas	3	5	2	3	3	≥	3	1.3E-15
7	Carbohidratos	7	4	2	8	5.333	≥	5	0.333
8	Grasas	5	6	6	2	4	≥	4	1.8E-15
9	Proporción total	1	1	1	1	1	=	1	2.2E-16

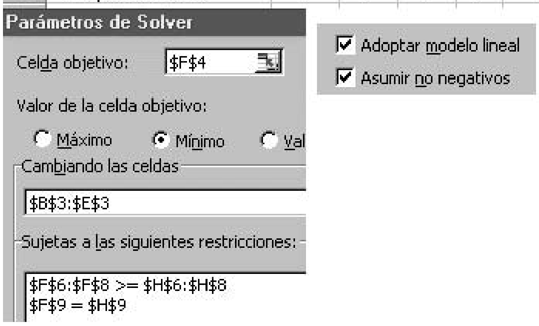


FIGURA 3.28

Modelo de mezcla de alimentos

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Programación de fuerzas de seguridad										
2	Turno	#1	#2	#3	#4	#5	#6	Total #			
3	# de guardia	0	7	8	0	12	5	32			
4	Restricciones	Recursos disponibles						Total		Requerimientos	Excedente
5	Medianoche - 4am	1					1	5	≥	5	0
6	4am - 8 am	1	1					7	≥	7	0
7	8am - Mediodía		1	1				15	≥	15	-7E-13
8	Mediodía - 4pm			1	1			8	≥	7	1
9	4pm - 8pm				1	1		12	≥	12	1E-12
10	8pm - Medianoche					1	1	17	≥	9	8

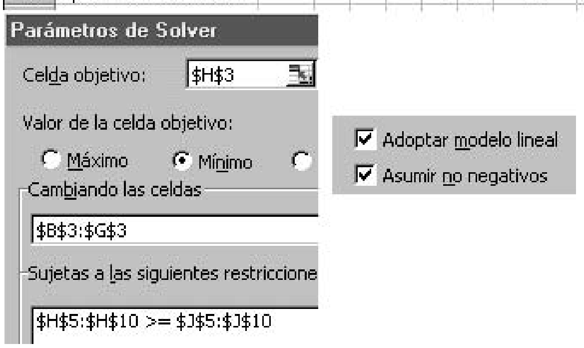


FIGURA 3.29

Modelo de programación de las fuerzas de seguridad

SOLUCIÓN DEL EJEMPLO 4: LONGER BOATS YACHT COMPANY

Para obtener una expresión del punto de equilibrio en términos de las cantidades de producción, se definen las siguientes variables de decisión:

S = cantidad de Sting que se va a producir
R = cantidad de Ray que se va a producir
B = cantidad de Breaker que se va a producir

La restricción del punto de equilibrio es, entonces

$$10{,}000S + 7500R + 15{,}000B = 5000S + 3600R + 8000B + 18{,}000{,}000$$

o bien,

$$5000S + 3900R + 7000B = 18{,}000{,}000$$

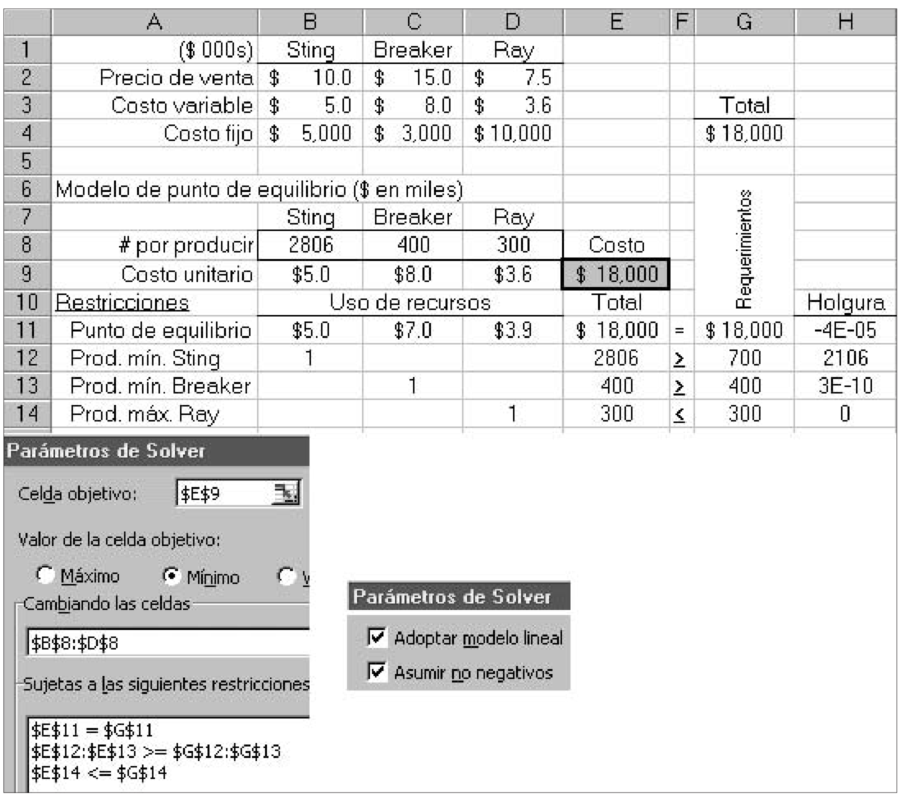
Hemos observado que existe una cantidad infinita de grupos de valores de S, R y B que satisfacen esta restricción. Así pues, en el caso de múltiples productos puede haber varios puntos de equilibrio, mientras que en el caso de un producto único existe solamente uno. Luego, en el caso de varios productos, la administración debe especificar si se requiere incluir otra restricción que identifique un punto de equilibrio en particular que sea de algún interés. Se tiene que incurrir necesariamente en la totalidad de los costos fijos y, por tanto, la meta de minimizar la erogación de capital se convierte así en la meta de minimizar los costos variables totales. El costo variable total (la función objetivo) es

$$5000S + 3600R + 8000B$$

El modelo que refleja la restricción de punto de equilibrio y los requerimientos y límites previamente establecidos para la demanda es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Min } & 5000S + 3600R + 8000B \\
& 5000S + 3900R + 7000B = 18{,}000{,}000 \\
& S \geq 700 \\
& B \geq 400 \\
& R \leq 300 \\
& S \geq 0, \qquad R \geq 0, \qquad B \geq 0
\end{aligned}$$

El modelo que hemos formulado en la hoja de cálculo es el que aparece en la figura 3.30, así como los parámetros de Solver y la solución óptima. Nótese que las disgregaciones de los datos se conservan gracias a fórmulas que efectúan las agregaciones, flexibilizando así la edición de datos para las proyecciones "¿qué pasaría si?".



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	($ 000s)	Sting	Breaker	Ray				
2	Precio de venta	$ 10.0	$ 15.0	$ 7.5				
3	Costo variable	$ 5.0	$ 8.0	$ 3.6			Total	
4	Costo fijo	$ 5,000	$ 3,000	$ 10,000			$ 18,000	
5								
6	Modelo de punto de equilibrio ($ en miles)						Requerimientos	
7		Sting	Breaker	Ray				
8	# por producir	2806	400	300	Costo			
9	Costo unitario	$5.0	$8.0	$3.6	$ 18,000			
10	Restricciones		Uso de recursos		Total			Holgura
11	Punto de equilibrio	$5.0	$7.0	$3.9	$ 18,000	=	$ 18,000	-4E-05
12	Prod. mín. Sting	1			2806	≥	700	2106
13	Prod. mín. Breaker		1		400	≥	400	3E-10
14	Prod. máx. Ray			1	300	≤	300	0

Celda	Fórmula	Copiar a
B9	= B3	C9:D9
B11	= B2 − B3	C11:D11
G4	= SUM(B4:D4)	
G11	= G4	

FIGURA 3.30

Modelo de punto de equilibrio restringido para Longer Boats

Términos clave

Condición de integridad. Requerimiento por el cual una o más de las variables de un modelo solamente pueden adoptar valores enteros.

Condiciones de no negatividad. Condiciones en un modelo que estipulan que las variables de decisión sólo pueden tener valores no negativos (*positivos o cero*).

Costos fijos. Costos cuyos valores han sido determinados de antemano y, por tanto, no pueden ser afectados por decisiones subsecuentes.

Costos sumergidos. Costos fijos

Costos variables. Costos cuyos valores quedarán determinados como resultado de decisiones que todavía no han sido tomadas y que, por lo tanto, pueden servir como variables en un modelo de optimización.

Decisión. Sinónimo de *valor de decisión*.

Decisión factible. Decisión que satisface todas las restricciones de un modelo, incluyendo las condiciones de no negatividad. Factible significa válida o permisible.

Decisión óptima. Decisión factible que optimiza la función objetivo.

Función de restricción. Lado izquierdo (LI) de una restricción. Depende de las variables de decisión.

Función lineal. Función en la cual cada una de las variables aparece en un término individual. No hay potencias que no sean 1 y, por ejemplo, no existen ni expresiones logarítmicas o exponenciales, ni declaraciones SI(), ni tampoco términos trigonométricos.

Función objetivo. Todo programa lineal tiene una función objetivo lineal que representa la medición de desempeño por maximizar o minimizar.

Lado derecho. Cifra al lado derecho (LD) de una restricción.

Mezcla óptima de productos. Término equivalente a plan óptimo de producción.

Modelo de optimización con restricciones. Modelo cuyo objetivo es encontrar valores para las variables de decisión que optimicen una función objetivo sujeta a restricciones.

Modelo simbólico de PL. Representación algebraica de un problema de PL.

Optimizar. Maximizar o minimizar.

Plan óptimo de producción. Decisión óptima para un modelo de producción; es decir, la cantidad óptima que se debe producir de cada producto.

Programa de enteros. Modelo en el que una o varias de las variables sólo pueden tener valores enteros.

Restricción. Desigualdad matemática (restricción de desigualdad) o igualdad (restricción de igualdad) que deberá ser satisfecha por las variables del modelo.

Restricción activa u obligatoria. Restricción para la cual la evaluación de la función de restricción es igual al valor de su correspondiente lado derecho.

Restricción de desigualdad. Restricción por la cual se requiere que alguna función de las variables de decisión de un modelo sea $\geq$ (mayor o igual) o $\leq$ (menor o igual) que una constante.

Restricción de igualdad. Restricción que requiere que alguna función de las variables de decisión de un modelo sea igual a una constante.

Solución óptima. Sinónimo de decisión óptima.

Solver. Programa complementario para hojas de cálculo electrónicas que permite optimizar la representación de un modelo de PL en una hoja de cálculo electrónica.

Valores de decisión. Conjunto de valores numéricos de las variables de decisión.

Variables de decisión. Son las variables que están bajo el control de la persona encargada de tomar las decisiones. Las variables que aparecen en los modelos que hemos formulado en este capítulo son de ese tipo.

Ejercicios de repaso

Verdadero-falso

1. **V F** En el contexto de la construcción de modelos, el acotamiento de las decisiones permisibles se conoce como restricción.
2. **V F** No toda la PL necesita tener restricciones.
3. **V F** Cualquier modelo que tenga una función objetivo, restricciones y variables es una PL.
4. **V F** Las limitaciones se expresan como restricciones del tipo $\geq$.
5. **V F** Las condiciones de no negatividad significan que todas las variables de decisión deben ser positivas.
6. **V F** Debido a que en las variables de decisión los valores fraccionales podrían no tener un significado real, en la práctica (con fines de implantación) a veces redondeamos a enteros la solución óptima de PL.
7. **V F** Todas las restricciones de los PL son desigualdades.

8. **V F** La definición correcta de las variables de decisión es un paso importante para la formulación de modelos.

9. **V F** La función objetivo de un modelo de minimización de costos sólo necesita considerar los costos variables, no los costos fijos.

10. **V F** La manera en que se formula un problema como modelo reviste considerable importancia para el administrador, porque quizá algún día él o ella tenga necesidad de emitir un juicio acerca de su validez.

Opción múltiple

11. Las restricciones limitan los valores
    a. que puede asumir la función objetiva
    b. que pueden asumir las variables de decisión
    c. ninguna de las anteriores
    d. tanto a como b

12. Las restricciones pueden representar
    a. limitaciones
    b. requerimientos
    c. condiciones de saldos
    d. las tres anteriores

13. La programación lineal es
    a. un modelo de optimización con restricciones
    b. un modelo para la toma de decisiones con restricciones
    c. un modelo de programación matemática
    d. las tres anteriores

14. En los modelos de PL del tipo Max
    a. se maximiza la función objetivo
    b. se maximiza la función objetivo y luego se determina si esto se presenta en el contexto de una decisión permisible
    c. se maximiza la función objetivo sobre el grupo permisible de opciones
    d. todas las afirmaciones anteriores

15. La característica que *distingue* a un modelo PL (a diferencia de otros modelos matemáticos de tipo más general para la programación) es que
    a. el modelo tiene una función objetivo y restricciones
    b. todas las funciones del modelo son lineales
    c. se producen valores óptimos para las variables de decisión

16. Durante la traducción de los problemas verbales a modelos simbólicos, con frecuencia resulta útil
    a. expresar cada restricción con palabras
    b. expresar con palabras el objetivo
    c. identificar verbalmente las variables de decisión
    d. todas los anteriores

17. La formulación de modelos es importante porque
    a. permite emplear técnicas algebraicas
    b. en un contexto empresarial, la mayoría de los gerentes prefiere trabajar con modelos simbólicos
    c. obliga a la administración a lidiar con un problema bien definido
    d. permite al gerente aplazar la toma de decisiones, produciendo la impresión de que está muy ocupado

18. El requerimiento de no negatividad con frecuencia se incluye en los modelos PL porque
    a. simplifica la solución del modelo
    b. hace que el modelo corresponda mejor a la situación real
    c. ninguna de las afirmaciones anteriores
    d. tanto a como b

Las preguntas 19 a 26 se refieren al siguiente problema:
Tres industriales itinerantes, Lotta Anderson, Claire Mosley y Finny Jones, están en camino a Hollywood, a la conquista de la fama. El tiempo de vuelo es de 40 horas, con un costo de combustible de $100 por galón. En una tienda de comestibles preparados de Hollywood entablan una amistad repentina con el notable Peter Rehnberg. El ingreso neto anual de Peter es de $40,000; los pagos que está obligado a hacer por concepto de pensión de divorcio son de $60,000. Conocedor de casi todos los personajes de la ciudad, Peter es capaz de tejer una escalera al cielo para nuestras tres "buscadoras de fortuna". Por ahora, ellas se dedican a inspeccionar productos médicos encapsulados, para lo cual pasan las cápsulas sobre una mesa de luz especial donde pueden revisar si hay cápsulas rajadas, parcialmente llenas o con manchas indeseables. Actualmente, a cualquiera de nuestras tres magnates en ciernes se le podría asignar esa tarea de inspección visual. Sin embargo, la estatura, exactitud y velocidad de las tres muchachas son diferentes. En consecuencia, su empleadora (Flora Sager) les paga también salarios ligeramente diferentes. Las diferencias significativas entre ellas aparecen resumidas en la siguiente tabla.

INSPECTOR	VELOCIDAD (UNIDADES/HORA)	EXACTITUD (%)	SALARIO POR HORA ($)	ESTATURA
Lotta	300	98	11.80	5' 10"
Claire	200	99	10.40	4' 3"
Finny	350	96	11.00	5' 2"

Durante la operación de un turno completo de 8 horas, Flora necesita inspeccionar cuando menos 2,000 cápsulas, teniendo un error de inspección no mayor de 2%. Además, debido al devastador síndrome del túnel carpiano, a ningún inspector se le permite trabajar más de 4 horas diarias. Sea

$$X_1 = \text{número de horas trabajadas por Lotta}$$
$$X_2 = \text{número de horas trabajadas por Claire}$$
$$X_3 = \text{número de horas trabajadas por Finny}$$

El objetivo consiste en minimizar el costo de ocho horas de inspección. Supongamos que el proceso de inspección debe estar en operación durante esas ocho horas. En otras palabras, tiene que haber una producción continua en todo el periodo de ocho horas. Además, Lotta, Claire y Finny son las únicas inspectoras, no puede trabajar más de una inspectora a la vez y el fontanero trabaja 4 horas diarias a lo sumo.

19. Una restricción de exactitud correcta es
    a. $(0.98)(300)X_1 + (0.99)(200)\,X_2 + (0.96)(350)\,X_3 \geq 2000$
    b. $(0.02)(300)X_1 + (0.01)(200)\,X_2 + (0.04)(350)\,X_3 \leq (0.02)(2000)$
    c. $-2X_2 + 7X_3 \leq 0$
    d. ninguna de las anteriores

20. La restricción de requerimiento de producción se escribe así: $300X_1 + 200X_2 + 350X_3 = 2000$.
    a. V
    b. F

21. Sin contar las restricciones sobre la no negatividad, la formulación correcta de este problema deberá tener seis restricciones.
    a. V
    b. F

22. Es posible que la formulación correcta de este problema no tenga decisiones factibles. (Conteste esta pregunta para el caso de los datos otorgados.)
    a. V
    b. F

23. Si no fuera por el requerimiento de exactitud y la limitación de 4 horas, en la solución óptima solamente se le daría trabajo a Finny.
    a. V
    b. F

24. La solución óptima requerirá que se dediquen a la inspección cuando menos dos de las tres empleadas.
    a. V
    b. F

25. Una política factible podría consistir en
    a. Claire 4 horas, Finny 4 horas
    b. Lotta 4 horas, Claire 4 horas
    c. tanto a como b

26. Sea la política A $X_1 = 4$, $X_2 = 4$, $X_3 = 0$. Sea la política B $X_1 = 3$, $X_2 = 4$, $X_3 = 1$. Observe usted que ambas políticas de operatividad son factibles. En virtud de que A produce 2,000 cápsulas y B 2,050, la política A nos parece preferible.
    a. V
    b. F

27. En un modelo, un parámetro puede ser un número o un símbolo.
    a. V
    b. F

28. Considere usted la restricción $10E + 15F \leq R$, donde R es un parámetro que se refiere al número de horas en el departamento A. Supongamos ahora que los valores de R están expresados por $(1 - e^{-(.05MA)})$, donde MA es una nueva variable de decisión. Si sustituimos esta última en la restricción original, entonces dicha expresión se convierte en $10E + 15F \leq 200\,(1 - e^{-(.05MA)})$. Esta nueva restricción es lineal en E, F y en el nuevo parámetro MA.
    a. V
    b. F

29. En la representación de una PL en una hoja de cálculo electrónica, las funciones de restricción están representadas como fórmulas contenidas en celdas.
    a. V
    b. F

30. Para las decisiones factibles, las celdas de holgura, si existe alguna en la hoja de cálculo, deberán contener números no negativos.
    a. V
    b. F

31. Puede emplearse Excel para crear la representación en hoja de cálculo de un modelo de PL, pero Excel *no* optimizará la hoja de cálculo electrónica.
    a. V
    b. F

32. Un parámetro
    a. es un número incluido en un modelo, o un símbolo que es exógeno en relación con el modelo (es decir, se trata en realidad de un símbolo cuyo valor numérico tiene que ser suministrado al modelo)
    b. puede representarse mediante un símbolo (como R) cuyo valor deberá ser determinado por el modelo.
    c. las dos afirmaciones anteriores

33. Un método sugerido para crear la representación de una PL en una hoja de cálculo electrónica consiste en escribir primero el modelo simbólico de la PL y en usarlo después como una guía para construir el modelo en la hoja de cálculo.
    a. V
    b. F

34. La representación en hoja de cálculo de una PL puede ser útil porque
    a. los parámetros que representan los datos en bruto pueden entrar en la no linealidad del modelo
    b. simplifica la tarea de depurar el modelo
    c. las dos afirmaciones anteriores

Respuestas

1.	V	**10.**	V	**19.**	c	**28.**	b
2.	F	**11.**	d	**20.**	b	**29.**	a
3.	F	**12.**	d	**21.**	a	**30.**	a
4.	F	**13.**	d	**22.**	b	**31.**	a
5.	F	**14.**	c	**23.**	b	**32.**	a
6.	V	**15.**	b	**24.**	a	**33.**	a
7.	F	**16.**	d	**25.**	b	**34.**	a
8.	V	**17.**	c	**26.**	b		
9.	V	**18.**	b	**27.**	a		

Problemas

Todos los problemas del final del capítulo han sido clasificados según su nivel de dificultad: • = básico •• = intermedio ••• = complicado.

•3-1. Señale la correspondencia entre cada uno de los siguientes términos y la descripción más adecuada para el mismo en la lista que aparece a continuación.

(a) Programa lineal	**1.** Las incógnitas de un modelo de PL que representan las decisiones por tomar.
(b) Requerimiento	**2.** Generalmente es una restricción de la forma $\geq$.
(c) Costos variables	**3.** Concepto cuya inclusión en el modelo es pertinente.
(d) Costos fijos	**4.** Generalmente no es un elemento relevante para el modelo (una excepción sería el análisis de punto de equilibrio).
(e) Variables de decisión	**5.** Generalmente se refiere a una restricción de la forma $\leq$.
(f) Función de restricción	**6.** El lado izquierdo de la restricción.
(g) Impedimento	**7.** Sinónimo de restricción.
(h) Limitación	**8.** Tipo especial de modelo restringido de optimización.

• 3-2. ¿Cuáles de las siguientes relaciones matemáticas podrían encontrarse en un modelo de PL? En el caso de las relaciones que no puedan encontrarse en un modelo de PL, indique cuáles son las razones.

(a) $3x_1 + x_2 \leq \sqrt{5}$
(b) $\sqrt{x_1} + x_2 \leq 10$
(c) $\sqrt{2}x_1 - \pi x_3 \leq e$
(d) $x_1^2 + 2x_2 = 0$
(e) $x_1 + x_1 x_2 + x_3 = 5$
(f) $x_1 + \log(x_2) = 5$
(g) $\log(10)\, x_1 + e^2 x_2 = 6$
(h) $e_1^x + x_2 = 23$
(i) la fórmula de Excel para el LD de una restricción en la cual F6 es una variable de decisión es =IF($F$6>=2,SUMA (G1:G10),SUMA (G1:G5))

• 3-3. *Un problema de producción*. La Swelte Glove Company fabrica y vende dos productos. Dicha compañía obtiene una ganancia de $12 por cada unidad que vende de su producto 1, y de $4 por cada unidad de su producto 2. Los requerimientos en términos de horas de trabajo para la fabricación de estos productos en los tres departamentos de producción se enumeran de manera resumida en la siguiente tabla. Los supervisores de estos departamentos han estimado que tendrán las siguientes disponibilidades de horas de trabajo durante el próximo mes: 800 horas en el departamento 1, 600 horas en el departamento 2 y 2,000 horas en el departamento 3. Suponiendo que la compañía esté interesada en maximizar las ganancias, desarrolle usted el modelo de programación lineal correspondiente.

	REQUERIMIENTO DE HORAS DE TRABAJO	
DEPARTAMENTO	**Producto 1**	**Producto 2**
1	1	2
2	1	3
3	2	3

• 3-4. *Problema de producción*. Wood Walker es propietario de un pequeño taller de fabricación de muebles. En ese taller fabrica tres tipos diferentes de mesas: A, B y C. Con cada mesa, se requiere determinado tiempo para cortar las partes que la constituyen, ensamblarlas y pintar la pieza terminada. Wood podrá vender todas las mesas que consiga fabricar. Además, el modelo C puede venderse sin pintar. Wood emplea a varias personas, las cuales trabajan en turnos parciales, por lo cual el tiempo disponible para realizar cada una de estas actividades es variable de uno a otro mes. A partir de los datos siguientes, formule usted un modelo de programación lineal que ayude a Wood a determinar la mezcla de productos que le permitirá maximizar sus ganancias en el próximo mes.

MODELO	CORTE (HRS)	MONTAJE (HRS)	PINTURA (HRS)	GANANCIAS POR MESA ($)
A	3	4	5	25
B	1	2	5	20
C	4	5	4	50
C sin pintar	4	5	0	30
Capacidad	150	200	300	

•**3-5.** *Planificación financiera*. Willie Hanes es presidente de una microempresa de inversiones que se dedica a administrar las carteras de acciones de varios clientes. Un nuevo cliente ha solicitado que la compañía se haga cargo de administrar para él una cartera de $100,000. A ese cliente le agradaría restringir la cartera a una mezcla de tres tipos de acciones únicamente, como podemos apreciar en la siguiente tabla. Formule usted un PL para mostrar cuántas acciones de cada tipo tendría que comprar Willie con el fin de maximizar el rendimiento anual total estimado de esa cartera.

ACCIONES	PRECIO POR ACCIÓN ($)	RENDIMIENTO ANUAL ESTIMADO POR ACCIÓN ($)	INVERSIÓN MÁXIMA POSIBLE ($)
Gofer Crude	60	7	60,000
Can Oil	25	3	25,000
Sloth Petroleum	20	3	30,000

•**3-6.** *Problema de integración*. Douglas E. Starr, administrador de la perrera Heavenly Hound Kennels, Inc., ofrece alojamiento en plan de pensión para mascotas. La comida de los perros alojados en la perrera se prepara mezclando tres productos granulados, con lo cual se obtiene una dieta bien balanceada para los canes. La información sobre los tres productos se muestra en la siguiente tabla. Si Douglas quiere asegurarse de que cada uno de sus perros ingiera diariamente cuando menos 8 onzas de proteínas, 1 onza de carbohidratos y no más de 0.5 onzas de grasas, ¿qué cantidad de cada producto en grano deberá incluirse en el alimento de los perros a fin de minimizar los costos de Douglas? (*Nota:* 16 onzas = 1 libra.)

PRODUCTO EN GRANO	COSTO POR LIBRA ($)	PROTEÍNAS (%)	CARBOHIDRATOS (%)	GRASAS (%)
A	0.45	62	5	3
B	0.38	55	10	2
C	0.27	36	20	1

•**3-7.** *Un problema de integración*. McNaughton, Inc. produce dos salsas para carne: Spicy Diablo y Red Baron (la más suave).Estas salsas se hacen mezclando dos ingredientes, A y B. Se permite cierto nivel de flexibilidad en las fórmulas de estos productos. Los porcentajes permisibles, así como la información acerca de ingresos y costos, aparecen en la siguiente tabla. Es posible comprar hasta 40 litros de A y 30 de B. McNaughton puede vender toda la salsa que elabore. Formule un modelo PL cuyo objetivo sea maximizar las ganancias netas obtenidas por la venta de estas salsas.

SALSA	INGREDIENTE		PRECIO DE VENTA POR LITRO ($)
	A	B	
Spicy Diablo	cuando menos 25%	cuando menos 50%	3.35
Red Baron	cuando mucho75%	*	2.85
Costo por litro	$1.60	$2.59	

*No existe un porcentaje máximo o mínimo explícito

•**3-8.** *Un problema de integración.* La Corey Ander's Spice Company dispone de una cantidad limitada de tres ingredientes que se utilizan en la producción de condimentos. Corey emplea los tres ingredientes (HB01, HB02 y HB03) para la elaboración de cúrcuma y pimentón. El departamento de mercadotecnia informa que la compañía puede vender todo el pimentón que sea capaz de producir, pero solamente puede vender un máximo de 1,700 botellas de cúrcuma. Los ingredientes no utilizados podrán venderse en el mercado. Los precios están expresados en $/onza. Los precios actuales son: HB01, $0.60; HB02, $0.70; HB03, $0.55. Además, Corey ha firmado un contrato para suministrar 600 botellas de pimentón a Wal-Mart. En la siguiente tabla se ofrece información adicional. Formule el problema de Corey como un modelo de programación lineal para maximización de ingresos

	INGREDIENTES (OZ/BOTELLA)			DEMANDA (BOTELLAS)	PRECIO DE VENTA POR BOTELLA ($)
	HBO1	HBO2	HBO3		
Cúrcuma	4	2	1	1700	3.25
Pimentón	3	2	3	Ilimitada	2.75
Disponibilidad (onzas)	8000	9000	7000		

••3-9. *Un problema de mezcla.* Guy Chung, superintendente de los edificios y del terreno circundante de la Universidad Gótica, ha planeado aplicar fertilizante al césped del área cuadrangular a principios de la primavera. Ese prado necesita por lo menos las cantidades de nitrógeno, fósforo y potasio que figuran en la siguiente tabla.

MINERAL	PESO MÍNIMO (LIBRAS)
Nitrógeno	10
Fósforo	7
Potasio	5

Hay tres tipos de fertilizante comercial disponibles; los análisis y precios por 1,000 libras se enlistan en la siguiente tabla. Guy puede comprar cualquier cantidad de cualquiera de los fertilizantes que quiera y combinarlos antes de aplicarlos al césped. Formule un modelo de PL que determine la cantidad de cada fertilizante que debe comprar para satisfacer los requerimientos con un costo mínimo.

FERTILIZANTE	CONTENIDO DE NITRÓGENO (LIBRAS)	CONTENIDO DE FÓSFORO (LIBRAS)	CONTENIDO DE POTASIO (LIBRAS)	PRECIO ($)
I	25	10	5	10
II	10	5	10	8
III	5	10	5	7

Características de los fertilizantes (por cada 1,000 libras)

••3-10. *Un problema de producción*. La Ebel Mining Company es propietaria de dos minas que producen cierto tipo de mineral. Dichas minas están localizadas en distintas partes del país y, en consecuencia, presentan diferencias en sus capacidades de producción y en la calidad de su mineral. Después de ser molido, el mineral se clasifica en tres clases dependiendo la calidad: alta, mediana y baja. Ebel ha sido contratada para suministrar semanalmente a la planta de fundición de su compañía matriz 12 toneladas de mineral de alta calidad, 8 toneladas de calidad mediana y 24 toneladas de calidad baja. A Ebel le cuesta $20,000 diarios operar la primera mina y $16,000 la segunda. Sin embargo, en un día de operación, la primera mina produce 6 toneladas de mineral de alta calidad, 2 toneladas de mediana y 4 toneladas de baja, mientras que la segunda produce 2 toneladas diarias de material de alta calidad, 2 de mediana y 12 de baja. ¿Cuántos días a la semana tendría que funcionar cada mina para cumplir los compromisos de Ebel de la manera más económica posible? (En este caso resulta aceptable programar la operación de las minas en fracciones de día.)

••3-11. *Un problema de producción*. Cada una de las tres máquinas fabrica dos productos. Para elaborar una libra de cada producto se requiere una cantidad determinada de horas de trabajo en cada máquina, como se indica en la siguiente tabla. Las horas disponibles en las máquinas 1, 2 y 3 son 10, 16 y 12, respectivamente. Las contribuciones a las ganancias correspondientes a cada libra de los productos 1 y 2 son $4 y $3, respectivamente. Defina las variables de decisión, formule este problema como un programa lineal para la maximización de ganancias y resuélvalo.

	REQUERIMIENTO DE HORAS/MÁQUINA	
MÁQUINA	Producto 1	Producto 2
1	3	2
2	1	4
3	5	3

••3-12. La Sally Solar Car Co. tiene una planta que fabrica automóviles sedán, deportivos y camionetas. Los precios de venta, costos variables y costos fijos correspondientes a la manufactura de estos vehículos se presentan en la siguiente tabla.

MODELO	CONTRIBUCIÓN A LAS GANANCIAS ($)	VARIABLE DE PRODUCCIÓN TIEMPO (HRS)	COSTOS FIJOS ($)
Sedanes	6,000	12	2,000,000
Camionetas	8,000	15	3,000,000
Deportivos	11,000	24	7,000,000

Sally ha recibido recientemente pedidos por un total de 100 sedanes, 200 camionetas y 300 automóviles deportivos. Deberá atender todos esos pedidos. Ella desea planear la producción de manera que pueda alcanzar el punto de equilibrio con la mayor rapidez posible; es decir, quiere asegurarse de que el margen total de contribución sea igual al total de costos fijos y que los costos variables de producción sean mínimos. Formule este problema como modelo de PL y resuélvalo.

••3-13. *Análisis del punto de equilibrio*. Reese Eichler, fabricante de equipo suplementario para filtración del aire, produce dos tipos de unidades, el Umidaire y el Depollinator. Los datos referentes a los precios de venta y a los costos aparecen en la siguiente tabla. La compañía de Reese ha sido contratada para suministrar 500 Umidaire y desea calcular las cantidades del punto de equilibrio de ambos tipos de unidad. Formule el modelo de PL para minimizar los costos y resuélvalo.

PRODUCTO	PRECIO DE VENTA POR UNIDAD ($)	VARIABLES POR COSTOS UNIDAD ($)	COSTOS FIJOS ($)
Umidaire	450	240	150,000
Depollinator	700	360	240,000

••3-14. *Planificación de cartera*. Una compañía de inversiones tiene actualmente $10 millones disponibles para la inversión. La meta que se ha trazado consiste en maximizar la retribución esperada durante el siguiente año. Sus cuatro posibilidades de inversión se presentan resumidas en la siguiente tabla. Además, la compañía ha especificado que cuando menos 30% de los fondos tendrán que colocarse en acciones ordinarias y bonos de la Tesorería y que no más de 40% del dinero deberá invertirse en fondos de mercado y títulos municipales. Se invertirá la totalidad de los $10 millones actualmente a la mano. Formule un modelo de PL que indique a la empresa cuánto dinero debe invertir en cada instrumento.

POSIBILIDAD DE INVERSIÓN	RETRIBUCIÓN ESPERADA (%)	INVERSIÓN MÁXIMA (MILLONES DE $)
Bonos de la Tesorería	8	5
Acciones ordinarias	6	7
Mercado de dinero	12	2
Títulos municipales	9	4

•••3-15. *Administración de granjas*. Una compañía opera cuatro granjas, cuyos grados de productividad son comparables. Cada una de las granjas tiene cierta cantidad de hectáreas útiles y de horas de trabajo para plantar y cuidar la cosecha. Los datos correspondientes a la próxima temporada aparecen en la siguiente tabla.

GRANJA	HECTÁREAS ÚTILES	HORAS DE TRABAJO DISPONIBLES POR MES
1	500	1700
2	900	3000
3	300	900
4	700	2200

La organización está considerando la opción de plantar tres cultivos distintos. Las diferencias principales entre estos cultivos son las ganancias esperadas por hectárea y la cantidad de mano de obra que cada uno requiere, como se indica en la siguiente tabla.

CULTIVO	HECTÁREAS MÁXIMAS	HORAS MENSUALES DE TRABAJO POR HECTÁREA	GANANCIAS ESPERADAS POR HECTÁREA ($)
A	700	2	500
B	800	4	200
C	300	3	300

Además, el total de las hectáreas que pueden ser dedicadas a cualquier cultivo en particular están limitadas por los requerimientos asociados por concepto de equipo de siega. Con la finalidad de mantener una carga de trabajo más o menos uniforme entre las distintas granjas, la política de la administración recomienda que el porcentaje de hectáreas plantadas deberá ser igual para todas las granjas. Sin embargo, en cualquiera de esas fincas puede crecer cualquier combinación de cultivos, siempre y cuando se satisfagan todas las restricciones (incluido el requerimiento de que la carga de trabajo sea uniforme). La administración desea saber cuántas hectáreas de cada cultivo tendrá que plantar en sus respectivas granjas, a fin de maximizar las ganancias esperadas. Formule este caso como un modelo de programación lineal y resuélvalo.

•••**3-16.** *Un problema de integración.* La administración de un viñedo desea combinar cuatro cosechas distintas para producir tres tipos de vinos en forma combinada. Las existencias de las cosechas y los precios de venta de los vinos combinados se muestran en la siguiente tabla, junto con ciertas restricciones sobre los porcentajes incluidos en la composición de las tres mezclas. En particular, las cosechas 2 y 3 en conjunto deberán constituir cuando menos 75% de la mezcla A y cuando menos 35% de la mezcla C. Además, la mezcla A deberá contener cuando menos 8% de la cosecha 4, mientras que la mezcla B deberá contener por lo menos 10% de la cosecha 2 y a lo sumo 35% de la cosecha 4. Se podrá vender cualquier cantidad que se elabore de las mezclas A, B y C. Formule un modelo de PL que aproveche en la mejor forma las cosechas disponibles y resuélvalo.

<table>
<tr><th rowspan="2">MEZCLA</th><th colspan="4">COSECHA</th><th rowspan="2">PRECIO DE VENTA POR GALÓN</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>A</td><td>*</td><td colspan="2">cuando menos 75% 2 y 3 en cualquier proporción</td><td>cuando menos 8%</td><td>80</td></tr>
<tr><td>B</td><td>*</td><td>cuando menos 10%</td><td>*</td><td>cuando mucho 35%</td><td>50</td></tr>
<tr><td>C</td><td>*</td><td colspan="2">cuando menos 35% 2 y 3 en cualquier proporción</td><td>*</td><td>35</td></tr>
<tr><td>EXISTENCIAS (galones)</td><td>130</td><td>200</td><td>150</td><td>350</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">*Indica que no existe restricción alguna.</td></tr>
</table>

•••**3-17.** *Un problema de programación*. Cierto restaurante atiende al público los siete días de la semana. La administración ha contratado camareros para que trabajen seis horas diarias. En el contrato firmado con el sindicato se estipula que cada uno de ellos debe trabajar cinco días consecutivos y descansar dos. Todos los camareros perciben el mismo salario. En la siguiente tabla aparecen los requerimientos de personal. Suponga que este ciclo de requerimientos se repite indefinidamente y pase por alto el hecho de que la cantidad de camareros contratados tiene que ser un número entero. La gerencia desea encontrar un programa de empleo que satisfaga estos requerimientos a un costo mínimo. Formule este problema como modelo de PL y resuélvalo.

DÍA	HORAS/CAMARERO MÍNIMAS REQUERIDAS
Lunes	150
Martes	200
Miércoles	400
Jueves	300
Viernes	700
Sábado	800
Domingo	300

•••**3-18.** *Un problema de producción*. Una planta tiene suficiente capacidad para manufacturar cualquier combinación de cuatro productos diferentes (A, B, C, D). Para cada producto se requiere invertir tiempo en cuatro máquinas distintas, el cual está expresado en minutos por kilogramo de producto, como podemos apreciar en la siguiente tabla. Cada máquina tiene una disponibilidad de 60 horas por semana. Los productos A, B, C y D pueden venderse a \$9, \$7, \$6 y \$5 por kilo, respectivamente. Los costos variables de mano de obra son de \$2 por hora para las máquinas 1 y 2, y de \$3 por hora para las máquinas 3 y 4. Los costos de material para cada kilo del producto A son de \$4. Los costos de material para cada kilo de los productos B, C y D son de \$1. Formule un modelo de PL que maximice las ganancias, dada la demanda máxima por producto que se muestra a continuación, y luego resuélvalo.

PRODUCTO	MÁQUINA 1	2	3	4	DEMANDA MÁXIMA
A	5	10	6	3	400
B	3	6	4	8	100
C	4	5	3	3	150
D	4	2	1	2	500

•••3-19. *Un problema de producción*. Un fabricante tendrá que atender cuatro pedidos de producción, A, B, C y D, en este mes. Cada trabajo puede ser llevado a cabo en cualquiera de los tres talleres. El tiempo necesario para completar cada trabajo en cada uno de esos talleres, el costo por hora y la cantidad de horas disponibles que tendrá cada taller durante este mes aparecen en la siguiente tabla. También existe la posibilidad de dividir cada uno de los trabajos entre los distintos talleres, en cualquier proporción que se desee. Por ejemplo, una cuarta parte del trabajo A puede hacerse en 8 horas en el taller 1 y una tercera parte del trabajo C puede hacerse en 19 horas en el taller 3. El fabricante desea determinar la cantidad de horas de cada trabajo que deberán realizarse en cada taller, para minimizar el costo total de terminación de los cuatro trabajos. Identifique las variables de decisión, formule un modelo de PL para este problema y finalmente resuélvalo.

TALLER	TIEMPO REQUERIDO (HRS) A	B	C	D	COSTO POR HORA DE TALLER ($)	TIEMPO DE TALLER DISPONIBLE (HRS)
1	32	151	72	118	89	160
2	39	147	61	126	81	160
3	46	155	57	121	84	160

•••3-20. *Un problema de programación*. Mientras permanece a las afueras de Estocolmo, el portaviones *Mighty* efectúa maniobras de lunes a viernes y fondea en el puerto el fin de semana. La próxima semana, el capitán desea dejar en tierra, desde el lunes hasta el viernes a la mayoría de los 2,500 marineros de la tripulación. No obstante, debe efectuar las maniobras de la semana y cumplir con los reglamentos navales. Dichos reglamentos son:

(a) Los marineros deberán trabajar ya sea en el turno a.m. (de medianoche a mediodía) o en el p.m. (mediodía a medianoche) cada uno de los días que estén en servicio y, durante una semana, tendrán que estar adscritos al mismo turno todos los días de servicio.

(b) Cada marinero que trabaje debe estar en activo durante cuatro días, incluso cuando no haya suficiente "trabajo real" en algunos de esos días.

La cantidad de marineros requeridos para cada uno de los turnos, según los diferentes días, se muestra en la siguiente tabla. Formule y resuelva este ejercicio como un problema de programación lineal, de manera que podamos saber cuántos marineros trabajarán cada día.

	LUN	MAR	MIER	JUE	VIER
A.M.	900	1000	450	800	700
P.M.	800	500	1000	300	750

•••3-21. *Un problema de mezcla de productos*. Una compañía pequeña lleva a cabo dos procesos de producción por medio de los cuales fabrica dos productos: fluido para encender carbón y fluido para encendedores de cigarrillos. La compañía intenta decidir durante cuántas horas debe realizar cada uno de dichos procesos. Las entradas y salidas correspondientes a la operación de los procesos en el curso de una hora aparecen en la siguiente tabla. x_1 y x_2 representan la cantidad de horas que decide utilizar la compañía el proceso 1 y el proceso 2, respectivamente. Debido a un programa federal de asignación, las cantidades máximas de queroseno y de benceno disponibles son 300 y 450 unidades, respectivamente. Los compromisos contraídos en términos de ventas imponen la necesidad de producir cuando menos 600 unidades de fluido para encender carbón y 225 unidades de fluido para encendedores. Las ganancias por hora que generan el proceso 1 y el proceso 2 son de $450 y de $390, respectivamente. Formule este caso como un modelo de programación lineal para maximizar las ganancias y resuélvalo.

	ENTRADAS		SALIDAS	
PROCESO	Queroseno	Benceno	Fluido para carbón	Fluido para encendedor
1	3	9	15	6
2	12	6	9	24

•••**3-22.** *Planeación de cartera con el modelo MPAF*. (*Nota:* Consideramos que este problema resultará particularmente interesante para los estudiantes que ya tienen experiencia en inversiones. A los demás se les previene que emplearemos algunos términos que no se han definido en este libro.) Una compañía de inversiones tiene actualmente $10 millones disponibles para invertir. Se ha trazado la meta de maximizar la retribución esperada durante el próximo año. La compañía quiere utilizar el modelo de precios de activos fijos (MPAF) para determinar la retribución esperada de cada inversión. La fórmula del modelo MPAF es la siguiente:

$$ER = Rf + b\,(Rm - Rf), \text{ donde}$$

ER = retribución esperada

Rf = razón exenta de riesgos

b = beta de la inversión (riesgo de mercado)

Rm = retribución del mercado

La retribución del mercado y la razón exenta de riesgos son fluctuantes y la compañía desea tener la posibilidad de volver a evaluar cada semana su decisión. Sus cuatro posibilidades de inversión aparecen resumidas en la siguiente tabla. Además, la compañía ha indicado que por lo menos 30% de los fondos se debe colocar en bonos de la Tesorería y en los mercados de dinero, y no más de 40% en acciones normales y en bonos municipales. Se invertirá la totalidad de los $10 millones que actualmente están disponibles.

(a) Formule este problema como un modelo de PL.

(b) Optimice el modelo si la retribución del mercado es de 12% y si la razón exenta de riesgos es de 6%.

POSIBILIDAD DE INVERSIÓN	BETA	INVERSIÓN MÁXIMA PERMISIBLE (MILLONES DE $)
Bonos de la Tesorería	0	7
Acciones normales	1	2
Mercado de dinero	$\frac{1}{3}$	5
Bonos municipales	$\frac{1}{2}$	4

•••**3-23.** En la dieta humana se han identificado 16 elementos nutritivos esenciales. Supongamos que existen 116 comestibles. Un kilogramo del alimento j contiene a_{ij} kilos del nutrimento i. Supongamos también que la dieta diaria de un ser humano debe incluir N_j kilogramos de cada nutrimento i y que un kilogramo del alimento j cuesta C_j centavos. ¿Cuál es la dieta diaria de menor costo, capaz de satisfacer todos los requerimientos alimenticios? Emplee la notación de suma para escribir la formulación simbólica de este modelo. Además de la cuestión del sabor, ¿se le ocurre a usted alguna restricción importante que haya sido omitida también en este problema?

•••**3-24.** *Programación de camareros*. Para resolver este problema necesitará emplear el comando BUSCARV de Excel. Consulte el apéndice de Excel para mayores detalles sobre BUSCARV. Cierto restaurante permanece abierto todos los días de la semana. La empresa contrata camareros para que trabajen 6 horas efectivas diarias. El restaurante atiende principalmente a individuos y grupos pequeños, a los cuales designaremos como su demanda regular. Además, el restaurante atiende a algunos grupos numerosos (Rotarios, Leones, etc.) que realizan allí sus reuniones semanales. El contrato firmado con el sindicato exige que cada camarero trabaje 5 días consecutivos y que descanse 2. Todos los camareros reciben el mismo salario semanal. El número mínimo requerido de horas/camarero es una función de la demanda diaria regular más las horas/camarero necesarias para atender las reuniones de grupo programadas para ese día. La demanda diaria regular (en horas/camarero) y la cantidad de reuniones de los grupos programadas actualmente para cada día se presentan en la tabla siguiente.

DÍA	DEMANDA REGULAR DIARIA (HORAS/CAMARERO)	REUNIONES PROGRAMADAS DE GRUPOS MAYORES
Lunes	125	1
Martes	200	0
Miércoles	350	1
Jueves	300	0
Viernes	650	3
Sábado	725	4
Domingo	250	2

El administrador utiliza la siguiente tabla para determinar las horas/camarero requeridas para brindar servicio durante las reuniones de grupos numerosos. El administrador quisiera llegar a un programa de empleo que satisficiera las horas/camarero requeridas a un costo mínimo. Suponga que este ciclo se repite indefinidamente y pase por alto el hecho de que la cantidad de camareros contratados tiene que ser un número entero. En virtud de que la demanda puede cambiar en forma ocasional, será preciso construir el modelo en la hoja de cálculo electrónica de manera que todos los datos puedan ser introducidos en forma directa en sus propias celdas. La hoja de cálculo deberá representar el PL adecuado para cualquier conjunto de esos datos. Optimice la hoja de cálculo con los datos presentados aquí.

CANTIDAD DE REUNIONES DE GRUPO POR DÍA	HORAS/CAMARERO REQUERIDAS
0	0
1	24
2	36
3	52
4	64
5	80

•••**3-25.** *Administración de granjas*. Una compañía opera cuatro granjas cuya productividad es similar. Cada granja dispone de cierta cantidad de hectáreas útiles y cuenta con una dotación de horas de trabajo para plantar y atender los cultivos. La información para la próxima temporada aparece en la siguiente tabla.

GRANJA	HECTÁREAS ÚTILES	HORAS DE TRABAJO DISPONIBLES POR MES
1	500	1700
2	900	3000
3	300	900
4	700	2200

La organización está considerando la opción de plantar tres cultivos. La diferencia entre dichos cultivos estriba en su ganancia esperada por acre y en la cantidad de mano de obra requerida, como se muestra a continuación. Además, se ha especificado el hecho de que cada cultivo requiere la utilización de un tipo diferente de segadora cuyo costo varía. La superficie total que puede destinarse a cualquier cultivo en particular está limitada a causa de las disposiciones de la empresa en relación con la cantidad máxima de horas que permite contratar por concepto de alquiler de equipo para segador. La compañía ha realizado una inversión fija de $19,000 en equipo común para la siega. Gracias a esta inversión, puede utilizar cualquiera de los tres tipos de segadoras, con los costos que indicamos a continuación, hasta llegar a una cantidad fija de $19,000. De ordinario, una segadora trabaja a un ritmo más bajo cuando comienza a utilizarse en una granja. Cada temporada, a medida que el personal se habitúa de nuevo a la máquina y se resuelven los pequeños problemas en torno a ella, aumenta la razón de producción. Este fenómeno se conoce generalmente como el aprendizaje. En este caso, la razón de siega al final de t horas está dada por la ecuación

$$\text{razón} = n\,(1 - e^{\lambda t}) \text{ acres por hora, donde}$$

n = razón de siega a largo plazo, en acres por hora

λ = factor de ajuste a corto plazo

El total de acres cultivables durante cierto periodo, digamos T horas, puede determinarse entonces integrando la razón con respecto al tiempo:

$$\text{Acres totales cultivables en } T \text{ horas} = \int_0^T n(1 - e^{-\lambda t})dt$$

$$= n[T - (1/\lambda)(1 - e^{-\lambda T})]$$

Las razones a largo plazo y los factores de ajuste a corto plazo para los distintos tipos de equipo se presentan en la siguiente tabla. La administración ha decidido emplear 400, 315 y 335 horas-/máquina para los cultivos A, B y C, respectivamente. Con el propósito de mantener una carga de trabajo más o menos uniforme entre las diversas granjas, la administración ha adoptado una política por la cual el porcentaje de acres cultivados debe ser igual en todas las granjas. Sin embargo, autoriza para plantar cualquier combinación de cultivos en cualquiera de las granjas, siempre y cuando se satisfagan todas las restricciones que ha establecido (incluyendo el requerimiento de carga de trabajo uniforme). La administración desea saber cuántos acres de cada cultivo deberán plantarse en cada granja para maximizar las ganancias esperadas.

CULTIVO	HORAS MENSUALES DE TRABAJO REQUERIDAS POR ACRE	GANANCIA ESPERADA POR ACRE ($)	λ	*n*	COSTO/HORA POR SEGADORA ($)
A	2	500	.02	2	15
B	4	200	.02	3	20
C	3	300	.03	1	20

(a) Formule en una hoja de cálculo electrónica el modelo correspondiente a esta PL. La hoja de cálculo deberá construirse de modo que las horas de alquiler de cada máquina segadora puedan introducirse como parámetros.

(b) Optimice este modelo.

(c) Sugiera otra alternativa de tiempo de máquinas segadoras que esta granja pudiera seleccionar. ¿La opción que usted ha sugerido reditúa mayores ganancias? ¿Puede encontrar una decisión que sí las reditúe?

•••3-26. *Producción de equipo para la silvicultura y la conformación de tierra*. Supongamos que el equipo para la silvicultura produce un ingreso neto de $802 por unidad y que para su fabricación se necesitan 700 libras de hierro, 50 horas de mano de obra, 30 horas de tratamiento térmico y 1 transmisión por unidad. El equipo para excavación produce un ingreso neto de $660 por unidad y se requieren 4,200 libras de hierro, 110 horas de mano de obra, 12 horas de tratamiento térmico y 1 transmisión por unidad. La capacidad de la compañía durante este periodo es de 680,000 libras de hierro, 21,000 horas de mano de obra y 6,000 horas de tratamiento térmico. Las transmisiones son suministradas por una subsidiaria propiedad de la empresa, la cual fabrica las transmisiones para toda la línea de productos. Por tanto, la capacidad de fabricación de transmisiones para los equipos de silvicultura y de conformación está determinada por la cantidad de horas dedicadas a su producción en la planta subsidiaria. La elaboración de transmisiones tiene tres fases: preparación, arranque y producción normal. Las duraciones y las razones de producción relacionadas con dichas fases se presentan en la siguiente tabla.

FASES	DURACIÓN (HRS)	TRANSMISIONES (UNIDADES/HR)
Preparación	8	0
Arranque	120	.5
Producción normal	—	1

(a) Por ejemplo, si hubiera 10 horas disponibles en la subsidiaria, se necesitarían 8 de ellas para la preparación, durante la cual no habría producción y 2 para la fase de arranque, durante la cual se produciría 2(.5) = 1 transmisión. Si se emplearan $H \geq 128$ horas, durante 120 de ellas se producirán .5 transmisiones/hora, mientras que durante $H - 128$ horas se produciría una transmisión/hr. Por tanto, el total de transmisiones producidas sería de $60 + H - 128 = H - 68$. Escriba las ecuaciones que determinen el límite de la capacidad de producción de transmisiones si hay T horas disponibles en la subsidiaria para $T = 6$, $T = 108$ y $T = 308$.

(b) Evalúe las ecuaciones que formuló en (a). Sus respuestas deberán ser 0, 50 y 240.

(c) Defina las variables de decisión y formule todo esto como un modelo de PL para maximización de ingresos. La hoja de cálculo electrónica se deberá construir de tal modo que permita ingresar como parámetro la cantidad de horas de trabajo en la planta subsidiaria y que se cree la restricción pertinente en la PL. SUGERENCIA: en este problema, usted puede usar instrucciones SI() anidadas para determinar hasta cuál de todas las fases podrán llegar las horas programadas. ¿Por qué puede usar estas expresiones SI() dentro de la PL?

(d) Encuentre cuál sería la solución óptima si la subsidiaria tuviera disponibles 358 horas de producción.

••• **3-27.** *Planeación de la fuerza de trabajo y la producción*. Repase los modelos *E* y *F* de PROTRAC. Supongamos ahora que las horas de producción disponibles en los departamentos A y B dependen de la cantidad de trabajadores que estén asignados a cada departamento. La gerencia ha considerado razonable hacer que la capacidad de estos departamentos sea aproximadamente semejante a las siguientes funciones:

$$\text{Capacidad Depto. A} = 200(1-e^{-.05(MA)})$$
$$\text{Capacidad Depto. B} = 250(1-e^{-.08(MB)})$$

donde *MA* y *MB* son la cantidad de trabajadores asignados a los departamentos A y B, respectivamente. En la versión original de este problema, supusimos que se asignarían 28 trabajadores al departamento A (es decir, *MA* = 28) y 13 al departamento B (es decir, *MB* = 13). Por tanto

$$\text{Capacidad Depto. A} = 200(1-e^{-1.4}) = 150.68$$
$$\text{Capacidad Depto. B} = 250(1-e^{-1.04}) = 161.64$$

(En el modelo anterior de PROTRAC, las capacidades fueron redondeadas a 150 y 160, respectivamente.)

(a) Modifique la hoja de cálculo PROTRAC.XLS de manera que sea posible ingresar directamente el número de trabajadores de los departamentos A y B, como parámetros, y también pueda usted modificar las fórmulas de la capacidad departamental, según se requiera.

(b) Supongamos que han sido asignados 36 trabajadores al departamento A y 17 al B. Con la ayuda de la hoja de cálculo electrónica determine si el plan *E* = 6 y *F* = 9 es factible, y también diga cuáles son las ganancias que sería posible obtener con dicho plan. Encuentre usted la mejor solución en tres intentos.

(c) Utilizando Solver, encuentre la política de producción óptima cuando *MA* = 36 y *MB* = 17. ¿Solver puede optimizar este modelo como PL? ¿Por qué?

(d) Supongamos que *MA* = 28. Grafique la ganancia óptima como función de *MB,* haciendo que *MB* varíe de 10 a 30, en intervalos de 2. Para lograrlo será necesario ejecutar Solver 11 veces y usted tendrá que copiar la ganancia óptima y el valor de *MA* en las celdas de una tabla. Una vez obtenidos los datos de las 11 ejecuciones, grafique los datos por medio del Asistente para gráficos. ¿Qué fenómeno nos ha ilustrado el gráfico de esta función de ganancias óptimas?

Caso práctico — Red Brand Canners[1]

Presentamos a continuación un caso sencillo, pero interesante, en el cual se han captado varios puntos importantes para la formulación de modelos reales. Ante cualquier problema, es importante que el administrador sea capaz de distinguir entre los hechos y datos que son relevantes y los que no los son. Llegar a comprender esta distinción puede ser particularmente difícil, porque en algunas ocasiones los miembros del equipo administrativo defenderán a capa y espada ciertos conceptos que en realidad han sido mal interpretados o son erróneos. Este caso fue diseñado para recrear una situación de ese tipo. Nuestra actividad en esta ocasión consistirá únicamente en formular el modelo. Sin embargo, usted volverá a ocuparse de este caso en el capítulo 5, y allí se le pedirá que aporte sus propias soluciones, análisis, críticas e interpretaciones.

El lunes 13 de septiembre de 1996, Mitchell Gordon, vicepresidente de operaciones, llamó al contralor, al gerente de ventas y al gerente de producción a una reunión para analizar juntos la cantidad de productos de tomate que enlatarían en esa temporada. La cosecha de tomates, que había sido comprada desde la fecha de su plantación, ya estaba empezando a llegar a la enlatadora y las operaciones de enlatado debían ponerse en marcha el lunes siguiente. Red Brand Canners era una compañía mediana dedicada a enlatar y distribuir diversos productos a base de fruta y vegetales, bajo distintas marcas privadas, en el oeste de Estados Unidos.

William Cooper, el contralor, y Charles Myers, el gerente de ventas, fueron los primeros en llegar a la oficina del señor Gordon. Dan Tucker, el gerente de producción, llegó algunos minutos más tarde y dijo que había pasado al departamento de Inspección de producto a recoger el último cálculo estimativo de la calidad del tomate que estaba llegando. De acuerdo con el informe, 20% del cultivo era de calidad grado “A” y el resto de las 3,000,000 libras eran de calidad “B”.

Gordon preguntó a Myers cuál sería la demanda de productos de tomate en el año siguiente. Myers respondió que, para fines prácticos, sería posible vender todos los tomates enlatados que fueran capaces de producir. La demanda esperada de jugo y puré de tomate, por otra parte, era limitada. En ese momento, el gerente de ventas hizo circular el pronóstico de demanda más reciente, que aparece en el Anexo 1. También recordó al grupo que los precios de venta ya habían sido establecidos, como parte de la estrategia de mercado a largo plazo proyectada por la compañía, y que las ventas potenciales se habían pronosticado tomando como base esos precios.

Bill Cooper, después de leer los cálculos de la demanda estimada, comentó que él tenía la impresión de que a la compañía "le tendría que ir bastante bien (con el cultivo de tomate) en ese año". Gracias al nuevo sistema de contabilidad que habían instalado, tuvo oportunidad de calcular la contribución de cada producto y, de acuerdo con ese análisis, comprobó que la ganancia incremental de los tomates enteros era mayor que la de cualquier otro producto de tomate. En mayo, después de que Red Brand había firmado contratos en los que se comprometía a comprar la producción de los agricultores a un precio promedio de 18 centavos por libra, Cooper calculó la contribución de los productos de tomate (véase el Anexo 2).

Dan Tucker hizo comprender a Cooper que, aunque tenían una considerable capacidad de producción en la planta, no les sería posible producir únicamente tomates enteros, porque el porcentaje de tomates de calidad A en la cosecha adquirida era excesivamente bajo. Red Brand empleaba una escala numérica para registrar la calidad de los productos sin procesar y de los productos preparados. Dicha escala abarcaba del cero al diez, y cuanto más grande era el número, tanto más alta era la calidad del producto. Clasificando los tomates de acuerdo con esa escala, los tomates A promediaban nueve puntos por libra y los tomates B cinco puntos. Tucker hizo la observación de que la calidad mínima promedio de entrada para los tomates enteros enlatados era de ocho puntos por libra, y que la calidad para los de jugo era de seis. El puré podía elaborarse íntegramente con tomates grado B. Esto significaba que la producción de tomates enteros estaba limitada a 800,000 libras.

Gordon replicó que esto no constituía una limitación real. Que recientemente había recibido una oferta para comprar cualquier cantidad de tomates grado A, hasta un total de 80,000 libras, al precio de 25 $^1/_2$ centavos por libra, y que en aquel momento había declinado la oferta. Sin embargo, creía que esos tomates todavía estaban en venta.

Myers, quien efectuaba algunos cálculos, comentó que, aun cuando estaba de acuerdo en que a la compañía "le tendría que ir bastante bien en ese año", pensaba que no lograrían ese buen resultado enlatando tomates enteros. Le parecía que el costo de los tomates debía asignarse en función de la calidad y la cantidad, en lugar de hacerlo solamente según la cantidad, como lo había hecho Cooper. Por tanto, él había recalculado la ganancia marginal considerando esto (véase el Anexo 3) y, según sus resultados, Red Brand debería utilizar 2,000,000 de libras de los tomates B para producir puré, y las 400,000 libras restantes de tomates B junto con todos los tomates A para elaborar jugo. Si las expectativas de demanda se realizaran, la contribución del cultivo de tomate de este año sería de $144,000.

Preguntas

1. ¿Por qué ha dicho Tucker que la producción total de tomate está limitada a 800,000 libras?; es decir, ¿de dónde salió la cifra 800,000?
2. ¿Qué defecto tiene la sugerencia de Cooper, al intentar utilizar toda la cosecha para tomates enteros?
3. ¿Cómo calculó Myers sus costos para los tomates tal como aparecen en el Anexo 3? ¿Cómo llegó a la conclusión de que la compañía debería utilizar 2,000,000 de libras de tomates B para elaborar puré, y que las 400,000 libras restantes de tomates B además de todos los tomates A tendría que emplearlos en la elaboración de jugo? ¿Qué defecto encuentra usted en el razonamiento de Myers?
4. Sin incluir la posibilidad de las compras adicionales que ha sugerido Gordon, formule como un modelo de PL el problema de determinar la política óptima de enlatado para utilizar la cosecha de esta temporada. Defina sus variables de decisión en términos de libras de tomates. Exprese los coeficientes de la función objetivo en centavos por libra.
5. ¿Cómo tendría usted que modificar su modelo para poder incluir en él la opción de realizar las compras adicionales sugeridas por Gordon?

Preguntas alternativas para Red Brand Canners

Supongamos que la sección que está a cargo para realizar la inspección de productos agrícolas ha adoptado un sistema de clasificación que incluye tres grados para describir la calidad de las cosechas de tomates.

Los tomates A promedian nueve puntos por libra, los tomates B seis puntos y los C tres. Empleando este nuevo sistema, el informe indicaría que 600,000 libras serían de calidad grado A, 1,600,000 son grado B y las 800,000 libras restantes serían de grado C. Para el puré no existe requerimiento alguno en términos de calidad mínima promedio.

6. ¿Cuál sería la producción máxima de tomates enteros enlatados, en libras? ¿Sería posible aplicar en este caso la sugerencia de Cooper?

Myers amplía su análisis a tres grados en el Anexo 4. Tomando como base este Anexo Myers recomienda usar todos los tomates grado C y 1,200,000 libras de tomates grado B para elaborar puré, y todos los tomates grado A más todos los grado B restantes para hacer jugo.

ANEXO 1 Pronóstico de la demanda

PRODUCTO	PRECIO DE VENTA POR CAJA	PRONÓSTICO DE LA DEMANDA (CAJAS)
24-2 $^1/_2$ tomates enteros	$12.00	800,000
24-2 $^1/_2$ peras seleccionadas en mitades	$16.20	10,000
24-2 $^1/_2$ néctar de durazno	$13.80	5,000
24-2 $^1/_2$ jugo de tomate	$13.50	50,000
24-2 $^1/_2$ manzanas para cocina	$14.70	15,000
24-2 $^1/_2$ puré de tomate	$11.40	80,000

7. ¿Cómo calculó Myers los costos que hemos observado en el Anexo 4? ¿Cómo llegó a la conclusión de que lo más conveniente sería destinar 800,000 libras de tomates grado C y 1,200,000 libras de tomates grado B para la fabricación de puré, reservando todo el resto de la cosecha de tomates para la elaboración de jugo? ¿Qué defecto encuentra usted en el razonamiento de Myers?
8. Sin tomar en cuenta la posibilidad de realizar las compras adicionales que Gordon ha sugerido, formule como un modelo de PL el problema de determinar la política óptima de enlatado para utilizar la cosecha de esta temporada. Defina sus variables de decisión en términos de libras de tomates. Exprese su función objetivo en centavos.
9. ¿Cómo se debe modificar su modelo para incluir la posibilidad de hacer las compras adicionales que sugiere Gordon?

ANEXO 2 Ganancias proyectadas por producto

PRODUCTO	24-2½ TOMATES ENTEROS	24-2½ PERAS SELECCIONADAS EN MITADES	24-2½ NÉCTAR DE DURAZNO	24-2½ JUGO DE TOMATE	24-2½ MANZANAS PARA COCINA	24-2½ PURÉ DE TOMATE
Precio de venta	\$12.00	\$16.20	\$13.80	\$13.50	\$14.70	\$11.40
Costos variables:						
Mano de obra directa	3.54	4.20	3.81	3.96	2.10	1.62
Gastos generales variables	.72	.96	.69	1.08	.66	.78
Ventas variables	1.20	.90	1.20	2.55	.84	1.14
Material de empaque	2.10	1.68	1.80	1.95	2.10	2.31
Fruta[1]	3.24	5.40	5.10	3.60	2.70	4.50
Total costos variables	10.80	13.14	12.60	13.14	8.40	10.35
Contribución	1.20	3.06	1.20	.36	6.30	1.05
Menos gastos generales asignados	.84	2.10	1.56	.63	2.25	.69
Ganancias netas	.36	.96	(.36)	(.27)	4.05	.36

[1]Las cantidades utilizadas de cada producto aparecen a continuación.

PRODUCTO	LIBRAS POR CAJA
Tomates enteros	18
Duraznos en mitades	18
Néctar de durazno	17
Jugo de tomate	20
Manzanas para cocina	27
Puré de tomate	25

ANEXO 3 Análisis marginal de los productos de tomate

Z = Costo por libra de tomates A, en centavos
Y = Costo por libra de tomates B, en centavos

(1) $(600{,}000 \text{ lb} \times Z) + (2{,}400{,}000 \text{ lb} \times Y) = (3{,}000{,}000 \text{ lb} \times 18¢)$
(2) $Z/9 = Y/5$

$Z = 27.96$ centavos por libra
$Y = 15.54$ centavos por libra

PRODUCTO	TOMATES ENTEROS ENLATADOS	JUGO DE TOMATE	PURÉ DE TOMATE
Precio de venta	\$ 12.00	\$13.50	\$11.40
Costos variables	7.56	9.54	5.85
(excluido el costo del tomate)	\$4.44	\$3.96	\$5.55
Costo del tomate	4.47	3.72	3.90
Ganancia marginal	(\$.03)	\$0.24	\$1.65

ANEXO 4 Análisis marginal de los productos de tomate de Myers

Z = Costo por libra de tomates A, en centavos
Y = Costo por libra de tomates B, en centavos
X = Costo por libra de tomates C, en centavos

(1) $(800{,}000 \text{ lb} \times Z) + (1{,}600{,}000 \text{ lb} \times Y) + (800{,}000 \text{ lb} \times X) = (3{,}000{,}000 \text{ lb} \times 18¢)$
(2) $Z/9 = Y/6$
(2) $Y/6 = X/3$

$Z = 27.93$ centavos por libra
$Y = 18.61$ centavos por libra
$X = 9.30$ centavos por libra

PRODUCTO	TOMATES ENTEROS ENLATADOS	JUGO DE TOMATE	PURÉ DE TOMATE
Precio de venta	\$12.00	\$13.50	\$11.40
Costos variables	7.56	9.54	5.85
(excluido el costo del tomate)	\$4.44	\$3.96	\$5.55
Costo del tomate	4.47	3.72	2.33
Ganancia marginal	(\$.03)	\$0.24	\$3.22

Caso práctico — Una aplicación del uso de modelos en los mercados de divisas

En el siguiente caso se presenta una perspectiva más realista y, como podría usted esperar, más difícil para la construcción de modelos en hojas de cálculo. Nuestros principales propósitos en este caso son demostrar lo que es capaz de hacer el modelo en cuestión y comprender más a fondo la lógica incluida en la hoja de cálculo electrónica por medio del modelo de PL correspondiente a este problema.

PROTRAC desarrolla sus operaciones manufactureras y de ventas en cinco de los países más importantes por su comercio: Estados Unidos, Inglaterra, Francia, Alemania y Japón. En virtud de las cambiantes necesidades de efectivo que se presentan en los diferentes países en distintos momentos, muy a menudo es necesario que los fondos que están disponibles en una denominación determinada en un país sean transferidos a otro en una denominación diferente. Por regla general, existen numerosas formas de reorganizar los fondos a fin de satisfacer las diferentes necesidades de efectivo a partir de los recursos disponibles. Esta mañana en particular, las divisiones de la empresa en Francia y Japón están cortas de fondos. En términos específicos, sus requerimientos son 7 millones de francos y 1,040 millones de yenes respectivamente. Las divisiones de Estados Unidos, Inglaterra y Alemania tienen capital de sobra. Sus excedentes son de 2 millones de dólares, 5 millones de libras y 3 millones de marcos respectivamente. En virtud de que existen muchas maneras posibles de redistribuir el efectivo para satisfacer los faltantes mediante la utilización de los excedentes, la cuestión consiste en cómo podemos comparar las diferentes estrategias de conversión disponibles. En vista de las altas tasas de interés a corto plazo que están vigentes en Estados Unidos, la compañía ha decidido evaluar su posición final en materia de efectivo usando esta medida, es decir, el equivalente en dólares del valor total de su efectivo en cartera.

Esta mañana, como de costumbre, Jack Walker (tesorero de la corporación) y Ezra Brooks (vicepresidente de operaciones en el extranjero) se reunieron a las 7:00 a.m. en las oficinas corporativas para decidir cuáles fondos tenían que ser transferidos, en caso de que fuera necesario hacerlo. Use como referencia los anexos 1 y 2 a medida que lea el diálogo. Ésta fue su conversación:

Ezra: Buenos días, Jack. Tengo que mostrarte algo. Le pedí a Fred que construyera este modelo de cambio de divisas en una hoja de cálculo electrónica. Me parece que esto va a simplificar mucho nuestras vidas.

Jack: Me agrada la idea, pero ahora vas a tener que explicarme cómo funciona el modelo.

Ezra: Desde luego, Jack. Contiene toda la información habitual, pero vamos a analizarlo paso a paso. Las cifras que aparecen dentro del rectángulo definido por C3 a G7 son los tipos de cambio. Si consideramos que a_{ij} es el tipo de cambio ubicado en la fila *i* y la columna *j*, entonces una unidad de la divisa *i* será el tipo de cambio para a_{ij} unidades de la divisa *j*. De hecho, estos datos reflejan los precios de compra-venta. Por ejemplo, si vendiéramos una libra esterlina, recibiríamos \$1.665. Esto quiere decir que 1.665 es el precio de compra, en dólares, de una libra. Por otra parte, si vendiéramos un dólar recibiríamos 0.591 libras. Esto significa que podemos comprar una libra por 1/0.591 = \$1.692 (el precio de venta, en dólares, de una libra es de 1.692). Por consiguiente, el intervalo entre los precios de la libra "a la compra" y "a la venta" es de (1.665, 1.692). Como puedes ver, si comenzáramos con \$1 y compráramos todas las libras posibles, y luego usáramos esas libras para comprar dólares, terminaríamos con $0.591 \times 1.665 = \$0.9810$ dólares; es decir, perderíamos dinero.

Jack: Ésos son los costos de transacción. Por lo anterior, evidentemente queremos minimizar estos costos, absteniéndonos de movilizar más dinero del que realmente necesitamos. Pero, ¿en qué lugar de este modelo se nos brinda alguna orientación acerca de nuestras necesidades de efectivo en el presente?

Ezra: Nuestros actuales valores de efectivo en cartera se presentan en la columna C, filas 17 a 21. Todas las cifras están expresadas en millones; tenemos 2 millones de dólares, 5 millones de libras y 3 millones de marcos. Nuestros requerimientos están en la columna G, en las mismas columnas. Puedes observar que necesitamos 7 millones de francos franceses y 1,040 millones de yenes. Como sabes, nuestra política consiste en satisfacer los requerimientos de manera que se maximice el valor en dólares de nuestros valores finales en cartera.

Jack: ¡Magnífico! Vamos a decidir ahora qué es más conveniente hacer.

Ezra: Esa es la parte más interesante. Simplemente introducimos nuestras decisiones en las celdas apropiadas de la sección de transacciones en divisas que tiene el rótulo "Venta\Compra". En realidad, ya introduje anteriormente las que, a mi juicio, serían nuestras decisiones más características en estas circunstancias. Las celdas C10 a C14 muestran que, para comenzar, vendimos 2 millones de marcos y 4.3 millones de libras a cambio de 8.389 millones de dólares. Tomamos luego 1.3 millones de esos dólares para comprar 7 millones de francos y, con los 9 millones de dólares restantes, compramos 1,047 millones de yenes. Estas cifras se encuentran en las celdas C11, C13, E10 y G10 de la sección de transacciones en divisas. Por ejemplo, en E10 puedes observar que empleamos 1.3 millones de dólares para comprar francos y en E15 observarás que esa compra nos redituó 7 millones de francos. Si comparas C17 a C21 con F17 a F21, podrás comprobar que hemos alcanzado nuestras metas. De hecho, H17 a H21 muestran cuánto efectivo nos queda en cada denominación. Como puedes ver, la política que he introducido arroja valores finales por 12.106 millones de dólares.

Jack: Veo que hemos cumplido con nuestros requerimientos de efectivo, pero ya sabes como soy, Ezra. Sentiría que entiendo mejor si puedo ver las fórmulas con las cuales efectuaste todos los cálculos.

Ezra: Eso es fácil. Simplemente imprimiré las fórmulas de la hoja de cálculo para que puedas estudiarlas a tu antojo.

Jack (*Algún tiempo después, esa misma mañana):* Todo esto me parece muy claro, Ezra, pero ¿por qué aplicamos una estrategia tan complicada?

Ezra: Como sabes, siempre hemos realizado nuestras operaciones a través del Country Bank de Nueva York, y ésa es la estrategia que ellos recomendaron.

Jack: Creo que después de haber visto el problema en el modelo presentado en la hoja de cálculo, es más fácil reflexionar sobre la estrategia de cambio de divisas. Me gustaría saber si en verdad éste es un buen enfoque.

Ezra: Yo también me preocupé en otras ocasiones por ese asunto, pero el mercado de divisas es sumamente eficiente cuando se trata de los precios de esas monedas importantes, de modo que probablemente no tiene demasiada importancia qué estrategia apliquemos al respecto.

Jack: No podría decirte que esas alusiones superficiales a la eficiencia del mercado me hagan sentir más confianza. Como bien sabes, yo he ganado millones explotando las ineficiencias del mercado. En fin, esta mañana ya no dispongo de más tiempo para iniciar la búsqueda de una estrategia mejor. Sigamos pues con la que tenemos.

Como usted ya lo habrá notado, el modelo de cambio de divisas presentado en los anexos 1 y 2 es un modelo de programación lineal y la solución óptima se puede encontrar sin el menor problema con la ayuda de Solver. La hoja de cálculo electrónica en la cual fue calculada la solución óptima es la que aparece en el Anexo 3. El valor óptimo en dólares de las posiciones finales de dinero en efectivo es de 12.184 millones, lo cual podemos comparar con los 12.106 millones obtenidos usando la solución de Ezra. Observamos que, de alguna manera, Ezra tiene razón. La diferencia es de .6%: (12.184 — 12.106)/12.184 = .0064. Por otra parte, cuando las transferencias involucran cuantiosas sumas de dinero, hasta un pequeño porcentaje puede significar mucho dinero. En este ejemplo, la diferencia es de $78,000, una cifra nada despreciable cuya magnitud puede captar cualquiera casi sin esfuerzo.

Preguntas

1. Formule por escrito el modelo de PL correspondiente al problema de las divisas. En su modelo, utilice la siguiente notación para describir los datos propuestos en la descripción del problema:

   a_{ij} = tipo de cambio al pasar de la divisa i a la divisa j (es decir, 1 unidad de la divisa i se entregará a cambio de a_{ij} unidades de la divisa j)

   $c_i = \frac{1}{2}(a_{ij} + 1/a_{ji})$ = "valor promedio en dólares" de la divisa i

   b_i = valor inicial de cartera en la divisa i

   L_i = cantidad mínima de la divisa i requerida como valor final en cartera

   Designe las variables de decisión como sigue:

   X_{ij} = cantidad de la divisa i que fue cambiada por la divisa j, $j \neq i$

   Y_i = valor final en cartera en la divisa i

2. En el diálogo anterior, Jack dijo, "nos hemos propuesto minimizar estos costos absteniéndonos de movilizar más dinero del que realmente necesitamos" Suponga usted que definimos VO_1 = "valor promedio en dólares" máximo que resultará posible generar a partir de los valores iniciales que tenemos en cartera.

Tome nota de que para poder encontrar el valor de VO_1 se requiere algo más que la simple evaluación de cada posición inicial en términos del valor promedio en dólares. Por ejemplo, el resultado de la conversión de 1 libra en su valor promedio en dólares es $1.665; y el resultado de la conversión de 1 libra en 9.12 francos y en seguida en el valor promedio en dólares es (9.12)(.1840) = $1.67808. Por consiguiente, resulta preferible convertir los valores iniciales en cartera de libras a francos, en lugar de mantener invariable la posición que corresponde a las libras. En realidad, para poder encontrar VO_1 necesitamos resolver primero un programa lineal. La solución se muestra en el Anexo 4, el cual fue creado reduciendo a cero el requerimiento sobre el dinero en efectivo final y optimizando a continuación el valor de los montos finales en cartera. Como lo hemos visto, VO_1 = 12.261. Sea ahora VO_2 = "valor promedio en dólares" máximo de los valores finales en cartera, sujeto a las restricciones de los requerimientos de efectivo. Esto significa que VO_2 es el valor objetivo optimizado que aparece en la presentación 3 (VO_2 = 12.184).

En casos como éste, un programa de PL con mayores restricciones no puede producir un mejor VO que un PL con menores restricciones, por lo cual siempre debe ser válido que $VO_2 \leq VO_1$. Definamos, para el problema,

$$\text{Costos de transacción} = VO_1 - VO_2$$

Según esta definición, ¿es correcta la aseveración de Jack? Es decir, la solución optimizada del Anexo 3 minimiza los costos de transacción.

3. Recuerde ahora la hoja de cálculo que utilizamos en el Anexo 1. Use esta hoja para contestar las siguientes preguntas:
   (a) Suponga que los tipos de cambio entre dos divisas (francos y marcos, por ejemplo) son tales que, si comenzáramos con 1 franco y efectuáramos el cambio 1 franco → marcos → francos, tendríamos al final algo más de 1 franco. En estas circunstancias, ¿cuál sería el valor de la función objetivo? ¿Qué término de la economía se emplea para describir esta condición?
   (b) Haga usted algún comentario en relación con la siguiente afirmación: si PROTRAC no tuviera requerimientos específicos en términos de dinero en efectivo, la solución óptima consistiría simplemente en permanecer impasibles (esto significa que para maximizar el "valor promedio en dólares" de los valores finales en cartera, bastaría con que no realizáramos operación alguna de cambio de divisas).
   (c) Comente la siguiente declaración: por el hecho de considerar que el mercado de cambios de divisas es eficiente, hemos visto que la mejor solución no resulta mucho mejor (en términos porcentuales) que la estrategia propuesta por Ezra. También es verdad, por la misma razón, que la solución menos atractiva no resulta mucho peor (nuevamente en términos porcentuales) que la de Ezra. Sugerencia: Encuentre la solución que minimice el "valor promedio en dólares" de los valores finales en cartera.
   (d) Haga usted algún comentario en relación con la siguiente declaración: si consideramos un problema de tipo general, como el de PROTRAC, veremos que podrían estar incluidas centenares de divisas. Sin embargo, las divisas que PROTRAC no tiene inicialmente en cartera o aquéllas de las cuales no necesita tener una posición de efectivo, pueden ser suprimidas de la formulación sin que eso afecte el valor óptimo de la función objetivo.

Referencias

J. Abara, "Applying Integer Linear Programming to the Fleet Assignment Problem", *Interfaces*, 19, núm. 4 (1989), págs. 20-28.

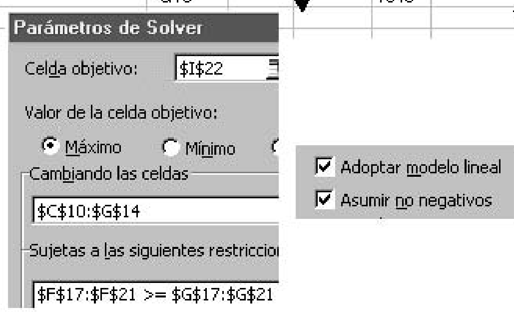
Radhka Subramanian, Richard Scheff, John Quillinan, Steve Wiper, Roy Marsten, "Coldstart: Fleet Assignment at Delta Air Lines", *Interfaces*, 24, núm. 1 (1994), págs. 104-120.

ANEXO 1 Modelo para el intercambio de divisas en hoja de cálculo electrónica

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Modelo de intercambio de divisas							
2			Dólares	Libras	Francos F	Marcos A	Yenes	Valor promedio en dólares	
3		Dólares	1	0.591	5.385	1.594	116.3	1.0000	
4		Libras	1.665	1	9.12	2.607	193.1	1.6785	
5		Francos F	0.1823	0.1095	1	0.2965	21.11	0.1840	
6		Marcos A	0.6149	0.3694	3.351	1	72.14	0.6211	
7		Yenes	0.00847	0.005093	0.0465	0.01379	1	0.0085	
8									
9		Venta\Compra	Dólares	Libras	Francos F	Marcos A	Yenes	Total vendido	
10		Dólares	0	0	1.3	0	9	10.300	
11		Libras	4.3	0	0	0	0	4.300	
12		Francos F	0	0	0	0	0	0.000	
13		Marcos A	2	0	0	0	0	2.000	
14		Yenes	0	0	0	0	0	0.000	
15		Total comprado	8.389	0	7.001	0	1047		
16			Valores iniciales en cartera (millones)	Cantidad comprada (millones)	Cantidad vendida (millones)	Valores finales en cartera (millones)	Efectivo requerido (millones)	Excedente (holgura)	Valor en $ de valores finales en cartera
17		Dólares	2	8.389	10.300	0.089	>=0	0.089	$ 0.089
18		Libras	5	-	4.300	0.700	>=0	0.700	$ 1.175
19		Francos F	0	7.001	-	7.001	>=7	0.000	$ 1.288
20		Marcos A	3	-	2.000	1.000	>=0	1.000	$ 0.621
21		Yenes	0	1,047	-	1,047	>=1040	6.700	$ 8.933
22								Total	$ 12.106

ANEXO 2 Fórmulas del modelo para el intercambio de divisas en hoja de cálculo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Modelo de							
2			Dólares	Libras	Francos	Marcos A	Yenes	Valor promedio	
3		Dólares	1	0.591	5.385	1.594	116.3	=(C3+1/C3)/2	
4		Libras	1.665	1	8.933	2.507	193.1	=(C4+1/D3)/2	
5		Francos F	0.1823	0.1095	1	0.2965	21.11	=(C5+1/E3)/2	
6		Marcos A	0.6149	0.3694	3.351	1	72.14	=(C6+1/F3)/2	
7		Yenes	0.00847	0.005093	0.0465	0.01379	1	=(C7+1/G3)/2	
8									
9		Venta\Comp	Dólares	Libras	Francos	Marcos A	Yenes	Total vendido	
10		Dólares	0	0	1.3	0	9	=SUMA(C10:G10)	
11		Libras	4.3	0	0	0	0	Copiar	
12		Francos F	0	0	0	0	0		
13		Marcos A	2	0	0	0	0		
14		Yenes	0	0	0	0	0		
15		Total comp	=SUMAPRODUCTO(C3	Copiar					
16			Valores iniciales en ca	Cantidad c	Cantidad	Valores fir	Efectiv	Excedente (holg	Valor en $ de v
17		Dólares	2	=C15	=H10	=C17-E17+	0	=F17-G17	=H3*F17
18		Libras	5	=D15			0		
19		Francos F	0	=E15	Copiar		7	Copiar	
20		Marcos A	3	=F15			0		
21		Yenes	0	=G15			1040		
22								Total	=SUMA(I17:I21)



ANEXO 3 Hoja de cálculo optimizada para el intercambio de divisas

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Modelo de intercambio de divisas							
2			Dólares	Libras	Francos F	Marcos A	Yenes	Valor promedio en dólares	
3		Dólares	1	0.591	5.385	1.594	116.3	1.0000	
4		Libras	1.665	1	9.12	2.607	193.1	1.6785	
5		Francos F	0.1823	0.1095	1	0.2965	21.11	0.1840	
6		Marcos A	0.6149	0.3694	3.351	1	72.14	0.6211	
7		Yenes	0.00847	0.005093	0.0465	0.01379	1	0.0085	
8									
9		Venta\Compra	Dólares	Libras	Francos F	Marcos A	Yenes	Total vendido	
10		Dólares	0	0	0	0	2.000	2	
11		Libras	0	0	5.000	0	0	5	
12		Francos F	0	0	0	38.600	0	38.600	
13		Marcos A	0	0	0	0	11.192	11.192	
14		Yenes	0	0	0	0	0	0	
15		Total comprado	0	0	45.60	11.445	1040		
16			Valores iniciales en cartera (millones)	Cantidad comprada (millones)	Cantidad vendida (millones)	Finales en cartera (millones	Efectivo requerido (millones)	Excedente (holgura)	Valor en $ de valores finales en cartera
17		Dólares	2	-	2.000	0.0	>=0	0.000	$ 0
18		Libras	5	-	5.000	0.0	>=0	0.000	$ -
19		Francos F	0	45.600	38.600	7.000	>=7	0.000	$ 1.288
20		Marcos A	3	11.445	11.192	3.253	>=0	3.253	$ 2.020
21		Yenes	0	1,040	-	1040	>= 1040	0.000	$ 8.876
22								Total	$ 12.184

ANEXO 4 Modelo optimizado con requerimientos finales de divisas igual a cero

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Modelo de intercambio de divisas							
2			Dólares	Libras	Francos F	Marcos A	Yenes	Valor promedio en dólares	
3		Dólares	1	0.591	5.385	1.594	116.3	1.0000	
4		Libras	1.665	1	9.12	2.607	193.1	1.6785	
5		Francos F	0.1823	0.1095	1	0.2965	21.11	0.1840	
6		Marcos A	0.6149	0.3694	3.351	1	72.14	0.6211	
7		Yenes	0.00847	0.005093	0.0465	0.01379	1	0.0085	
8									
9		Venta\Compra	Dólares	Libras	Francos F	Marcos A	Yenes	Total vendido	
10		Dólares	0	0	0	0	0.000	0	
11		Libras	0	0	5.000	0	0	5	
12		Francos F	0	0	0	45.600	0	45.600	
13		Marcos A	0	0	0	0	0	0.000	
14		Yenes	0	0	0	0	0	0	
15		Total comprado	0	0	45.60	13.520	0		
16			Valores iniciales en cartera (millones)	Cantidad comprada (millones)	Cantidad vendida (millones)	Valores finales en cartera (millones)	Efectivo requerido (millones)	Excedente (holgura)	Valor en $ de valores finales en cartera
17		Dólares	2	-	0.0	2.0	>=0	2.000	2
18		Libras	5	-	5.0	0.0	>=0	0.000	$ -
19		Francos F	0	45.600	45.600	0.0	>=0	0.000	0.000
20		Marcos A	3	13.520	-	16.520	>=0	16.520	10
21		Yenes	0	-	-	0	>=0	0.000	0.000
22								Total	$ 12.261

CAPÍTULO

4

Programación lineal: Análisis gráfico

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN

Mayor potencia por cada dólar: la PL ayuda a la Fuerza Aérea Estadounidense a integrar sus arsenales

La Fuerza Aérea de Estados Unidos tiene un historial distinguido porque ha ganado importantes batallas. Los estadounidenses recuerdan con orgullo los éxitos conquistados por sus pilotos en los cielos de Alemania durante la Segunda Guerra Mundial y, en fecha más reciente, también en el golfo Pérsico. Estos éxitos resultan, en parte, de una incansable búsqueda de nuevas tácticas y tecnologías. Así pues, no resulta sorprendente que en los últimos años la Fuerza Aérea haya adoptado un enfoque moderno —el uso de la PL— en la evaluación y adquisición de sistemas de armamentos en la batalla anual por el presupuesto.

Cada año, la Fuerza Aérea debe presentar al Congreso un plan de desarrollo de armas. Para preparar ese plan es necesario decidir (1) qué nuevos proyectos conviene iniciar (2), qué proyectos anuales tienen que continuar y (3) qué proyectos deberán ser cancelados. La recomendación final depende en alto grado del nivel de financiamiento disponible.

Una consideración importante se refiere a la eficacia de cada sistema de armas y a su posible contribución, en una mezcla de armamentos, para lograr el incremento deseado en el valor de los blancos destruidos. Esas estimaciones de la efectividad deben realizarse para muchas combinaciones de aeronaves, pertrechos y blancos (tanques, instalaciones de mando y comunicación, puentes y otros objetivos semejantes). Las interacciones de estos factores son complejas. Los distintos tipos de municiones requieren que los aviones realicen vuelos sumamente variables en términos de altitud y duración, por lo cual su vulnerabilidad al fuego antiaéreo enemigo varía en consecuencia. Incluso un cambio pequeño en el índice de pérdidas de aviones puede producir un efecto importante sobre la efectividad de un sistema con respecto al costo, para no mencionar la pérdida de vidas humanas.

La Fuerza Aérea tiene que evaluar también todos los años las consecuencias de un posible aumento o disminución de su presupuesto; es decir, el grado en el que una propuesta determinada es sensible a posibles cambios en el nivel de financiamiento. Los cambios del presupuesto pueden afectar la mezcla de sistemas de armas que se va a adquirir, así como el número preciso de cualquiera de ellas. A su vez, el número de unidades adquiridas puede afectar drásticamente el precio unitario de compra.

Para este tipo de análisis, la Fuerza Aérea ha desarrollado un programa lineal que permite evaluar los pros y contras de los distintos tipos de aviones y municiones. Ese programa no sólo especifica la mezcla óptima de armas necesaria para destruir un conjunto particular de blancos, sino también muestra gráficamente esas relaciones como:

- La relación entre los fondos gastados en aeronaves y los gastados en municiones.
- El valor del blanco destruido como función de los gastos en armas específicas, o una mezcla de armas.
- El valor del blanco destruido *vs*. los gastos en función de la duración del conflicto.

Esta información se representa por medio de gráficos de dos dimensiones, escogiendo la escala apropiada para los ejes, de manera que los administradores y analistas puedan estudiar posibles cambios y realizar análisis tipo "¿qué pasaría si?". (Véase Might.)

4.1 INTRODUCCIÓN

La geometría en dos dimensiones puede usarse como un sistema gráfico para ilustrar muchos elementos importantes de los modelos de PL y la forma en que son optimizados con Solver. Aun cuando la geometría en dos dimensiones representa un caso muy especial, es fácil trabajar con ella y muchos conceptos generales que se aplican a modelos de mayor número de dimensiones pueden expresarse con imágenes bidimensionales. En particular, la geometría de dos dimensiones es útil como base para el método de resolución gráfica. Ésta es una forma sencilla de resolver un modelo de PL que tenga sólo dos variables de decisión. A pesar de que la mayoría de los modelos del mundo real tienen más de dos variables de decisión, por lo cual el método de resolución gráfica no puede aplicárseles, dicho método es una buena base intuitiva para gran parte de lo que veremos después. En otras palabras, el propósito de este capítulo es ofrecer conocimientos gráficos acerca del modelo general de la PL. Esto nos dará un buen fundamento para el uso de la PL en gran variedad de aplicaciones del mundo real. Además, en las exposiciones posteriores sobre los resultados obtenidos con Solver usaremos con frecuencia ilustraciones geométricas.

Para empezar, recordaremos brevemente la técnica de graficación de desigualdades, que constituye la base del análisis gráfico subsecuente.

4.2 GRAFICACIÓN DE DESIGUALDADES Y CONTORNOS

Primero tracemos el conjunto de puntos (x_1,x_2) que satisfaga la *desigualdad*

$$2x_2 - x_1 \leq -2 \tag{4.1}$$

GRAFICACIÓN DE DESIGUALDADES

Con este propósito usaremos el siguiente procedimiento general para trazar gráficos de desigualdades:

- ***Paso 1: Gráfico de la igualdad.*** Convierta la desigualdad en una igualdad y trace el gráfico de la recta que representa esa ecuación. En nuestro ejemplo, la igualdad es $2x_2 - x_1 = -2$. El gráfico de esta ecuación aparece en la figura 4.1. Ésta es una forma de hacerlo: (a) sea $x_1 = 0$, resuelva para x_2 en ($x_2 = -2/2 = -1$) y localice ese punto en el eje x_2. (b) Sea $x_2 = 0$, resuelva para x_1 en ($-x_1 = -2$; $x_1 = 2$) y localice ese punto sobre el eje x_1. (c) Una los dos puntos.
- ***Paso 2: Escoja un punto de prueba.*** Elija cualquier punto de prueba que no esté sobre la línea. Si el punto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ no está sobre la recta, puede ser un punto conveniente. En nuestro ejemplo seleccionaremos $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ como punto de prueba. Véase la figura 4.1.
- ***Paso 3: Resuelva la expresión del lado izquierdo.*** Sustituya el punto de prueba en la expresión del lado izquierdo de la desigualdad. En nuestro ejemplo, la expresión es $2x_2 - x_1$. Sustituyendo por los valores $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ obtenemos un valor numérico de cero.

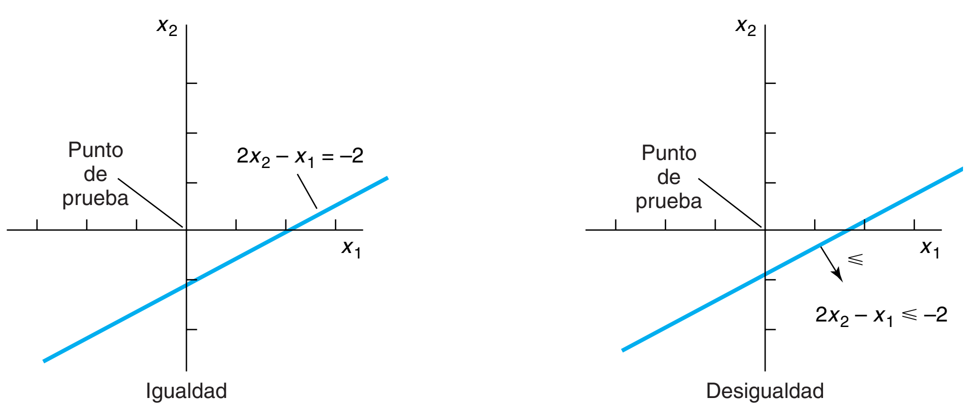


FIGURA 4.1

Trazado del gráfico de $2x_2 - x_1 \leq -2$

- ***Paso 4: Determine si el punto de prueba satisface la desigualdad.***
  a. Si el punto de prueba *satisface* la desigualdad original, entonces la recta trazada en el paso 1 y todos los puntos que están al *mismo* lado de la recta que el punto de prueba satisfacen la desigualdad.
  b. Si el punto de prueba no satisface la desigualdad original, entonces la recta y todos los puntos que no están en el mismo lado que el punto de prueba satisfacen la desigualdad.

En nuestro ejemplo, como 0 *no es* ≤ -2, el punto de prueba *no* satisface la desigualdad. La condición b anterior se mantiene y la línea recta y todos los puntos del lado opuesto de la línea con respecto a (0, 0) satisfacen la desigualdad. Este conjunto se muestra en la figura 4.1. Observe la convención de señalar el lado relevante de la línea de igualdad con una flecha y $\leq$ o $\geq$, según el caso.

Es frecuente que los estudiantes se formen la impresión equivocada de que el lado < del gráfico de una desigualdad siempre está debajo de la línea de igualdad. Por eso, para trazar el gráfico de los puntos que satisfacen una relación $\leq$ cambian el $\leq$ por =, grafican la igualdad y luego, apresuradamente, incluyen todos los puntos que están debajo de la línea de igualdad. Esto puede ser incorrecto, ya que el lado < podría estar arriba y no abajo. Por ejemplo, tracemos el gráfico de la desigualdad $2x_1 - x_2 \leq 2$. Siguiendo el procedimiento antes descrito, trazamos primero el gráfico de la ecuación $2x_1 - x_2 = 2$ como muestra la figura 4.2. Consideremos ahora el punto de prueba ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), que está *arriba* de la línea. En este punto $2x_1 - x_2 = 2(0) - 0 = 0$ y como 0 es menor que 2, hemos identificado el lado < de la línea que aparece en la figura 4.2. Por tanto, en este caso, los puntos que satisfacen la desigualdad $\leq$ son los puntos que están sobre la recta y todos los puntos que se localizan del mismo lado que el punto ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), es decir, los puntos que están *en* la recta y *arriba* de ella. Esto se ilustra también en la figura 4.2. Una comparación entre la figura 4.1 y la figura 4.2 le convencerá de que no existe una relación general entre el sentido de la desigualdad (es decir, $\geq$ o $\leq$) y el lado que se encuentra *arriba* o *abajo* del gráfico de la igualdad. Siempre es posible localizar el lado apropiado mediante el uso de un punto de prueba, como lo hemos demostrado anteriormente.

La técnica que acabamos de describir es el instrumento fundamental para trazar el gráfico de las restricciones de cualquier PL, en virtud de que dichas restricciones siempre son igualdades o desigualdades matemáticas. En resumen, para trazar el gráfico de una restricción de desigualdad, ya sea del tipo $\leq$ o $\geq$:

1. Cambie la desigualdad por una igualdad, para obtener una ecuación, y trace el gráfico de la recta que representa dicha ecuación.
2. Escoja cualquier punto de prueba que no esté sobre esta recta. (Si el punto [$x_1 = 0$, $x_2 = 0$] no está sobre la recta, ése es el punto de prueba más sencillo.)
3. Sustituya este punto de prueba en el lado izquierdo de la restricción de desigualdad. Por el hecho de que el punto de prueba no se encuentra sobre la recta, el resultado es menor que el lado derecho o mayor que el lado derecho. Si el resultado es menor que el lado derecho, entonces la recta y todos los puntos localizados en el lado donde se encuentra el punto de prueba satisfacen la desigualdad $\leq$ y la recta y todos los puntos del otro lado satisfacen la desigualdad $\geq$. Si el resultado es mayor que el lado derecho, entonces la conclusión es la inversa.

LÍNEAS DE CONTORNO

Los **contornos,** también llamados **isocuantas,** tienen un papel importante en la representación geométrica de modelos en PL. Un *contorno* de una función *f* de dos variables es el conjunto de todos los pares (x_1, x_2) para los cuales $f(x_1, x_2)$ adopta cierto *valor constante* específico. Cuando *f* es una función de las ganancias, los contornos suelen denominarse **rectas de isoganancias** y cuando *f* es una función de los costos, los contornos representan **rectas de isocostos.**

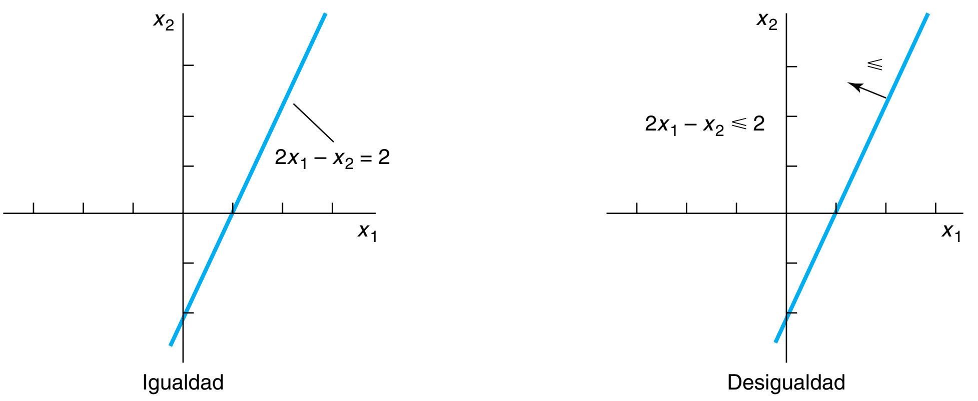


FIGURA 4.2

Gráfico de $2x_2 - x_1 \leq 2$

Como ejemplo de contorno, suponga que estamos vendiendo dos productos. La ganancia por cada unidad del producto 1 es $2, y la ganancia por unidad del producto 2 es $4. La ganancia total procedente de la venta de x_1 unidades del producto 1 y x_2 unidades del producto 2 se expresa por medio de una función f de dos variables, definida por

$$\text{ganancias} = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$$

Grafiquemos ahora todas las posibles combinaciones de ventas de x_1 y x_2 para las cuales obtenemos $4 de ganancia. Para eso, trazamos el gráfico de la ecuación

$$2x_1 + 4x_2 = 4 \tag{4.2}$$

El gráfico se ilustra con la más baja de las tres rectas que muestra la figura 4.3. Esta recta se conoce como el contorno 4 de la función f.

En realidad, como las ventas negativas no tienen sentido, solamente nos interesa la parte del contorno 4 que se encuentra entre los dos puntos señalados sobre los ejes en la figura 4.3. No se preocupe por esto ahora; nos ocuparemos del asunto en la siguiente sección.

Está claro que podemos sustituir el valor 4 en el lado derecho de la expresión (4.2) con cualquier otra constante y después graficar el resultado para obtener un contorno diferente de f. La figura 4.3 muestra también otros dos contornos de f, cuyos valores correspondientes son 6 y 8 en el lado derecho de la expresión (4.2). Observará usted de inmediato que los contornos son rectas paralelas y de esto podrá deducir que, en efecto, existe un número infinito de tales contornos, uno para cada posible valor numérico ubicado del lado derecho de la expresión (4.2).

Los dos conceptos que hemos visto en esta sección, graficación de igualdades y graficación de contornos, serán aplicados en la obtención de soluciones gráficas para modelos de PL con dos variables de decisión.

En resumen:

> La graficación de contornos se reduce a la graficación de igualdades. Los contornos de una función lineal forman una familia de rectas paralelas. La graficación de desigualdades se reduce también a la graficación de igualdades, o contornos, y después a la identificación del lado correcto.

4.3 EL MÉTODO DE RESOLUCIÓN GRÁFICA APLICADO A PROTRAC

El **método de resolución gráfica** es una forma sencilla de resolver modelos de PL con dos variables de decisión. Como el modelo PROTRAC del capítulo 3 tiene sólo dos variables de decisión, *E* y *F*, podemos usar ese modelo para ilustrar el método gráfico. El modelo completo de esta PL es

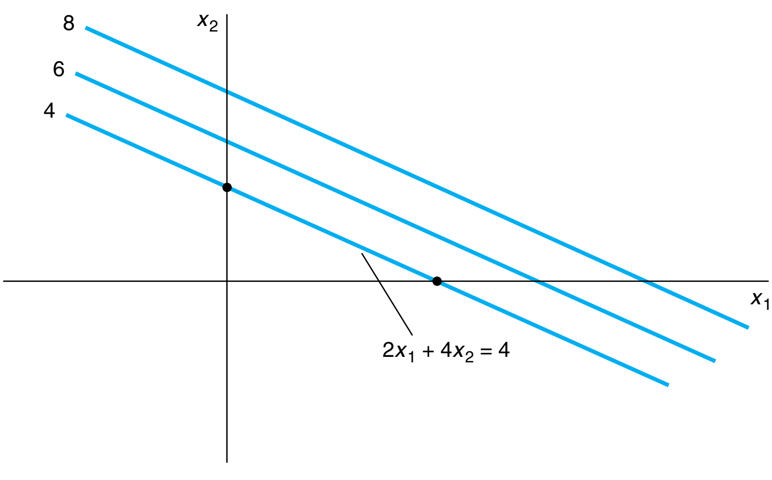


FIGURA 4.3

Contornos 4, 6 y 8 de $2x_1 + 4x_2$

EL MODELO PROTRAC

$\text{Max } 5000E + 4000F$	(máxima contribución a las ganancias)	**(4.3)**
s.a. $E + F \geq 5$	(requisito de producción mínima)	**(4.4)**
$E - 3F \leq 0$	(balance de la posición en el mercado)	**(4.5)**
$10E + 15F \leq 150$	(capacidad en el departamento A)	**(4.6)**
$20E + 10F \leq 160$	(capacidad en el departamento B)	**(4.7)**
$30E + 10F \geq 135$	(horas de trabajo empleadas en las pruebas)	**(4.8)**
$E, F \geq 0$	(condiciones de no negatividad)	**(4.9)**

donde recordamos que las variables de decisión están definidas como

E = número de E-9 que deberán producirse, y
F = número de F-9 que deberán producirse

Los rótulos (4.3) a (4.9) se utilizarán en la siguiente exposición para establecer la diferencia entre la función objetivo y las restricciones. Usaremos el Stanford Graphic PL Optimizer, GLP.EXE, para graficar y analizar el modelo de PL. El GLP (Graphic Linear Programming) es un programa de Windows por separado; no requiere el uso de Excel.[1] La optimización gráfica de PL le resultará más sencilla de comprender si aplica usted los siguientes pasos cuando ejecute el GLP en su PC.[2]

GRAFICACIÓN DE LAS RESTRICCIONES

Nuestro primer objetivo consiste en mostrar la forma de presentar gráficamente todas las decisiones viables de este modelo. Desde dentro del programa GLP, configure las opciones de escala (X Min = 0, X Max = 8, Y Min = 0, Y Max = 10, X Zoom = 120, Y Zoom = 78 y Decimal Number [Número decimal] = 0) como muestra la figura 4.4. A continuación, construyamos un sistema de coordenadas en el cual los valores de E se localicen en el eje horizontal y los valores de F estén en el eje vertical, escribiendo los rótulos de los ejes en los recuadros "X" y "Y" como muestra la figura 4.4. (Podríamos asignar igualmente F al eje horizontal y E al vertical, y los resultados serían los mismos.) Así, cada punto del espacio bidimensional de la figura 4.4 está asociado a una alternativa de producción específica. Por ejemplo, en la figura 4.4, el cursor señala la alternativa de producción $E = 3$, $F = 4$. Ahora queremos saber cuáles de las combinaciones posibles de (E, F) son factibles; es decir, cuáles satisfacen las restricciones (4.4) a (4.9). Para esto, empezamos por eliminar las áreas posibles del gráfico. Con cada restricción que se añade, el área factible se vuelve más pequeña.

En vista de que las condiciones de no negatividad (4.9) requieren que $E \geq 0$ y $F \geq 0$, sólo tenemos que considerar el así llamado **cuadrante no negativo** en nuestra búsqueda de combinaciones de producción factibles, es decir, combinaciones válidas de las variables de decisión (E, F). GLP siempre supone que se trata de condiciones de no negatividad, por lo cual nos presenta únicamente el cuadrante no negativo, como vemos en la figura 4.4.

No todos los puntos del cuadrante no negativo son factibles. Por ejemplo, considere la primera restricción, (4,4):

$$E + F \geq 5 \quad \textbf{(4.4)}$$

Resulta claro que la combinación $E = 1$, $F = 1$, a pesar de que corresponde a un punto del cuadrante no negativo, viola esta restricción. Es obvio que debemos imponer más límites a nuestra representación gráfica de las condiciones candidatas a la factibilidad.

Para describir correctamente las combinaciones posibles debemos considerar las restricciones una a la vez. Comencemos con la primera restricción,

$$E + F \geq 5 \quad \textbf{(4.4)}$$

[1] Por tratarse de un programa de Windows, GLP no está disponible para Macintosh. Los usuarios de Macintosh pueden ejecutar el GLP por medio de alguno de los paquetes emuladores de Windows, como SoftWindows de Insignia Solutions o Virtual PC de Connectix Corporation.

[2] Copie en el disco duro de su PC el programa GLP.EXE incluido en el CD-ROM que acompaña a este libro. Desde el menú **Inicio** de Windows, seleccione los comandos **Ejecutar** y **Examinar** para localizar el programa GLP.EXE en su disco duro; una vez que lo haya localizado, selecciónelo, haga clic en Abrir y en seguida en Aceptar, para ejecutar el GLP. Éste funcionará mejor si su monitor está ajustado para una resolución de 800 por 600 (Super VGA) o más alta.

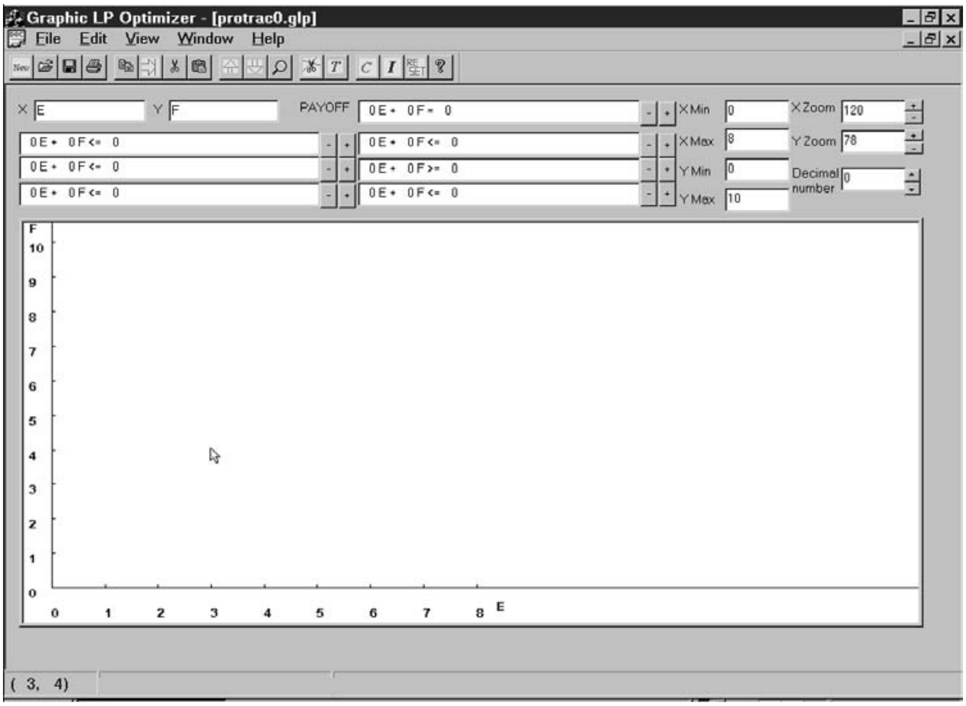


FIGURA 4.4

El cuadrante no negativo para el Graphic PL Optimizer

En la sección 4.2 se comentó que para realizar el gráfico de esta restricción se necesita trazar primero la recta $E + F = 5$ y luego encontrar el lado >, que en este caso son todos los puntos que están arriba de la diagonal. Para trazar el gráfico de la restricción, escriba un rótulo opcional, seguido de dos puntos (:) y luego la restricción de desigualdad (4.4) en el cuadro para ecuaciones que aparece arriba a la izquierda, como muestra la figura 4.5; GLP graficará entonces para usted la recta de restricción. (Cuando termine de escribir, haga clic en el rótulo de restricción sobre el gráfico y arrástrelo hasta una posición próxima a la recta de restricción, como muestra la figura 4.5.) Si aplica este procedimiento usted deberá comprobar que todos los puntos del cuadrante no negativo que satisfacen la primera restricción son precisamente los que aparecen por encima de la recta en la figura 4.4. Esta región representa los planes de producción no negativa que satisfacen la restricción específica (4.4), pero no necesariamente las demás. Por ejemplo, se puede verificar en forma rápida que el plan $E = 10$, $F = 10$ viola la restricción (4.6). Está claro que debemos restringir aún más las decisiones candidatas, volviendo a aplicar la prescripción anterior.

Así pues, consideremos ahora la segunda restricción.

$$E - 3F \leq 0 \tag{4.5}$$

En la figura 4.6 aparece el gráfico correspondiente a esta condición, junto con la restricción (4.4). Las alternativas de producción que están por encima de las rectas (4.4) y (4.5) de la figura 4.6 satisfacen

$$E + F \geq 5 \tag{4.4}$$
$$E - 3F \leq 0 \tag{4.5}$$
$$E \geq 0, F \geq 0 \tag{4.9}$$

EL EFECTO DE AGREGAR RESTRICCIONES

A pesar de todo, la región localizada por encima de las dos restricciones continúa incluyendo distintos puntos que violan alguna de las restricciones restantes (4.6), (4.7) y (4.8). Por esa razón, debemos seguir superponiendo una por una de las siguientes restricciones. Sin embargo, primero debemos observar que al superponer la segunda restricción (4.5) sobre la ilustración de la figura 4.6, se han restringido todavía más las variables de decisión y, en forma gráfica, se ha “recortado” el conjunto de decisiones candidatas a ser factibles. A medida que seguimos super-

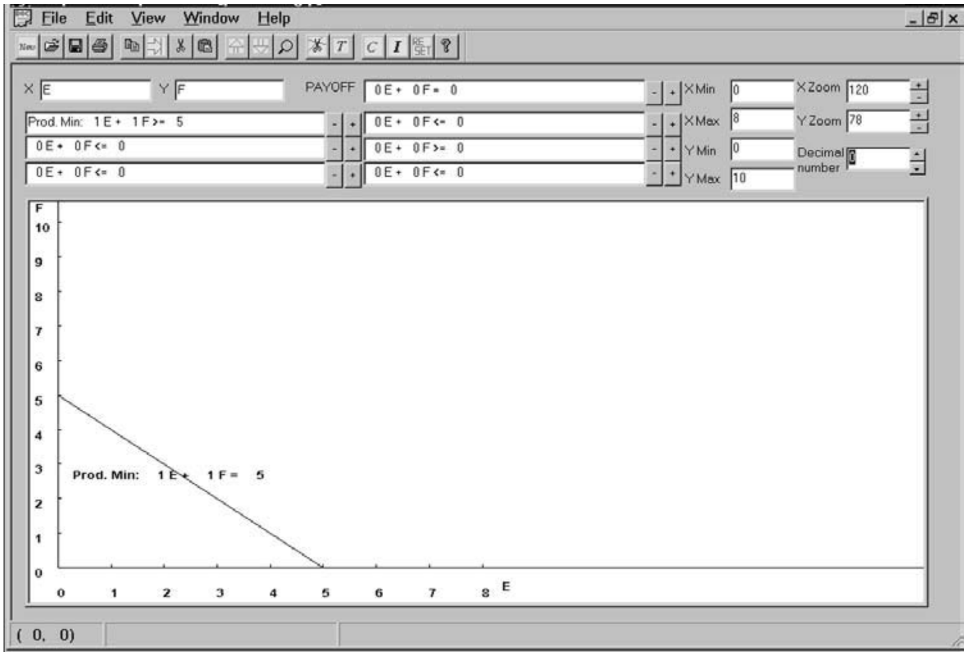


FIGURA 4.5

Primera restricción del modelo en PL de PROTRAC

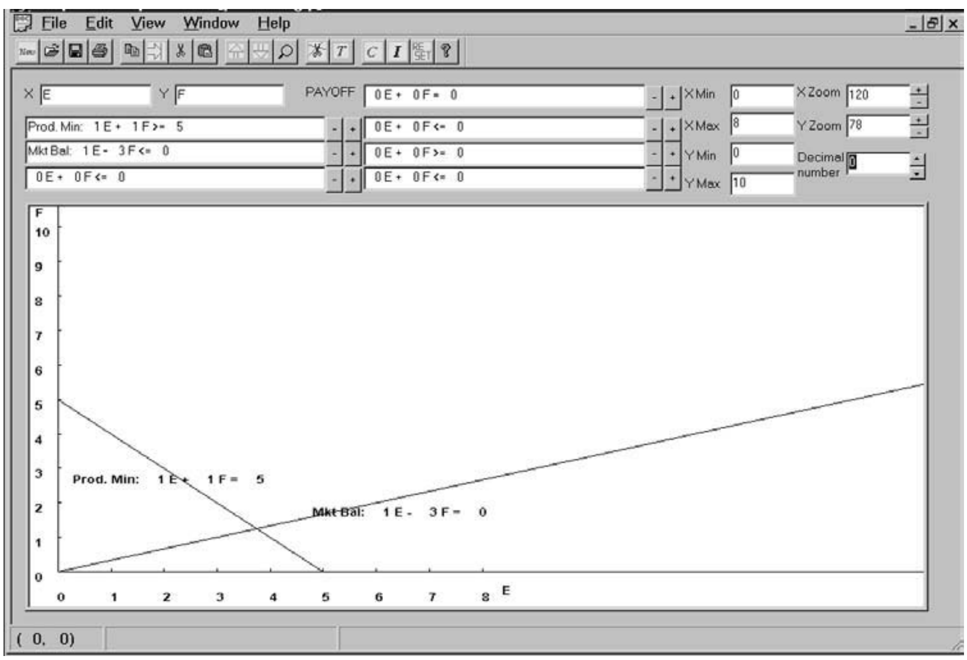


FIGURA 4.6

Las dos primeras restricciones del modelo en PL de PROTRAC (4.4) y (4.5)

poniendo condiciones "cada vez más estrechas" (es decir, añadiendo más y más restricciones) sobre las variables de decisión, deberá ser evidente que, desde el punto de vista geométrico, tales restricciones tenderán a recortar todavía más el conjunto restringido. Este fenómeno, el recorte sucesivo del conjunto restringido, ilustra el siguiente principio general, que es muy importante. (En este contexto, *general* significa que "también es válido para modelos con más de dos variables de decisión".)

SUGERENCIA: ***Una vez que haya trazado todas las restricciones, haga clic en la herramienta Auto Zoom (a la izquierda de la herramienta Trim Lines [Recortar líneas] de la figura 4.7) y la escala de los números correspondientes a X y Y se ajustará a valores adecuados para llenar la ventana. También puede hacer clic en una de las casillas +/− para cualquiera de los números de Zoom X o Y, y después manteniendo oprimida la tecla Entrar, y GLP ajustará el valor en incrementos definidos.***

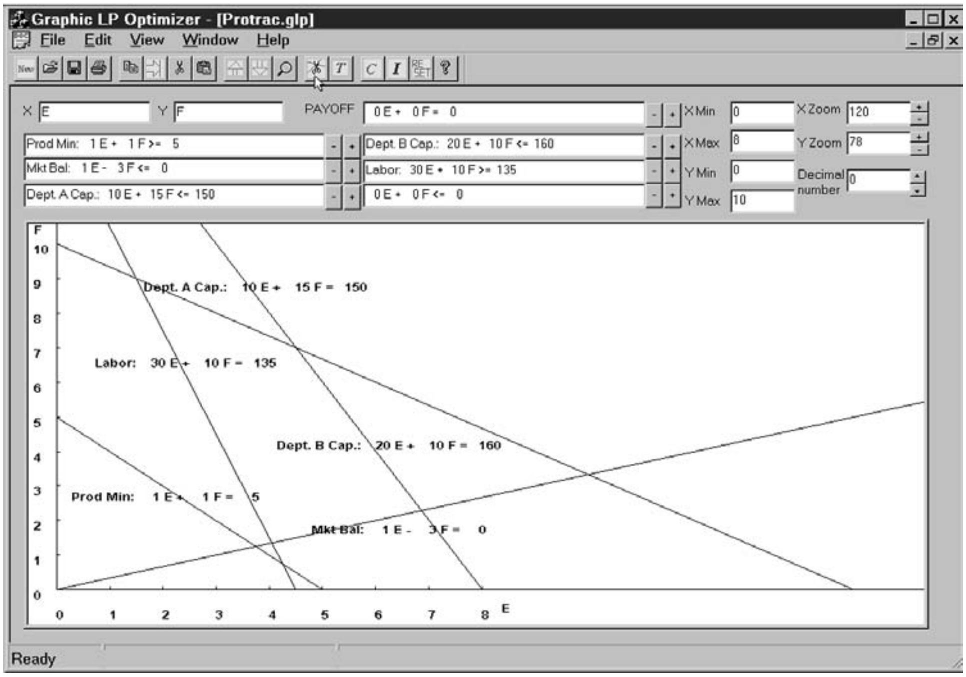


FIGURA 4.7

Conjunto de restricciones para el modelo en PL de PROTRAC

Al agregar más restricciones, el conjunto de decisiones permisibles siempre se recorta o no resulta afectado. La adición de restricciones nunca expande el conjunto de decisiones permitidas.

LA REGIÓN FACTIBLE

Usted puede escribir todas las demás restricciones para el modelo en PL de PROTRAC o simplemente abrir el archivo PROTRAC.GLP para ver el resto de las restricciones. La culminación de este proceso de superponer las restricciones (4.6), (4.7) y (4.8) sobre la figura 4.6 se puede apreciar en la figura 4.7, donde se muestran gráficamente todos los valores factibles de las variables de decisión.

Esta figura, con las cinco restricciones graficadas en el cuadrante no negativo, muestra el conjunto de planes de producción que satisfacen *simultáneamente las cinco* restricciones, además de las condiciones de no negatividad. En la terminología de la PL, este conjunto se conoce como el **conjunto restringido,** *conjunto factible* o **región factible.** Si hace clic en la herramienta Toggle Trim Lines (Alternar recortar líneas), debajo del cursor en la figura 4.7, removerá los segmentos de recta que se encuentran fuera de la región factible; si hace clic en la herramienta “C” de la derecha se sombreará la región factible, como muestra la figura 4.8. Es decir, el área sombreada en la figura 4.8 es la región factible para el modelo en PL de PROTRAC.

El conjunto de todos los valores no negativos de las variables de decisión que satisfacen todas las restricciones en forma simultánea se conoce como *el conjunto restringido* o *la región factible*.

De acuerdo con nuestra definición de región factible, cualquier plan de producción (es decir, cualquier par de valores de *[E, F]*) que satisfaga todas las restricciones, incluidas las condiciones de no negatividad, se conoce como una **solución factible** o *decisión factible.* Estos planes o decisiones factibles son las alternativas de producción permitidas según nuestro modelo. Observe que es *incorrecto* hablar de un valor factible de *E* por separado, o de un valor factible de *F* por separado. Piense detenidamente en esta declaración porque es importante para comprender que *el término* factible, *en esta ilustración de dos dimensiones, siempre se aplica a un par de números, no a un número aislado.* Queremos volver a insistir en que una “solución” es algo más que únicamente dos valores: es un punto sobre el gráfico. Si tuviéramos tres variables, sería un punto en un espacio tridimensional, y para cuatro variables ya no podría ser representado en una “ilustración”.

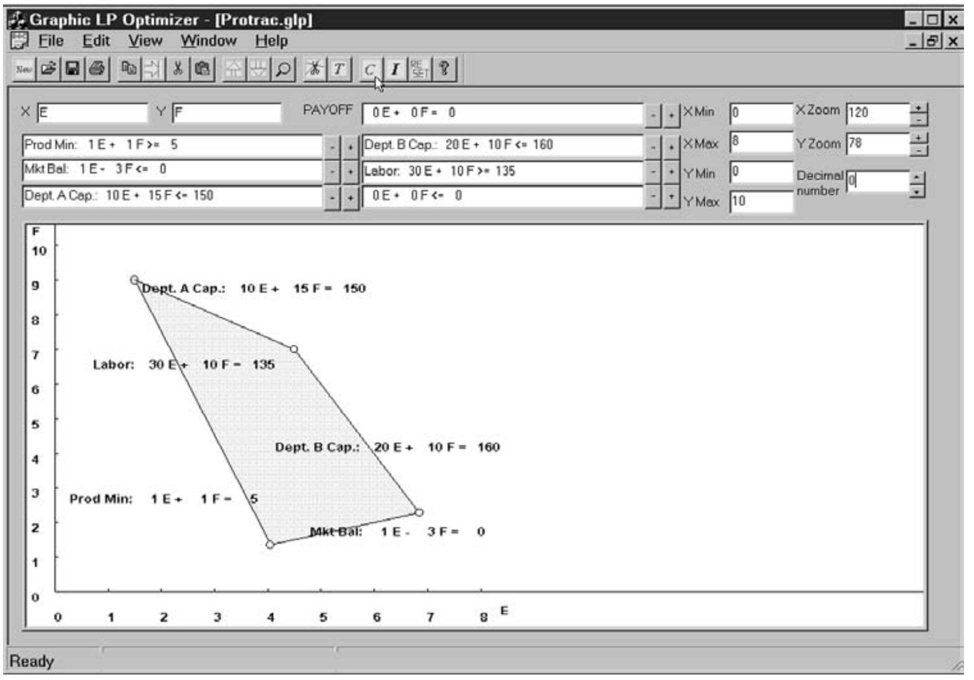


FIGURA 4.8

Región factible para el modelo en PL de PROTRAC

Hemos visto que para ilustrar geométricamente estos pares factibles basta trazar el gráfico del conjunto restringido. Si aquí usamos varias imágenes para llegar al gráfico final de todo el conjunto restringido, fue sólo para ofrecer una ilustración clara. En la práctica, usted usará el GLP o papel de gráficos para trazar todos los elementos sobre el mismo sistema de coordenadas, superponiendo las restricciones una por una. Para lograr esto, en cada restricción

1. Cambie la desigualdad por una igualdad.
2. Trace el gráfico de la igualdad.
3. Identifique el lado correcto para la desigualdad original.

Una vez que haya realizado los pasos 1, 2 y 3 para cada restricción, podrá observar que el conjunto factible es la región que se encuentra simultáneamente en el lado correcto de todas las rectas.

GRAFICACIÓN DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

La obtención de una representación gráfica del conjunto restringido es el primer paso del procedimiento de resolución gráfica. Ahora queremos usar la representación gráfica para encontrar la solución *óptima* del modelo. Como éste es un modelo para maximizar las ganancias, debemos encontrar una alternativa de producción válida que asigne el más alto valor posible a la función objetivo

$$\text{contribución a las ganancias} = 5000E + 4000F \qquad \textbf{(4.10)}$$

Si empezamos a elegir arbitrariamente diversos planes factibles en la figura 4.8 y evaluamos la función objetivo en cada uno de los puntos elegidos tratando de hallar la mayor ganancia posible, pronto comprenderemos que la operación podría no tener fin. Hay un número infinito de posibles pares *(E, F)*. ¿Cómo puede terminar en algún momento este proceso de ensayo y error? Debemos hallar rápida y sistemáticamente la forma de descubrir un plan factible que maximice las ganancias.

Recordemos ahora que, como en este caso la función objetivo es una función de ganancias, los contornos de la función objetivo se conocen como rectas de isoganancias o, de manera más sencilla, *rectas de ganancias.* Nuestra siguiente tarea consiste en superponer varias rectas de ganancias arbitrarias en la figura 4.8. Por ejemplo, empecemos haciendo la expresión (4.10) = 20,000, escribiendo (4.10) y 20,000 como el LD de la casilla "PAYOFF" ("RÉDITOS") del GLP, superponiendo simplemente la recta de ganancias correspondiente en la figura 4.8, como

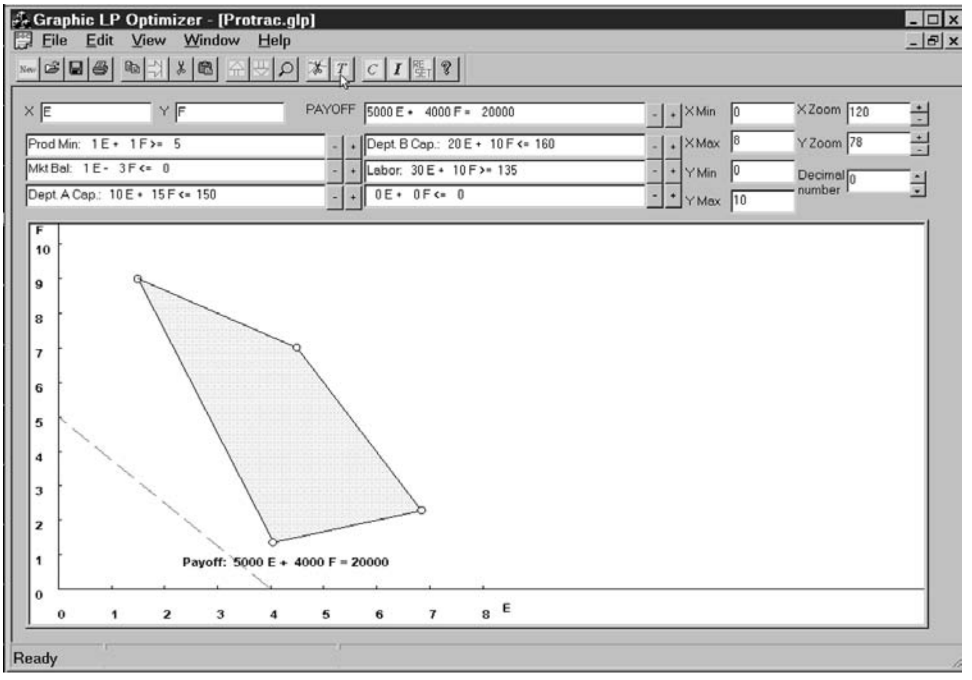


FIGURA 4.9

Contorno 20,000 de la función ganancias en la PL de PROTRAC

se ilustra en la figura 4.9. (La herramienta Toggle Text [Alternar texto] "T" fue seleccionada para suprimir la visualización de los rótulos de restricciones, y el rótulo "Réditos" en el gráfico fue seleccionado con un clic y arrastrado hasta colocarlo junto al contorno correspondiente a 20,000 en la figura 4.9, para facilitar la legibilidad.)

El GLP restringe la recta Réditos al cuadrante no negativo porque sólo nos interesan los valores no negativos de E y F. En estas condiciones, cualquier punto sobre la recta de la figura 4.9 corresponde a un plan de producción que rendirá una contribución de $20,000 a las ganancias. En esta figura podrá usted ver que hay un número infinito de planes de producción no negativos que rinden una ganancia de $20,000. Sin embargo, el hecho de que la recta de ganancias de la figura 4.9 no cruce la región factible sombreada significa que ninguno de los planes de producción de esta recta es factible.

Por tanto, haremos el experimento de seleccionar una recta de ganancias diferente para superponerla en la figura 4.9. Por ejemplo, hagamos que la expresión (4.10) sea igual a 32,000 y tracemos el gráfico correspondiente a la recta de contribución a las ganancias.

$$\text{contribución a las ganancias} = 5000E + 4000F = 32{,}000$$

Para trazar el gráfico del nuevo contorno, escriba 32000 en el LD de la ecuación en la casilla "Réditos", como muestra la figura 4.10. En esa misma figura podrá observar que el contorno de 32,000 cruza la región factible. Cada uno de los planes de producción que se encuentran en la intersección de esta línea con la región factible es un plan factible y produce una ganancia de $32,000. Como podrá usted comprobar, existe un número infinito de dichos planes.

Nuestro objetivo es encontrar un punto de la región factible que rinda las más altas ganancias. ¿Hay muchos planes factibles que produzcan una ganancia mayor a $32,000? Observe la figura 4.10 y vea si puede responder esta pregunta.

La clave para la correcta identificación de los planes factibles que producen ganancias superiores a $32,000 consiste en observar que la recta de ganancias 32,000 es paralela a la recta de ganancias 20,000 de la figura 4.9, y se encuentra por encima de ella (es decir, hacia el noreste). En general, a medida que aumentan las ganancias, incrementamos el valor de C en la ecuación de ganancias:

$$\text{contribución a las ganancias} = 5000E + 4000F = C$$

y la recta de ganancias se desplaza en dirección paralela a las rectas de ganancias de 20,000 y de 32,000. La dirección del movimiento es hacia el noreste porque, en este ejemplo particular, esa es la dirección en la que aumentan las ganancias. La dirección de los valores de contorno crecientes se conoce como **dirección de optimización.** En este caso la llamaremos **dirección ascendente.**

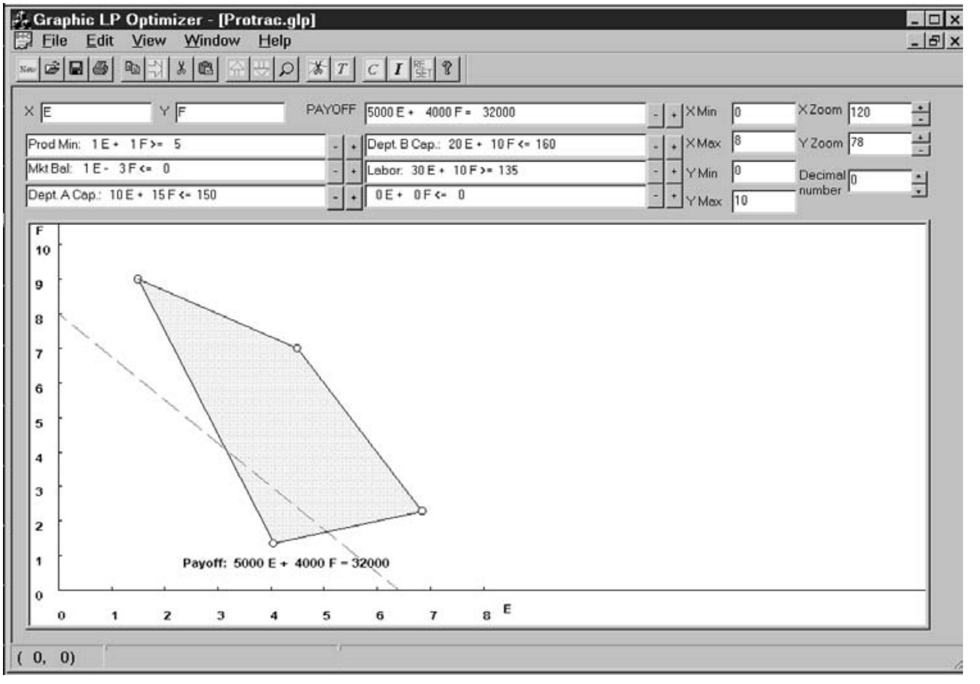


FIGURA 4.10

32,000-Contorno 32,000 de la función ganancias en la PL de PROTRAC

BÚSQUEDA DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

Ahora que hemos visto cómo trazar el gráfico de la región factible y los contornos de la función objetivo, ya tenemos suficiente información para hallar la solución del modelo PROTRAC. Como lo hacemos en nuestra imaginación, movemos o "trasladamos" las rectas de ganancias hacia el noreste sin cambiar su inclinación, y así podemos identificar planes factibles que proporcionan valores cada vez más altos para la función objetivo. En algunos puntos descubriremos que cualquier movimiento adicional en esa dirección lleva la recta de ganancias más allá de los límites de la región factible, donde todos los planes de producción ubicados en la recta ya son inaceptables. ¿Puede usted identificar ahora la posición del contorno de valor más alto que logra tocar la región factible por lo menos en un punto? Cualquier plan factible que esté ubicado en esta recta será una **solución óptima** del modelo PROTRAC.

Para realizar la traslación paralela de la recta de ganancias que aparece en la figura 4.10, haga clic en la línea Réditos y arrástrela hacia el "noreste"; GLP mantendrá cada uno de los contornos en posición paralela a los demás y actualizará el monto LD de Réditos a medida que usted arrastre la recta hacia fuera. Podrá observar que el contorno de valor más elevado es el que se aprecia en la figura 4.11. Ésta se conoce como la recta de ganancias máximas. Si usted hace clic en la herramienta "Auto Max", ilustrada bajo el cursor en la figura 4.11, el GLP maximizará los réditos para usted y mostrará los valores óptimos de *E* y *F*. (En la figura 4.11 se ha hecho clic en la herramienta Toggle Text [Alternar texto] a fin de volver a presentar los rótulos de las restricciones, y el campo Decimal Number [Número decimal] fue aumentado a 1 para poder presentar el valor fraccional óptimo de *E*.)

En este modelo sólo un punto de la región factible se encuentra sobre la recta de ganancia máxima, por lo cual decimos que este punto es una **solución óptima única** de nuestro modelo. En la figura 4.11 observamos que el valor de la **recta de ganancias máximas** (es decir, el máximo valor alcanzable en la contribución a las ganancias) es $50,500, la misma contribución óptima a las ganancias que obtuvimos con Solver para el modelo en PL de PROTRAC en el capítulo 3. Con unas cuantas operaciones de álgebra es fácil averiguar de dónde proviene este valor, procediendo en la siguiente forma.

La figura 4.11 indica que el valor óptimo de *E* es 4.5, y el valor óptimo de *F* es 7. En la figura 4.11 usted podrá ver que la solución óptima se presenta en la *intersección* de las dos rectas de restricción.

$$10E + 15F = 150 \qquad \textbf{(4.11)}$$

$$20E + 10F = 160 \qquad \textbf{(4.12)}$$

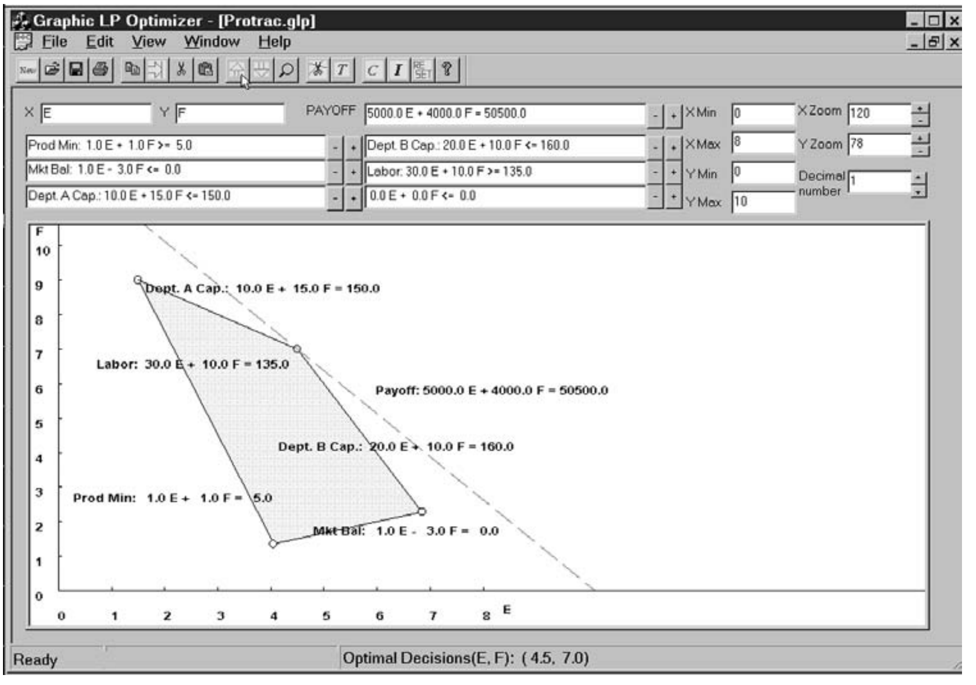


FIGURA 4.11
Optimalidad en el modelo en PL de PROTRAC

SUGERENCIA: ***Si usted apunta a cualquier otra solución en un vértice (o, a fin de cuentas, a cualquier punto del gráfico) y hace clic con el botón derecho del ratón, el GLP moverá temporalmente a ese lugar la recta Réditos y calculará los réditos para ese par de valores de decisión.***

Así tenemos dos ecuaciones lineales, las cuales podemos resolver para las dos incógnitas, E y F, ya sea por el método de eliminación o por sustitución. Mediante la sustitución, por ejemplo, la ecuación (4.12) puede reordenarse para tener

$$10F = 160 - 20E \qquad \text{o} \qquad F = 16 - 2E$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (4.11) tenemos $E = 4.5$. Este valor de E puede introducirse, a su vez, en cualquiera de las ecuaciones originales, con lo cual se obtiene $F = 7$. La solución de las dos restricciones obligatorias (4.11) y (4.12) para las dos incógnitas, E y F, es precisamente lo que GLP (y Solver) encuentra a fin de calcular los valores óptimos para las dos variables de decisión.

Apliquemos la notación E^* y F^* para distinguir los valores óptimos de las variables de decisión E y F respectivamente. Hemos encontrado que el plan de producción óptimo se consigue con $E^* = 4.5$ y $F^* = 7$. Ésta es la *solución óptima* o, dicho en términos más simples, *la solución* del modelo PROTRAC. Usando esos valores óptimos ($E^* = 4.5$, $F^* = 7$), podemos observar ahora que GLP (y Solver) calcula el valor de la ganancia máxima en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\text{máxima contribución a las ganancias} &= 5000E^* + 4000F^* \\ &= 5000(4.5) + 4000(7) = 22{,}500 + 28{,}000 = 50{,}500\end{aligned}$$

Éste es el valor del contorno de ganancia máxima que aparece en la figura 4.11 y que se conoce como el **valor objetivo óptimo** o simplemente, a veces, el **valor óptimo.** El término *solución* o *solución óptima* se aplica siempre a los valores óptimos de las variables de decisión. El término *valor óptimo* (en singular), que a menudo llamamos el VO, se refiere a la función objetivo evaluada como solución. En el modelo PROTRAC, el plan de producción óptimo ($E^* = 4.5$, $F^* = 7$) es la solución; la ganancia óptima de $50,500 es el VO.

4.4 RESTRICCIONES ACTIVAS E INACTIVAS

Además del plan de producción óptimo y la ganancia óptima, las demás variables de consecuencias, que vimos en el capítulo 3 en relación con la utilización de Solver para el modelo PL de PROTRAC, pueden determinarse también respondiendo las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas horas de uso del departamento A requiere la solución óptima?
2. ¿Cuántas horas de uso del departamento B requiere la solución óptima?
3. ¿Cuántas horas de trabajo se dedicarán a realizar pruebas en la solución óptima?

Recuerde que las horas de uso del departamento A están expresadas por el lado izquierdo de la desigualdad (4.6). Así, refiriéndonos de nuevo al modelo, vemos que

$$\text{horas usadas en el departamento A} = 10E + 15F$$

Puesto que vamos a asignar los valores óptimos $E = E^* = 4.5$, y $F = F^* = 7$, la expresión se evalúa como sigue:

$$\begin{aligned}\text{horas usadas (en condiciones óptimas) en el departamento A} &= 10E^* + 15F^* \\ &= 10(4.5) + 15(7) = 150\end{aligned}$$

Decimos que "en el caso óptimo, se usan 150 horas en el departamento A". Para responder la pregunta 2, debemos recordar que las horas usadas del departamento B están expresadas en el lado izquierdo de la desigualdad (4.7). Por consiguiente, en condiciones óptimas,

$$\begin{aligned}\text{horas requeridas en el departamento B} &= 20E^* + 10F^* \\ &= 20(4.5) + 10(7) = 160\end{aligned}$$

Finalmente, para responder la pregunta 3, usamos el lado izquierdo de la desigualdad (4.8) y nos percatamos de que, en condiciones óptimas,

$$\begin{aligned}\text{horas de trabajo requeridas para las pruebas} &= 30E^* + 10F^* \\ &= 30(4.5) + 10(7) = 205\end{aligned}$$

Llevemos ahora un poco más adelante estos razonamientos para introducir algunos términos nuevos e importantes. Acabamos de ver que el plan de producción óptimo requerirá 150 horas en el departamento A. Pero también recordamos que, de acuerdo con el modelo, 150 horas es la capacidad de trabajo total *disponible* en el departamento A. Así pues, observamos que, aplicando la política óptima

$$\text{horas de trabajo usadas} = \text{horas de trabajo disponibles}$$

y que la restricción se satisface con la *igualdad.* Sin embargo, ¿cómo es posible tal cosa, considerando que la restricción sobre las horas de trabajo en el departamento A es una restricción de *desigualdad,* y no de igualdad? La respuesta es sencilla si se interpreta correctamente el símbolo $\leq$. Nuestra restricción $\leq$ sobre el trabajo en el departamento A permite que el uso de mano de obra sea < *o* = a la cantidad disponible. Por tanto, la igualdad es permisible. Lo *no* permisible es que el uso de trabajo requerido *exceda* la cantidad disponible del mismo.

Puesto que no queda trabajo sin usar, se dice que esta restricción es **activa,** o en forma equivalente, **obligatoria.** Observe que desde el punto de vista del gerente, las restricciones activas desempeñan un papel muy importante. Por ejemplo, si hubiera producción extra de E-9 o F-9, nuestra restricción activa se violaría. En este sentido, la restricción activa impide la obtención de ganancias adicionales.

Al aplicar un razonamiento análogo a la restricción sobre las horas de trabajo en el departamento B, usted puede verificar fácilmente que también esa restricción es activa.

En el capítulo 3 vimos que las restricciones en un modelo PL siempre son de la forma =, $\leq$ o $\geq$. *Una restricción de igualdad siempre es activa. Una restricción de desigualdad, ya sea del tipo* $\leq$ o $\geq$*, solamente es activa si al ser evaluada en condiciones óptimas se mantiene la igualdad entre el lado izquierdo y el lado derecho.*

Consideremos ahora la restricción referente a las pruebas del producto. Recuerde que esta restricción requiere, por un acuerdo sindical, que se empleen *por lo menos* 135 horas de trabajo (el lado derecho de las restricciones), mientras que la respuesta a la pregunta 3 ha demostrado que en realidad se usarán 205 horas (el lado izquierdo). Puesto que estamos usando 70 horas *adicionales* de las requeridas, se dice que en condiciones óptimas existe un *excedente* de 70 horas en esta restricción. Éste es un ejemplo de una restricción de desigualdad que *no* es activa en condiciones óptimas. Como ya habrá adivinado usted, se dice que esta restricción es **inactiva.**

Los términos *activa* e *inactiva* son aplicables a cada una de las restricciones del modelo. Por ejemplo, si en condiciones óptimas evaluamos el lado izquierdo de la restricción del balance de mercado rotulada como (4.5), vemos que

$$E - 3F = 4.5 - 3(7) = 4.5 - 21 = -16.5$$

Como la restricción (4.5) establece que $E - 3F \leq 0$, y como el valor real del lado izquierdo es -16.5, vemos que el lado izquierdo está 16.5 unidades por *debajo* del valor del lado derecho. Se dice que esta restricción tiene una *holgura* de 16.5 unidades y también que es *inactiva*.

Al resumir estos términos, observamos que

1. Si en condiciones de optimalidad (es decir, cuando se evalúa una restricción para el caso de la solución óptima), el lado izquierdo de la restricción es igual al lado derecho, se dice que dicha restricción es *activa* u *obligatoria*. Así, una restricción de *igualdad* siempre es activa. Una restricción de desigualdad puede ser activa o no.
2. Si una restricción no es activa, se dice que es *inactiva.* En una restricción del tipo $\geq$, la diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho (la cantidad sobrante) suele llamarse **excedente.** En una restricción del tipo $\leq$, la diferencia entre el lado derecho y el lado izquierdo (la cantidad no usada) se llama **holgura.**
3. En condiciones de optimalidad, todas las restricciones de *desigualdad* incluidas en un modelo tienen una holgura o un valor excedente, y para lo referente a las decisiones factibles dicho valor siempre es no negativo. Con una restricción dada, el valor de la holgura o el excedente es cero si y sólo si dicha restricción es activa.

INTERPRETACIONES GRÁFICAS DE RESTRICCIONES ACTIVAS E INACTIVAS

Ya hemos visto la forma de identificar algebraicamente las restricciones que son activas y las que son inactivas y que, por tanto, tienen un excedente u holgura positiva. Obtenemos esta información "insertando" en las restricciones los valores óptimos de las variables de decisión. Acabamos de ver que la tercera y la cuarta restricciones son activas en este modelo, las correspondientes a la capacidad de trabajo en los departamentos A y B. En la figura 4.11 usted puede ver que estas restricciones "pasan por" la solución óptima. En otras palabras, la solución óptima se "localiza" sobre esas restricciones. Aunque no usamos el término *activas,* en realidad resolvimos para los valores de E^* y F^* reconociendo en forma implícita que las restricciones referentes a las horas en el departamento A y las horas en el departamento B son activas.

Geométricamente, una restricción activa es la que pasa por la solución óptima.

Hemos visto que las restricciones sobre las horas de prueba y el balance del mercado son inactivas. Una revisión rápida nos muestra también que la restricción mínima de producción (4.4) es inactiva. Es decir,

$$E^* + F^* = 4.5 + 7 = 11.5 > 5$$

Así, podemos ver que

Geométricamente, una restricción inactiva es la que no pasa por la solución óptima.

Las restricciones activas e inactivas son fáciles de detectar durante la aplicación del método de resolución gráfica. De hecho, éste es el propósito mismo del método gráfico porque, como hemos visto, una vez que las restricciones activas han sido identificadas se pueden resolver ecuaciones simultáneas para encontrar la solución óptima. Todas las restricciones inactivas tendrán un excedente o una holgura, según sea el caso de que la correspondiente desigualdad sea $\geq$ o $\leq$. Sin embargo, el valor numérico del excedente o la holgura no se puede leer en la representación gráfica. Es necesario calcularlo algebraicamente como vimos en los ejemplos anteriores.

4.5 PUNTOS EXTREMOS Y SOLUCIONES ÓPTIMAS

Como hemos visto, la solución del modelo PROTRAC se localiza en un vértice de la región factible; es decir, en el vértice donde está la intersección de (lo que hemos llamado) las restricciones de las horas disponibles en el departamento A y en el departamento B. Según la terminología de la PL, los vértices de la región factible se denominan **puntos extremos.** Los dos términos, *puntos extremos* y *vértices,* serán empleados de manera indistinta en nuestra exposición.

UNA NUEVA FUNCIÓN OBJETIVO

Para entender la importancia de los puntos extremos, tomemos una función objetivo lineal diferente, con el mismo conjunto de restricciones, y resolvamos de nuevo el modelo. Por ejemplo, supongamos que el precio de los F-9 se modifica de modo que el margen de contribución se eleve de \$4000 a \$10000 por unidad. Veamos ahora cómo afecta este cambio de la función objetivo a la solución del problema. Primero, ya que sólo hemos cambiado la función objetivo dejando las restricciones tal como estaban, la región factible permanece también sin cambios. Lo único nuevo es que los contornos de la función objetivo tendrán ahora una nueva inclinación. Una recta de ganancias de esta nueva función objetivo (el contorno 50, 500) aparece en la figura después de escribir 10000 como nuevo coeficiente de *F* en el recuadro "RÉDITOS" de la figura 4.12.

Deslizando hacia la cota superior la nueva línea de ganancias o haciendo clic en la herramienta Auto Max, obtenemos la nueva solución óptima ilustrada en la figura 4.13.

Observe en la figura 4.13 que las restricciones *activas* han cambiado en el nuevo punto óptimo. Ahora las restricciones de las horas del departamento A y las horas de trabajo para realizar pruebas son activas, mientras que anteriormente las horas del departamento A y las del departamento B eran activas. Por tanto, usted puede ver que el cambio en la pendiente de la función objetivo ha trasladado la solución óptima, alejándola del vértice anterior, y la ha aproximado al otro *vértice* o punto extremo. Igual que en el caso anterior, podemos comprobar las decisiones óptimas de la nueva solución óptima resolviendo simultáneamente las dos nuevas ecuaciones de restricciones obligatorias. De este modo, tenemos

$$10E^* + 15F^* = 150 \text{ (restricción de las horas del departamento A)}$$
$$30E^* + 10F^* = 135 \text{ (restricción de las horas de trabajo disponibles para realizar pruebas)}$$

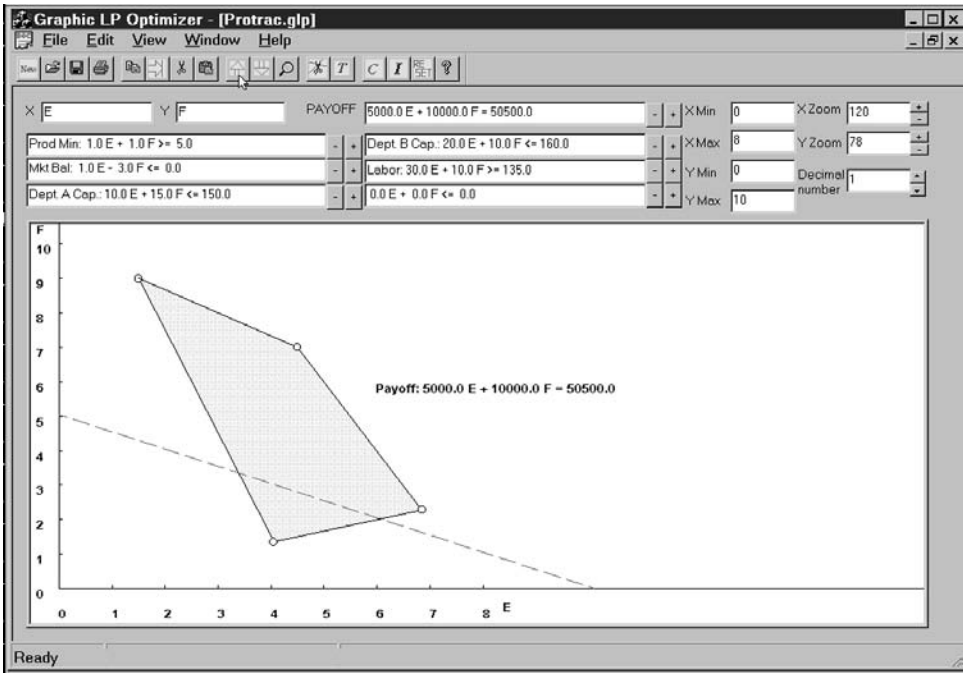


FIGURA 4.12

PL de PROTRAC cuando la función objetivo es 5000*E* + 10,000*F*

UN NUEVO VÉRTICE ÓPTIMO

Al resolver estas ecuaciones obtenemos $E^* = 1.5$ y $F^* = 9$ igual que lo calculado con GLP, como muestra la figura 4.13. Éste es el nuevo programa de producción óptimo. Como usted pudo haberlo esperado, la nueva estructura de precio que ha elevado la rentabilidad relativa de los F-9, conduce a un plan de producción óptimo donde se especifica un recorte de los E-9 y un incremento de los F-9. Notará también en la figura 4.13, que ahora existe en la nueva solución óptima una holgura positiva en términos de trabajo en el departamento B.

Hemos visto que con cada una de las dos funciones objetivo para el modelo en PL de PROTRAC obtenemos una solución óptima en un vértice. De hecho, puede experimentar por sí mismo para comprobar que, independientemente de cuánto modifique la función objetivo, mientras ésta siga siendo lineal siempre existirá una solución óptima ubicada en un vértice. Usted puede incluso cambiar el conjunto de restricciones y aun así seguirá existiendo una solución óptima en un vértice, mientras todos los elementos sigan siendo lineales.

En la figura 4.14 vemos un conjunto restringido arbitrario de 6 lados y los contornos de tres funciones objetivo *diferentes,* designadas *f, g* y *h.* Para cada función objetivo, la flecha indica la dirección en la que deseamos desplazar el contorno representado para optimizar la función objetivo. Observe que en todos los casos existe una solución óptima en un vértice. La función objetivo *g* de la figura 4.14 ilustra un caso interesante en el cual *el contorno del objetivo óptimo coincide con una de las líneas de restricción en el límite de la región factible. En este caso habrá muchas soluciones óptimas, es decir los vértices B y C y todos los puntos acotados entre ellas.* Esto se conoce como un caso de **óptimos múltiples** u **óptimos alternativos.** Sin embargo, aun en este caso en el cual no existe una solución óptima *única,* todavía es válido decir que existe una solución en vértice que es óptima (de hecho, existen dos). Así, la geometría ilustra un hecho importante sobre cualquier modelo de PL con cualquier número de variables de decisión:

Si existe una solución óptima en un modelo de PL, siempre hay cuando menos una solución óptima en un vértice.

En los siguientes capítulos veremos otras consecuencias importantes del hecho de que si existe una solución óptima, siempre habrá por lo menos una solución óptima en un vértice.

SUGERENCIA: ***Si hace clic con el botón derecho del ratón sobre la recta Réditos, cerca de donde ésta cruza uno de los ejes, y luego la arrastra, GLP hará que dicha recta gire en torno de la intersección con el otro eje.***

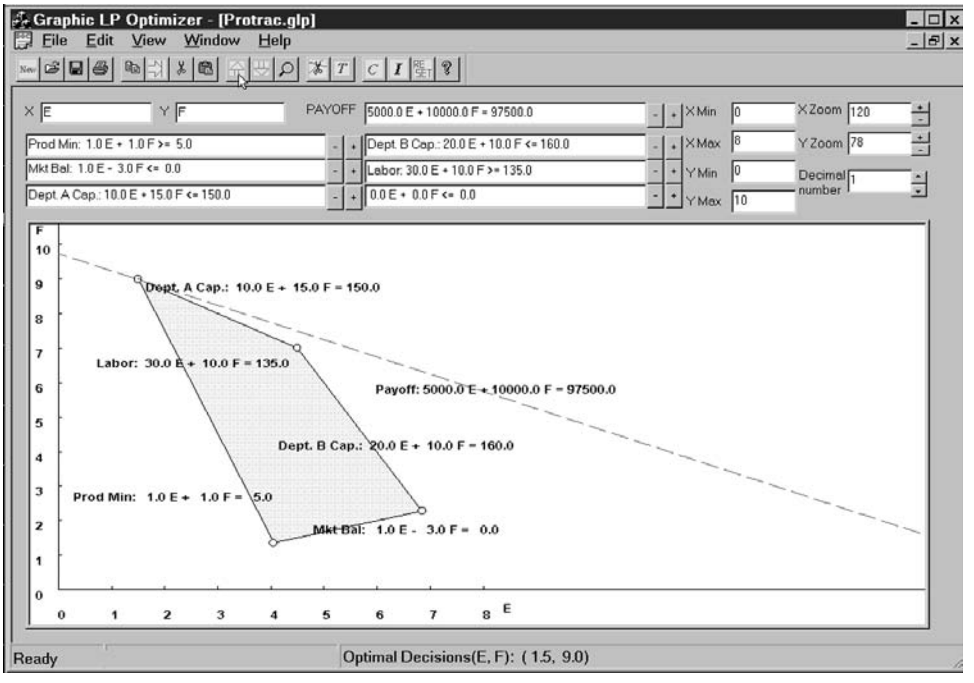


FIGURA 4.13

Nueva solución óptima de PL para PROTRAC cuando la función objetivo es $5000E + 10,000F$

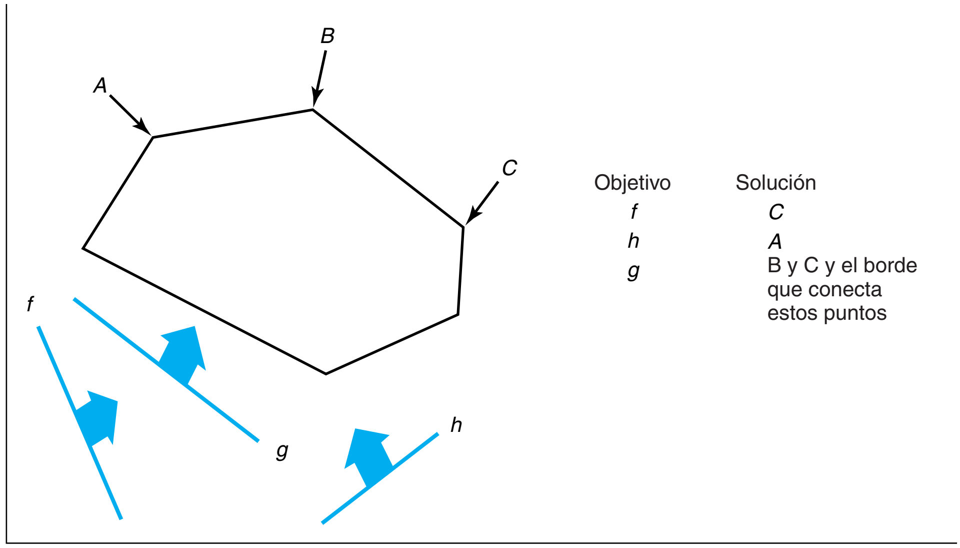


FIGURA 4.14

Siempre se obtiene una solución en un vértice.

4.6 RESUMEN DEL MÉTODO DE RESOLUCIÓN GRÁFICA PARA UN MODELO MAX

Hasta aquí hemos presentado el siguiente procedimiento para resolver un modelo de PL con dos variables de decisión:

1. Superponga el gráfico de cada restricción sobre el mismo cuadrante no negativo. Los valores no negativos de las variables de decisión que satisfacen simultáneamente (es decir, que se localizan en el lado correcto de) todas las restricciones constituyen la *región* factible, la cual se designa también como el *conjunto restringido*.
2. Dibuje una *recta* arbitraria de ganancias, también llamada *contorno,* de la función objetivo para obtener las pendientes de los contornos de dicha función.
3. Determine la dirección ascendente; por ejemplo, evaluando la función objetivo en cualquier punto de prueba que no esté sobre la recta de ganancias que acaba de trazar.
4. Ahora, dada la pendiente de la recta de ganancias obtenida en el paso 2, y la dirección ascendente del paso 3, determine visualmente el vértice del conjunto restringido que se encuentra sobre la recta de ganancias más altas posibles que todavía tenga una intersección con dicho conjunto.
5. Los valores de las variables de decisión en ese vértice (es decir, las coordenadas del vértice) dan la solución para el modelo. Estos valores se encuentran identificando las restricciones activas y resolviendo después simultáneamente dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
6. El valor óptimo de la función objetivo (es decir, la ganancia máxima), se obtiene "insertando" los valores óptimos para las variables de decisión y evaluando la función objetivo.
7. Ya ha identificado usted las restricciones activas. Las restricciones inactivas pueden leerse también en su gráfico. Éstas son las que no pasan por la solución.

4.7 EL MÉTODO GRÁFICO APLICADO A UN MODELO MIN

LA DIRECCIÓN "DESCENDENTE"

Como dijimos en la sección 3.10, muchos modelos del mundo real se presentan en un contexto de minimización, lo cual quedó ilustrado con el modelo de Crawler Tread. Hemos tratado hasta aquí solamente con la representación gráfica de un modelo Max. El método aplicado a un modelo Min es muy similar, con la única diferencia de que *la dirección de optimización de la función objetivo* es ahora **"descendente"** en lugar de "ascendente". Recuerde que en un modelo

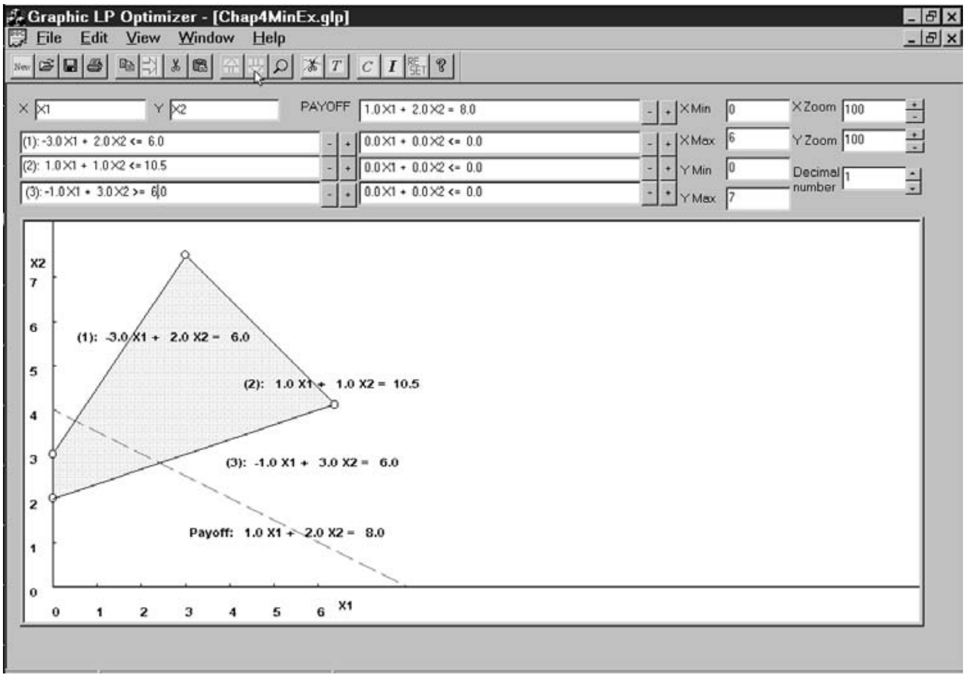


FIGURA 4.15

Región factible con un valor de 8 para el contorno de réditos para el modelo Min

Max los contornos de la función objetivo son a menudo rectas de isoganancias o, dicho más sencillamente, rectas de ganancias. En un modelo Min, los contornos de la función objetivo suelen ser rectas de isocostos o, en términos más simples, rectas de costos. Nuestra meta con los modelos Min es determinar un vértice de la región factible localizado en el contorno de *valor más bajo* de la función objetivo que tenga todavía una intersección con la región factible. A manera de ejemplo, apliquemos el método gráfico al siguiente modelo de minimización simple con dos variables de decisión que llamaremos x_1 y x_2

$$\begin{aligned} &\text{Min } x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.a. } -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \qquad (1) \\ &\qquad x_1 + x_2 \leq 10.5 \qquad (2) \\ &\qquad -x_1 + 3x_2 \geq 6 \qquad (3) \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La región factible y la recta de réditos de contorno 8 de este modelo se ilustran en la figura 4.15.

BÚSQUEDA DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

Para hallar una solución óptima en un vértice, tenemos que

1. Graficar el contorno de una función objetivo típica para obtener la pendiente de los correspondientes contornos.
2. Determinar la dirección de la optimización, que en este caso es la dirección descendente porque se trata de un modelo Min.
3. Con una traslación paralela del contorno de la función objetivo (según el paso 1) en dirección descendente (según el paso 2), determinar cuál de los vértices de la región factible es una solución óptima.
4. Resolver las ecuaciones apropiadas para obtener los valores óptimos exactos de las variables de decisión. Encontrar finalmente el VO.

Realicemos ahora esos pasos.

1. En la figura 4.15 superpondremos primero el contorno, el valor objetivo $x_1 + 2x_2 = 8$, escribiendo la ecuación en el cuadro “RÉDITOS” del GLP.

2. Para determinar la dirección descendente hacemos clic y arrastramos la recta Réditos, en ella observamos que la dirección suroeste es descendente.
3. Arrastrando la recta Réditos hacia el sureste (o haciendo clic en la herramienta Auto Min que aparece debajo del cursor en la figura 4.15), obtenemos la solución óptima que ilustra la figura 4.16.
4. Observe que la solución óptima está en la intersección de la tercera restricción y el eje x_2. La ecuación del eje x_2 es $x_1 = 0$. Por tanto, la solución óptima está dada por las dos ecuaciones $x_1^* = 0$ y $-x_1^* + 3x_2^* = 6$. Así, $x_1^* = 0$, y $x_2^* = 2$, como lo indica la figura 4.16. El VO (valor objetivo óptimo) de 4, en la figura 4.16 se confirma al evaluar la función objetivo con los valores óptimos para las variables de decisión.

$$\text{VO} = \text{valor objetivo óptimo} = x_2^* + 2x_2^* = 0 + 2(2) = 4$$

El ejemplo anterior muestra que el análisis gráfico de un modelo Min es exactamente el mismo que el de un modelo Max, mientras los contornos objetivo se muevan siempre en la *dirección de optimización.*

Aquí conviene subrayar una palabra de advertencia. A veces los estudiantes caen en la trampa de pensar que en un modelo Max la solución siempre se encuentra en el vértice "más alejado" del origen. Y en un modelo Min, consideran instintivamente que si el origen es factible, tiene que ser óptimo, y que si el origen no es factible, entonces el vértice "más cercano" al origen será la solución óptima. *Este razonamiento puede ser falso.* Esta lógica incorrecta tiene relación con la falsa impresión de que la dirección ascendente siempre es la que se aleja del origen (al noroeste), y que la dirección descendente siempre es la que se acerca al origen. De hecho, no existe una relación general entre las direcciones ascendente o descendente y el origen, del mismo modo que no hay relación general entre el sentido de una desigualdad (≤ o ≥) y el lado superior o inferior del gráfico de la igualdad en nuestra representación gráfica (véase la sección 4.2).

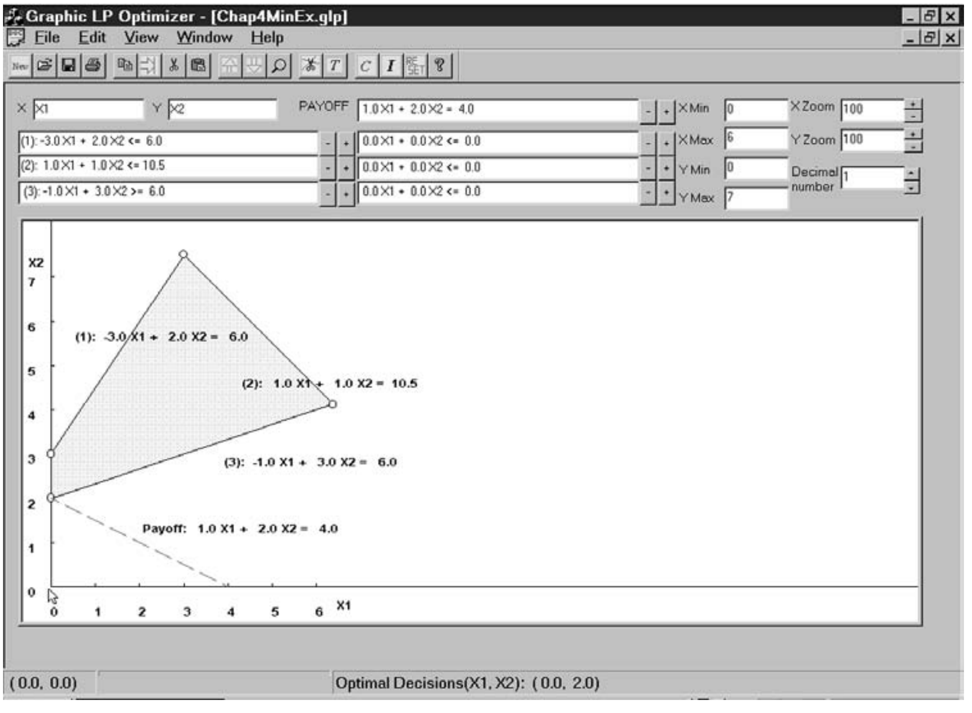


FIGURA 4.16
Solución óptima para el modelo Min

4.8 MODELOS NO ACOTADOS Y NO FACTIBLES

Hasta aquí hemos desarrollado una representación geométrica de modelos de PL con dos variables de decisión. Esta representación nos ha servido de base para resolver esos modelos y ha ilustrado también una conclusión importante: "*si* existe una solución óptima, siempre habrá por lo menos una solución en un vértice". Pero, ¿cómo es posible que una PL no tenga una solución óptima? En esta sección usaremos la representación geométrica para ver cómo puede ocurrir tal cosa.

MODELOS NO ACOTADOS

Recuerde la representación gráfica del modelo en PL de PROTRAC como muestra la figura 4.11, pero ahora cambiemos el modelo suponiendo que las restricciones rotuladas (4.6) y (4.7) han sido omitidas en forma inadvertida. Así, obtenemos el modelo

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Max } 5000E + 4000F & & & \\
\text{s.a.} & E + F & \geq 5 & (1) \\
 & E - 3F & \leq 0 & (2) \\
 & 30E + 10F & \geq 135 & (5) \\
 & E, F & \geq 0 &
\end{array}
$$

El análisis gráfico de este nuevo modelo aparece en la figura 4.17. Verá usted que el conjunto restringido se extiende ahora indefinidamente hacia el noroeste, y es posible deslizar arbitrariamente la recta de ganancias en esta dirección. Al hacer clic en la herramienta Auto Max, se obtiene el mensaje "¡restricciones no acotadas!" que aparece en inglés en la figura 4.17.

Puesto que para este modelo en particular el noroeste es la dirección de optimización, podemos encontrar decisiones permisibles que asignen valores arbitrariamente grandes a la función objetivo. En otras palabras, podemos obtener ganancias que se aproximan a infinito. Un modelo así no tiene solución porque la función objetivo **no está acotada.** Esto significa que para cualquier conjunto de valores permisibles de las variables de decisión, siempre podemos encontrar otros valores permisibles que mejoren el valor objetivo. Los modelos de este tipo se llaman **modelos no acotados.** Los modelos no acotados son "patológicos". Pueden surgir, como en la figura 4.7, cuando no se incluye en el modelo una o varias restricciones importantes, o tal vez a causa de errores al introducir los datos de un modelo en el GLP o en la hoja electrónica para su optimización con Solver. En el mundo real, nadie ha descubierto todavía la forma de ob-

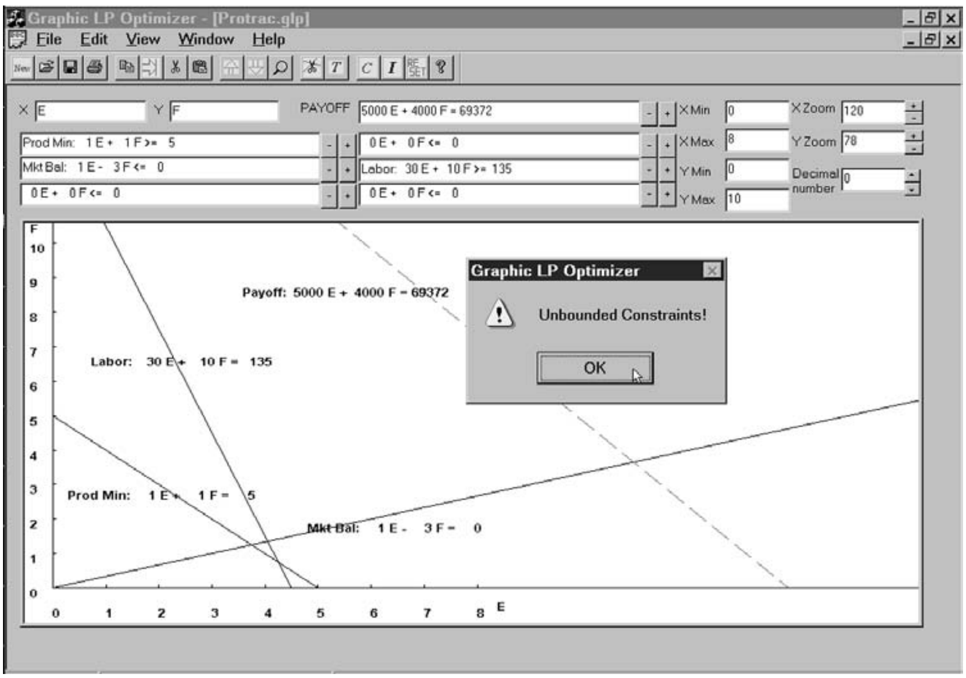


FIGURA 4.17

Modelo no acotado en PL de PROTRAC

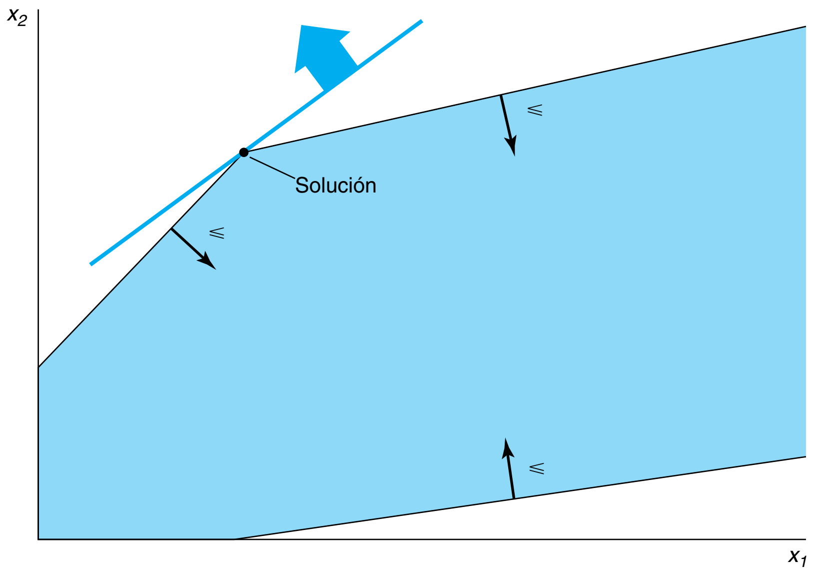


FIGURA 4.18

Conjunto restringido no acotado con sólo una solución en PL

tener ganancias infinitas, y puede usted estar seguro de que si un modelo ha sido formulado e introducido correctamente en la hoja de cálculo, siempre estará acotado.

Los estudiantes confunden a veces el término *modelo no acotado* con el concepto de un **conjunto restringido no acotado.** Esta última terminología se refiere a una región factible donde por lo menos una variable de decisión puede adoptar un valor arbitrariamente grande. Si una PL no está acotada, el conjunto restringido tampoco debe estar acotado, como muestra la figura 4.17. Sin embargo, es posible que tengamos un conjunto restringido no acotado sin que exista un modelo no acotado. Esto se ilustra gráficamente en la figura 4.18, que muestra un modelo hipotético de PL con dos variables de decisión, x_1 y x_2. El modelo tiene tres restricciones y un conjunto restringido no acotado, pero existe una solución óptima.

MODELOS NO FACTIBLES

Como vimos en el capítulo 3, existe otro tipo de patología con el cual debemos ser precavidos en la PL. Se le conoce como **no factibilidad** (infactibilidad) o, en forma alternativa, **inconsistencia.** Este término se refiere a un modelo que tiene un conjunto restringido vacío; es decir, que en él no existe una combinación de valores para las variables de decisión que satisfaga simultáneamente todas las restricciones. Una ilustración gráfica del **modelo no factible** se obtiene cambiando la primera restricción del modelo de PROTRAC a $E + F \leq 5$, en lugar de $E + F \geq 5$. Esto nos da el nuevo modelo

$$
\begin{aligned}
\text{Max } & 5000E + 4000F \\
\text{s.a. } & E + F \leq 5 && (1) \\
& E - 3F \leq 0 && (2) \\
& 10E + 15F \leq 150 && (3) \\
& 20E + 10F \leq 160 && (4) \\
& 30E + 10F \geq 135 && (5) \\
& E, F \geq 0
\end{aligned}
$$

El conjunto restringido para esta PL se representa gráficamente en la figura 4.19. Usted puede ver que no existe un par de valores (E, F) que satisfaga *todas* las restricciones.

Como muestra la figura 4.19, *la infactibilidad depende solamente de las restricciones y no tiene nada que ver con la función objetivo.* Obviamente una PL no factible carece de solución, pero esta patología no se presentará si el modelo ha sido formulado correctamente. En otras palabras, en los modelos bien planteados del mundo real, la infactibilidad significa siempre que el modelo ha sido especificado incorrectamente, ya sea a causa de errores de lógica o por errores

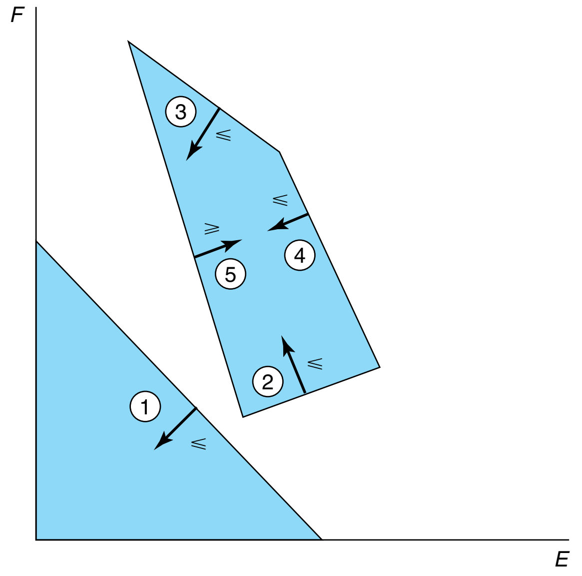


FIGURA 4.19

Modelo no factible en PL de PROTRAC

al introducir el modelo en el GLP o en la hoja de cálculo electrónica. Los errores de lógica pueden significar que se han incluido demasiadas restricciones, o que éstas son inadecuadas.

En resumen:

Todo programa lineal corresponde a alguna de las tres siguientes categorías, en las que no puede haber superposiciones:

1. El modelo tiene una solución óptima
2. No existe solución óptima porque el modelo no está acotado.
3. No existe solución óptima porque el modelo no es factible.

En la práctica, una PL correctamente formulada del mundo real siempre tiene una solución. Las situaciones 2 y 3 sólo pueden presentarse a causa de (1) errores en la formulación del modelo o (2) errores al introducir el modelo en el GLP o en la hoja de cálculo.

4.9 ANÁLISIS GRÁFICO DE SENSIBILIDAD

El modelo en PL de PROTRAC fue formulado y optimizado por Solver en el capítulo 3. En este capítulo hemos introducido una perspectiva gráfica para ayudarle a visualizar el importante papel que desempeñan los puntos extremos de la región factible cuando Solver optimiza un modelo lineal restringido. Usted podría pensar que ahora tiene una buena solución para PROTRAC y, por tanto, ya es libre de enfocar su atención en otros asuntos. Sin embargo en muchos casos, tal vez la mayoría, esto simplemente no es cierto. Con frecuencia la solución de un modelo sólo es un punto de partida y, en sí misma, es la parte menos interesante del análisis. Recuerde que el modelo es una abstracción de la situación en el mundo real. Si usted fuera el gerente responsable de PROTRAC, necesitaría hacer muchas preguntas adicionales antes de sentir la confianza necesaria para aplicar los resultados del Solver. Por ejemplo, puede haber consideraciones muy importantes que no fueron incorporadas al modelo a causa de su complejidad. En la medida en que un modelo es una simplificación de la realidad, siempre habrá algunos factores excluidos. Dichos factores pueden ser, por ejemplo, de carácter político o ético. Las consideraciones de esa índole suelen ser difíciles de cuantificar. Después de haber optimizado el modelo simplificado, usted deberá comprobar cómo "encaja" la solución óptima con otras consideraciones que tal vez no fueron incluidas. En otros casos, por ejemplo, puede haber inexactitudes e incertidumbre en algunos de los datos utilizados en el

CÁPSULA DE APLICACIÓN El modelo para una dieta

Preparar las mejores comidas posibles al costo más bajo posible es el objetivo de la administración de sistemas alimenticios en la mayoría de los programas vigentes (p. ej., en hospitales, asilos, escuelas y cárceles). La planificación del menú es el componente clave, ya que éste determina los requisitos en términos de comestibles, equipo y personal. Sin embargo, la planeación del menú engaña tanto a los expertos nutriólogos como al público en general porque parece ser un procedimiento sencillo. En el modelo se deben incluir muchas restricciones. Por ejemplo, el Consejo de Alimentación y Nutrición identificó los niveles de ingesta mínimos para 29 nutrientes (lo que se conoce con frecuencia como márgenes diarios recomendados). Otras dependencias dedicadas al cuidado de la salud han recomendado límites superiores para la ingesta de grasa, colesterol y sodio. Y, en total, puede ser bastante complicado planear menús que satisfagan todas las restricciones nutricionales.

Sin embargo, la nutrición no puede ser la única meta. Es fácil desarrollar modelos sencillos de dieta en hojas de cálculo electrónicas que satisfagan las restricciones nutricionales a un costo mínimo, pero nadie en su sano juicio se comería la dieta recomendada. Dicha dieta suele ser el equivalente de la versión humana del bizcocho para perros. Del padre de la programación lineal, George Dantzig, proviene una anécdota bastante humorística. Cuando George creó su primer modelo para una dieta personal, a principios de la década de 1950, como una ayuda para adelgazar mediante el control de la dieta, recomendó un montón de productos extravagantes *y también* 500 galones de vinagre. Suprimió el vinagre como posibilidad y su siguiente dieta "óptima" incluía 200 cubitos diarios de caldo concentrado. Al día siguiente, cuando intentó beber 4 cubitos disueltos en agua caliente, en lugar de su desayuno habitual, tuvo que escupir aquella mezcla salada. Después de varias tentativas adicionales de añadir restricciones, y de obtener como resultado recomendaciones ridículas, su esposa por fin se hizo cargo de la dieta.

Resulta obvio que este ejemplo, aunque auténtico, es un poco extremista en cuanto a lo que puede fallar en la formulación de una dieta en una hoja de cálculo, tomando como única base la nutrición, pero la verdad es que las preferencias del gusto del consumidor deben ser tomadas en cuenta. Los buenos modelos para una dieta dan cabida a esas restricciones adicionales. Éstas generalmente están incluidas en una o dos formas: una calificación de espaciamiento o una restricción de frecuencia. El primer enfoque se refiere a cuánto tiempo debe pasar antes que el mismo producto vuelva a ser ingerido (p. ej., no más puré de patatas en los próximos tres días). En el segundo enfoque, simplemente se indica cuántas veces por semana estaría usted dispuesto a comer un alimento en particular.

Las instituciones que han aplicado este menú generado por hojas de cálculo electrónicas: (1) han conseguido ahorros en los costos de 10 a 30%; (2) siempre han respetado las restricciones en materia de nutrientes, lo que no siempre ocurría con anterioridad; y (3) gozan en realidad del mismo grado de aceptación de los clientes, en términos de buen sabor, que las comidas planeadas con métodos tradicionales.

El caso que se presenta al final de este capítulo examina el problema de la dieta y resume las aportaciones de Dantzig al desarrollo del método símplex que utiliza Solver para optimizar modelos de PL. (Véase Lancaster y Dantzig.)

---

modelo. En las situaciones del mundo real, estos casos son la norma y no la excepción. El lema es: "saca el mejor provecho de lo que tienes".

En la mayoría de los casos usted deseará saber: ¿qué tan *sensible* es la solución óptima a los datos inexactos? Supongamos que tenemos un cálculo aproximado de la tasa de ausentismo de la fuerza laboral para el mes próximo y un modelo en el cual se utiliza dicha estimación. ¿Qué pasará con la solución óptima si cambiamos la estimación en 5, 10 o incluso 15%? ¿El valor óptimo (VO) de la función objetivo empezará a variar en forma desordenada o permanecerá más o menos invariable? Obviamente, como en el caso del ejemplo del análisis de sensibilidad presentado en el capítulo 2, la respuesta a estas preguntas nos ayudará a determinar la credibilidad de las recomendaciones de nuestro modelo. Por ejemplo, si el VO cambia muy poco cuando hay grandes cambios en el valor de un parámetro determinado, no tendrá usted que preocuparse por la incertidumbre referente a ese valor. Por otra parte, si el VO varía ampliamente con cambios pequeños de ese parámetro, entonces no podrá tolerarse mucha incertidumbre en el valor del mismo. En ese caso puede valer la pena comprometer más recursos a fin de establecer o pronosticar con mayor precisión el valor del parámetro en cuestión.

Aunque algunas de las consideraciones anteriores pueden manejarse de modo informal, afortunadamente disponemos de herramientas rigurosas y precisas para el efecto. Esas herramientas pertenecen al ámbito del **análisis de sensibilidad** o al **análisis de postoptimalidad.** Ambos términos significan esencialmente lo mismo y el tema es tan importante que todo el capítulo siguiente estará dedicado a comprender la información sobre sensibilidad contenida en la solución de Solver para un modelo de PL. Por supuesto, el debido aprovechamiento del análisis en hojas de cálculo electrónicas es un problema al cual se enfrentan todos los gerentes en el mundo real. En el resto de este capítulo continuaremos sentando las bases a fin de capacitarnos para comprender con claridad el significado de los resultados de Solver. La ampliación de nuestro enfoque gráfico hará que la tarea sea relativamente sencilla. La capacidad de *visualizar* geométricamente cómo afectan a la solución los cambios del modelo en este caso especial, con dos variables de decisión, facilitará bastante la comprensión de los cambios que se producirán en otros modelos más grandes y realistas.

Para introducir el análisis de sensibilidad en forma muy específica, nos referiremos de nuevo al modelo original en PL de PROTRAC que examinamos en la sección 4.3, el cual repetiremos a continuación con las restricciones rotuladas como referencia. Recuerde que el propósito de este modelo es ayudarnos a recomendar una meta de producción *para el próximo mes.* Por tanto, se supone que todos los datos numéricos del modelo son pertinentes para el periodo que nos interesa, es decir, el término de un mes en el futuro.

$$\begin{aligned}
\text{Max } & 5000E + 4000F \\
\text{s.a. } & E + F \geq 5 && ① \\
& E - 3F \leq 0 && ② \\
& 10E + 15F \leq 150 && ③ \\
& 20E + 10F \leq 160 && ④ \\
& 30E + 10F \geq 135 && ⑤ \\
& E, F \geq 0 && ⑥
\end{aligned}$$

Una aplicación importante de la PL se refiere a los modelos de planeación como el anterior, en los cuales se intenta fundamentar las políticas y los planes futuros, y para cuya construcción se requieren por supuesto datos sobre el futuro. Obviamente, es posible que muchos de esos datos no sean conocidos con total certidumbre en muchas situaciones del mundo real. Supongamos, por ejemplo, que los márgenes de contribución unitaria declarados, de \$5000 por E-9 y \$4000 por F-9, sólo sean estimaciones basadas en los ingresos y los costos variables proyectados para el próximo mes, y que los costos de algunas materias primas que se comprarán el mes entrante estén sujetos a cambios. Por desgracia, para lograr el tiempo de anticipación que requiere el proceso de planeación, hay que usar el modelo ahora mismo, antes de conocer los datos exactos. Así, debemos usar los números anteriores, que son nuestras mejores estimaciones hasta ahora, con pleno conocimiento de que los márgenes reales de contribución unitaria del mes próximo pueden ser diferentes. Tal vez tengamos ideas bastante firmes sobre los posibles márgenes dentro de los cuales se ubicarán los valores verdaderos, y quizá los límites de contribución unitaria de \$5000 y \$4000 sean nuestras mejores estimaciones dentro de esos márgenes. Pero, ¿cómo podemos lidiar con el hecho de que los datos no se conocen con absoluta certeza? Éste es un tema importante que está incluido en el análisis de la sensibilidad.

Otra preocupación posible se refiere a la incertidumbre en algunos de los datos restringidos. En la PL, este tipo de incertidumbre se enfoca de ordinario en el lado derecho de las restricciones. Por ejemplo, considere el número 135, que es el lado derecho de la restricción correspondiente al acuerdo contractual sobre las horas de trabajo. Representa el número mínimo de horas que deberán dedicarse a ensayos del producto el próximo mes. En una aplicación de la vida real, es posible que ese número también sea incierto. El requisito mínimo real que estará en vigor el mes entrante podría ser resultado de un cálculo bastante complicado, dependiendo, por ejemplo, de los resultados de las pruebas de calidad sobre la producción de este mes, los cuales sólo podrán ser *estimados* en la fecha en que se esté realizando el proceso de planeación. Así pues, el valor 135 no es más que una "buena estimación". Una vez más, la gerencia de PROTRAC tendrá que lidiar con la incertidumbre de ese tipo de datos.

Estos dos ejemplos reflejan el principal enfoque del análisis de sensibilidad y los temas que expondremos en las dos secciones siguientes. El primer ejemplo, en el cual los límites de contribución son inciertos, ilustra lo que llamamos *cambios en los coeficientes de la función objetivo.* El segundo ejemplo ilustra los *cambios en el lado derecho.* En un modelo de PL, los coeficientes de la función objetivo y los lados derechos se conocen frecuentemente como **parámetros,** por lo que la expresión **análisis paramétrico** se aplica también en algunas ocasiones a la investigación de los efectos que producen los cambios en los valores de esos parámetros. Sin embargo, para ser consistentes con la nomenclatura del capítulo 1 y con los informes de Solver, nos referiremos a esas investigaciones como análisis de sensibilidad. Veamos cómo el análisis gráfico puede brindarnos conocimientos sobre los efectos de esos cambios.

4.10 CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Supongamos que los datos restringidos permanecen sin cambios y solamente los coeficientes de la función objetivo se han modificado. En ese caso, el único efecto de esto sobre el modelo, desde el punto de vista geométrico, es un cambio en la pendiente de las rectas de ganancias. Observamos anteriormente una ilustración de este fenómeno en la sección 4.5. En la figura 4.13, todos los datos del modelo PROTRAC se han mantenido sin cambio alguno, excepto por el hecho de que el margen de contribución de los elementos F-9 aumentó de \$4000 a \$10,000 por unidad. Ya vimos que el efecto de este cambio consistió en modificar la inclinación de las rectas de ganancias, al grado que se obtuvo una nueva solución en un vértice.

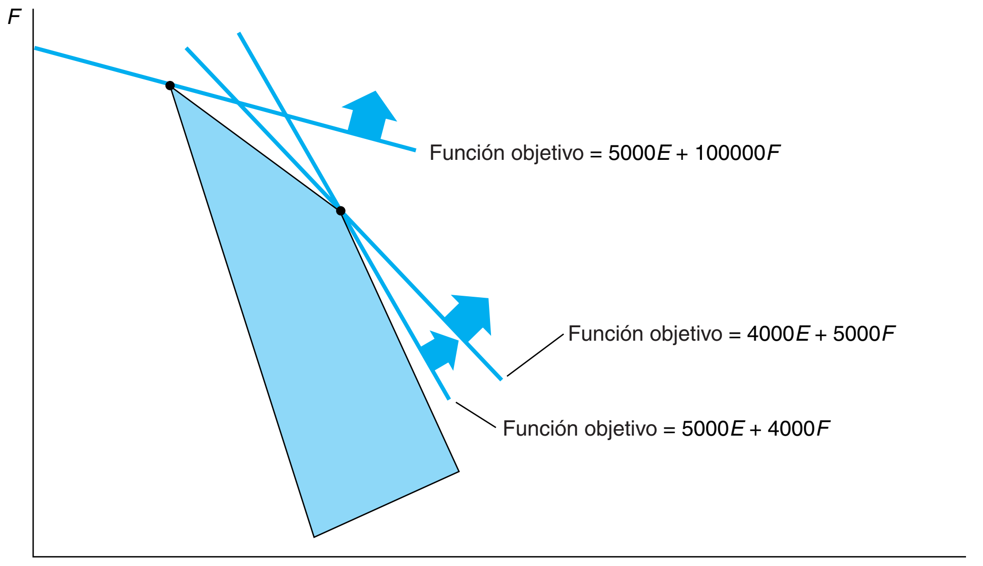


FIGURA 4.20

Modelo de PROTRAC con los contornos de tres funciones de ganancias diferentes y las soluciones correspondientes

Usted también podrá ver rápidamente que algunos cambios de los coeficientes de la función objetivo *no* modifican la solución óptima, aun cuando las rectas de ganancias tengan una pendiente diferente. Por ejemplo, sustituyamos la antigua función objetivo $5000E + 4000F$ por la nueva función objetivo $4000E + 5000F$. Como vimos en la figura 4.11, la solución obtenida con la función objetivo original es $E^* = 4.5$, $F^* = 7.0$. En la nueva función objetivo $4000E + 5000F$ se asigna un margen de contribución más bajo a las E-9 y un margen de contribución más alto a las F-9. En consecuencia, sería lógico esperar una solución óptima que requiriera la producción de menos de 4.5 de E-9 y más de 7.0 unidades de las F-9 más rentables. Sin embargo, la figura 4.20 presenta un análisis gráfico donde se demuestra que en realidad no sucede así. En esta figura aparecen tres funciones objetivo diferentes:

$$(1)\ 5000E + 4000F,\ (2)\ 4000E + 5000F,\ \text{y}\ (3)\ 5000E + 10{,}000F$$

Es evidente que las pendientes negativas de los contornos asociados a cada una de las tres funciones se vuelven cada vez menos pronunciadas (es decir, los contornos se aplanan), cuando aumenta la rentabilidad de las

F-9 en relación con las E-9 (es decir, a medida que aumenta la razón $\dfrac{\text{Coeficiente de } F}{\text{Coeficiente de } E}$).

Sin embargo, a pesar de que los objetivos $5000E + 4000F$ y $4000E + 5000F$ tienen contornos con pendientes diferentes, *las pendientes no son lo suficientemente diferentes para producir una nueva solución en un vértice.* Para cada uno de esos dos objetivos, la solución óptima es la misma, es decir $E^* = 4.5$ y $F^* = 7.0$.

Por otra parte, es importante señalar que en este caso las ganancias óptimas (es decir, los valores objetivos óptimos) serán diferentes. En el caso original teníamos

$$\text{Ganancia óptima} = 5000E^* + 4000F^* = 5000(4.5) + 4000(7) = 50{,}500$$

mientras que en el último caso,

$$\text{ganancia óptima} = 4000E^* + 5000F^* = 4000(4.5) + 5000(7) = 53{,}000$$

Usted puede comprobar esos resultados introduciendo las dos funciones objetivo en el cuadro “RÉDITOS” del GLP y optimizando la PL. En conclusión, lo que acabamos de observar puede resumirse en estos términos:

Al cambiar los coeficientes de la función objetivo, se modifican las pendientes de los contornos de la función objetivo. Esto puede afectar o no la solución óptima.

4.11 CAMBIOS EN EL LADO DERECHO

Pasemos por alto momentáneamente la función objetivo y enfoquemos ahora nuestra atención en el lado derecho de las funciones restringidas. Una vez más, el análisis gráfico nos explicará con claridad los efectos de los cambios en esos parámetros. Como ejemplo específico, supongamos que la quinta restricción del modelo en PL de PROTRAC

$$30E + 10F \geq 135 \quad \text{(horas de trabajo empleadas en las pruebas)} \tag{4.13}$$

se modifica así

$$30E + 10F \geq 210 \tag{4.14}$$

y supongamos también que todos los demás datos restringidos permanecen igual. Por el hecho de que el número 135 es menor que 210, la expresión (4.13) resulta más fácil de satisfacer que la (4.14). Por ejemplo, la pareja de valores $E = 3$, $F = 5$ satisface (4.13) para

$$30E + 10F = 30(3) + 10(5) = 90 + 50 = 140$$

Como 140 es $\geq$ 135, (4.13) se satisface. Pero 140 es menor que 210 y, por consiguiente, la pareja de valores $E = 3$, $F = 5$ *no* satisface la condición (4.14). Otra forma de expresar esto es que ahora un menor número de *combinaciones de valores de E y F se satisfacen (4.14).*

Por este hecho, sería razonable esperar que el cambio de (4.13) a (4.17) llegara a “contraer” en cierta forma la región factible. Desde el punto de vista geométrico, podemos observar que el cambio en el lado derecho de una restricción crea una traslación paralela de la recta restringida. Así pues, en este caso, el razonamiento anterior sugiere que cuando el LD sea modificado de 135 a 210, la quinta recta de restricción —la correspondiente a (4.13)— se desplazará, de modo que una parte de la región factible será suprimida. La figura 4.21 presenta el conjunto restringido original, con las restricciones rotuladas del ① al ⑤.

La figura 4.22 muestra el nuevo conjunto restringido en el cual la quinta restricción (4.13) ha sido sustituida por la (4.14). Aun cuando, en términos geométricos, el conjunto restringido de la figura 4.22 parece muy diferente del que muestra la figura 4.21, lo único que se ha hecho es trasladar la restricción rotulada ⑤, alejándola más del origen para llevarla hasta su nueva posición.

Sería conveniente que experimentara usted asignando diferentes valores al lado derecho de esta restricción, y también al lado derecho de las demás, usando la formulación del GLP de la sección 4.3, para ver la variedad de regiones factibles, con diferentes aspectos, que pueden surgir de perturbaciones tan sencillas. Podrá hacer esto en el GLP introduciendo diferentes valores

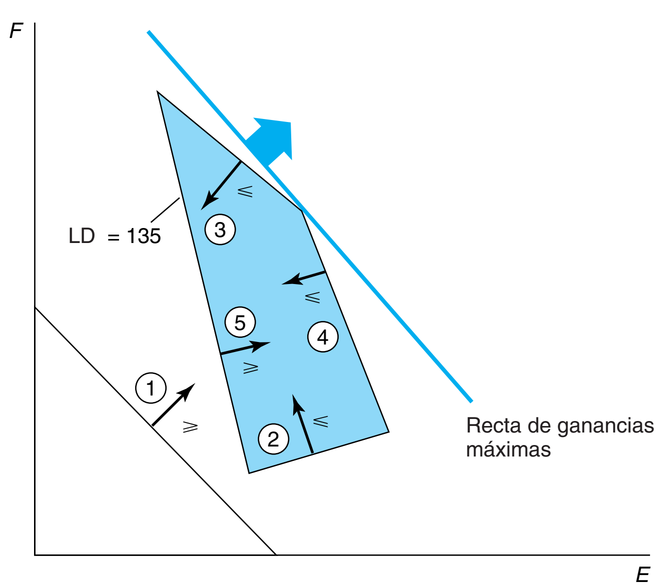


FIGURA 4.21
Análisis gráfico del modelo original en PL de PROTRAC

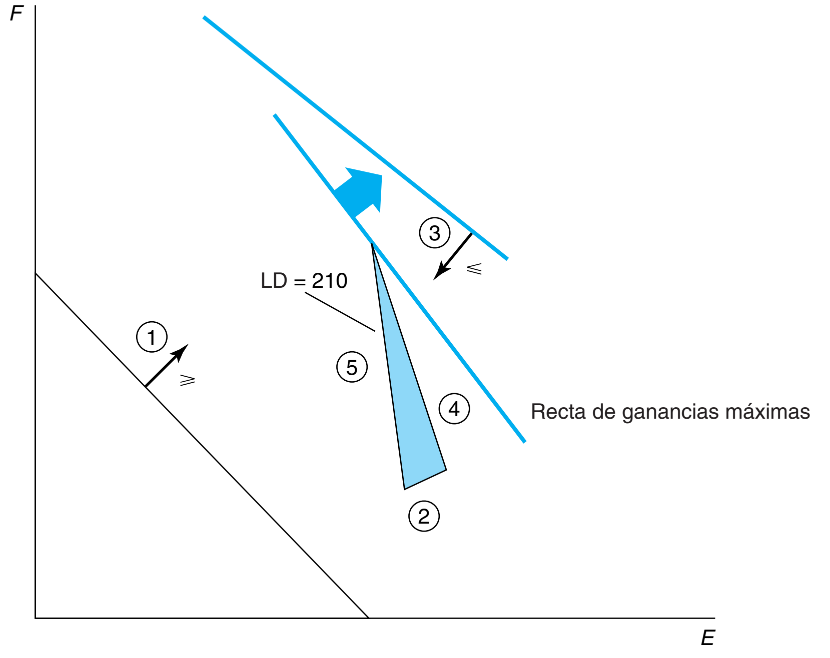


FIGURA 4.22

Análisis gráfico del modelo en PL de PROTRAC con un nuevo LD para la quinta restricción

en el LD de las restricciones, haciendo clic y arrastrando las rectas restringidas[3], o bien, haciendo clic en los botones +/− que aparecen a la derecha de cada cuadro de ecuación en el GLP. Se presentará un caso particularmente interesante si aumenta usted aún más el lado derecho de la quinta restricción, hasta 270, sin cambiar ninguno de los demás datos de restricciones. En el problema 4-27 se le pedirá que demuestre que, en este caso, ha creado usted un conjunto de restricciones inconsistente. Es decir, que el modelo ha dejado de ser factible.

Volvamos ahora a la figura 4.22. En ella se muestra la solución óptima para la función objetivo $5000E + 4000F$. Comparando esto con el análisis gráfico del modelo original (figura 4.21), usted puede ver que la solución del nuevo modelo es totalmente distinta de la del viejo modelo. Tenemos que

En el viejo modelo:
Restricciones activas: ③ y ④
Restricciones inactivas: ①, ②, y ⑤
Solución (resolviendo las restricciones activas) $E^* = 4.5$, $F^* = 7$
Ganancia óptima = VO = 50,500
En el nuevo modelo:
Restricciones activas: ④ y ⑤
Restricciones inactivas: ①, ②, y ③

La solución computada por el GLP o calculada a mano sería la siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Restricción ④: } & 20E + 10F = 160 \\
\text{Restricción ⑤: } & \underline{30E + 10F = 210} \\
\text{Restando: } & -10E = -50 \\
& E = 5 \\
\text{Sustituyendo: } & 20(5) + 10F = 160 \\
& F = 6
\end{aligned}$$

De donde, $E^* = 5$, $F^* = 6$, y ganancia óptima $= \text{VO} = 5000E^* + 4000F^*$
$= 5000(5) + 4000(6) = 49{,}000$

[3]Deberá estar en el modo “no recortar” (“un-trim”) para que pueda hacer clic en las restricciones y arrastrarlas directamente.

En este análisis debe resultar claro que si usted cambia un valor de la derecha, aunque sea uno solo, el efecto en la solución puede ser muy considerable. En el capítulo 5 veremos que Solver puede usarse para obtener información de sensibilidad sobre los efectos de esos cambios. Por ahora, resumamos lo que hemos visto gráficamente en esta sección acerca de modelos bidimensionales. Estos resultados, como los obtenidos anteriormente para los cambios del coeficiente de una función objetivo, también son válidos para modelos con más de dos variables de decisión.

El cambio de un valor del lado derecho tiene como resultado una traslación paralela de la restricción modificada. Esto *puede* afectar tanto la solución óptima como el VO (el valor objetivo óptimo). El efecto en cada caso dependerá de los valores precisos del lado derecho que sean modificados y de la magnitud de dichos cambios.

4.12 ESTRECHAMIENTO Y RELAJACIÓN DE UNA RESTRICCIÓN DE DESIGUALDAD

Concluiremos esta exposición sobre el análisis de sensibilidad haciendo algunas observaciones generales acerca de los efectos producidos por cambios en el lado derecho de las *restricciones de desigualdad.* Esto nos llevará a conocer varios términos nuevos y útiles. En la exposición anterior hemos comparado las dos restricciones

$$30E + 10F \geq 135 \tag{4.13}$$

y

$$30E + 10F \geq 210 \tag{4.14}$$

e hicimos notar que como cada restricción pertenece a la forma $\geq$, y dado que el lado derecho de (4.14) es mayor que el lado derecho de (4.13), la restricción (4.14) es más difícil de satisfacer. A este proceso de aumentar el LD de una restricción $\geq$ se le llama **estrechamiento de restricciones.** La restricción (4.14) es *más rígida* que la (4.13). En forma similar, si el LD de una restricción $\leq$ disminuye, la restricción se vuelve más difícil de satisfacer y, por tanto, resulta más rígida.

Estrechar una restricción de desigualdad significa hacerla más difícil de satisfacer. Para una restricción $\geq$ esto significa aumentar el LD. Para una restricción $\leq$ esto significa disminuir el LD.

Supongamos que en lugar de aumentar el LD de (4.13) lo reducimos, de modo que la restricción se convierte, por ejemplo, en

$$30E + 10F \geq 100 \tag{4.15}$$

Usted podrá comprobar que, como el lado derecho de la desigualdad ya es un número más pequeño y como (4.15) es una restricción $\geq$, ahora hay *más* combinaciones de valores de E y F que la satisfacen. Así pues, la restricción se ha vuelto ahora más fácil de satisfacer. Este proceso de disminuir el LD de una restricción $\geq$ se conoce como **relajación de la restricción.** La restricción (4.15) es *más relajada* que la (4.13). En forma semejante, si el LD de una restricción $\leq$ aumenta, la restricción se vuelve más fácil de satisfacer y, por tanto, es más relajada.

Relajar una restricción de desigualdad significa hacerla más fácil de satisfacer. En el caso de una restricción $\geq$ esto significa disminuir el LD. Para una restricción $\leq$ esto significa aumentar el LD.

Es fácil ilustrar los efectos geométricos del estrechamiento y la relajación. Hemos visto que al pasar de la figura 4.21 a la figura 4.22, la restricción 5 se ha endurecido y la región factible se contrajo. Al pasar de la figura 4.22 a la figura 4.21 se ablanda la restricción 5 y la región factible se expande. Estos resultados geométricos (el estrechamiento se contrae y la relajación se expande), son lo que usted probablemente habría esperado, pero también hay que considerar otra posibilidad.

Considere la restricción ①, $E + F \geq 5$. Observe en la figura 4.21 que en realidad dicha restricción no influye para determinar la configuración del conjunto factible. Además, con un cambio adecuadamente pequeño en su lado derecho, digamos de 5 a 5.1 o 4.9, la recta sufrirá un pequeño desplazamiento en dirección paralela sin llegar a cruzar todavía el conjunto factible original. Así, en este caso vemos que una cantidad adecuadamente pequeña de estrechamiento o relajación de la restricción ① no tiene efecto alguno en el conjunto factible. Resumiremos ahora nuestra observación acerca de los efectos geométricos de estrechar y relajar restricciones de desigualdad.

El estrechamiento de una restricción de desigualdad contrae el conjunto restringido, o bien, no lo afecta en absoluto. La relajación de una restricción de desigualdad expande el conjunto restringido, o bien, no lo afecta en absoluto.

Generalmente, estos resultados son válidos para restricciones de desigualdad y no dependen de la dimensión del modelo (el número de variables de decisión) o de que la restricción corresponda a la forma $\leq$ o $\geq$. Es preciso subrayar que en este análisis hemos supuesto que cuando una restricción es manipulada, todas las demás permanecen fijas. Los efectos de estrechar (relajar) varias de ellas a la vez consisten también en contraer (expandir) o tal vez no producir ningún cambio en la región factible. Sin embargo, si algunas restricciones son endurecidas y al mismo tiempo otras son relajadas, es poco lo que se puede decir categóricamente sobre el resultado. Concluimos esta sección con la observación de que si se endurece demasiado una restricción ésta puede dejar de ser factible, como ocurrió cuando el LD de la restricción ⑤ aumentó a 270.

4.13 RESTRICCIONES REDUNDANTES

Una restricción como la ① de la figura 4.21 se denomina **redundante.** Aunque en esta figura se presenta el gráfico de cinco restricciones, sólo cuatro de ellas se necesitan para definir la región factible. Es así porque, como lo indica claramente la figura, cualquier combinación de valores E y F que satisface las restricciones rotuladas ②, ③, ④, y ⑤ satisface también automáticamente la restricción rotulada ①. En este sentido, la primera restricción es superflua. Presentamos aquí una definición precisa.

Una restricción redundante es aquella cuya supresión no provoca cambios en la región factible.

En virtud de que, por definición, puede descartarse una restricción redundante sin modificar la región factible, su eliminación tampoco tendrá efecto alguno en la solución óptima del modelo. ¿Para qué preocuparse entonces de incluir dicha restricción en el modelo? Hay dos razones importantes para esto:

1. Generalmente, las restricciones redundantes no son muy fáciles de reconocer. Aun en el caso sencillo de modelos con dos variables de decisión, si busca usted solamente la forma algebraica del modelo matemático, las restricciones redundantes no serán detectables de inmediato. Por ejemplo, no es obvio en la formulación simbólica de PL que la restricción $E + F \geq 5$ sea redundante en el modelo de PROTRAC. Por supuesto, la representación gráfica aclara la situación en este modelo bidimensional. Sin embargo, como el análisis gráfico se limita a modelos bidimensionales, no es útil para detectar redundancia en modelos más grandes.

2. Una restricción que hoy es redundante puede dejar de serlo mañana. Por ejemplo, supongamos que la gerencia de PROTRAC ha decidido explorar los efectos de una nueva decisión según la cual produciría por lo menos 7, en lugar de 5, unidades de E y F en total. Entonces el LD de la primera restricción cambiaría a 7 en lugar de 5. La primera restricción modificada se ha graficado como una línea interrumpida en la figura 4.23, y se observa que la nueva restricción ya no es redundante. En otras palabras, el *estrechamiento* del requisito, de 5 a 7, nos ha obligado a descartar algunas decisiones que anteriormente eran admisibles.

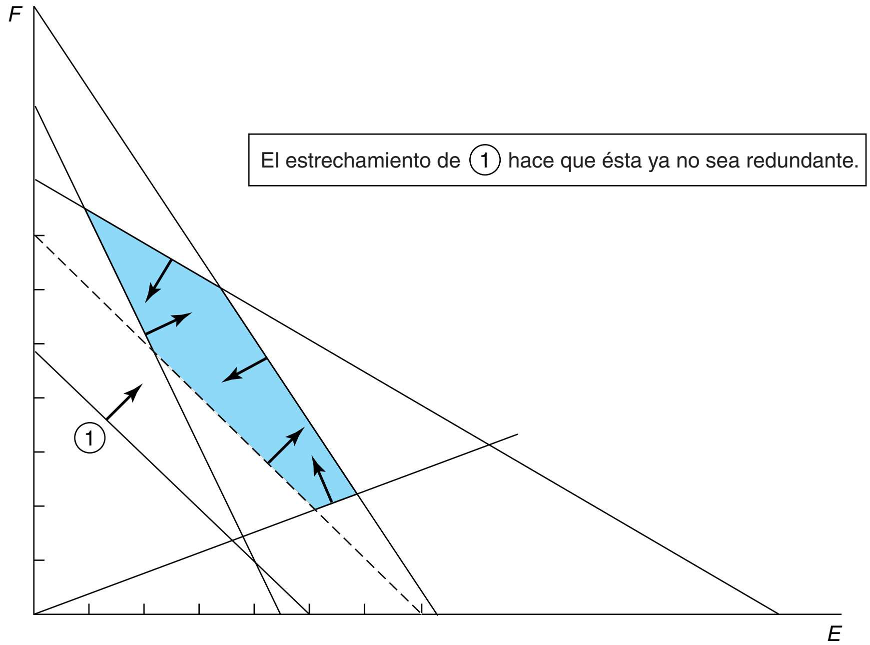


FIGURA 4.23

Estrechamiento de la primera restricción de la PL de PROTRAC

Es muy posible que una restricción redundante para un determinado conjunto de datos deje de ser redundante cuando algunos de esos datos son modificados.

A eso se debe que con frecuencia se conserve una restricción redundante en los modelos. Es una práctica común resolver muchas veces los modelos de planeación con diferentes conjuntos de datos para obtener conocimientos acerca de posibles escenarios futuros. En virtud de que existen condiciones de interés (valores de los datos) para las cuales una restricción puede llegar a ser *importante,* siempre es más conveniente incluirla en el modelo de PL.

4.14 ¿QUÉ ES UNA RESTRICCIÓN IMPORTANTE?

Como dijimos anteriormente, puede haber una diferencia entre las restricciones "importantes" y las "no importantes". De hecho, ya hemos visto que en un modelo de PL puede haber muchas restricciones en general. Sería interesante saber si algunas de esas numerosas restricciones es especialmente importante en el modelo. Es indudable que a la gerencia de PROTRAC le interesa saber cuáles restricciones son más restrictivas, por cuanto imponen límites a las posibilidades de obtener mayores ganancias.

RESTRICCIONES REDUNDANTES

La exposición de la sección anterior sugiere que, *para un conjunto de datos dado, las restricciones redundantes (si las hay) son las menos importantes.* Es decir, ya hemos observado que la restricción 1 es redundante, lo cual significa que puede ser pasada por alto sin que cambie el conjunto de restricciones y, por tanto, sin que se modifique la solución óptima. El hecho de que dicha restricción no afecte a la solución hace que aquélla tenga poca importancia *para el conjunto de datos dado.* Sin embargo, ¿podríamos decir algo más? Concretándose a los términos de lo que hemos aprendido hasta aquí, ¿podría usted identificar otras restricciones del modelo que parezcan ser "más importantes" que las demás?

RESTRICCIONES ACTIVAS E INACTIVAS

En la figura 4.24 se ha reproducido el análisis gráfico del modelo en PL de PROTRAC. Esta figura muestra que en realidad hay otras restricciones en el modelo que pueden ser pasadas por alto sin afectar la solución, a saber, las restricciones 2 y 5.

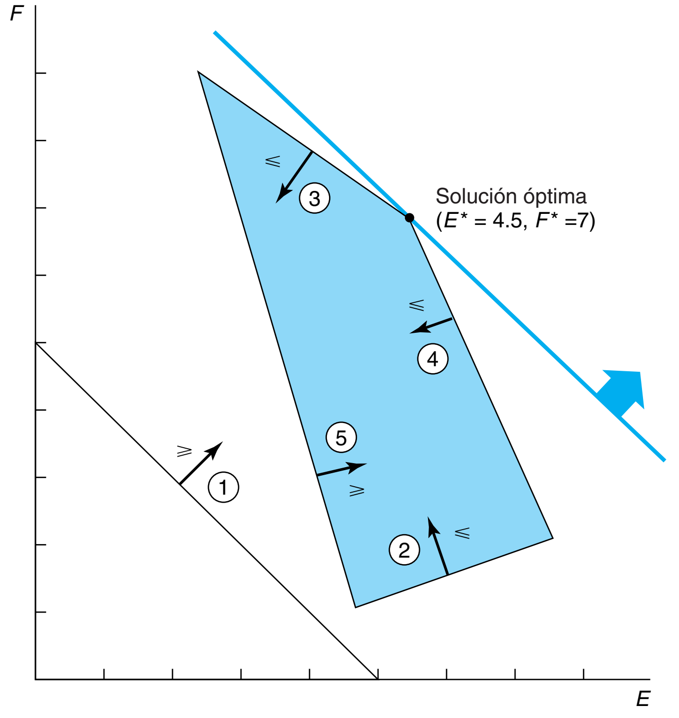


FIGURA 4.24

Análisis gráfico del modelo original en PL de PROTRAC

El análisis gráfico del modelo con la supresión de las restricciones ①, ② y ⑤ se muestra en la figura 4.25.

Aunque la región factible se ha expandido considerablemente, la solución óptima no ha cambiado. Recuerde que en este modelo las restricciones ①, ②, y ⑤ son las **restricciones inactivas.** El fenómeno que acabamos de observar también es válido, en general, para modelos con más dimensiones.

En cualquier modelo de PL, *para un conjunto de datos fijo,* las restricciones inactivas pueden ser suprimidas sin afectar la solución óptima. La solución óptima está determinada íntegramente por las restricciones activas.

De este modo, para un conjunto de datos dado, las **restricciones activas** son las importantes, en el sentido de que ellas determinan totalmente la solución. Si pudiéramos saber con anterioridad cuáles de las restricciones son activas, la tarea de resolver una PL se reduciría al problema relativamente sencillo de resolver un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, como las ecuaciones correspondientes a las líneas rotuladas ③ y ④ en la figura 4.24. Aunque podemos estar de acuerdo en que las restricciones activas son las más importantes, esta información sólo está a nuestro alcance *después* de haber resuelto el modelo, porque desgraciadamente el constructor del modelo no dispone de ningún medio para saber con anticipación cuáles de las restricciones de desigualdad serán activas.[4] Por esa razón, Solver usa un algoritmo símplex más complejo para resolver los modelos de PL en general.

Para concluir esta sección, deseamos subrayar que cuando los datos de un modelo son modificados, el conjunto de restricciones de desigualdad activas e inactivas también puede cambiar. *En otras palabras, las restricciones no importantes (inactivas) para un conjunto de datos pueden convertirse en importantes (activas) cuando el modelo es resuelto con datos diferentes.* Se puede concebir un modelo como "una estructura o marco lógico", que subraya los valores numéricos asignados a los parámetros. Este marco lógico refleja las interacciones de las variables y también los requisitos y limitaciones. En cierto sentido, el marco lógico es independiente de los valores que se asignen a los parámetros (es decir, de los datos). Con diferentes valores

[4]Recuerde que una igualdad estrecha, por definición, siempre es activa

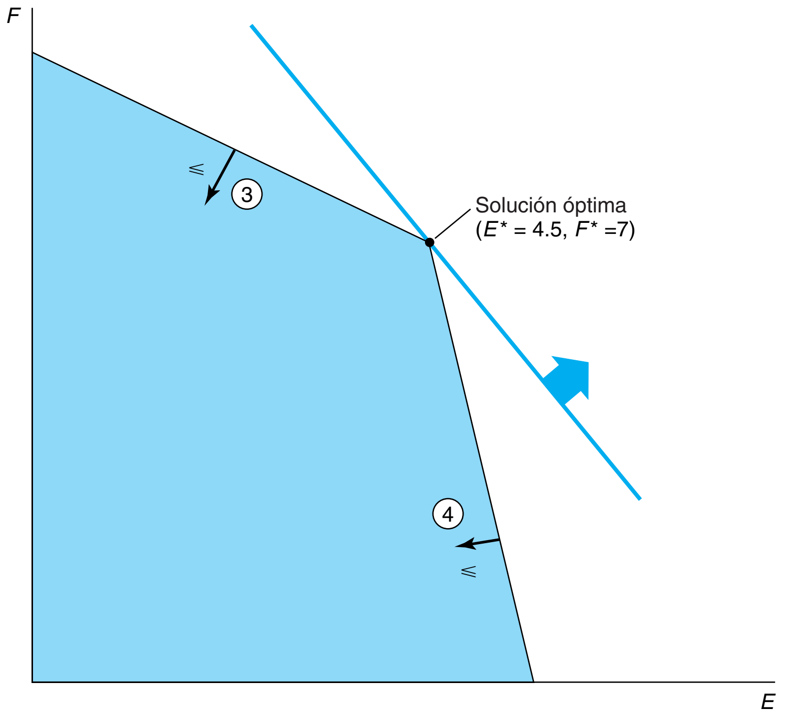


FIGURA 4.25

Análisis gráfico de PROTRAC cuando se suprimen las restricciones ①, ②, y ⑤

de los datos se obtienen distintos escenarios acerca del modelo. En este contexto más amplio, realmente no tiene sentido decir que algunas restricciones son más importantes que otras. *La importancia de las restricciones es una pregunta relativa cuya respuesta dependerá de los valores que se asignen a los datos.*

4.15 ADICIÓN O SUPRESIÓN DE RESTRICCIONES

El análisis gráfico demuestra en forma inmediata una última observación general sobre los efectos de añadir o suprimir restricciones. Si compara las figuras 4.24 y 4.25, verá de inmediato lo que puede suceder cuando se eliminan restricciones. La supresión de la restricción rotulada ① (la restricción redundante) no tuvo efecto alguno sobre el modelo. La supresión de ② permitió expandir la región factible. La supresión de ⑤ permitió expandirla aún más, como muestra la figura 4.25. Así, para cualquier modelo de PL podemos hacer esta declaración general:

> La supresión de restricciones hace que la región factible se expanda o no sufra cambio alguno.

Ya observamos anteriormente el efecto de añadir restricciones a un modelo. Ese impacto quedó demostrado cuando se trazó el gráfico del conjunto de restricciones para el modelo PROTRAC con el GLP. Recordará usted que la superposición de restricciones sucesivas tuvo el efecto de “recortar” el conjunto restringido. También esto es válido en general.

> La adición de restricciones hace que la región factible se vuelva más pequeña o no sufra cambio alguno.

Puesto que la adición de restricciones puede producir el efecto de recortar la región factible, puede resultar que al añadir una nueva restricción a un modelo se “recorte” la porción del conjunto restringido que contenía la solución óptima anterior. Si esto sucede, el resultado puede ser un VO (valor óptimo objetivo) más reducido en el nuevo modelo. Este efecto se ilustra

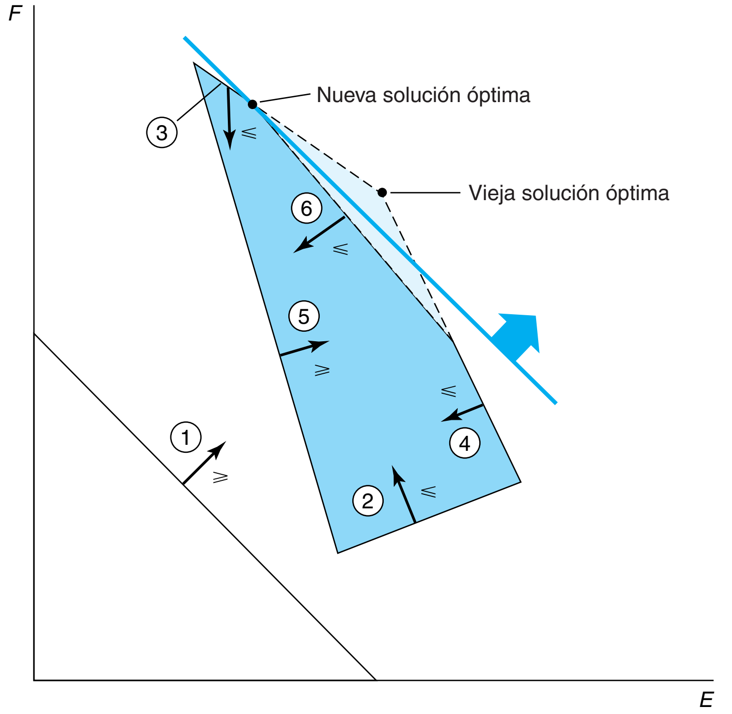


FIGURA 4.26

Adición de una sexta restricción

en la figura 4.26, en la cual se ha agregado una sexta restricción de desigualdad al modelo PROTRAC. La región que aparece sombreada en la figura 4.26 representa la parte del conjunto restringido que fue eliminada por la adición de la restricción rotulada ⑥.

La dirección ascendente en este diagrama corresponde al noreste y la nueva recta de ganancias máximas no está en una posición tan elevada como la recta de ganancias máximas anterior. En este caso, la imposición de una nueva restricción ha hecho que se reduzca la ganancia óptima. A esto se debe, por supuesto, que los gerentes prefieran operar con el menor número posible de restricciones. *Cuanto mayor sea el número de restricciones, tanto más probable es que el valor objetivo óptimo sea menos deseable.* El resultado general puede formularse así:

> La adición de restricciones a un modelo empeora el VO o bien no lo cambia en absoluto. La supresión de restricciones mejora el VO o no produce cambio alguno en él.

Los resultados de añadir o suprimir restricciones son análogos a los que se presentan al estrechar o relajar restricciones de desigualdad, en términos de sus efectos sobre la región factible y también sobre el valor objetivo óptimo. Así pues, en el resultado anteriormente ilustrado, la expresión *estrechamiento de las restricciones de desigualdad* podría ser sustituida por *adición de restricciones a un modelo.* La expresión *relajación de restricciones de desigualdad* podría ser sustituida igualmente por *supresión de restricciones.*

Observe que un razonamiento similar nos conduce al siguiente resultado general de la adición o supresión de variables de decisión:

> La adición de variables mejora el VO o no lo cambia en absoluto, mientras que la supresión de variables empeora el VO o no produce cambios en él.

4.16 RESUMEN

En este capítulo se ha explicado el importantísimo papel de la geometría bidimensional para ilustrar ciertos conceptos trascendentales. En particular, usamos el método geométrico para resolver modelos de PL en dos variables de decisión, para ilustrar el significado de las restricciones activas e inactivas, para mostrar la importante relación entre las soluciones óptimas y los vértices de la región factible y, por último, para ilustrar propiedades patológicas.

Vimos que el método de resolución gráfica implica dos pasos principales: determinar el conjunto de decisiones factibles y después seleccionar la mejor de todas esas decisiones. El prerrequisito fundamental para aplicar esos pasos es la capacidad para trazar gráficos de igualdades lineales y desigualdades lineales. En la sección 4.2 se presentó un breve repaso de las técnicas necesarias.

La tarea de determinar el conjunto de decisiones factibles se reduce comúnmente a representar los valores de las variables de decisión que satisfacen una serie de desigualdades lineales. (También puede haber igualdades en el sistema, pero eso sólo significa que las decisiones factibles deberán encontrarse también en cada recta de igualdad.) En la sección 4.3 vimos que este conjunto se determina mediante las superposiciones sucesivas de los gráficos de las restricciones, después de lo cual se identifican los puntos que se encuentran en el lado correcto de *todas* las desigualdades.

Para encontrar la mejor solución factible, grafique el contorno de una sola función objetivo, identificando la dirección de optimización (ascendente para los modelos Max y descendente para los modelos Min), y traslade después el contorno en dirección paralela a sí mismo en la dirección de la optimización, identificando finalmente una solución en un vértice. Demostramos cómo se utiliza el optimizador gráfico GLP para este propósito. En la sección 4.5 vimos que si una PL tiene una solución óptima, entonces siempre habrá por lo menos una solución óptima localizada en un vértice, la cual se conoce también como solución de punto extremo.

El procedimiento gráfico ilustra que solamente es necesario identificar las restricciones activas. Así, los valores óptimos de las variables de decisión se obtienen resolviendo simultáneamente esas ecuaciones. Desde el punto de vista geométrico, las restricciones activas fueron definidas como aquéllas que pasan por el vértice óptimo de la región factible. Algebraicamente, una restricción activa es aquella para la cual el lado izquierdo, cuando es evaluado en condición óptima, resulta igual al lado derecho. *Excedente* y *holgura* son términos que se emplean para indicar la diferencia no negativa entre los dos lados de una restricción de desigualdad. El término *excedente* se usa por lo común para las restricciones $\geq$ y *holgura* para las restricciones $\leq$.

La sección 4.6 contiene un resumen del método de solución gráfica para un modelo Max, y en la sección 4.7 vimos que esa técnica podía extenderse fácilmente a los modelos Min. La única modificación necesaria para un modelo Min consiste en asegurarse de que los perfiles del contorno objetivo se desplacen en dirección descendente durante el proceso de búsqueda de la mejor decisión factible.

En la sección 4.8 consideramos dos casos patológicos en los cuales un modelo de PL no tenía una solución óptima. En un modelo Max no acotado, la función objetivo puede asumir valores arbitrariamente grandes (y valores negativos arbitrarios en un modelo Min no acotado). Esto implica de ordinario que una o varias restricciones importantes fueron omitidas durante la formulación del modelo. Un modelo no factible es aquel en el que no existen soluciones factibles: es decir, que el conjunto de valores de la variable de decisión que satisfacen todas las restricciones se encuentra vacío. Este resultado puede presentarse a causa de una formulación incorrecta, como cuando se insiste en la aplicación de dos o más condiciones contradictorias. También pueden presentarse modelos no acotados y no factibles como resultado de errores de transcripción cometidos en el proceso de introducir los datos del modelo en el GLP o, en general, en el modelo de PL construido en hojas de cálculo electrónicas.

En este capítulo se empleó también el análisis gráfico para introducir el tema del análisis de sensibilidad, también conocido como análisis de postoptimalidad. El enfoque general del análisis de sensibilidad consiste en suponer que un modelo de PL ha sido resuelto y después investigar el efecto que producen diversos cambios en el modelo. Habitualmente nos interesa observar el efecto de los cambios sobre la solución óptima y sobre el valor óptimo de la función objetivo.

En la sección 4.10 vimos que al modificar los coeficientes de la función objetivo cambia la pendiente de los contornos de la función objetivo. Esto puede afectar o no la solución óptima.

Las secciones 4.11 y 4.12 trataron sobre cambios introducidos en el lado derecho de las restricciones. Observamos primero que al cambiar el valor del lado derecho se produce un desplazamiento paralelo de la restricción modificada. Esto puede afectar tanto la solución óptima como el valor objetivo óptimo. El efecto dependerá de qué valores sean modificados en el lado derecho. Los cambios en el lado derecho de una restricción de desigualdad pueden ser concebidos como el estrechamiento o la relajación de la restricción. Estrechar una restricción significa hacer que resulte más difícil de satisfacer. En una restricción $\geq$ significa aumentar el LD. En una restricción $\leq$ significa reducir el LD.

En forma similar, relajar una restricción significa hacer que sea más fácil satisfacerla. Para una restricción $\geq$ significa reducir el LD. Para una restricción $\leq$ significa aumentar el LD. Desde un punto de vista geométrico, el estrechamiento de una restricción de desigualdad contrae el conjunto restringido o no lo afecta en absoluto. La relajación de una restricción de desigualdad expande el conjunto restringido o no produce cambio alguno en él. Desde un punto de vista práctico, estas operaciones pueden limitar más, aumentar más o no producir cambios en las opciones disponibles para el gerente.

Otra forma en la cual puede modificarse un modelo después de su formulación y resolución originales consiste en añadir o suprimir restricciones. El efecto de esos cambios fue investigado en la sección 4.15. En el curso de ese análisis observamos que una restricción redundante es aquélla cuya supresión no ocasiona cambio alguno en la región factible. Además, como vimos en la sección 4.14, una restricción inactiva puede suprimirse del modelo sin modificar la solución óptima. Por tanto, se podría tener la tentación de suprimir las restricciones redundantes o inactivas de un modelo antes de resolverlo, si fuera posible identificar tales restricciones. Sin embargo, la verdad es que de ordinario no es posible reconocer las restricciones redundantes, y las restricciones inactivas se revelan solamente cuando el modelo ya ha sido resuelto. Más aún, los conceptos de redundante e inactiva dependen de los datos. Si modifica usted los datos, las restricciones redundantes y las inactivas pueden cambiar. Vale la pena pensar en el modelo como "la estructura o marco lógico" que describe la operación del sistema en cuestión, independientemente de los valores numéricos asignados a los parámetros. Puesto que las restricciones que son redundantes o inactivas para un conjunto de valores de los parámetros pueden no seguirlo siendo cuando dichos valores se modifican, la tarea de ponerse a buscar las restricciones redundantes o inactivas resultaría tan inapropiada como difícil. Con la supresión de restricciones se expande la región factible o no resulta afectada en absoluto, mientras que la adición de restricciones hace que la región factible se contraiga o no sufra cambio alguno, por lo cual los efectos de suprimir y añadir restricciones son análogos a los efectos de relajación o estrechamiento de las mismas.

Términos clave

Análisis de postoptimalidad. Sinónimo de *análisis de sensibilidad.*

Análisis de sensibilidad. Análisis del efecto de los cambios introducidos en varios parámetros sobre el modelo, en particular su efecto sobre la solución óptima y sobre el valor óptimo de la función objetivo.

Análisis paramétrico. Sinónimo de *análisis de sensibilidad.*

Conjunto restringido. Sinónimo de *región factible.*

Conjunto restringido no acotado. Conjunto restringido en el que por lo menos el valor de una variable de decisión se puede incrementar arbitrariamente.

Contorno. Un contorno de la función $f(x_1, x_2)$ es el conjunto de todas las combinaciones de valores de las variables (x_1, x_2) con los cuales la función f asume un valor constante especificado.

Cuadrante no negativo. Sector noreste del sistema coordenado bidimensional en el que ambas variables tienen valores no negativos.

Dirección ascendente. La dirección de optimización para un modelo Max.

Dirección de la optimización. La dirección en la cual se encuentran los mejores valores de la función objetivo.

Dirección descendente. Dirección de la optimización en el caso de un modelo Min.

Estrechamiento de una restricción. Se refiere a los cambios en el LD de una restricción de desigualdad que hacen más difícil satisfacer dicha restricción. Esto se logra aumentando el LD de una restricción $\geq$ y disminuyendo el LD de una restricción $\leq$.

Excedente. Cantidad por la cual el lado izquierdo de una restricción $\geq$, cuando es evaluada en condiciones de optimalidad, excede al lado derecho. El excedente siempre es no negativo.

Función objetivo no acotada. Función objetivo que, en la región factible, se puede hacer arbitrariamente grande (positiva) en el caso de un modelo Max, o arbitrariamente negativa en el caso de un modelo Min.

Holgura. Cantidad por la cual el valor del lado izquierdo de una restricción $\leq$, cuando es evaluado en el punto óptimo, es menor que el valor del lado derecho. La holgura siempre es no negativa.

Inconsistencia. Sinónimo de *no factibilidad.*

Isocuanta. Sinónimo de *contorno.*

Línea de ganancias máximas. Contorno óptimo de la función objetivo en un análisis gráfico bidimensional.

Línea de isocostos. Contorno de una función de costos.

Línea de isoganancias. Contorno de una función de ganancias.

Método de resolución gráfica. Análisis geométrico bidimensional de modelos PL con dos variables de decisión.

Modelo no acotado. Modelo de PL para el cual el valor óptimo puede incrementarse sin límite alguno. Un modelo de este tipo no tiene solución.

Modelo no factible. Modelo de PL con una región factible vacía. Un modelo así no tiene solución.

No factibilidad. Término que se aplica a un modelo infactible.

Óptimos alternativos. Se refiere al caso en el que una PL tiene más de una solución óptima.
Óptimos múltiples. Sinónimo de *óptimos alternativos.*
Parámetros. Se refiere a los datos numéricos en un modelo de PL. Los valores de los parámetros pueden cambiar, y el modelo puede ser resuelto de nuevo con esos valores modificados.
Punto extremo. Vértice de la región factible. Si una PL tiene solución, siempre existe por lo menos una solución en un punto extremo.
Región factible. Conjunto de combinaciones de valores de las variables de decisión que satisfacen las condiciones de no negatividad y *todas* las restricciones simultáneamente; es decir, las decisiones permisibles.
Relajación de una restricción. Se refiere a los cambios en el LD de una restricción de desigualdad con los cuales dicha restricción es más fácil de satisfacer. Esto se logra disminuyendo el LD de una restricción $\geq$ y aumentando el LD de una restricción $\leq$.
Restricción activa. Restricción en la que el lado izquierdo es equivalente al lado derecho, cuando se evalúa en condiciones óptimas. Geométricamente, esto corresponde a una recta restringida en la cual está la solución óptima.
Restricción inactiva. Restricción de desigualdad que no pasa por la solución óptima. Por tanto, para un conjunto de datos determinado, la supresión de una restricción inactiva no modifica la solución óptima.
Restricción obligatoria. Sinónimo de *restricción activa.*
Restricción redundante. Restricción cuya supresión no produce alteración alguna en la región factible.
Solución factible. La que satisface las condiciones de no negatividad y todas las restricciones. Gráficamente, las soluciones factibles están en correspondencia, uno a uno, con los puntos de la región factible.
Solución óptima. Punto de la región factible donde la función objetivo se maximiza.
Solución óptima única. Se refiere al caso en el que una PL tiene una y sólo una solución óptima.
Valor objetivo óptimo (valor óptimo). Valor óptimo de la función objetivo; es decir, el valor que asume la función objetivo cuando es evaluada en la solución óptima. Se abrevia VO.

Ejercicios de repaso

Verdadero-falso

1. **V F** La región factible es el conjunto de todos los puntos que satisfacen por lo menos una restricción.
2. **V F** En modelos bidimensionales, la intersección de dos restricciones cualesquiera define un punto extremo de la región factible.
3. **V F** Una solución óptima utiliza todos los recursos disponibles limitados.
4. **V F** Un modelo bien formulado no será ni no acotado ni no factible.
5. **V F** La no factibilidad, a diferencia de la no acotación, no tiene relación alguna con la función objetivo.
6. **V F** Si una PL no es no factible, debe tener una solución óptima.
7. **V F** Considere cualquier punto en el acotamiento de la región factible. Ese punto satisface todas las restricciones.
8. **V F** Una restricción de desigualdad activa tiene holgura o excedente cero, lo cual significa que la solución óptima satisface la restricción con la igualdad.
9. **V F** El análisis de sensibilidad incrementa considerablemente las posibilidades de que un modelo resulte útil para la administración.
10. **V F** Considere un modelo en el cual sabemos que existe un error en determinados datos. Por ejemplo, que algunos de los datos representan estimaciones de los valores futuros de ciertos parámetros. Supongamos que el análisis de sensibilidad revela que el VO es sumamente sensitivo a esos parámetros. Con esta información, las recomendaciones del modelo resultarán más dignas de confianza.
11. **V F** El análisis de sensibilidad es una herramienta precisa.
12. **V F** Cuando se modifica el LD de una restricción, cambia su pendiente.
13. **V F** La modificación de un LD no puede afectar el conjunto de restricciones inactivas.
14. **V F** La relajación de una restricción de desigualdad significa modificar el LD para que aquélla sea más fácil de satisfacer.
15. **V F** Una restricción $\geq$ se hace más rígida aumentando el LD.
16. **V F** El estrechamiento de una restricción de desigualdad redundante no puede afectar la región factible.
17. **V F** Para un conjunto de datos dado, las restricciones inactivas son menos importantes que las activas.
18. **V F** La adición de restricciones a un modelo puede favorecer (es decir, mejorar) el VO.

Opción múltiple

19. El método gráfico resulta útil porque
- **a.** proporciona una forma general de resolver modelos de PL
- **b.** brinda conocimientos geométricos acerca del modelo y el significado de optimalidad
- **c.** ambas, a y b

20. La expresión *una PL no acotada* significa que
- **a.** todas las variables de decisión pueden hacerse arbitrariamente grandes sin salirse de la región factible
- **b.** los contornos objetivo pueden desplazarse tan lejos como se desee en la dirección de optimización, sin que dejen de tocar por lo menos un punto del conjunto restringido
- **c.** no todas las restricciones pueden satisfacerse

21. Considere una solución óptima para una PL. ¿Cuál de los siguientes enunciados debe ser verdadero?
- **a.** Por lo menos una restricción (sin incluir condiciones de no negatividad) es activa en ese punto.
- **b.** Exactamente una restricción (sin incluir condiciones de no negatividad) es activa en ese punto.
- **c.** Ninguna de las anteriores.

22. Restricciones activas
- **a.** son aquéllas en las cuales se encuentra la solución óptima
- **b.** son aquéllas que, en el punto óptimo, no utilizan todos los recursos disponibles
- **c.** ambas, a y b

23. Un contorno de isoganancias representa
- **a.** un número infinito de puntos factibles, todos los cuales producen la misma ganancia
- **b.** un número infinito de soluciones óptimas
- **c.** un número infinito de decisiones, las cuales producen la misma ganancia

24. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera, acerca de la solución óptima de una PL?
- **a.** Toda PL tiene una solución óptima.
- **b.** La solución óptima siempre se presenta en un punto extremo.
- **c.** La solución óptima utiliza todos los recursos.
- **d.** Si existe una solución óptima, siempre habrá por lo menos una solución en un vértice.
- **e.** Todo lo anterior.

25. Cada vértice de la región factible está definido por
- **a.** la intersección de dos líneas de restricción
- **b.** algún subconjunto de rectas de restricción y condiciones de no negatividad
- **c.** ninguna de las anteriores

26. Una región factible no acotada
- **a.** es producto de una formulación incorrecta
- **b.** significa que la función objetivo no está acotada
- **c.** nada de lo anterior
- **d.** ambas, a y b

27. El análisis de sensibilidad
- **a.** nos permite interpretar en forma más significativa la solución en una hoja de cálculo electrónica
- **b.** se realiza cuando ya se ha obtenido la solución óptima, por lo que se conoce como análisis de postoptimalidad
- **c.** se conoce a veces como análisis paramétrico
- **d.** todo lo anterior

28. El análisis de sensibilidad
- **a.** se puede realizar gráficamente en dos dimensiones
- **b.** puede hacer que tengamos más confianza en un modelo
- **c.** puede debilitar nuestra confianza en las recomendaciones de un modelo
- **d.** todo lo anterior
- **e.** ambas, a y b

29. La utilidad de la aproximación geométrica en dos dimensiones consiste en
- **a.** resolver rápidamente el modelo
- **b.** comprender lo que está sucediendo en otros ámbitos con más dimensiones
- **c.** comprender mejor el álgebra bidimensional

30. En la PL, el análisis de sensibilidad
- **a.** puede manejar los cambios introducidos en los coeficientes de la función objetivo
- **b.** puede manejar los cambios efectuados en el LD
- **c.** las dos afirmaciones anteriores

31. Si se modifica un coeficiente de la función objetivo
- **a.** se produce una nueva solución óptima
- **b.** cambia la inclinación de los contornos de la función objetivo.
- **c.** se obtiene un nuevo VO
- **d.** todo lo anterior

32. El estrechamiento de una restricción de desigualdad
- **a.** mejora el VO
- **b.** no puede mejorar el VO
- **c.** perjudica el VO

33. Una restricción redundante
- **a.** puede no ser fácil de reconocer
- **b.** siempre debe excluirse del modelo
- **c.** puede no ser redundante si se modifican los datos
- **d.** todo lo anterior
- **e.** a y c anteriores
- **f.** a y b anteriores
- **g.** b y c anteriores

Respuestas

1.	F	**10.**	F	**18.**	F	**26.**	c
2.	F	**11.**	V	**19.**	b	**27.**	d
3.	F	**12.**	F	**20.**	b	**28.**	d
4.	V	**13.**	F	**21.**	c	**29.**	b
5.	V	**14.**	V	**22.**	a	**30.**	c
6.	F	**15.**	V	**23.**	c	**31.**	b
7.	V	**16.**	F	**24.**	d	**32.**	b
8.	V	**17.**	V	**25.**	b	**33.**	e
9.	V						

Problemas

4-1. Grafique el conjunto de puntos (x_1, x_2) que satisfacen cada una de las siguientes condiciones:
- **(a)** $2x_1 + 6x_2 = 12$
- **(b)** $2x_1 + 6x_2 > 12$
- **(c)** $2x_1 + 6x_2 \geq 12$
- **(d)** $2x_1 + 6x_2 < 12$
- **(e)** $2x_1 + 6x_2 \leq 12$

4-2. Grafique el conjunto de puntos (x_1, x_2) que satisfacen cada una de las siguientes condiciones:
- **(a)** $4x_1 + 3x_2 = 12$
- **(b)** $4x_1 + 3x_2 > 12$
- **(c)** $4x_1 + 3x_2 \geq 12$
- **(d)** $4x_1 + 3x_2 < 12$
- **(e)** $4x_1 + 3x_2 \leq 12$

4-3. **(a)** Grafique el conjunto de puntos que satisfacen $-2x_1 - 6x_2 > -12$.
- **(b)** ¿Se encuentra este gráfico arriba o abajo de la recta $-2x_1 - 6x_2 = -12$?
- **(c)** ¿A cuál de los conjuntos graficados en el problema 4-1 es igual este gráfico?

4-4. **(a)** Grafique el conjunto de puntos que satisfacen $-4x_1 - 3x_2 < -12$.
- **(b)** ¿Se encuentra este gráfico arriba o abajo de la recta $-4x_1 - 3x_2 = -12$?
- **(c)** ¿A cuál de los conjuntos graficados en el problema 4-2 es igual este gráfico?

4-5. Claire Archer, una pintoresca vendedora de equipo estereofónico, se dedica a armar amplificadores y preamplificadores. Cada amplificador requiere 12 horas para ser armado y 4 horas de pruebas de alto rendimiento. Un preamplificador requiere 4 horas para ser armado y 8 horas para la realización de pruebas de alto rendimiento. El mes entrante, Claire dispondrá de 60 horas para las operaciones de armado y 40 horas para las revisiones del alto rendimiento de sus equipos. Use el GLP para graficar las combinaciones de amplificadores y preamplificadores que satisfagan:
- **(a)** La restricción del tiempo para el armado.
- **(b)** La restricción del tiempo para las revisiones del desempeño.
- **(c)** Ambas restricciones simultáneamente.

4-6. Una lata de alimento clase A para perros contiene 12 mg de proteína y 4 mg de grasa, mientras que una lata de alimento clase B para perros contiene 3 mg de proteína y 8 mg de grasa. Del Matthews administra una pequeña perrera. Para la alimentación de sus huéspedes el día de mañana, ha decidido preparar una mezcla comestible para perros que contenga por lo menos 30 mg de proteína y 24 mg de grasa. Use el GLP para graficar la combinación de latas de alimento clase A y clase B que necesitaría comprar Del para satisfacer:
- **(a)** La restricción sobre la cantidad de proteína.
- **(b)** La restricción sobre la cantidad de grasa.
- **(c)** Ambas restricciones simultáneamente.

4-7. En el problema 4-5, suponga que Claire ganara \$10 por cada amplificador y \$5 por cada preamplificador. Grafique los contornos de ganancias correspondientes a \$10, \$20 y \$60.

4-8. En el problema 4-6, supongamos que una lata de alimento clase A cuesta \$0.80 y una lata de alimento clase B cuesta \$0.60. Trace el gráfico de las combinaciones de las dos clases de alimento que podría comprar Del por
- **(a)** \$4.80
- **(b)** \$2.40

4-9. Considere la actividad de Claire tal como la describimos en los problemas 4-5 y 4-7. Supongamos que, a causa de ciertas limitaciones en la disponibilidad de los transistores, ella ha decidido incluir dos restricciones adicionales en su modelo: el mes entrante podrá producir 4 preamplificadores y 6 amplificadores como máximo. Tomando en cuenta todas las restricciones,

(a) Encuentre el plan de producción óptimo para Claire (el que permitirá maximizar las ganancias), aplicando el análisis gráfico del GLP.
(b) ¿Cuál es el VO?
(c) ¿Cuáles de las restricciones son activas?
(d) ¿Qué restricciones son inactivas y cuáles son sus valores de holgura?

4-10. Suponiendo los costos presentados en el problema 4-8, use el GLP para averiguar cuántas latas de cada clase de comida para perros tendrá que usar Del para satisfacer los requisitos del problema 4-6 a un costo total mínimo.

•• 4-11. ¿Sería posible que la omisión de dos restricciones cualesquiera hiciera que el modelo de Claire (problema 4-9) se volviera no acotado?

4-12. Supongamos que cuando Del llegara a la tienda sólo encontrara una lata de comida para perros clase A y que no pudiera comprar dicho alimento en ningún otro lugar. ¿Cambiaría esto la solución del costo mínimo que encontró usted en el problema 4-10? En caso afirmativo, ¿en qué forma cambiaría?

4-13. Supongamos que la restricción de Claire referente a los amplificadores, A $\leq$ 6 fuera sustituida por A $\geq$ 6. ¿Cómo afectaría esto al modelo?

4-14. Si Del tuviera que comprar por lo menos 3 latas de comida para perros clase B, ¿afectaría este hecho la solución de costo mínimo que encontró usted en el problema 4-10? Si es así, ¿en qué forma? (*Nota:* Para los propósitos de este problema, hemos supuesto que Del puede comprar fracciones de latas del alimento para perros.)

4-15. Considere la siguiente PL:

$$\begin{aligned} &\text{Max } x_1 + x_2 \\ &\text{s.a. } \quad x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &\qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ &\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Use el GLP para hallar la solución óptima y el VO.
(b) Modifique la función objetivo a $2x_1 + 6x_2$ y encuentre la solución óptima.
(c) ¿Cuántos puntos extremos tiene la región factible? Encuentre los valores de (x_1, x_2) en cada punto extremo.

4-16. Considere la siguiente PL

$$\begin{aligned} &\text{Max } 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{s.a. } 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ &\qquad x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ &\qquad x_1 + x_2 \leq 4 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Use el GLP para encontrar la solución óptima y el VO.
(b) Modifique la función objetivo a $3x_1 + 2x_2$ y encuentre la solución óptima.
(c) ¿Cuántos puntos extremos tiene la región factible? Encuentre (x_1, x_2) en cada punto extremo.

4-17. Considere la siguiente PL:

$$\begin{aligned} &\text{Max } 3x_1 + 4x_2 \\ &\text{s.a. } -2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ &\qquad 2x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ &\qquad -6x_1 - 3x_2 \geq -48 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Use el GLP para hallar la solución óptima y el VO.
(b) Encuentre los valores de la holgura y el excedente para cada restricción.

4-18. Considere la siguiente PL:

$$\begin{aligned} &\text{Max } 6x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.a. } \quad 2x_1 + 4x_2 \leq 20 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 &\geq 15\\
x_1 &\geq 3\\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Use el GLP para hallar la solución óptima y el VO.
(b) Encuentre los valores de la holgura y el excedente para cada restricción.

•• **4-19.** Considere la siguiente PL:

$$
\begin{aligned}
\text{Min } & 5x_1 + 2x_2\\
\text{s.a. } & 3x_1 + 6x_2 \geq 18\\
& 5x_1 + 4x_2 \geq 20\\
& 8x_1 + 2x_2 \geq 16\\
& 7x_1 + 6x_2 \leq 42\\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Use el GLP para hallar la solución óptima y el VO.
(b) ¿Cuáles de las restricciones son activas? ¿Cuáles son inactivas?
(c) ¿Cuáles son los valores de la holgura y el excedente asociados a cada restricción?
(d) Cuántos puntos extremos tiene la región factible?
(e) Modifique la función objetivo a $15x_1 + 12x_2$. ¿Cuáles son las soluciones óptimas alternativas localizadas en los vértices?

4-20. En el problema 4-18, modifique la función objetivo a $x_1 + 3x_2$. Responda las partes (a) y (b) para el nuevo modelo.

••• **4-21.** Considere la siguiente PL:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } & 600E + 1000F\\
\text{s.a. } & 100E + 60F \leq 21{,}000\\
& 4000E + 800F \leq 680{,}000\\
& E + F \leq 290\\
& 12E + 30F \leq 6000\\
& E, F \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Sean *E* el eje horizontal y *F* el eje vertical, use el GLP para encontrar la solución óptima de este modelo y el VO.
(b) Una de las restricciones es redundante, en el sentido de que no desempeña ningún papel en la determinación del conjunto restringido. ¿Cuál es esa restricción?
(c) ¿Cuál sería el cambio mínimo en el LD de esta restricción y por el cual la misma se volvería activa?
(d) El coeficiente de *E* en la tercera restricción es actualmente 1. ¿Cuál sería el aumento mínimo de este coeficiente y por el cual la restricción se volvería activa?
(e) Supongamos que el coeficiente de *E* (lo llamaremos C_E) en la función objetivo aumentara, mientras el coeficiente de *F*, (llamémosle C_F) permaneciera fijo. ¿Con qué valor para el coeficiente de *E* se encontrarían por primera vez soluciones óptimas alternativas?

••• **4-22.** Considere el siguiente modelo:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } & 3x_1 + x_2\\
\text{s.a. } & 6x_1 + 3x_2 \geq 12\\
& 4x_1 + 8x_2 \geq 16\\
& 6x_1 + 5x_2 \leq 30\\
& 6x_1 + 7x_2 \leq 36\\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Use el GLP para hallar la solución óptima y el VO.
(b) Considere un modelo Min con el conjunto restringido anterior. Suponga que la función objetivo es $x_1 + Bx_2$. ¿Cuál es el mayor valor de B con el cual la solución óptima se encuentra en la intersección de las rectas $6x_1 + 3x_2 = 12$ y $4x_1 + 8x_2 = 16$? Encuentre la solución óptima y el VO.
(c) En un modelo Max, supongamos que la función objetivo es $Ax_1 + Bx_2$. Determine el conjunto de valores para A y B con el cual la solución óptima se encuentra en la intersección de $6x_1 + 5x_2 = 30$ y $6x_1 + 7x_2 = 36$. Por medio de un gráfico, ilustre el conjunto de valores.

4-23. En el modelo PROTRAC, supongamos que la función objetivo cambia a $5000E + 2000F$.
(a) Use el GLP para determinar el efecto de este cambio sobre la solución óptima.
(b) ¿Cuál sería su efecto sobre el VO?

4-24. En el modelo PROTRAC, supongamos que la función objetivo cambiara a $2500E + 5000F$.
(a) Use el GLP para determinar el efecto de este cambio sobre la solución óptima.
(b) ¿Cuál sería su efecto sobre el VO?

4-25. En la figura 4.20, observe las dos funciones objetivo

$$5000E + 4000F$$
$$5000E + 10{,}000F$$

La figura indica que cuando el margen de contribución de F por unidad aumenta de 4000 a 10,000, sin cambiar el margen de contribución de E por unidad, el valor óptimo de E disminuye. ¿Por qué el valor óptimo de E depende del coeficiente de F? Intente responder esta pregunta con palabras.

4-26. En el modelo de PROTRAC, supongamos que la función objetivo cambiara a $1000E + 1500F$.
(a) Use el GLP para averiguar si existe ahora una nueva solución óptima.
(b) ¿Cuál sería el efecto sobre el VO?

4-27. En el modelo en GLP de PROTRAC, sustituya el LD de la quinta restricción (horas de trabajo para pruebas), que es actualmente 135, por el valor 270. Indique el efecto de esto sobre el conjunto restringido.

••4-28. En el modelo en GLP de PROTRAC, ¿hasta cuánto es posible aumentar el LD de la restricción 2 antes que ésta se vuelva redundante? ¿Qué tan pequeño puede hacerse el LD antes que se destruya la factibilidad?

••4-29. Considere la PL

$$\begin{aligned} \text{Max } & 30x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a. } & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Resuelva por medio del GLP y exprese la solución óptima.
(b) Manteniendo todos los datos sin cambio alguno, ¿qué margen de contribución unitario debe tener el producto, cuyo valor óptimo actual es cero, para que dicho producto lleve la solución óptima a un nivel positivo?
(c) ¿Cuántas soluciones óptimas en vértices existen después de haber efectuado el cambio descrito en la parte (b)? ¿Cuáles son esas soluciones?
(d) En el modelo original, ¿Cuánto puede incrementarse (o reducirse) el LD de la segunda restricción antes que la solución óptima cambie?
(e) Responda la parte (d) para el LD de la primera restricción.
(f) ¿Cómo explica usted la diferencia entre las partes (d) y (e)?
(g) ¿Cuál sería el impacto de agregar la restricción $4x_1 + x_2 = 4$ al modelo original?
(h) ¿Cuál sería el impacto (sobre la solución óptima) de agregar la restricción $3x_1 + 3x_2 \leq 15$ al modelo original?
(i) Llene los espacios en blanco: La diferencia entre las partes (g) y (h) es que la solución óptima original ya ________ la restricción en (h) pero no ________ la restricción en (g).

••4-30. Considere la PL

$$\begin{aligned} \text{Max } & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a. } & 3x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En términos de este modelo, responda usted las partes (a-g) del problema 4-29.
(h) ¿Qué impacto tendría el hecho de agregar la restricción $x_1 + x_2 \leq 1$ al modelo original?

4-31. De las dos restricciones

$$-3x_1 + 2x_2 \geq -6$$
$$-3x_1 + 2x_2 \geq -10$$

(a) ¿Cuál es la más rígida?
(b) ¿Cuál de las restricciones, o ninguna, satisface el punto ($x_1 = 2, x_2 = 1$)?
(c) ¿Y el punto ($x_1 = 3, x_2 = 0$)?

4-32. De las dos restricciones

$$4x_1 - 3x_2 \leq 12$$
$$4x_1 - 3x_2 \leq -12$$

(a) ¿Cuál es la más rígida?
(b) ¿Cuál de las restricciones, o ninguna, satisface el punto ($x_1 = -2$, $x_2 = 3$)?
(c) ¿Y el punto ($x_1 = 2$, $x_2 = 3$)?

4-33. ¿Cuál de las dos restricciones del problema 4-31 es más relajada?

4-34. ¿Cuál de las dos restricciones del problema 4-32 es más relajada?

4-35. Llene los espacios en blanco. El hecho de aumentar el LD de una restricción ≤ significa que habrá _______ combinaciones de valores de las variables de decisión capaces de satisfacer dicha restricción. Esto significa también que se está __________ la restricción.

4-36. Llene los espacios en blanco. El hecho de aumentar el LD de una restricción ≥ significa que habrá _______ combinaciones de valores de las variables de decisión capaces de satisfacer la restricción. Esto significa también que se está _________ la restricción.

4-37. Elija entre las palabras *aumentar, disminuir, más pequeño, más grande, sin cambio alguno,* para llenar los siguientes espacios en blanco. El mayor estrechamiento de una restricción no puede ________ el conjunto restringido y puede hacer que quede _______ o _______.

4-38. Elija entre las palabras propuestas en el problema 4-37 para llenar los espacios en blanco. La relajación de una restricción no puede _______ el conjunto restringido y puede hacer que quede _______ o _______.

••**4-39.** En el modelo en GLP de PROTRAC, ¿cuál de las restricciones es redundante? ¿Seguiría siendo redundante esta restricción si el valor de su LD aumentara 10% y todos los demás datos permanecieran fijos?

••**4-40.** En el modelo en GLP de PROTRAC, ¿para qué valores del LD se volvería redundante la restricción 5, suponiendo que todos los demás datos se mantuvieran fijos?

••**4-41.** Suponga que ha creado usted un modelo y que, por algún medio, logró identificar una restricción redundante. ¿Podría decir que generalmente es verdad que esas restricciones deben suprimirse del modelo? ¿Por qué sí o por qué no?

••**4-42.** ¿En qué diferiría su respuesta al problema 4-41 si el modelo fuera a usarse solamente una vez?

•••**4-43.** Supongamos que usted sabe que una restricción particular será redundante cuando utilice el modelo en una ocasión determinada. ¿Se deduciría de eso que dicha restricción sería también inactiva?

4-44. Discuta brevemente el concepto de restricciones "importantes" a diferencia de las "no importantes".

4-45. Encuentre la correspondencia entre las expresiones de las dos columnas. (*Nota:* Algunas expresiones pueden tener más de una correspondencia.)

(a) Añadir restricciones	**1.** Puede expandir la región factible
(b) Suprimir restricciones	**2.** Puede contraer la región factible
(c) Restricciones importantes	**3.** Dependen del conjunto de datos
(d) Estrechar restricciones	**4.** Puede mejorar el VO
(e) Relajar restricciones	**5.** Puede empeorar el VO

Caso práctico — El método símplex

En la actualidad admitimos como lo más natural nuestra capacidad para resolver modelos de programación lineal. Ya ha observado usted con cuánta rapidez es posible introducir un modelo PL en una hoja de cálculo electrónica y, con unos cuantos clics del ratón, optimizar el modelo usando Solver. Sin embargo, esto no siempre ha sido así.

George Stigler ganó el Premio Nobel de economía en 1982 por sus "estudios germinales sobre las estructuras industriales, el funcionamiento de los mercados y las causas y efectos de la reglamentación pública". Tal vez le sorprenda a usted saber que, en los inicios de su carrera, él trabajó en lo que ahora conocemos como el problema de la dieta. Stigler se propuso encontrar la dieta menos costosa que satisficiera los nueve requisitos nutricionales determinados por el Consejo Nacional de Investigación en 1943. En realidad tenía 77 alimentos para elegir, desde harina de trigo hasta jalea de fresa. La formulación para su modelo fue la misma que estudiamos en el ejemplo sobre la mezcla de papillas en el capítulo 3.

En una monografía publicada en 1945 bajo el título *El costo de la subsistencia*, en la cual informó los resultados obtenidos, Stigler escribió: "no parece existir un método directo para hallar el mínimo de una función lineal sometida a condiciones lineales". George Dantzig habría de cambiar todo ese panorama a fines de la década de 1940, cuando desarrolló el método símplex. No obstante, Stigler "resolvió" su modelo de dieta sin la ayuda de este método, mediante una combinación de ingenio e intenso trabajo. En esa época no podía demostrar que tenía una buena solución (y no digamos una solución óptima). Pero más tarde, cuando el problema pudo ser resuelto con el algoritmo símplex, se comprobó que sus métodos habían producido una solución muy cercana a la óptima (aunque no del todo).

La dieta para minimizar el costo que se sugiere en la monografía de Stigler y su costo anual (basado en precios de 1939) aparecen abajo. (Obviamente, en ese modelo no había una restricción referente al gusto.)

PRODUCTO	CANTIDAD	COSTO ANUAL ($)
Harina de trigo	370 libras	13.33
Leche evaporada	57 latas	3.84
Col	111 ibras	4.11
Espinacas	23 libras	1.85
Alubias secas	285 libras	16.80
Costo anual total		$39.93

Es interesante considerar que en 50 años aproximadamente, el modelo de la dieta pasó de ser un acertijo que desafió a uno de los mejores académicos de la economía de todos los tiempos, y se convirtió en un sencillo ejercicio muy apropiado para estudiantes principiantes.

Preguntas

El método símplex es, en esencia, un proceso equivalente al de escalar una colina. Una vez que dicho algoritmo ha encontrado una solución en un vértice, empieza a examinar todos los vértices inmediatamente vecinos a aquél y plantea la pregunta: "si me traslado ahora a uno de esos vértices, ¿mejorará el valor de la función objetivo?" Si la respuesta es afirmativa, el algoritmo se traslada a dicho vértice y allí vuelve a preguntar si al desplazarse a otro vértice vecino podrán mejorar aún más los resultados. Cuando la respuesta es negativa, el algoritmo anuncia su victoria y concluye.

1. Considere usted la figura 4.21 y suponga que el algoritmo símplex se puso en marcha en el vértice formado por la intersección de las restricciones 2 y 5. Demuestre la forma en que un algoritmo ascendente llega finalmente con toda seguridad a la solución óptima
2. En un papel, dibuje un diagrama como el que muestra la figura 4.21 con una región factible diferente, para la cual un algoritmo ascendente *no* pueda garantizar la obtención de una solución óptima o siquiera satisfactoria. ¿Sería posible que existiera una región factible como la que usted ha creado, en un modelo de programación lineal? Es decir, ¿podría usted crear una región similar usando el GLP?
3. En un papel, trace un diagrama como el de la figura 4.21 para mostrar una situación en la que un algoritmo ascendente pudiera requerir muchos pasos, o sólo unos cuantos, en su ruta hacia la solución óptima.
4. Considere usted ahora un nuevo diagrama correspondiente a un modelo general (es decir, no lineal) con una sola variable de decisión. Representando el valor de la variable de decisión en el eje x y el valor de la función objetivo en el eje y, use este diagrama para ilustrar el hecho de que no siempre se obtiene una solución óptima con un algoritmo general de ascenso como el anteriormente descrito.

Referencias

George Dantzig, "The Diet Problem", en *Interfaces*, 20, núm. 4 (1990), págs. 43-47.

Lilly Lancaster, "The Evolution of the Diet Model in Managing Food Systems", en *Interfaces*, 22, núm. 5 (1992), págs. 59-68.

Robert J. Might, "Decision Support for Aircraft and Munitions Procurement", en *Interfaces,* 17, núm. 5 (1987), págs. 55-63.

CAPÍTULO

5

Programación lineal: Interpretación del Informe de sensibilidad de Solver

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN — Planeación de productos en una planta química de China

La Dalian Dyestuff Plant, una de las fábricas de tintas químicas más grandes de China, cuenta con 11 talleres que producen casi 100 tipos distintos de tinturas y otros productos químicos. Dichos productos se venden en los mercados nacionales y extranjeros. Algunos de ellos son productos finales y otros son semiterminados. Por ejemplo, la sosa es un producto cuya fabricación requiere el uso de una tecnología basada en la reacción electrolítica, que genera cloro como subproducto. Para evitar la contaminación del aire, el cloro tiene que ser eliminado o utilizado apropiadamente como materia prima en la elaboración de otros productos.

Con la reforma económica que se está implantando en China, el gobierno, que solía controlar 100% de los productos fabricados en la planta Dalian, sólo controla hoy 20% de esa producción. Este cambio significa que los gerentes de la planta tienen que decidir ahora qué productos van a fabricar y en qué cantidades. Esto implica un reto especial porque la economía crece y cambia con gran rapidez.

En la Dalian Dyestuff Plant se implantó el uso de un modelo de optimización basado en PL. El objetivo es maximizar las ganancias de la compañía en un periodo de un año. El sistema incluye subsistemas para planeación de la producción, contabilidad y finanzas, inventario y servicios de información. Los resultados de estas operaciones indican que gracias a ese sistema se logró un aumento de por lo menos 4 millones de RMB (cerca de medio millón de dólares estadounidenses) en las ganancias anuales, que significó para la empresa un incremento del 10% en sus ganancias. (Véase Yang.)

5.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 4 dijimos que en un modelo de programación lineal hay muchas cosas más interesantes que el simple hecho de encontrar la solución. Anteriormente señalamos que el proceso para analizar un modelo de optimización usando diferentes valores para los parámetros se conoce como *análisis de sensibilidad*, y más tarde estudiamos en parte los conceptos de geometría que intervienen en un análisis de sensibilidad de PL. En este capítulo nos ocuparemos en detalle de cómo se puede utilizar en la práctica toda la riqueza de información contenida en el análisis de un modelo de PL realizado con Solver. Esto puede ser un problema importante, e incluso cotidiano, para los gerentes del mundo real: el problema de usar correctamente el análisis en hojas de cálculo electrónicas. Nuestra exposición culminará en la sección 5.4, con una situación realista en la cual intervienen un gerente y un constructor de modelos.

5.2 FORMA DE RESTRICCIÓN DE IGUALDAD

Para la optimización de programas lineales, Solver usa el método símplex, que fue diseñado para abordar los modelos que incluyen solamente restricciones de igualdad. Para convertir un modelo de PL con restricciones de desigualdad en uno con restricciones de igualdad, Solver agrega internamente nuevas variables a su representación del modelo PL, las cuales se denominan variables de holgura y de excedente. Como ilustración, recordemos el modelo de PL de PROTRAC

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max } 5000E + 4000F & & \\
\text{s.a.} \quad E + F & \geq 5 & \\
\phantom{\text{s.a.}} \quad E - 3F & \leq 0 & \\
\phantom{\text{s.a.}} \quad 10E + 15F & \leq 150 & \qquad (5.1) \\
\phantom{\text{s.a.}} \quad 20E + 10F & \leq 160 & \\
\phantom{\text{s.a.}} \quad 30E + 10F & \geq 135 & \\
\phantom{\text{s.a.}} \quad E, F & \geq 0 &
\end{array}
$$

Este modelo de PL tiene dos variables de decisión y cinco restricciones (pasando por alto las restricciones de no negatividad), dos de ellas del tipo “mayor o igual”≥ y otras tres del tipo “menor o igual” ≤. Para convertir este modelo en un modelo equivalente en *forma de restricciones de igualdad*, el Solver agrega variables de holgura a la segunda, tercera y cuarta restricciones (que son las restricciones ≤) y sustrae variables de excedentes de la primera y la quinta restricciones (las restricciones ≥). Denotando por s_1, s_2, s_3, s_4 y s_5 a las cinco nuevas variables, obtenemos el modelo en la forma en que puede ser optimizado por Solver.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max } 5000E + 4000F & & \\
\text{s.a.} \quad E + F - s_1 & = 5 & \\
\phantom{\text{s.a.}} \quad E - 3F + s_2 & = 0 & \\
\phantom{\text{s.a.}} \quad 10E + 15F + s_3 & = 150 & \qquad (5.2) \\
\phantom{\text{s.a.}} \quad 20E + 10F + s_4 & = 160 & \\
\phantom{\text{s.a.}} \quad 30E + 10F - s_5 & = 135 & \\
\phantom{\text{s.a.}} \quad E, F, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Observe que las restricciones de no negatividad agregadas por las nuevas variables obligan a éstas a asumir algún valor positivo o cero. De esta manera, las variables de holgura/excedente representan la cantidad adicional que deberá ser agregada/sustraída en el miembro izquierdo para que las desigualdades puedan convertirse en igualdades.

La exposición anterior demuestra dos puntos importantes:

- Cualquier restricción del tipo “menor o igual”, ≤, puede convertirse en una igualdad, agregando al miembro izquierdo una nueva variable de holgura no negativa.
- Cualquier restricción del tipo “mayor o igual”, ≥, puede ser convertida en una igualdad, sustrayendo del lado izquierdo una nueva variable de excedente no negativa.

Esta forma interna del modelo tiene todavía cinco restricciones, pero el número de variables de decisión utilizadas internamente por Solver se ha elevado a siete, en lugar de dos, por la adición de las variables de holgura y de excedente. Observe que dichas variables no aparecen explícitamente en la función objetivo de Solver. Sin embargo, dado que

$$5000E + 4000F = 5000E + 4000F + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 + 0s_5$$

resulta aceptable pensar que las variables de excedente y de holgura han sido incluidas en la función objetivo, pero con coeficiente cero.

VALORES ÓPTIMOS DE LAS VARIABLES DE HOLGURA Y DE EXCEDENTE

En el capítulo 4 usamos el método de solución gráfica para demostrar que $E^* = 4.5$ y $F^* = 7$ es la solución al modelo de PL de PROTRAC (5.1). Esto significa que los valores óptimos de las demás variables (de holgura y de excedente) del modelo con restricciones de igualdad (5.2) están dados por

$$\begin{aligned}
s^*_1 &= (E^* + F^*) - 5 = 11.5 - 5 = 6.5\\
s^*_2 &= 0 - (E^* - 3F^*) = 0 - (4.5 - 21) = 16.5\\
s^*_3 &= 150 - (10E^* + 15F^*) = 150 - (45 + 105) = 0\\
s^*_4 &= 160 - (20E^* + 10F^*) = 160 - (90 + 70) = 0\\
s^*_5 &= (30E^* + 10F^*) - 135 = (135 + 70) - 135 = 70
\end{aligned}$$

En este punto sería oportuno que repasara usted lo referente a restricciones activas e inactivas, en el capítulo 4. Recordemos lo que se dijo en ese lugar: Una restricción *activa o satisfecha en su valor límite o de frontera* es aquélla en la que, *en condiciones de optimalidad,* el miembro izquierdo es igual al derecho. Desde el punto de vista geométrico, una restricción activa es aquélla en la que se encuentra la solución óptima. Ya vimos que, en el modelo de PL de PROTRAC, las restricciones activas son la tercera y la cuarta. El cálculo anterior demuestra que sus variables de holgura (s^*_3 y s^*_4) tienen valor de cero. Por otra parte, la primera, segunda y quinta restricciones son inactivas y sus variables de holgura/excedente son positivas. Por consiguiente, podemos hacer estas generalizaciones:

- Las restricciones activas son aquéllas para las cuales los valores óptimos de las correspondientes variables de holgura o de excedente son cero.
- Las restricciones inactivas son aquéllas para las cuales los valores óptimos de las correspondientes variables de holgura o de excedente son positivos.

En particular, en condiciones óptimas, cuando una restricción tiene con valor de cero a su variable de holgura o de excedente,[1] eso significa, en términos geométricos, que la solución del modelo se aloja en esa restricción. Un rápido vistazo a la geometría de nuestro nuevo modelo nos revelará también una propiedad importante para interpretar correctamente la información contenida en el Informe de sensibilidad de Solver. Dicha propiedad está relacionada con el número de variables positivas que existen en cualquiera de los vértices (y sobre todo en un vértice óptimo) del conjunto de restricciones.

Hemos visto que todas las variables (variables de decisión, de holgura y de excedente) tienen que ser no negativas (es decir, positivas o cero). También demostramos que en cualquier vértice del conjunto de restricciones (y en particular en un vértice óptimo), el número máximo de variables positivas (*mayores que cero*), incluyendo las variables de decisión, las de holgura y las de excedente, es cuando mucho igual al número de restricciones del modelo (sin contar las restricciones de no negatividad).

Para ilustrar esta propiedad de "recuento", considere el modelo ilustrado en (5.3).

[1] De acuerdo con la terminología del capítulo 4, dijimos simplemente que una restricción de ese tipo carece de holgura o de excedente, sin introducir el concepto de una variable precisamente de holgura o de excedente.

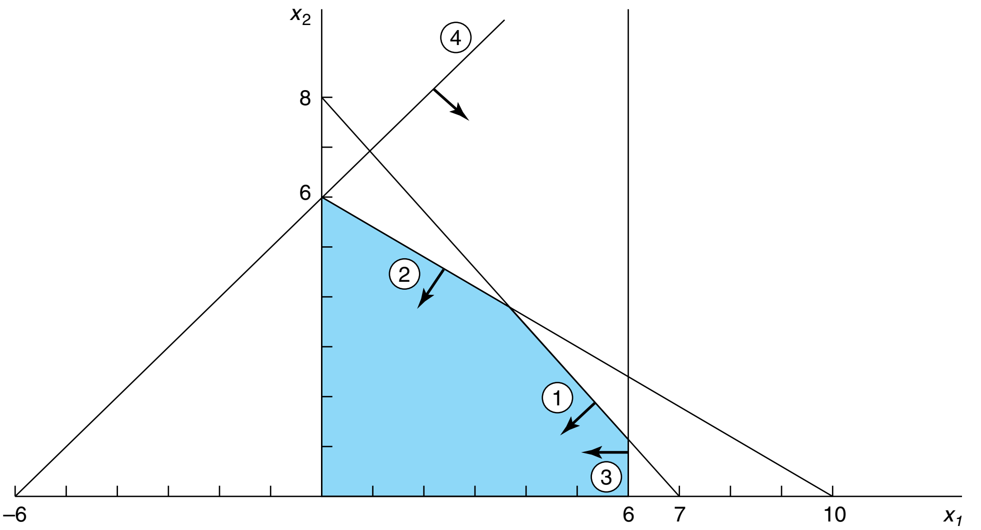


FIGURA 5.1

Conjunto de restricciones para el modelo con restricciones de desigualdad (5.3)

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max } x_1 + x_2 & & & \\
\text{s.a.} \quad 8x_1 + 7x_2 & \leq 56 & ① & \\
\quad -6x_1 - 10x_2 & \geq -60 & ② & \\
\quad x_1 & \leq 6 & ③ & \quad (5.3) \\
\quad -x_1 + x_2 & \leq 6 & ④ & \\
\quad x_1, x_2 & \geq 0 & &
\end{array}
$$

El conjunto de restricciones de este modelo aparece graficado en la figura 5.1, donde las restricciones apropiadas han sido rotuladas del ① al ④.

Veamos ahora la forma con restricciones de igualdad para el mismo modelo. Es

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max } x_1 + x_2 & & & \\
\text{s.a.} \quad 8x_1 + 7x_2 + s_1 & = 56 & ① & \\
\quad -6x_1 - 10x_2 - s_2 & = -60 & ② & \\
\quad x_1 + s_3 & = 6 & ③ & \quad (5.4) \\
\quad -x_1 + x_2 + s_4 & = 6 & ④ & \\
\quad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 & \text{todas no negativas} & &
\end{array}
$$

En el modelo original había cuatro restricciones y dos variables. La forma con restricciones de igualdad tiene el mismo número de restricciones, pero con seis variables. Es importante señalar que, cuando nos referimos al número de variables en el modelo de restricciones de igualdad, *contamos tanto las variables de holgura y de excedente como las variables de decisión.* Considerando que en (5.4) figuran dos variables de decisión y cuatro variables de holgura/excedente, en esta forma del modelo existen seis variables. Además, cuando nos referimos al número de restricciones *no contamos las condiciones de no negatividad.*

Nuestra representación geométrica de (5.4) es casi igual a la de (5.3), con la única diferencia de que cada restricción está rotulada con su respectiva variable de holgura o de excedente. Esto se ilustra en la figura 5.2, donde por comodidad hemos rotulado los cinco vértices (usando números romanos) e identificamos también algunos otros puntos que serán de nuestro interés.

El hecho de rotular las restricciones con las variables de holgura y de excedente le permite a usted hacer las siguientes observaciones “visuales”:

1. En cualquier punto interior de la región factible, todas las variables son positivas. Esto se ilustra con el punto P_0 en la figura 5.2. En este punto debe leer directamente $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$. Usando los valores y las restricciones de (5.4), podrá calcular físicamente los valores de s_1, s_2, s_3 y s_4 en P_0 y verá que también esos valores son positivos. Sin embargo, no es necesario que

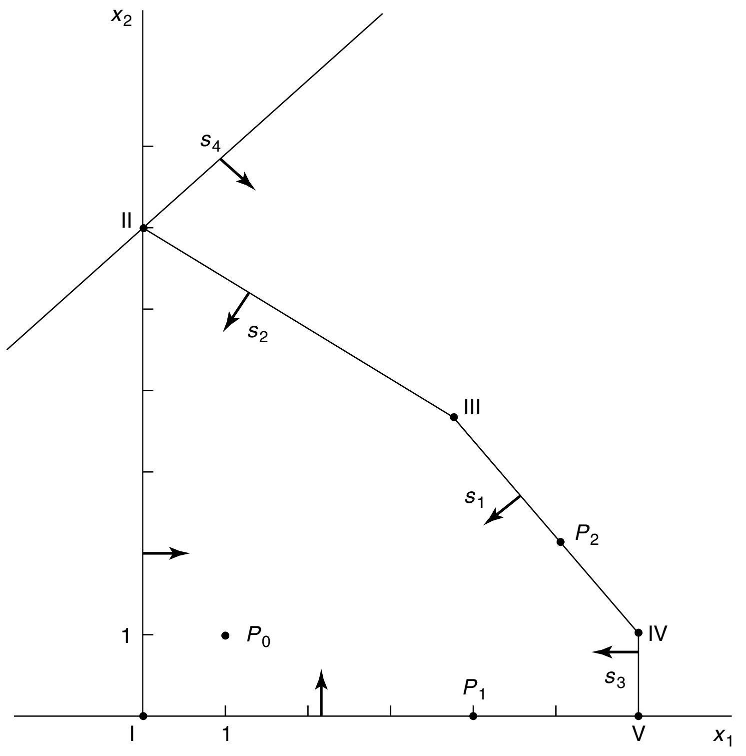


FIGURA 5.2
Conjunto de restricciones para el modelo de PL (5.4) en la forma con restricciones de igualdad

realice esas operaciones algebraicas, pues la figura nos muestra en forma inmediata que todas las holguras y los excedentes son positivos en P_0.

2. En cualquier punto del borde o frontera, por lo menos una variable será 0. Esto se ilustra en los puntos P_1 y P_2. En P_1 verá usted que $x_2 = 0$; todas las demás variables son positivas. En forma similar, en P_2, que se encuentra sobre la recta de la primera restricción, solamente s_1 es cero. Algunos puntos de interés especial en dicho borde o frontera son los vértices de la región factible. Por ejemplo, dado que el vértice rotulado como III se aloja en las rectas de la primera y segunda restricciones, las dos variables s_1 y s_2 tienen valor de cero en este vértice, y todas las demás variables son positivas. Estos ejemplos muestran que las variables iguales a cero en el borde o frontera pueden ser tanto variables de decisión como variables de holgura o de excedente. El vértice V, por ejemplo, muestra que una variable de decisión (x_2) y una variable de holgura (s_3) pueden simultáneamente ser cero sobre el borde o frontera.

VARIABLES POSITIVAS Y SOLUCIONES UBICADAS EN VÉRTICES

Teniendo como base estas observaciones, ahora podemos ilustrar el resultado principal de esta sección contando las variables positivas en cada uno de los cinco vértices del conjunto de restricciones. La tabla 5.1 muestra el resultado.

Lo que aparece en esa tabla es, sencillamente, *cuáles* de las variables son positivas en cada vértice y, además, *cuántas* de esas variables son positivas. Recuerde que en el modelo (5.4) hay cuatro restricciones. Por tanto, la tabla ilustra un principio general importante:

> Para cualquier modelo de PL con restricciones de igualdad, el número de variables positivas en cualquier vértice es menor o igual que el número de restricciones.

Este resultado tiene una consecuencia importante para la solución de una PL en Solver. Recordará usted que en el capítulo 4 dijimos que si existe una solución óptima en un modelo de PL, entonces siempre hay una solución óptima en un vértice (también puede haber soluciones óptimas que no estén en vértices). El método símplex empleado por Solver siempre produce un

TABLA 5.1 Recuento de las variables positivas en los vértices

VÉRTICE	VARIABLES NULAS	VARIABLES POSITIVAS	RECUENTO POSITIVO
I	x_1, x_2	s_1, s_2, s_3, s_4	4
II	x_1, s_2, s_4	x_2, s_1, s_3	3
III	s_1, s_2	x_1, x_2, s_3, s_4	4
IV	s_1, s_3	x_1, x_2, s_2, s_4	4
V	x_2, s_3	x_1, s_1, s_2, s_4	4

vértice óptimo (suponiendo, por supuesto, que el modelo sea factible y acotado). Además, el método símplex resuelve un modelo con restricciones de igualdad y, para ese tipo de modelos, de acuerdo con la conclusión antes expuesta: el número de variables positivas en *cualquier* vértice (y por lo tanto en un vértice óptimo) es menor que o igual al número de restricciones. En consecuencia, ahora podemos ver una razón por la cual resulta interesante la propiedad anterior de recuento:

La solución de Solver para un modelo de PL siempre tiene como máximo m variables positivas, donde m es el número de restricciones.

Un uso práctico de esta última conclusión es la siguiente:

Cuando la solución de Solver tiene menos de m variables positivas, se dice que la solución es *degenerada,* y en este caso se debe tener especial cuidado al interpretar el Informe de sensibilidad de Solver.

DEGENERACIÓN Y NO DEGENERACIÓN

En virtud de que las ramificaciones de la característica de degeneración son dignas de mención, detengámonos un poco para definir formalmente este concepto. Un vértice como el II de la figura 5.2, en el cual el número de variables positivas es *menor que* el número de restricciones, se conoce como vértice degenerado.[2] Todos los vértices restantes, I, III, IV y V, en los cuales el número de variables positivas es exactamente igual al número de restricciones, se conocen como vértices no degenerados. Si la solución óptima para un PL tiene menos de m variables positivas, se dice que se trata de una **solución degenerada,** porque se presenta en un vértice degenerado. En forma análoga, una solución que tiene exactamente m variables positivas se conoce como **solución no degenerada.**

Ahora nos hemos familiarizado con el modelo de PL optimizado por Solver, es decir, el modelo con restricciones de igualdad. Hemos visto una propiedad importante de este modelo: cualquier solución óptima producida por Solver tendrá a lo sumo m variables positivas (si tiene exactamente m , significa que es no degenerada), donde m es el número de restricciones del modelo; y también hemos aprendido que la interpretación correcta del Informe de sensibilidad de Solver requiere conocer si la solución óptima es degenerada o no. Examinemos ahora el Informe de sensibilidad de Solver.

[2]El origen de la frase *vértice degenerado* procede de aspectos técnicos del método símplex. Su presencia no implica la existencia de alguna característica insólita o inconveniente en el modelo mismo. Por otra parte, la connotación emotiva de este término es un recurso útil para recordar el significado de la degeneración: en el caso de un vértice, la degeneración es lo que pasa cuando se acumulan en él demasiadas restricciones, apiladas unas sobre otras.

5.3 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL MODELO DE PL DE PROTRAC

En esta sección continuaremos el análisis del modelo de PL de PROTRAC. Para facilitar las referencias, vamos a reproducir aquí el modelo, junto con el análisis gráfico presentado inicialmente en la figura 4.11.

$$
\begin{array}{llrll}
\text{Max} & 5000E + 4000F & & \text{(contribución máxima a las ganancias)} & \\
\text{s.a.} & E + F & \geq 5 & \text{(requisito de producción mínima)} & ① \\
 & E - 3F & \leq 0 & \text{(balance de la posición en el mercado)} & ② \\
 & 10E + 15F & \leq 150 & \text{(capacidad en el departamento A)} & ③ \\
 & 20E + 10F & \leq 160 & \text{(capacidad en el departamento B)} & ④ \\
 & 30E + 10F & \geq 135 & \text{(horas de trabajo empleadas en las pruebas)} & ⑤ \\
 & E, F & \geq 0 & &
\end{array}
\qquad (5.5)
$$

Como ya hemos visto, la solución óptima es $E^* = 4.5$, $F^* = 7$. En el capítulo 4 empleamos el término *VO* para referirnos al valor óptimo de la función objetivo. Recuerde que, para el modelo de PL (5.5), tenemos

$$
\begin{aligned}
\text{VO} = \text{ganancia máxima} &= 5000E^* + 4000F^* \\
&= 5000(4.5) + 4000(7) = 50{,}500
\end{aligned}
$$

como muestra la figura 5.3. También hemos visto (véase capítulo 4) que las dos restricciones de capacidad sobre las horas de trabajo disponibles en los departamentos A y B son activas en condiciones de optimalidad.

Las tres restricciones restantes son inactivas. Recuerde usted también que, en condiciones óptimas, el número de variables positivas siempre será menor o igual que el número de restricciones activas o satisfechas en su valor límite o de frontera . Si el número de variables positivas es menor que el número de restricciones activas, entonces la solución es degenerada.

LA SOLUCIÓN

El modelo de PL de PROTRAC optimizado con Solver en el capítulo 3 se ilustra en la figura 5.4, junto con el Informe de sensibilidad de Solver para la solución.

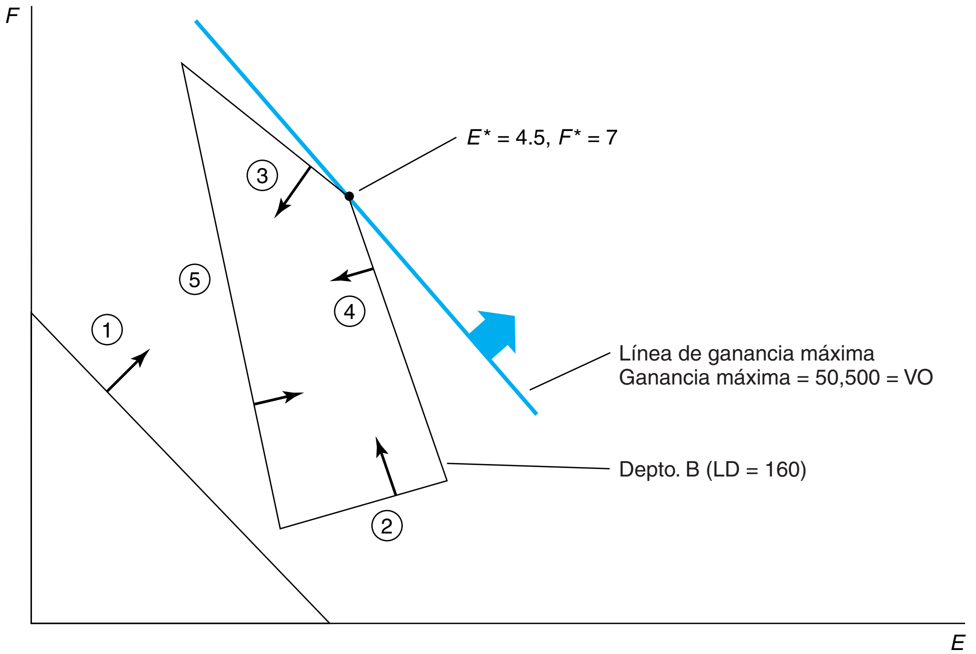


FIGURA 5.3
Otra vez el modelo de PL de PROTRAC

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Plan de producción de Protrac**						
2	Producto:	E-9	F-9				
3	Cantidad de producción	4.5	7	Ganancias			
4	Margen contrib. unit.	$5,000	$4,000	$50,500			
5	Restricciones	Uso de recursos		Total LI		LD	Holgura
6	Depto. A	10	15	150	≤	150	0
7	Depto. B	20	10	160	≤	160	0
8	Requerimiento de mezcla	1	-3	-16.5	≤	0	16.5
9	Horas de pruebas	30	10	205	≥	135	70
10	Total de unidades	1	1	11.5	≥	5	6.5

Informe de sensibilidad en Microsoft Excel 8.0

Celdas ajustables

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$B$3	Cantidad de producción E-9	4.5	0	5000	3000	2333.33
$C$3	Cantidad de producción F-9	7	0	4000	3500	1500

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	D de la restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
$D$6	Depto. A, LI total	150	150	150	90	47.14
$D$7	Depto B, LI total	160	175	160	73.33	40
$D$8	Requerimiento de mezcla, LI total	16.5	0	0	1E+30	16.5
$D$9	Horas de pruebas, LI total	205	0	135	70	1E+30
$D$10	Unidades totales, LI total	11.5	0	5	6.5	1E+30

Incremento y decremento permitidos en la rentabilidad de *F* sin cambiar ni *E ni *F****

Refleja el margen válido para el precio sombra de 175

Ganancia extra que se obtendría si se dispusiera de una hora adicional de trabajo en el departamento B

FIGURA 5.4

Solución e Informe de sensibilidad de Solver para el modelo de PL de PROTRAC

SUGERENCIA: ***Para cada celda del LI de una restricción, Solver explora hacia la izquierda de la hoja de cálculo del modelo hasta que logra encontrar un rótulo, si lo hay. A continuación, explora también arriba de la celda del LI en la hoja de cálculo del modelo hasta que encuentra un rótulo, si lo hay. Los dos rótulos, si se encuentran presentes, son enlazados por Solver para formar el rótulo correspondiente a esa restricción en el Informe de sensibilidad. Este mismo procedimiento se realiza para rotular las celdas que contienen variables de decisión en el Informe de sensibilidad. Así, la elección apropiada de rótulos en la hoja de cálculo del modelo puede ayudar a obtener finalmente un conjunto de rótulos que se documenten por sí mismos en dicho informe.***

Haremos aquí las siguientes observaciones:

1. La contribución óptima a las ganancias es $50,500.
2. Los valores óptimos de las variables de decisión son $E^* = 4.5$, $F^* = 7$.
3. La columna "Holgura" presenta los valores de las variables de holgura o de exceso. En el análisis geométrico (figura 5.3), comprobamos que las restricciones de los departamentos A y B son activas. Todas las demás son restricciones inactivas. En la hoja de cálculo del modelo, podrá usted observar que esto se expresa como valores de holgura cero en las celdas G6 y G7, y valores positivos de holgura o de excedente en las tres restricciones restantes (celdas G8: G10).
4. La solución es no degenerada. En la figura 5.3, sólo dos rectas de restricción tienen su intersección en el vértice óptimo, y existen dos valores positivos para las variables de decisión en dicha intersección. Ésta es la interpretación geométrica. En el modelo de hoja de cálculo optimizado con Solver, la no degeneración se manifiesta por el hecho de que existen 5 variables positivas (E^*, F^* y las holguras en las celdas G8: G10), lo cual es igual al número de restricciones.

Vamos a exponer ahora el análisis incluido en el Informe de sensibilidad de Solver. Es importante señalar que *el análisis de sensibilidad se basa en la proposición de que todos los datos, con excepción de un número, se mantienen fijos en el modelo,* y pediremos información sobre la forma como cambia la solución óptima a causa de las modificaciones del único dato que se nos permite modificar. La información de nuestro interés podría ser (1) el efecto sobre el VO (es decir, la máxima ganancia posible) y (2) el efecto sobre la política óptima (es decir, los valores de decisión, E^*, F^*). En la sección 5.4 veremos un escenario realista en el cual se emplea el análisis de sensibilidad. En términos matemáticos, el análisis de sensibilidad corresponde al

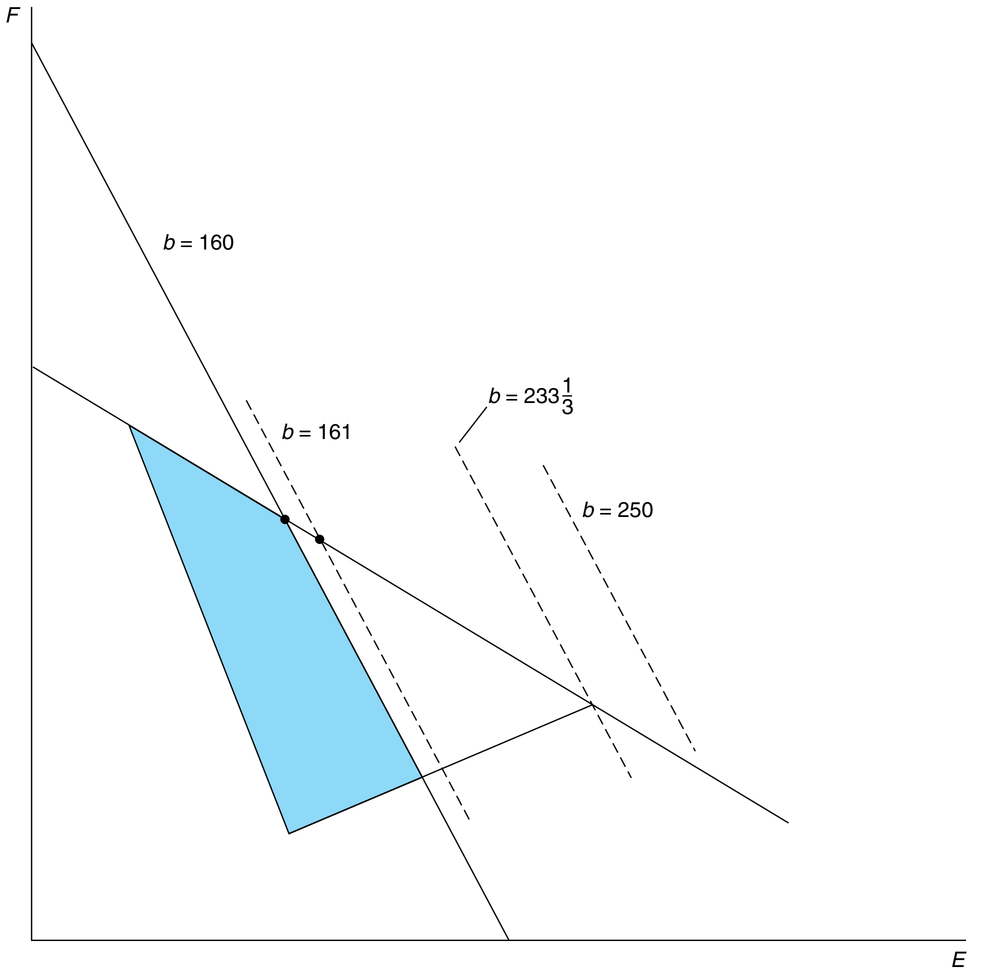


FIGURA 5.5
Tres nuevos valores de *b*

concepto de la derivada parcial, donde todas las variables se mantienen constantes, con excepción de una. Esto se conoce también, en economía, como *análisis marginal.*

SENSIBILIDAD DEL LD Y EL PRECIO FIJO

Consideremos primero una situación en la cual mantenemos fijos todos los números, excepto el número de horas de trabajo disponibles en el departamento B. ¿Qué pasaría si dispusiéramos de 161 horas en lugar de 160? ¿Qué efecto tendría esto sobre el VO? Puesto que esta restricción sobre la disponibilidad de horas de trabajo es de la forma ≤ si usamos el lenguaje de la sección 4.12 podemos decir que el hecho de aumentar el LD es equivalente a "relajar" la restricción, lo cual significa que ésta se vuelve más fácil de satisfacer. Por eso podríamos esperar con seguridad que el cambio de 160 a 161 no disminuiría el VO. Sin embargo, ¿mejoraría eso realmente el VO? y, en caso afirmativo, ¿en qué medida?

Para empezar, utilizaremos las herramientas que ya hemos adquirido, es decir, las del análisis geométrico, para responder muchas preguntas. A continuación relacionaremos ese análisis con el Informe de sensibilidad de Solver. Hagamos primero que el símbolo *b* indique el valor del LD sobre la restricción del departamento B. Así, en la figura 5.3, $b = 160$. En la figura 5.5, superponemos la restricción del departamento B para los valores $b = 161$, $b = 233\frac{1}{3}$, y $b = 250$. Por la exposición de la sección 4.11, sabemos que esos tres nuevos valores de *b* corresponden geométricamente a traslaciones paralelas (alejándose del origen) de la recta de restricción.

Además, puesto que un aumento de *b* significa que estamos relajando la restricción, la interpretación geométrica es que el conjunto restringido, si sufre algún cambio, se expandirá. Los nuevos conjuntos de restricciones, junto con las soluciones óptimas correspondientes a la disponibilidad de horas de trabajo en el departamento B, de $161, 233\frac{1}{3}$ y 250, se ilustran en las fi-

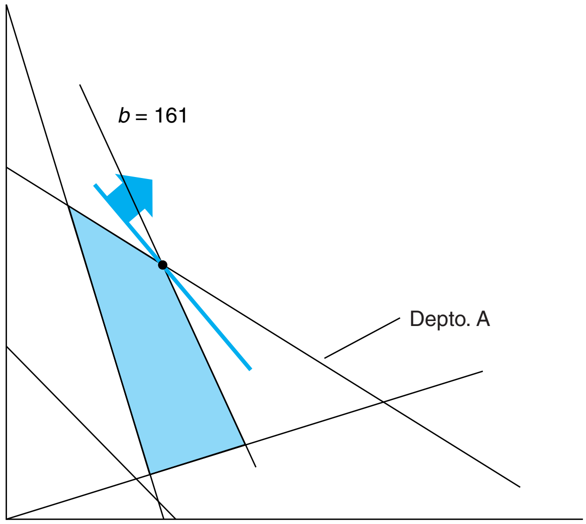


FIGURA 5.6
b = 161

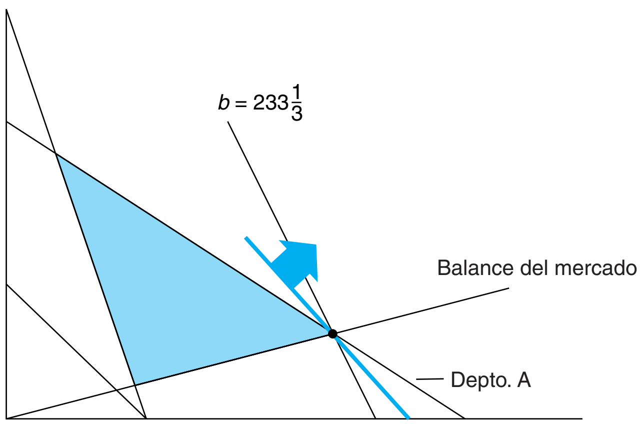


FIGURA 5.7
b = 233 1/3

guras 5.6, 5.7 y 5.9 respectivamente. Estas figuras revelan algunos hechos interesantes que puede usted verificar directamente modificando el modelo PROTRAC presentado en el capítulo 4, empleando el GLP:

***b* = 161** Cuando $b = 161$ (figura 5.6), las restricciones de los departamentos A y B siguen siendo activas. Esto significa que la nueva solución estará dada por las dos ecuaciones:

$$10E + 15F = 150 \quad \text{y} \quad 20E + 10F = 161$$

Resolviendo, obtenemos $E^* = 4.575$, $F^* = 6.95$.[3] La nueva ganancia máxima será entonces

$$\text{VO} = 5000E^* + 4000F^* = 5000(4.575) + 4000(6.95) = 50{,}675$$

Observe que

ΔVO = aumento en las ganancias = (ganancias cuando $b = 161$) – (ganancias cuando $b = 160$) = 50,675 – 50,500 = 175

[3]Éste es un punto interesante. Tal vez usted haya supuesto intuitivamente que el hecho de agregar una hora de trabajo al departamento B nos permitiría producir un poco más de E y un poco más de F en cierta mezcla apropiada, pero vemos que eso no sucede en realidad. Nuestra nueva solución muestra que la política óptima produce 0.075 más E, pero 0.05 menos F. La geometría (figura 5.5) nos revela por qué sucede así.

La ganancia de 63,333.33 es 175 (233.33 – 160) = 12,833.33, mayor que la ganancia obtenida con b = 160

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Plan de producción de Protrac**						
2	Producto:	E-9	F-9				
3	Cantidad de producción	10	3.3333	Ganancias			
4	Margen contrib. unit.	$5,000	$4,000	$63,333			
5	Restricciones	Uso de recursos		Total LI		LD	Holgura
6	Depto. A	10	15	150	≤	150	0
7	Depto. B	20	10	233.33333	≤	233.333	0
8	Requerimiento de mezcla	1	-3	-7.64E-14	≤	0	8E-14
9	Horas de pruebas	30	10	333.33333	≥	135	198.33
10	Total de unidades	1	1	13.333333	≥	5	8.3333

Nuevo valor de b

Tres restricciones activas en lugar de dos, por consiguiente una solución óptima degenerada.

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$B$3	Cantidad producción E-9	10	0	5000	3000	2333.333
$C$3	Cantidad producción F-9	3.333	0	4000	3500	1500

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
$D$6	Depto. A, Total LI	150	150	150	200	0
$D$7	Depto. B, Total LI	233.333	175	233.333	0	~~113.333~~
$D$8	Requerimiento mezcla Total LI	-7.6E-14	0	0	1E+30	0
$D$9	Horas de pruebas Total LI	333.333	0	135	198.333	1E+30
$D$10	Total unidades, Total LI	13.333	0	5	8.333	1E+30

El incremento permisible es ahora de cero

El mismo precio sombra para b=160

FIGURA 5.8

Solución de Solver e Informe de sensibilidad para b = 233.333

***SUGERENCIA:** El Informe de sensibilidad no es más que una hoja de trabajo en la que no se muestran las líneas de división. Usted puede alterar su formato con el fin de mejorar su apariencia. Importante: el formato decimal predeterminado de cada precio sombra es igual al formato de la celda del LI de su restricción. Si la celda de LI tiene un formato con ninguna o pocas posiciones decimales, podría aparecer un precio sombra de 0 siendo que, de hecho, se trata de una fracción pequeña, como por ejemplo 0.023. Acostúmbrese a pasar el cursor sobre las entradas del Informe de sensibilidad que muestren un 0, a fin de comprobar si realmente es 0 o es una cifra pequeña que requiera de la especificación de un formato con más posiciones decimales.*

Como puede apreciarse en la figura 5.4, el valor de 175 también es el **precio sombra** correspondiente a la restricción del departamento B. Lo que acabamos de ilustrar es que, en el Informe de sensibilidad, el precio sombra[4] para la restricción del departamento B muestra la cantidad en que cambia el valor objetivo óptimo cuando aumenta en una unidad el LD de dicha restricción, manteniendo iguales los demás datos.

En general, el precio sombra de una restricción dada puede interpretarse como la razón de cambio del VO a medida que aumenta el LD de dicha restricción, mientras todos los demás datos permanecen iguales.

b = 233 1/3 La figura 5.7 muestra que cuando $b = 233^1/_3$, las tres restricciones, es decir el departamento A, el departamento B y el balance del mercado, están activas.

La solución de Solver y el Informe de sensibilidad de este modelo revisado se muestran en la figura 5.8. Esta figura señala valores de holgura cero en las tres restricciones activas. Solamente hay cuatro variables positivas. Por el hecho de que este modelo tiene cinco restricciones

[4]Se le llama "precio" porque refleja el precio máximo que usted estaría dispuesto a pagar por una hora adicional de capacidad. Se le llama precio "sombra" porque su valor se mantiene enmascarado o sombreado hasta que se optimiza el modelo y Solver efectúa el análisis de sensibilidad.

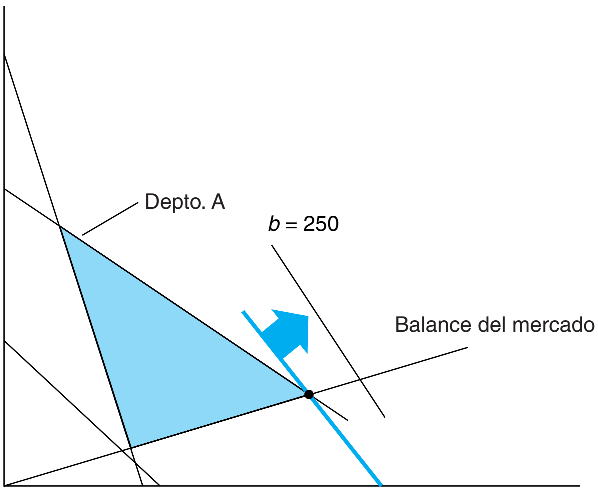


FIGURA 5.9
$b = 250$

y considerando que la solución óptima sólo tiene cuatro variables positivas, la solución es *degenerada*, de acuerdo con la definición propuesta en la sección 5.2. Obsérvese en la salida que la solución actual es $E^* = 10$, $F^* = 3^1/_3$. Y además,

$$\text{VO} = 5000E^* + 4000F^* = 5000(10) + 4000\,(3⅓) = 63{,}333⅓$$

Cuando $b = 233^1/_3$, el LD de la restricción de mano de obra del departamento B ha aumentado $73^1/_3$ unidades por encima del valor original de 160. En forma consecuente con la interpretación anterior del precio sombra, que se dio como 175, vemos que el VO ha aumentado en

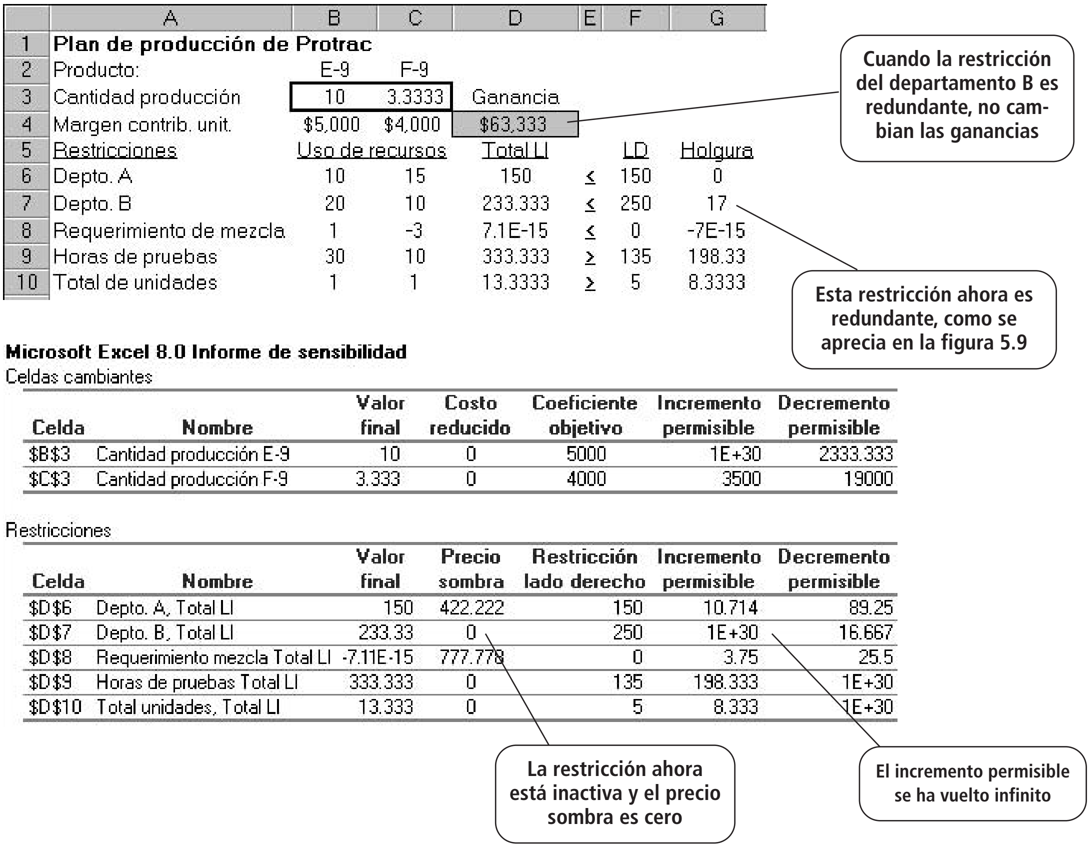
$$\Delta\text{VO} = 63{,}333⅓ - 50{,}500 = 12{,}833⅓ = (175)(73⅓)$$

***b* > 233⅓** Cuando b aumenta a $233^1/_3$ o más, las figuras 5.7 y 5.9 muestran que la restricción de mano de obra sobre el departamento B se vuelve redundante. Los valores de E^* y F^* y el VO se conservan como en las figuras 5.7 y 5.8. Por ejemplo, en la figura 5.10 aparece la solución de Solver y el Informe de sensibilidad correspondientes a $b = 250$.

Observe que nuevamente se trata de una solución no degenerada y que ahora las restricciones activas (es decir, las que tienen una holgura de 0) son la del departamento A y la de balance del mercado (compárelas con la figura 5.9). Observe también que el precio sombra de la restricción del departamento B ha disminuido de 175 a cero. Este cambio en el precio sombra demuestra que la interpretación de su significado, que dimos anteriormente, deberá restringirse a un rango específico de valores de su LD. El rango de valores de LD dentro de los cuales el precio sombra permanece constante se conoce como **rango permisible del LD**. El rango apropiado aparece en el Informe de sensibilidad bajo la sección titulada “Restricciones”, en las columnas “Incremento permisible” y “Decremento permisible”.

Por tanto, los informes de sensibilidad de Solver que aparecen en las figuras 5.4, 5.8 y 5.10 nos indican que

1. Cuando $b = 160$ (figura 5.4), el precio sombra de 175 es válido para un incremento permisible (de b) de $73^1/_3$ horas y un decremento permisible de 40 horas. Puesto que $160 - 40 = 120$ y $160 + 73^1/_3 = 233^1/_3$, vemos que, *para valores de b entre 120 y* $233^1/_3$ *horas, el cambio del VO por cada unidad de aumento del LD, conservándose fijos los demás datos, es de 175.*
2. Cuando $b = 233^1/_3$ (figura 5.8), el precio sombra permanece en 175, pero el incremento permisible es de 0, lo cual significa que el valor de 175 no se aplica a valores de LD mayores que $233^1/_3$. De hecho, el análisis geométrico muestra que la restricción se vuelve inactiva y redundante cuando $b > 233^1/_3$. *Los pequeños cambios en el LD de una restricción inactiva no pueden afectar el VO y, por tanto, en el caso de las restricciones inactivas, el precio sombra siempre será cero.*



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Plan de producción de Protrac**						
2	Producto:	E-9	F-9				
3	Cantidad producción	10	3.3333	Ganancia			
4	Margen contrib. unit.	$5,000	$4,000	$63,333			
5	Restricciones	Uso de recursos		Total LI		LD	Holgura
6	Depto. A	10	15	150	≤	150	0
7	Depto. B	20	10	233.333	≤	250	17
8	Requerimiento de mezcla	1	-3	7.1E-15	≤	0	-7E-15
9	Horas de pruebas	30	10	333.333	≥	135	198.33
10	Total de unidades	1	1	13.3333	≥	5	8.3333

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$B$3	Cantidad producción E-9	10	0	5000	1E+30	2333.333
$C$3	Cantidad producción F-9	3.333	0	4000	3500	19000

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
$D$6	Depto. A, Total LI	150	422.222	150	10.714	89.25
$D$7	Depto. B, Total LI	233.33	0	250	1E+30	16.667
$D$8	Requerimiento mezcla Total LI	-7.11E-15	777.778	0	3.75	25.5
$D$9	Horas de pruebas Total LI	333.333	0	135	198.333	1E+30
$D$10	Total unidades, Total LI	13.333	0	5	8.333	1E+30

FIGURA 5.10

Solución e Informe de Sensibilidad de Solver con b = 250

3. Cuando $b = 250$ (figura 5.10) podemos ver que, con la restricción relevante inactiva, el precio sombra es prácticamente cero y el incremento permisible es infinito.[5] Es decir que, para cualquier aumento posterior de b, la restricción permanecerá inactiva y el precio sombra seguirá conservando el valor de 0. En la figura 5.10, el decremento permisible de 16.66 hará que el valor del LD vuelva a ser $233^1/_3$. Para valores de b menores que $233^1/_3$, hemos visto en la figura 5.8 que el precio sombra es 175, y no cero.

En resumen,

1. El precio sombra de una restricción cualquiera se puede interpretar como la razón de cambio del VO a medida que aumenta el LD de dicha restricción (es decir, el cambio por aumento unitario del LD), mientras los demás datos permanecen sin cambio.[6] La interpretación del precio sombra solamente es válida dentro de cierto rango del LD dado. Dicho rango se especifica en las columnas tituladas Incremento permisible y Decremento permisible, en la sección de Restricciones del Informe de sensibilidad. Se trata de un rango en el cual el precio sombra permanece constante. Sin embargo, fuera de este rango permisible, el precio sombra puede cambiar a otro valor.

2. De acuerdo con la interpretación anterior, el precio sombra de una restricción inactiva siempre será cero. Si una restricción es inactiva, significa que dicha restricción tiene holgura o excedente (es decir, que no está satisfecha en su valor límite o frontera).

3. Nótese que la información de sensibilidad del LD ofrecida por el Informe de sensibilidad *no* nos dice cómo cambia la decisión óptima E^*, F^*; simplemente explica el modo en que cambiará el VO a medida que cambia el LD.

[5]El número más grande que puede representar Excel es 1E+30, es decir, un 1 seguido de 30 ceros. Para efectos prácticos, esta cifra se considera infinitamente grande según la escala numérica manejada en el modelo de PL original de PROTRAC.

[6]El Informe de sensibilidad no es aplicable cuando se modifica más de un parámetro.

4. Cuando encontramos una solución degenerada, algunos de los precios sombra tienen un incremento o decremento permisible de cero. En este caso sólo obtenemos del Informe de sensibilidad una cantidad limitada de información. De hecho, únicamente sabemos acerca del efecto que causan los cambios unilaterales en el LD sobre el VO.

SENSIBILIDAD DE COEFICIENTES DE FUNCIÓN OBJETIVO Y SOLUCIONES ÓPTIMAS ALTERNATIVAS

Considere el incremento del coeficiente de F en la función objetivo; es decir, aumente su ganancia por unidad manteniendo fijo el coeficiente de E. Ya hemos visto (en la figura 4.20) que los contornos de la función objetivo se vuelven más planos (es decir, con una pendiente menos negativa) a medida que dicho coeficiente va aumentando. La figura 5.3 muestra que la solución óptima se queda en el vértice $E^* = 4.5$, $F^* = 7$ hasta que el coeficiente de F aumenta lo suficiente para que los contornos de la función objetivo queden paralelos a la restricción ③. Cuando los contornos de la función objetivo son paralelos a la restricción ③, hay *dos* soluciones óptimas en vértices: el vértice actual ($E^* = 4.5$, $F^* = 7$) y el vértice determinado por la intersección de las restricciones ③ y ⑤. En general, se emplea el término **soluciones óptimas alternativas** en las situaciones como ésta, donde tenemos más de un conjunto de variables de decisión que arrojan el mismo valor óptimo para la función objetivo.

Si el coeficiente de F continúa aumentando, la solución actual ($E^* = 4.5$, $F^* = 7$) ya no será óptima y el punto determinado por la intersección de las restricciones ③ y ⑤ será el que represente la única solución óptima. El incremento permisible del coeficiente de F, por tanto, es determinado por el aumento del coeficiente que hace que los contornos de la función objetivo sean paralelos a la restricción ③. Aquí podríamos preguntar: ¿Cuándo sucede esto?

Los contornos de la función objetivo son paralelos a la restricción ③ cuando las pendientes de las dos rectas tienen el mismo valor, lo cual significa que los coeficientes satisfacen la siguiente igualdad:

$$\frac{\text{coeficiente de } E \text{ en ③}}{\text{coeficiente de } F \text{ en ③}} = \frac{\text{coeficiente de } E \text{ en objetivo}}{\text{coeficiente de } F \text{ en objetivo}}$$

Por tanto

$$\frac{10}{15} = \frac{5000}{\text{coeficiente de } F \text{ en objetivo}}$$

y, por tanto

$$\text{coeficiente de } F \text{ en objetivo} = (5000)\,(15/10) = 7500$$

El coeficiente actual de F en la función objetivo es 4,000. Se vuelve paralelo a ③; es decir, se presentan soluciones óptimas alternativas si este valor sube hasta 7,500. Luego, la solución óptima actual permanece válida siempre y cuando el aumento del coeficiente de F sea $\leq$ 3,500. *A esto se le llama incremento permisible del coeficiente de* F y es el valor mostrado en la figura 5.4. Esta combinación de álgebra y geometría explica tanto el significado como el valor de esta entrada del informe.

En general, los **rangos de coeficientes objetivo** indican los rangos en los cuales no ocurrirá ningún cambio en la solución óptima. Es más, observando cómo el cambio de los coeficientes afecta la pendiente de la función objetivo, podemos hacer las siguientes generalizaciones importantes:

Al cambiar los coeficientes de la función objetivo cambia la pendiente de los contornos de dicha función. Este cambio de la pendiente puede afectar o no la solución y el valor óptimo de la función objetivo.

Recuerde ahora que, a medida que se incrementó el coeficiente de F (conservando sin cambio alguno el coeficiente de E), llegó un momento en el cual obtuvimos una nueva solución con la que aumentó el valor óptimo de F. Este resultado va de acuerdo con nuestra intuición, pues el aumento de rentabilidad de F no provocaría que usted produzca F a un nivel menor. Este caso ilustra un concepto general:

En los modelos Max, el aumento de las ganancias de una actividad y la conservación sin cambio de los demás datos no pueden reducir el nivel óptimo de dicha actividad.

La situación para el caso de un modelo de minimización de costos es simplemente la inversa. Puesto que queremos minimizar el costo total, ciertamente no podríamos esperar que el aumento del costo de una actividad, mientras se conservan sin cambios los demás datos, condujera a un nivel óptimo mayor de tal actividad. Este caso ilustra otro concepto general:

En los modelos Min, el aumento del costo de una actividad mientras se conservan inalterados los demás datos no puede aumentar el nivel óptimo de dicha actividad.

Significado de los rangos de coeficientes objetivo Ahora podemos resumir los puntos importantes que conciernen a los rangos de coeficientes objetivo del Informe de sensibilidad. Al interpretar esta parte del informe, usted debe tener cuidado de distinguir las soluciones no degeneradas de las degeneradas.

En las soluciones no degeneradas:

1. Las columnas Incremento permisible y Decremento permisible de la parte de Celdas cambiantes del informe deben decirle cuánto puede aumentar o disminuir el coeficiente de una variable dada en la función objetivo, sin alterar la solución óptima, suponiendo que todos los demás datos se mantienen fijos. Queda claro que, a medida que varían las ganancias dentro de este rango, los valores de VO están dados por

$$\text{VO} = 5000E^* + [(\text{ganancia de } F) \cdot F^*]$$

Para ilustrar el caso, imagine que al coeficiente de F se le asigna el valor 6,000, que cae dentro del rango permisible indicado en la figura 5.4. Por tanto, la solución permanece en ($E^* = 4.5$, $F^* = 7$) y también

$$\text{VO} = 5000\text{E}^* + 6000\text{F}^* = 5000(4.5) + 6000(7) = 64{,}500$$

2. Cuando cambie un coeficiente en una cantidad menor de lo permisible, la solución óptima actual permanece como la única solución óptima para el modelo.
3. Cuando aumente un coeficiente en particular en la cantidad permisible, en el caso de los modelos Max, habrá otro vértice como solución óptima alternativa con un valor óptimo mayor para la variable identificada. (Para el caso de los modelos Min, el aumento de un coeficiente en la cantidad permisible producirá un vértice óptimo alternativo con un valor óptimo menor para la variable identificada.)
4. Cuando disminuya el coeficiente de una variable dentro de la cantidad permisible, existirá una solución de vértice óptima alternativa en la cual la variable identificada tendrá un valor óptimo menor (en el caso de los modelos Max) y mayor (en el caso de los modelos Min).

Otro hecho interesante se aplica a las soluciones *no degeneradas*. *Cuando vea, para algún coeficiente objetivo del Informe de sensibilidad, una entrada de cero bajo las columnas de Incremento o Decremento permisible, sabrá que existe cuando menos una solución de vértice óptima alternativa para tal modelo.* Más aún, cuando haya un óptimo alternativo, aparecerá dicha señal. Este principio se ilustra en la figura 5.11, que es un ejemplo hipotético de PL de maximización con dos variables de decisión y tres restricciones de desigualdad. El contorno de la función objetivo es paralelo a la segunda restricción (rotulada con 2) y, empleando la técnica grá-

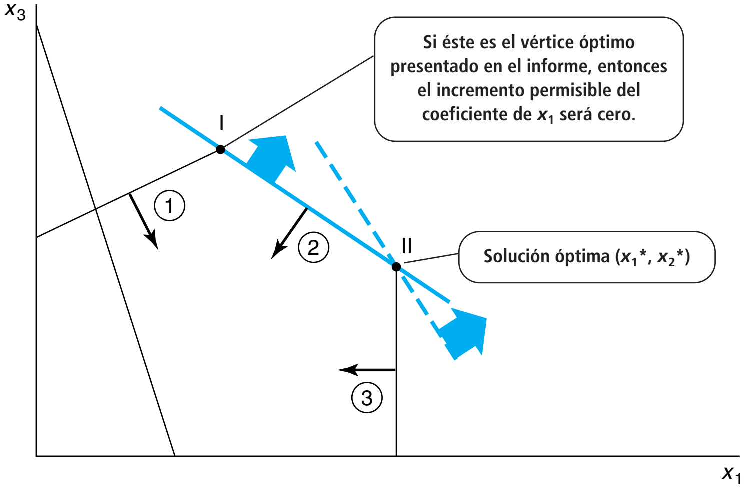


FIGURA 5.11

Ejemplo de óptimos alternativos

fica de solución, puede ver que los vértices rotulados con I y II son los óptimos alternativos de este modelo. Solver, debido al método símplex, del cual se vale para optimizar el modelo de PL, sólo determinará como solución óptima uno de estos dos vértices y el Informe de sensibilidad sólo se aplicará a tal vértice.[7] Supongamos que el vértice I es la solución encontrada por Solver. La geometría de la figura 5.11 indica que cualquier incremento del coeficiente de x_1 cambiará el contorno de la función objetivo a una inclinación parecida a la de la línea punteada y que el vértice II se vuelve la única solución óptima. El Informe de sensibilidad de Solver acerca de la solución del vértice I tendría, como señal de este fenómeno, un valor de cero en la columna de Incremento permisible para los cambios del coeficiente objetivo de x_1.

Consideremos ahora el caso de un Informe de sensibilidad que muestra una *solución óptima degenerada*. En este caso, deben hacerse dos advertencias.

En el caso de una solución degenerada

1. Deben ignorarse las señales descritas antes para los óptimos alternativos.
2. Siempre y cuando un coeficiente de la función objetivo varíe dentro del rango indicado, la solución óptima no cambiará. Este hecho también fue válido en el caso no degenerado. Sin embargo, en este último caso, se obtuvieron óptimos alternativos cuando el coeficiente se modificó hasta el límite de su rango; y después, a medida que se siguió avanzando por esta dirección de cambio, se perdió la solución óptima original. En la situación degenerada, este resultado ya está garantizado. Lo único que podemos decir es que el coeficiente de una función objetivo debe cambiar en una cantidad *cuando menos igual, y posiblemente mayor que*, las cantidades permisibles indicadas, para que se pueda producir una nueva solución óptima.

COSTOS REDUCIDOS

Hemos explicado todo lo que hay en el Informe de sensibilidad, excepto las entradas bajo la columna de “Costo reducido”. Las siguientes observaciones se relacionan con dichas entradas. Ésta es otra situación en la cual, a fin de realizar una interpretación correcta, es necesario determinar primero si la solución es no degenerada.

[7]Cuando existen óptimos alternativos en un modelo de PL, con frecuencia sucede que las diferencias imperceptibles en la precisión aritmética de la unidad central de proceso provocan que Solver, al ser ejecutado en ciertos modelos de computadora, encuentre una solución de vértice óptimo alternativo, mientras que la misma hoja de trabajo procesada por Solver en otra máquina encontrará una solución de vértice óptimo alternativo diferente. Por ejemplo, Excel-Solver utilizado en una Macintosh y Excel-Solver en una PC con Windows, procesando la misma hoja de trabajo, pueden converger en soluciones de vértices óptimos alternativos diferentes.

1. En las soluciones *no degeneradas*, el costo reducido de cualquier variable de decisión en particular se define como *cuánto tendría que cambiar el coeficiente de dicha variable, en la función objetivo, para tener un valor óptimo positivo*. Por tanto, si una variable ya es positiva en la optimalidad, su costo reducido es cero (como sucede con ambas variables de decisión de las figuras 5.4, 5.8 y 5.10). Si el valor óptimo de una variable es cero, entonces, según la definición de costo reducido, usted puede ver que dicho costo es el incremento o el decremento permisible que corresponde a dicha variable (uno de estos valores será infinito y el otro corresponderá al costo reducido). Por ejemplo, suponga que cambiamos los datos del modelo E y F de PROTRAC, de tal manera que el valor óptimo $E^* = 0$. En consecuencia, el costo reducido de E es la cantidad en la cual tendría que *aumentar* su margen de contribución (el coeficiente de E en la función objetivo) a fin de tener una solución óptima con $E^* > 0$. Ésta es precisamente la entrada que, como lo podrá usted ver, corresponde a E en la columna de Incremento permisible. En este caso, para cualquier disminución del coeficiente de E (lo cual provocaría que E produjera menos ganancias), el valor E^* se mantendría en cero. Por consiguiente, la entrada de Decremento permisible sería infinita en este caso.

2. Puede darse otra interpretación equivalente al costo reducido de una solución no degenerada. En las soluciones no degeneradas, el costo reducido de una variable de decisión (cuyo valor óptimo actual es cero) es la razón (por cantidad unitaria) a la cual se afecta el valor objetivo a medida que "se fuerza" la variable hacia una solución óptima. En el ejemplo anterior, con $E^* = 0$, el VO disminuiría si nos viéramos obligados a encontrar una solución óptima con la restricción adicional $E = 1$. (Para comprobar cómo *disminuye* el VO, basta que observe usted que el valor óptimo de E es cero en el modelo actual. Por consiguiente, si hacemos que E sea 1, lo único que podemos obtener es una retribución menor.) Esta *razón de disminución,* a medida que se fuerza inicialmente E^* para que tenga un valor positivo, estaría expresada por el costo reducido de E.

Recuerde que el precio sombra de una restricción da la razón de cambio del VO a medida que aumenta el LD de tal restricción. En virtud de que en este ejemplo $E^* = 0$, ocurre que la restricción de no negatividad de E está activa. Si se obliga a E a ser positivo, el resultado equivale a elevar el LD de su restricción de no negatividad. Por tanto, esta interpretación equivalente se articula con facilidad: para los modelos que tengan restricciones de no negatividad, el costo reducido es simplemente el precio sombra de la restricción de no negatividad de una variable de decisión. En la sección 5.4 aparecen otros ejemplos de ambas interpretaciones.

3. Considere ahora una *solución degenerada* con una variable de decisión cuyo valor óptimo es cero. El coeficiente de la variable en la función objetivo debe cambiar *por lo menos, y posiblemente más que,* el costo reducido para que haya una solución óptima, apareciendo tal variable con un nivel positivo.

Con esto completamos nuestra búsqueda sobre el significado de las distintas entradas del Informe de sensibilidad de Solver. A pesar de que nuestro estudio ha sido introductorio, si usted ya ha dominado el material expuesto a partir del capítulo 3 y hasta este punto, ahora será capaz de aplicar la PL a situaciones prácticas, formular modelos, optimizarlos con Solver e interpretar correctamente el Informe de sensibilidad de Solver.[8] Nuestra intención en la sección 5.4 es familiarizarlo más con la interpretación de modelos, mostrándole cómo se podría emplear el Informe de sensibilidad en un escenario realista. El enfoque es gerencial, con énfasis en la información de sensibilidad y su utilidad. En la sección 5.5 presentamos una sinopsis de cómo se debe interpretar el Informe de sensibilidad. Por último, en la sección 5.6 contaremos una historia que le prevendrá sobre las trampas del análisis de sensibilidad.

5.4 LA PRODUCCIÓN DE CRAWLER TREAD: DIÁLOGO CON LA GERENCIA (ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN ACCIÓN)

Este modelo se presentó en la sección 3.10. Recuerde que el mineral de cuatro localidades diferentes se mezcla para fabricar rodamientos para tractores tipo oruga. Cada mineral contiene tres elementos esenciales que, para simplificar, llamaremos A, B y C, los cuales tendrán que aparecer en la mezcla final a ciertos niveles mínimos. PROTRAC paga diferentes precios por tonelada de mineral, según la mina de la cual provengan. La mezcla de costo mínimo se obtiene resolviendo el siguiente modelo de PL, donde T_i = la fracción de tonelada de mineral proveniente de la localidad i que hay por tonelada de mezcla.

[8] El Informe de límites de Solver es de importancia práctica limitada y no lo cubriremos.

CÁPSULA DE APLICACIÓN

Contra la veta: los modelos de PL ayudan a una compañía fabricante de archiveros a ahorrar en sus materias primas

Wellborn Cabinet, Inc. es dueña de una fábrica de archiveros en Alabama. La fábrica consta de un aserradero, cuatro hornos de secado y una planta de ensamblado de archiveros de madera que dispone de una sierra para cortar los componentes de los archiveros. Wellborn obtiene la madera para la fabricación de los archiveros de dos maneras: (1) comprando troncos para procesarlos en su aserradero y preparar las tablas que utiliza en la planta de ensamblado; (2) comprando tablas previamente aserradas en otra parte. Actualmente 73% de la entrada proviene del aserradero de la compañía.

Tanto los troncos como las tablas se clasifican como #1 y #2; #1 es de mayor calidad y más cara. Aproximadamente dos terceras partes del volumen total de los troncos que había estado comprando eran del #1. Las tablas compradas, que correspondían al 27% de la madera utilizada, se clasificaban en dos tipos: verdes (18%), las cuales tenían que secarse en los hornos de secado de la compañía, y secas (9%). Casi toda la madera seca también correspondía a la clasificación #1.

El costo de la madera representa aproximadamente 45% del costo total del material para la fabricación de archiveros. En esta situación, la administración quería saber si su enfoque de la compra de madera para la planta de ensamble de archiveros era el más económico. Para ayudarle a contestar esta pregunta, el Centro de asistencia técnica de la Universidad de Auburn, en colaboración con la Escuela de silvicultura, analizó la operación de la compañía. Se construyó un modelo de PL de la producción de componentes, incorporándole varias restricciones que incluían las capacidades del aserradero y de los hornos de secado, la salida requerida de componentes y el suministro disponible de materias primas.

La optimización del modelo reveló que la compañía podía minimizar el costo de la producción de componentes comprando únicamente dos tipos de madera: troncos de grado #2 con extremos pequeños con diámetro de 9 a 15 pulgadas (88%, de acuerdo al volumen) y troncos verdes comunes del #2 (12%). Esta política de compras reduciría los costos de materias primas de Wellborn en casi una tercera parte, un ahorro anual de unos $412,000.

El modelo proporcionó a los administradores mucha más información útil:

- Los precios sombra asociados con la compra de troncos de varios tamaños permitía a la administración efectuar la selección con la mejor relación costo-beneficio de los troncos disponibles en cualquier momento dado.
- Los análisis de sensibilidad revelaron los rangos de precios para los cuales permanecería óptima la solución prescrita por el modelo. En particular, indicaba que reducciones de hasta 20% en el precio de la madera seca de grado #1 no afectarían la política de compras óptima.
- Un valor de holgura de cero para la operación de los hornos de secado indicó que esta operación era un cuello de botella: la capacidad de los hornos de secado era el único factor que limitaba el aumento de la producción. Un aumento de 22% en la capacidad de los hornos de secado permitiría un incremento de 29% en la salida de componentes sin ser necesario efectuar ningún otro cambio. (Véase Carino *et al.*)

$$
\begin{array}{llr}
\text{Min } 800T_1 + 400T_2 + 600T_3 + 500T_4 & & \text{(costo total)} \\
\text{s.a.} \quad 10T_1 + 3T_2 + 8T_3 + 2T_4 \geq 5 & & \text{(requerimiento de A)} \\
\quad 90T_1 + 150T_2 + 75T_3 + 175T_4 \geq 100 & & \text{(requerimiento de B)} \\
\quad 45T_1 + 25T_2 + 20T_3 + 37T_4 \geq 30 & & \text{(requerimiento de C)} \\
\quad T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 1 & & \text{(condición de mezcla)} \\
\quad T_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4 & &
\end{array}
$$

Estudiemos y analicemos ahora los informes en hoja de cálculo electrónica de la solución de este modelo. Póngase usted en el lugar del gerente responsable de la planeación de la producción futura. Tiene una serie de preguntas que formular. El modelador le responde.

Gerente Antes que nada, ¿cuál es la solución a nuestro modelo de PL?

Ya encontré el óptimo del modelo con Solver, y éste es el resultado (véase la figura 5.12) *Por "solución" entiendo que se refiere a los valores óptimos de las variables de decisión. Usted puede ver que los valores óptimos (celdas B3:E3) son aproximadamente T_1 5 0.26, T_2 5 0.70, T_3 5 0.04, T_4 5 0.00. (Por razones prácticas, en la hoja de trabajo se rotula T_1 como T1, a T_2 como T2, etc., y a partir de aquí emplearemos esas etiquetas.)*

Gerente Muy bien. ¿Cuál sería el costo de una tonelada de esta mezcla?

El VO, que es el valor de la función objetivo, también está identificado. Usted puede observar que el costo mínimo es de $511.11 (celda F4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Plan de producción de Crawler Tread							
2	Mina	T1	T2	T3	T4				
3	Fracciones de tonelada	0.259	0.704	0.037	0.000	Costo total			
4	Costo/tonelada	$800	$400	$600	$500	$511.11			
5	Restricciones		Composición por tonelada			Total		LD	Holgura
6	A	10	3	8	2	5.00	≥	5	0.00
7	B	90	150	75	175	131.67	≥	100	31.67
8	C	45	25	20	37	30.00	≥	30	0.00
9	Balance	1	1	1	1	1	=	1	0

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$B$3	Fracciones de tonelada T1	0.259	0.00	800	223.636	120
$C$3	Fracciones de tonelada T2	0.7037	0.00	400	66.848	300
$D$3	Fracciones de tonelada T3	0.037	0.00	600	85.714	118.269
$E$3	Fracciones de tonelada T4	0.000	91.11	500	1E+30	91.11

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Lado derecho de la restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
$F$6	A Total	5.00	44.44	5	2.375	0.25
$F$7	B Total	131.67	0.00	100	31.667	1E+30
$F$8	C Total	30.00	4.44	30	0.714	7
$F$9	Balance Total	1	155.56	1	0.25	0.043

FIGURA 5.12

Solución e Informe de sensibilidad de Solver para el modelo de Crawler Tread.

Gerente Quisiera conservar mis costos por debajo de $500 por tonelada. ¿Hay alguna manera de lograr esto?
Es imposible encontrar una mezcla de menor costo que satisfaga las restricciones que usted ha impuesto.

Gerente ¿Se refiere usted a los requerimientos de los elementos esenciales?
Exactamente.

Gerente Bueno, tal vez pueda modificar tales requerimientos. De verdad quisiera mantener mis costos por debajo de $500 por tonelada.
Entonces ciertamente tendrá que modificar sus requerimientos. Podemos estudiar la forma de hacerlo.

Gerente Muy bien. Pero, para empezar, recuerdo que los requerimientos se expresaron como niveles mínimos de umbral. ¿Hay alguna forma de indicar exactamente la cantidad de cada elemento indispensable que se usa en la mezcla óptima?
Esa información se obtiene de las columnas F e I de la hoja de cálculo electrónica. Las primeras tres restricciones del modelo son los requerimientos de elementos esenciales.

Gerente Veo una columna rotulada como “Holgura”.
Por razones prácticas, la columna se llama “Holgura”, pero en general significa “holgura o excedente”, según el término apropiado en cada caso.

Gerente Bien, el excedente para la restricción A es cero (celda I6) y el requerimiento de A fue de 5 libras. Esto significa que, por tonelada, se producen exactamente 5 libras de A.
Precisamente.

Gerente Correcto. Y entiendo lo que les sucede a las restricciones B y C. Pero la última restricción del modelo original fue una restricción de igualdad. Esto significa que no tiene una variable de holgura ni de excedente. ¿Estoy bien?
Correcto

Gerente Entonces, ¿por qué hay un valor de holgura de cero en la celda I9? ¿No sugiere esto que hay una variable de holgura o excedente para esa restricción?

Tal vez tenga razón, pero esta sugerencia no ha sido intencional. Para una restricción que originalmente era una igualdad, la entrada en esta celda siempre será cero. Como ha señalado usted correctamente, las cifras de excedentes de este modelo están asociadas sólo con las tres primeras restricciones del modelo original.

Gerente Magnífico. Regresemos ahora a la variable de excedente de la celda I6. Veo que su valor óptimo es cero. ¿Qué relación puede tener esto con la cantidad del elemento esencial A en la mezcla final? Pensé haber vislumbrado la respuesta anteriormente, pero ahora estoy confundido.

Es fácil. En virtud de que el valor óptimo del excedente es cero, la mezcla óptima contiene exactamente 5 libras de A.

Gerente Ya veo. Y, dado que el excedente de la celda I8 es cero, la mezcla óptima debe contener precisamente 30 libras de C. ¿Estoy en lo cierto?

Efectivamente, y también puede determinar qué cantidad de B debe contener.

Gerente Muy bien. Para B tengo que ver la celda I7. Dado que el excedente es de 31.67, debe ser cierto que la restricción no está activa. ¿Y ahora qué sigue?

Bueno, esto significa que, en la mezcla óptima excede en 31.67 el requerimiento mínimo de 100 libras. Es decir, en realidad se incluyen 131.67 libras de B, como se muestra en la celda F7.

Gerente ¿No es extraño este resultado? Podríamos pensar que nuestra mezcla sería más barata si se usara una menor cantidad de B. ¿Por qué tengo que emplear más de 100 libras si únicamente se requieren 100?

Esa es una buena pregunta. Verá, sucede que la combinación de minerales que satisface los requerimientos de A y C con un costo mínimo también contiene más de 100 libras de B. Cualquier combinación de minerales que incluya una cantidad menor de B no tendrá suficiente cantidad de A o de C, o bien, si tiene la cantidad suficiente, costará más de $511.11 por tonelada. En otras palabras, el obligar a que se incluya menos de la cantidad excedente de B sin dejar de cumplir los requerimientos de A y C le costará más a fin de cuentas. Tal vez tenga que analizar esta aseveración, pero esto es precisamente lo que nos indica la solución del modelo.

Gerente Muy bien. Creo que puedo entender su punto de vista. Entonces, ¿cómo puedo bajar mis costos a $500 o menos?

Tendrá que hacer más flexibles sus restricciones. Esto significa suavizar los requerimientos de A o de C.

Gerente ¿Por qué no de B?

Porque para poder satisfacer los requerimientos de A y de C con un costo mínimo, ya está incluyendo más de 100 libras de B, lo cual es más que su umbral mínimo. En otras palabras, el requerimiento de B no está activo. Usted podría suavizar este requerimiento asignándole un número más pequeño, por ejemplo 98, y la mezcla óptima seguirá teniendo la misma composición y costo. Por tanto, el hecho de otorgar un número más pequeño a la suavización del requerimiento de B no nos llevará a ninguna parte. Se debe suavizar alguno de los requerimientos activos.

Gerente Quiere decir, alguno de los que tienen un excedente de cero.

Precisamente.

Gerente Muy bien. Por tanto tengo que suavizar el requerimiento de A o de C. ¿Pero cuál? ¿Y cuánto?

Podemos basarnos en la información que aparece bajo el encabezado "Precio sombra" del Informe de sensibilidad, para analizar estas preguntas.

Gerente Recuérdeme el significado de esta columna.

Significa la razón de cambio del VO a medida que aumentamos el lado derecho. Puesto que estamos interesados en suavizar una restricción ≥, estaremos disminuyendo el lado derecho. Veamos ahora el precio sombra de la restricción A. Es de +44.44. El signo positivo significa que, a medida que aumenta el lado derecho, el costo de VO aumenta o es afectado. Por tanto, conforme se suaviza o disminuye el lado derecho, mejora el VO. A lo que esto nos lleva es a una idea de sentido común: a me-

dida que se suavice el requerimiento de A, disminuirá el costo mínimo. El precio sombra nos dice que disminuye a razón de $44.44 por cada libra de A suprimida y que aumenta a razón de $44.44 por cada libra de A que se añada.

Gerente La suavización del requerimiento de A debe significar reducirlo de 5 libras a algo menor. ¿Estoy bien?
Así es.

Gerente Y el precio sombra de +44.44 nos dice que, por cada libra que se reduzca, el costo total bajará $44.44
Correcto.

Gerente Magnífico. Esto quiere decir que si solamente requiriera 4 libras por tonelada de A, en lugar de 5, el costo bajaría a unos $466.67, por lo cual estaría por debajo de $500. ¿Estoy en lo correcto?
No exactamente. Pero ha captado la idea. Usted tiene la razón de cambio correcta, pero esta razón se aplica solamente a un intervalo de valores cercanos al valor original de 5. El intervalo adecuado tal vez no le permita analizar la disminución de una unidad completa; podría hacerlo, por ejemplo, con sólo media unidad.

Gerente Incluso así, si disminuyo el requerimiento a 4.5 libras, ahorraré (1/2)(44.44), que es más de $22. ¡Aun así, mi costo final sería de menos de $500!
Es verdad, pero el intervalo permisible tal vez ni siquiera incluya 4.5.

Gerente Obviamente necesitamos saber cuál es ese intervalo.
Así es.

Gerente Ya veo. En la columna de Decremento permisible de la restricción A tenemos 0.25. Esto debe significar que puedo analizar cambios de 5 hasta 4.75. ¿Verdad?
Es verdad.

Gerente Por lo que mi ahorro sería de 0.25(44.44), que es $11.11, y esto me lleva justo a $500. Pero, ¿qué pasaría si suavizara el requerimiento un poco más, digamos a 4.50? ¿No se reduciría aún más el costo?
Probablemente, pero no le puedo decir cuánto con exactitud, pues la razón de cambio podría ser diferente después de una disminución de 0.25.

Gerente En otras palabras, esto debe significar que podría cambiar el precio sombra.
Exactamente.

Gerente Muy bien. Ahora, sólo para ver si he entendido bien todo esto, permítame analizar el ahorro potencial si suavizo el requerimiento de C.
Adelante.

Gerente El lado derecho original es 30. El Informe de sensibilidad indica un decremento permisible de 7, por lo que puedo bajar a 23. El precio sombra correspondiente es +4.44. Ésta es mi razón de ahorro cuando yo disminuyo a menos de 30 el lado derecho. Por tanto, si disminuyo a 23 el requerimiento, ahorro 7(4.44) = $31.08. Esto también me lleva por debajo de $500. De hecho, si disminuyera el requerimiento en tan sólo 2.5 libras, podría aplicar la misma razón de cambio y, en consecuencia, debería ahorrar (2.5)(4.44) = $11.10; con esto llegaría prácticamente a un costo de $500. ¿Cómo voy hasta ahora?
Muy bien.

Gerente Perfecto. Veo que podría rebajar el costo por tonelada hasta $500 si suavizara el requerimiento de A hasta 4.75 libras por tonelada, *o* bien, el requerimiento de C hasta 27.5 libras por tonelada. Pero ¿si suavizara los dos requerimientos, el de A y el de C un poco menos, pero en forma simultánea? ¿Qué sucedería entonces?
Perdón, pero nuevamente el Informe de sensibilidad no nos proporciona información precisa para responder esta pregunta. La única manera de contestarla sería volver a resolver el modelo varias veces, utilizando lados derechos distintos para A y C.

Gerente Por tanto, cuando aplico el precio sombra a uno de los valores de lado derecho, es importante que mantenga sin cambio alguno los demás.
Eso es correcto.

Gerente Bien, déjeme repasar esto. Sé que puedo bajar mi costo por tonelada a $500 si reduzco el requerimiento de A hasta 4.75 libras por tonelada *o* el requerimiento de C a 27.5 libras por tonelada. ¿Qué debo hacer?

El modelo no lo puede guiar a ese respecto. Tal vez note que la disminución requerida de A sería de 0.25/5, o 5% y que, en el caso de C, sería de 2.5/30 = 8 1/3%. Pero ignoro si tal información es de utilidad. El punto es que usted, como gerente, tiene que determinar cuál de los cambios dañará más las propiedades de la mezcla. Creo que todo se resume a una cuestión de ingeniería.

Gerente Sí, creo que tiene razón y ya sé con quién tengo que hablar al respecto.

Bien.

Gerente Por cierto, también he notado la columna llamada Incremento permisible. Supongo que se relaciona con los aumentos del lado derecho.

Correcto otra vez.

Gerente ¿Podría explicarme el análisis del lado del incremento para ver si entiendo lo mismo que usted?

Tomemos el requerimiento de A. Suponga que quiere constreñir este requerimiento.

Gerente En virtud de que estamos tratando con una restricción tipo $\geq$, hacerla más rígida significaría aumentar el lado derecho, que es la cantidad requerida de A.

Así es. Constreñir un requerimiento nunca puede ayudar al VO e, inclusive, puede causar daños. En este caso, el precio sombra de +44.44 nos dice que habría un efecto por el aumento del lado derecho. Esto significa que el costo aumentará. El incremento permisible de 2.375 nos indica que si aumentamos la cantidad original, 5, en cualquier cantidad hasta llegar a 2.375, el valor del aumento del costo mínimo estará representado por 44.44 veces esa cantidad.

Gerente En otras palabras, el mismo precio sombra afecta tanto los aumentos como las disminuciones del lado derecho. Así, el precio sombra es la razón de cambio del valor objetivo a medida que el lado derecho varía a través de todo ese rango permisible.

Correcto. Y la suavización de una restricción siempre significará que el VO no puede ser lastimado y tal vez mejore. Constreñir significa que el VO no puede mejorar y tal vez se vea lastimado.

Gerente Inclusive noto que el precio sombra de B es cero, lo cual significa que el cambio del valor de 100 no tiene ningún efecto. Supongo que esto quiere decir que ni siquiera necesitamos una restricción en B. ¿Por qué?

Porque, como mencioné antes, si se satisfacen los requerimientos de A y de C a un costo mínimo, automáticamente se satisface el requerimiento de B.

Gerente ¿Entonces tengo razón? ¿Podemos eliminar la restricción de B?

No lo creo. Si alguna vez quiere usted cambiar algunos de los datos y volver a resolver el modelo, la restricción de B podría ser importante. En particular, podemos ver por el incremento permisible de 31.667 que, si el LD excediera 131.667, esta restricción se volvería activa. Así que yo no diría que puede eliminarse del modelo.

Gerente ¿Podría ser un poco más explícito, sin emplear demasiada terminología?

Muy bien. Como ejemplo, la semana pasada escuché de boca del señor Shmootz que el costo del mineral de la localidad 2 podría aumentar.

Gerente ¿El señor Shmootz?

Así es.

Gerente Bueno, debo admitir que tal posibilidad me preocupa. Pero no veo cómo podemos tomar en consideración tal tipo de incertidumbre.

Esto se relaciona con su pregunta. El costo del mineral de la localidad 2 es el coeficiente de T2 en la función objetivo, es decir el 400 de la celda C4. Si este costo aumentara, esperaríamos un aumento de nuestro VO. Si el costo del mineral de la localidad 2 sube lo bastante, inclusive podríamos suponer que se emplearía menos (o nada) en la mezcla óptima. Esto significa que debería emplearse más de las demás, ya que la cantidad total empleada tiene que sumar 1 tonelada. Esto significa que la importancia relativa de las restricciones podría cambiar. Las restricciones previas, *que podían haber sido más constreñidas, tal vez ya no lo sean, y viceversa. Pueden suceder muchas cosas cuando se comienza a jugar con los datos.*

Gerente Explíqueme de nuevo lo que quiere decir con restricción constreñida.
Significa una restricción con una holgura óptima o un valor excedente de cero. Tal restricción también se llama activa, obligatoria o efectiva.

Gerente Muy bien. ¿Qué hay sobre las restricciones de igualdad? ¿Se consideran activas u obligatorias?
Sí. Siempre. En esta terminología, aunque la restricción de B actualmente está inactiva, podría volverse activa si cambian los datos del modelo.

Gerente Magnífico. Pero todavía estoy un poco confundido. ¿Qué tiene que ver todo esto con el costo del mineral procedente de la localidad 2?
Veamos el costo del mineral de la localidad 2. Actualmente podemos determinar el rango sobre el cual puede variar este costo sin influir en la mezcla óptima. En particular, vea la parte del Informe de sensibilidad llamada Celdas cambiantes. En la fila correspondiente a T2 hay un elemento llamado Incremento permisible y otro llamado Decremento permisible. Esto nos da el rango dentro del que puede variar el costo de T2.

Gerente ¿Quiere decir sin cambiar la mezcla óptima de producción?
Así es.

Gerente Muy bien. En otras palabras, el costo de T2 ahora es \$400 en nuestro modelo. ¿Lo que usted quiere decir es que el informe dice que podría ser cualquier cosa entre \$100 y \$466.85 y que la mezcla óptima de productos seguirá siendo la misma?
Precisamente.

Gerente No veo cómo podemos saberlo.
Todo está en los cálculos efectuados por Solver.

Gerente Bueno. Si el costo aumenta de \$400 a \$450, no tenemos por qué preocuparnos.
Eso no lo sé. Sabemos que la mezcla óptima de productos se conservará igual. Esto significa que los valores óptimos de todas las variables, incluyendo las holguras, quedan igual. Pero nuestro costo total aumentará en \$50 por la cantidad de T2 que se emplee en la solución actual.

Gerente Ahora entiendo. El VO pasará del valor anterior de \$511.11 al nuevo valor, 511.11 + 50(0.70370) = \$546.30. Ya veo lo que quiere usted decir. Todo quedará igual, excepto el costo final. ¿Dijo que inclusive los valores de holgura/excedente permanecerán iguales?
Sí. Si todas las variables de decisión se conservaran iguales, podrá observar en las fórmulas de la hoja de cálculo electrónica que las variables de holgura/excedente también tendrían que quedar iguales.

Gerente Esto debe significar que las restricciones que están activas también se quedan iguales.
Así es.

Gerente Ya veo. Por cierto, ¿qué sucede si el costo de T2 aumenta más de la cantidad permisible?
Bueno, debido a que tenemos un modelo Min (de minimización), sé que al aumentar el costo de una entrada no puede aumentar su uso. Por tanto, a medida que aumenta el costo de T2, sé que el valor óptimo de T2 nunca puede aumentar. De hecho, debido a que la solución actual es no degenerada, sé que, cuando el costo de T2 aumenta en más de la cantidad permisible, su valor óptimo con toda seguridad disminuirá.

Gerente Un momento. Vaya más despacio. Usted dijo "solución no degenerada". Hágame el favor de refrescar mi memoria acerca de esa degeneración.
Claro. Sencillamente solución no degenerada significa que, en la hoja de cálculo electrónica optimizada, la cantidad de variables con un valor óptimo positivo, incluyendo tanto las variables de decisión como las de holgura o excedente, es igual a la cantidad de restricciones. La figura 5.12 muestra que, en la optimalidad, tres variables de decisión y una variable de excedente son positivas. Dado que hay cuatro restricciones en el modelo, tenemos una solución no degenerada. Ésta es una

cuestión técnica, pero es importante para interpretar algunos de los Informes de sensibilidad.

Gerente Muy bien. Correcto. Así pues, si el costo por unidad de mineral procedente de la mina 2 aumenta en más de la cantidad permisible, obtendremos una solución óptima con un valor de T2 más pequeño.

Así es. Y no sólo eso. Los valores óptimos de algunas de las demás variables también pueden cambiar, pero no es posible decir exactamente cuáles ni cuánto. Esto significa que un excedente que era positivo podría volverse cero y, por tanto, una restricción que estaba inactiva podría activarse. Además podría significar que una restricción que antes tenía un excedente de cero ahora podría volverse inactiva en el sentido de que su excedente se ha vuelto positivo. En otras palabras, una vez que el cambio del coeficiente de costo exceda el límite del rango indicado, puede suceder toda clase de cosas.

Gerente Usted está hablando de un cambio de coeficiente de costo que *exceda* el límite permisible. Pero ¿qué sucede si sólo llega al límite?

Entonces, otra vez a causa de que la solución actual es no degenerada, sabemos que habrá soluciones óptimas alternativas, es decir, la solución actual junto con otra nueva en la que se haya suprimido T2.

Gerente Me parece que tenemos una cantidad considerable de información acerca de la influencia de la incertidumbre. Esto me parece asombroso.

Estoy de acuerdo.

Gerente Bien. Muchas gracias. Creo que puedo arreglármelas bastante bien por mi cuenta con el análisis del Informe de sensibilidad. En realidad deberíamos llamarlo análisis de sensibilidad de modelos, ¿no cree usted?

Sí.

Gerente Gracias de nuevo. Estoy asombrado al ver lo mucho que podemos aprender acerca del modelo real, más allá de la solución óptima.

Cierto. Esto es debido a la facilidad que brindan los modelos de PL para calcular la información de sensibilidad. Por cierto, ¿me permite que le haga una pregunta para darme cuenta de qué tanto ha aprendido?

Gerente Claro, adelante.

Ya habrá notado que en la hoja de cálculo electrónica el valor óptimo de T4 es cero.

Gerente Cierto.

En realidad, sé que el mineral de la localidad 4 tiene algunas propiedades deseables, referentes a la tensión, que no han sido incorporadas al modelo.

Gerente Es verdad.

Además, de acuerdo con lo que nos ha dicho el señor Shmootz, tengo entendido que sería razonable renegociar periódicamente el costo de T4.

Gerente ¿Se refiere usted al hecho de que PROTRAC tiene vínculos familiares con la empresa de la localidad 4?

Algo así. Pero mi argumento es éste: ¿Cuánto tendría que disminuir el costo de T4 para que usted estuviera dispuesto a comprar su producto?

Gerente Veamos. El costo actual de T4 es de $500 por tonelada. Creo que lo que usted me está preguntando es: ¿cuánto tendría que bajar ese costo para que en nuestra política óptima se usara un poco de T4? ¿Es ésa su pregunta?

Así es.

Gerente Muy bien. Para encontrar una respuesta, examino el Informe de sensibilidad y en él observo que, si el costo de T4 disminuye en menos de $91.11 por tonelada, entonces, de acuerdo a lo que acaba de decirme, el valor óptimo de esta variable permanece sin cambio. Esto significa que se queda en cero. En consecuencia, tomando en cuenta lo que me ha dicho usted acerca de la no degeneración, sé que si el costo de ese material lograra negociarse para que bajara a $408.89 o menos, habría una solución óptima con T4 positivo. ¿Correcto?

Correcto. ¿Ahora puede usted decirme qué sucede con el valor objetivo óptimo?

Gerente Creo que puedo deducirlo. Si el costo disminuyera en no más de $91.11, no habría cambio alguno en los valores óptimos de alguna de las variables. En la función objetivo únicamente cambiaría el costo de T4. Pero, en virtud de que el valor de T4 permanecería en cero, tampoco cambiaría el VO. Me parece que se quedaría en $511.11 mientras la reducción del costo fuera menor que $91.11.
Correcto.

Gerente ¿Pero qué sucede si la reducción es exactamente igual a $91.11? Usted me ha dicho que, en este caso, el valor óptimo de T4 se volverá positivo. ¿Tengo razón?
No totalmente. Habría dos soluciones óptimas de punto extremo o de vértice: la actual y otra que tendría un valor óptimo positivo de T4 y otros valores distintos en algunas de las demás variables. Sin embargo, no sé cómo cambiarían exactamente las demás soluciones.

Gerente Muy bien. ¿Pero esto significa que, cuando el costo de T4 disminuye exactamente $91.11, el costo total baja de pronto a menos de $511.11?
No, puesto que se trata de óptimos alternativos, el VO es igual a $511.11 para ambos.

Gerente ¿Podemos decir qué cantidad de T4 se utilizará en el óptimo alternativo?
Sospecho que no, si nos atenemos al Informe de sensibilidad. Lo único que sabemos es que esta variable tendrá un valor positivo. Para determinar cuál sería su valor preciso, tendríamos que resolver el modelo con una reducción de apenas poco más que $91.11 en el costo de T4.

Gerente ¿Y cómo sabe usted todo eso?
Por las matemáticas que intervienen en la optimización de modelos de PL. Y recuerde que estos postulados acerca de las soluciones óptimas alternativas dependen de la no degeneración de la solución actual.

Gerente ¿Qué sucedería si no se cumple la condición de no degeneración?
Entonces tendríamos lo que se llama una solución degenerada. Todo lo que podríamos decir entonces es que la solución óptima no cambiará si el costo de T4 se mantiene dentro del rango permisible. Es factible que el costo disminuya en más de $91.11 y que aun así no tengamos una nueva solución óptima. Por tanto, usted podrá observar que, en el caso degenerado, la salida nos da un poco menos de información.

Gerente Bien. Por ahora creo que ya sé todo lo que necesito saber sobre lo que está sucediendo. ¿Está usted de acuerdo?
Sí. ¿Paramos aquí?

Gerente En realidad, dado que estoy haciéndolo tan bien, tengo que hacerle una última pregunta. ¿Qué hay acerca de la columna llamada Costo reducido?
Sólo es significativa para las variables de decisión cuyo valor óptimo es cero. En este modelo nos dice cuánto del costo unitario de dichas variables puede reducirse antes de que el valor óptimo de ellas se vuelva positivo.

Gerente Acabamos de contestar esa pregunta, en relación con T4.
Lo sé.

Gerente Pero no utilizamos esta columna. Empleamos la parte que corresponde al decremento permisible del informe. De hecho, veo el mismo valor, 91.11, en ambos lugares.
Es cierto

Gerente Entonces, ¿por qué ocuparnos de esta columna de Costo reducido si aparece el mismo valor bajo la columna de Decremento permisible?
Simplemente por razones prácticas. El costo reducido se refiere a las variables cuyo valor óptimo es cero. Usted puede identificar fácilmente estas variables en el Informe de sensibilidad. En la siguiente columna se puede leer en forma inmediata el costo reducido, lo cual es un poco más sencillo que interpretar el incremento o decremento permisible. Por razones prácticas, puede imaginar que estas entradas de costos reducidos corresponden a los precios sombra de las restricciones de no negatividad para la producción de las minas incluidas en el modelo. Eso es todo al respecto.

Gerente Gracias. Todo esto ha sido muy ilustrativo.
Ha sido un placer para mí.

5.5 SINOPSIS DE LAS CIFRAS DE SALIDA DE LA SOLUCIÓN

Cuando se optimiza un modelo de PL, la hoja de trabajo optimizada y el Informe de sensibilidad de Solver contienen la siguiente información:

1. Se dan valores óptimos para las variables de decisión, las variables de holgura y de excedente, y para la función objetivo. A partir de las cantidades totales de LI, usted puede deducir rápidamente el valor de las funciones de restricción (cantidad de fuentes usadas, niveles de requerimientos satisfechos y demás) correspondientes a una solución óptima. Las restricciones con valor de holgura o excedente igual a cero se llaman *activas, efectivas* u *obligatorias*. Las que tienen holgura o excedente positivo se llaman *inactivas* o *no obligatorias*.
2. El precio sombra nos indica la razón de cambio del VO (valor óptimo de la función objetivo) a medida que aumenta el lado derecho (LD) de una restricción. Si el precio sombra es positivo, entonces el VO y el LD se mueven en la misma dirección: los aumentos en el LD hacen que incremente el VO y *viceversa*. Si el precio sombra es negativo, entonces el VO y el LD se mueven en direcciones opuestas: los aumentos del LD hacen que el VO disminuya y *viceversa*. El incremento y el decremento permisible constituyen un rango de cambios del LD dentro del cual el precio sombra es válido.
3. El incremento y el decremento permisible de los Coeficientes objetivo le indican los cambios que está permitido hacer a los coeficientes de la función objetivo sin que se modifique la solución óptima (los valores óptimos de las variables). En el caso de una solución *no degenerada*, si el coeficiente de una función objetivo cambia en una cantidad que es *igual* al cambio permisible, entonces habrá una solución de vértice óptimo alternativo que tendrá otros valores para las variables. Si el coeficiente cambia en una cantidad que *excede* el cambio permisible, habrá una nueva solución óptima (suponiendo que no haya degeneración).
4. La salida Costo reducido se aplica a las variables de decisión cuyo valor óptimo es cero. Puede interpretarse como el precio sombra de las restricciones de no negatividad, si las hay, y proporciona la misma información que se deduce de la información de incremento o decremento permisible para estas variables.

5.6 INTERPRETACIÓN DEL INFORME DE SENSIBILIDAD PARA LOS MODELOS ALTERNATIVOS EN HOJAS DE CÁLCULO ELECTRÓNICAS

Las recomendaciones para distribuir los modelos de PL en hojas de cálculo electrónicas que hemos estado usando desde el capítulo 3 son bastante restrictivas. En particular, dan como resultado una distribución que conduce a un modelo "ancho" que emplea muchas columnas cuando se trata de modelos grandes que tienen bastantes variables de decisión. Además, con frecuencia la distribución resultante del modelo no es tan atractiva, desde el punto de vista de la gerencia, como otras configuraciones que aprovechan mejor la distribución por filas y columnas de las hojas de cálculo electrónicas. A partir del siguiente capítulo, que trata sobre las aplicaciones de la construcción de modelos de PL, queremos presentarle estas distribuciones de modelos más atractivas. Como podría imaginar, se paga algún precio para tener una representación de modelos más atractiva: usted deberá tener más cuidado al construir modelos y, en especial, al interpretar el Informe de sensibilidad generado por Solver, con el fin de evitar algunos escollos molestos. Sin embargo, a estas alturas seguramente ya puede desenvolverse con bastante soltura al efectuar los pasos de la formulación de modelos de PL en hojas de cálculo electrónicas y al interpretar el Informe de sensibilidad, y podrá ajustarse a estas nuevas exigencias. Los nuevos escollos en la construcción de modelos y en la interpretación se ilustran muy bien mediante un ejemplo sencillo.

Wayne Foley, quien hace poco fue ascendido a gerente de una nueva sucursal de la Friendly Loan Company, se siente ansioso de complacer a su nuevo jefe demostrándole que puede obtener ganancias prestando su presupuesto anual de $15 millones. Cada sucursal local de Friendly genera ganancias, gracias al ingreso por intereses de tres tipos de préstamos: préstamos de primera hipoteca sobre bienes inmuebles, con un interés anual de 7%; préstamos para muebles garantizados con accesorios del hogar, con un interés de 12% anual; y préstamos contra firma sin garantía a un interés anual de 15%. Siendo los de mayor riesgo, estos préstamos tienen la tasa de interés más alta.

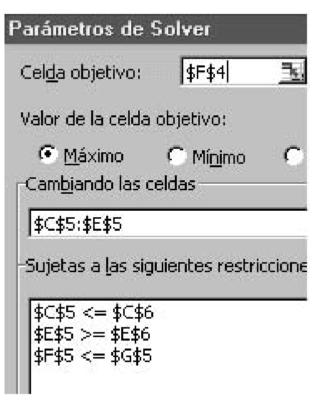
La oficina matriz de Friendly ha establecido límites para los préstamos como guías para los gerentes de sucursal y a fin de proteger a la compañía contra un exceso de préstamos de alto riesgo. Friendly requiere que cada gerente de sucursal asigne cuando menos el 60% de su presupuesto a préstamos de primera hipoteca y no más del 10% de su presupuesto en los arriesgados préstamos contra firma. Tomando como base estas tasas de interés, las limitaciones propias de la política de crédito y el presupuesto que tiene asignado para préstamos el año próximo, que asciende a $15 millones, Wayne ha construido el modelo de PL de la figura 5.13, el cual presenta su modelo, las fórmulas, el cuadro de diálogo de Solver y la asignación óptima de su presupuesto destinado a préstamos.

Observe varias características del modelo de Wayne. Primero, la formulación de su hoja de cálculo electrónica es compacta; no hay cálculos innecesarios de los valores de LI y, para simplificar su lectura, las restricciones están adyacentes a las cantidades que afectan. Además, Wayne hábilmente ha hecho que algunas de las celdas efectúen doble trabajo, tanto como valor de LD como símbolo de desigualdad. Por ejemplo, la celda G5 en realidad contiene la cifra de los $15 millones de presupuesto, como queda claro en la impresión de las fórmulas en la figura 5.13. El "< =" que aparece en G5 forma parte de la especificación del formato de la celda, llamada "maquillaje de formato". A las celdas de fórmulas, C6 y E6, se les dio un formato parecido. (Vea el apéndice de Excel para conocer más detalles sobre el formato de celdas.) También ha incluido un cálculo lateral para el rendimiento promedio de su cartera de préstamos, en la celda G7 (=F4/G5). Antes de proceder, verifique usted mismo que en el modelo de Wayne se hayan captado correctamente los tres límites administrativos obligatorios sobre las cantidades correspondientes a presupuesto, préstamos contra firma y préstamos de primera hipoteca.

Sin ser sorprendente, la solución que obtiene Solver a partir del modelo de PL de Wayne es la de prestar los $15 millones, poniendo $9 en primera hipoteca, $1.5 en préstamos contra firma y el balance en préstamos contra muebles, con lo que se obtiene una entrada por intereses total de $1,395,000. El cálculo lateral de Wayne, que aparece en la celda G7, muestra un rendimiento promedio de 9.3% de su cartera de préstamos. Wayne también nota que las tres restricciones del modelo son activas (dos restricciones de política sobre los tipos de préstamos y una restricción de presupuesto).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		FRIENDLY LOAN COMPANY (cifras en miles de $)						
3		Tipo de préstamo:	Firma	Muebles	Primera hipoteca	Total		
4		Tasa de interés	15%	12%	7%	$1,395	Presupuesto	
5		Cantidad préstamo	$1,500	$4,500	$9,000	$15,000	<=$15,000	
6		Límite de préstamo $	<=$1,500		>=$9,000		Rend. promedio	
7		Límite de préstamo %	10%		60%		9.30%	
8								

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		FRIENDLY LOAN COMPANY ($ amts. in 000's)						
3		Tipo de prést	Firma	Muebl	Primera hipot	Total		
4		Tasa de inter	0.15	0.12	0.07	=SUMAPRODUCTO(C5:E5,C4:E4)	Presupuesto	
5		Cantidad pré	1500	4499.!	9000	=SUMA(C5:E5)	15000	
6		Límite de pré	=C7*$G$5		=E7*$G$5		Rend. promec	
7		Límite de pré	0.1		0.6		=F4/G5	
8								



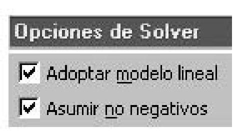


FIGURA 5.13

Modelo de la cartera de préstamos de Wayne

Ansioso de aplicar sus nuevos conocimientos de construcción de modelos de PL, Wayne revisa el Informe de sensibilidad de Solver (en la figura 5.14) y, viendo que el precio sombra de su restricción de presupuesto es de $15 millones, de inmediato llama a su jefe para pedirle la asignación de un presupuesto mayor. Sorprendido por la aseveración de Wayne de que puede producir una retribución de 12% sobre cualquier asignación de presupuesto adicional, su jefe comenta que ningún otro gerente de sucursal puede generar más de $9^1/_3$% de retribución global. “Tienen esa opinión porque no tienen conocimientos acerca de la optimización, del análisis marginal ni del poder de los precios sombra”, contesta Wayne. No queriendo mitigar el entusiasmo de su nuevo gerente de sucursal, pródigo de expresiones rimbombantes, el jefe le pregunta a Wayne si puede generar esta retribución de 12% con $5 millones adicionales. Tras revisar rápidamente la cifra de incremento permisible para la restricción de presupuesto, Wayne le informa a su jefe, muy seguro de sí mismo, que “envíe los $5 millones y aún más” a la sucursal.

Al colgar el teléfono, Wayne comienza a tener dudas. “Ciertamente hay tres restricciones para mi modelo, enumeradas en el cuadro de diálogo de Solver, además de la necesaria condición de no negatividad. ¿Qué sucedió con las dos restricciones obligatorias sobre los préstamos en el Informe de sensibilidad? En lugar de una, ¿no debería haber tres restricciones, junto con sus precios sombra, en el Informe de sensibilidad?” se pregunta. A medida que su inseguridad se va convirtiendo en temor, decide verificar la información del Informe de sensibilidad de Solver, para lo cual introduce en la celda G5 su nuevo límite de presupuesto, $20,000. Ejecuta Solver otra vez con este nuevo límite de LD y se produce el resultado de la figura 5.15. El temor se convierte en consternación cuando Wayne se da cuenta de que el rendimiento promedio de la celda G7 para el modelo nuevamente optimizado permanece sin cambio alguno, estacionario en 9.3%. En virtud de que la retribución marginal de los $5 millones adicionales es de 12%, deduce que la retribución promedio de esta nueva cartera de préstamos debería haber aumentado.

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$C$5	Cantidad préstamo firma	$1,500	0.030	15%	1E+30	0.03
$D$5	Cantidad préstamo muebles	$4,500	0.000	12%	0.03	0.05
$E$5	Cantidad préstamo primera hipotec	$9,000	-0.050	7%	0.05	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
$F$5	Cantidad préstamo Total	$15,000	0.120	$15,000	1E+30	4500

FIGURA 5.14

Informe de sensibilidad del modelo de préstamos de Wayne

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		FRIENDLY LOAN COMPANY (cifras en miles de $)						
3		Tipo de préstamo:	Firma	Muebles	Primera hipoteca	Total		
4		Tasa de interés	15%	12%	7%	$1,860	Presupuesto	
5		Cantidad préstamo	$2,000	$6,000	$12,000	$20,000	<=$20,000	
6		Límite de préstamo $	<=$2,000		>=$12,000		Rend. promedio	
7		Límite de préstamo %	10%		60%		9.30%	
8								

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$C$5	Cantidad préstamo firma	$2,000	0.03	15%	1E+30	0.03
$D$5	Cantidad préstamo muebles	$6,000	0.00	12%	0.03	0.05
$E$5	Cantidad préstamo primera hipoteca	$12,000	-0.05	7%	0.05	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
$F$5	Cantidad préstamo Total	$20,000	0.120	$20,000	1E+30	6000

FIGURA 5.15

Modelo de la cartera de préstamos de Wayne con un presupuesto de $20 millones.

Sin confiar ya ni en Solver ni en Excel, Wayne toma su calculadora y teclea (1,860 – 1,395)/5,000 (la diferencia entre el ingreso total por intereses de las dos soluciones dividida entre la cantidad de incremento del presupuesto), verificando lo que ya sospechaba: que la retribución marginal de los $5 millones adicionales es en realidad de 9.3% y no de 12%. Viendo con escepticismo el precio sombra de la restricción de presupuesto y la información del rango en el Informe de sensibilidad del nuevo modelo (figura 5.15), Wayne concluye que, inusitadamente, Solver le ha mentido dos veces. Cohibido, Way ne toma el teléfono, dispuesto a declararse culpable ante su jefe.

¿Qué sucedió? ¿Están mal escalados los datos, y por eso generan errores en los informes de Solver? De no ser así, ¿será acaso que Solver miente o se equivoca con algunos modelos? Si tampoco sucede así, ¿cómo explicaría usted los precios sombra para el presupuesto de .120 que aparecen en las figuras 5.14 y 5.15, dados los resultados obtenidos por Wayne tras intentar otra vez resolver el modelo? ¿Podría tratarse de una solución degenerada que induce a Wayne a interpretar erróneamente un rango de incremento permisible? ¿Cómo sabría usted si la solución es degenerada o no, simplemente observando el modelo de Wayne? ¿Y qué sucedió con la información del precio sombra para las otras dos restricciones sobre los tipos de préstamo que faltan en el Informe de sensibilidad generado por Solver para Wayne?

Aunque siempre es válido sospechar de ella, en este caso el rango de datos del modelo de Wayne no es lo bastante amplio como para provocar problemas numéricos en Solver, lo cual puede comprobar usted marcando el cuadro Usar escala automática del cuadro de diálogo de Opciones de Solver y resolviendo de nuevo el modelo. Para entender con mayor claridad lo que le sucedió al pobre Wayne, volvamos a formular el modelo valiéndonos de las reglas de formulación recomendadas en el capítulo 3, como se muestra en la figura 5.16, la cual presenta la solución óptima y su Informe de sensibilidad.

Queda claro que las dos formulaciones de PL producen las mismas decisiones óptimas de préstamos y de ingreso total por intereses, como se muestra en las figuras 5.13 y 5.16. Las diferencias se refieren al Informe de sensibilidad del modelo y a su interpretación. Para responder a las demás preguntas anteriores, observe lo siguiente en los resultados del modelo de PL construido según las reglas del capítulo 3. Primero, lo que es evidente de inmediato en la figura 5.16 es la presencia de las tres restricciones en el Informe de sensibilidad, así como sus respectivos precios sombra y sus rangos de cambio en LD. Segundo, en la figura 5.16, el precio sombra de la restricción de presupuesto de Wayne es el valor marginal correcto (9.3%). Tercero, la solución de ambas formulaciones no es degenerada, como se comprueba con la mayor facilidad contando el total de las variables de decisión y las holguras distintas de cero (= 3) que hay en la figura 5.16, y también comparando esta cifra con la cantidad de restricciones (= 3). Y cuarto, a diferencia del Informe de sensibilidad del modelo de Wayne, la columna de Costo reducido de la figura 5.16 enuncia (correctamente) ceros en las tres variables de decisión, debido a que ninguna de las variables de decisión es cero; es decir, ninguna de sus restricciones de no negatividad está satisfecha en el valor límite o de frontera (activa).

Por supuesto, todo esto implica que el Informe de sensibilidad original, en la figura 5.14, está engañosamente mal (con sus precios sombra y rangos faltantes, sus cifras equivocadas de costos reducidos y su incorrecto precio sombra para el presupuesto) y que la formulación de PL recomendada que aparece en la figura 5.16 está bien. Por otra parte, la distribución del modelo de hoja de cálculo electrónica de Wayne de la figura 5.13 ciertamente es más fácil de entender e interpretar desde el punto de vista de la gerencia que la formulación recomendada de la hoja de cálculo que aparece en la figura 5.16. Parecería que hay que tomar una decisión forzada entre la distribución administrativa agradable y compacta del modelo de PL, que conlleva a resultados de sensibilidad confusos o erróneos, y una distribución rígida del modelo, que arroja resultados de sensibilidad correctos. Paradójicamente, éste no es el caso; ambos modelos están correctos y *ninguno* de los Informes de sensibilidad tiene errores. Es decir, usted puede disfrutar los beneficios de una distribución más atractiva del modelo en la hoja de cálculo electrónica, desde el punto de vista de la gerencia, sin que Solver produzca errores en el Informe de sensibilidad. Pero esto requiere algunos conocimientos adicionales acerca de Solver, que Wayne no poseía. Por eso, para resolver la paradoja, vamos a profundizar un poco más en la operación de Solver.

LÍMITES SUPERIORES E INFERIORES SIMPLES

El tiempo y los requerimientos de memoria necesarios para que Solver optimice un modelo están determinados principalmente por el tamaño de la matriz de celdas coeficientes que constituyen el LI (lado izquierdo) del conjunto de restricciones; por ejemplo, C7:E9 en la figura 5.16. El tamaño de esta matriz de coeficientes de restricciones es proporcional al producto de la cantidad de variables (columnas) y la cantidad de restricciones (filas). Todo lo que sea posible ha-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		FRIENDLY LOAN COMPANY (cifras en miles de $)								
3		Tipo de préstamo:	Firma	Muebles	imera hipote	Presupuesto	Total			
4		Tasa de interés	15%	12%	7%		$1,395			
5		Cantidad préstamo	$1,500	$4,500	$9,000	$15,000				
6		Restricciones					Total	LD	Holgura	
7		Presupuesto				1	$15,000	<=$15,000	0.0	
8		Límite firma	1			-10%	0.0	<=0	0.0	
9		Mínimo primera hipoteca			1	-60%	0.0	>=0	0.0	
10										

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		FRII								
3		Tipo	Firma	Muebles	Primera	Presupuesto	Total			
4		Tasa	0.15	0.12	0.07		=SUMAPRODUCTO($C$5:$E$5,C4:E4)			
5		Cant	1500	4500	9000	=SUMA(C5:E5)				
6		Rest					Total	LD	Holgura	
7		Pres				1	=SUMAPRODUCTO($C$5:$F$5,C7:F7)	15000	=H7-G7	
8		Límit	1			-0.1	=SUMAPRODUCTO($C$5:$F$5,C8:F8)	0	=H8-G8	
9		Míni			1	-0.6	=SUMAPRODUCTO($C$5:$F$5,C9:F9)	0	=G9-H9	
10										

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$C$5	Cantidad préstamo Firma	$1,500	0.00	15%	1E+30	0.03
$D$5	Cantidad préstamo Muebles	$4,500	0.00	12%	0.03	0.05
$E$5	Cantidad préstamo Primera hipoteca	$9,000	0.00	7%	0.05	0.155

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
$G$7	Presupuesto Total	$15,000	0.093	$15,000	1E+30	15000
$G$8	Límite firma Total	0	0.030	0	4500	1500
$G$9	Mínimo primera hipoteca Total	0	-0.050	0	4500	9000

FIGURA 5.16

Modelo de la cartera de préstamos de Wayne, el cual considera las reglas del capítulo 3

cer para reducir cualquiera de estos números tendrá un efecto multiplicador en la reducción del tamaño total de la matriz y, por consiguiente, en la velocidad de la optimización. Solver tiene incorporado un procedimiento avanzado que permite que cualquier límite de restricción superior o inferior impuesto sobre las variables de decisión (además de los límites de no negatividad) sea respetado sin que se le considere como una restricción. Este tratamiento de los límites de las variables de decisión, llamado "límites superiores e inferiores simples", hace que se mantenga pequeña la matriz de coeficientes, dando como resultado menores tiempos de optimización de Solver y un menor consumo de la memoria de acceso aleatorio (RAM) de la PC. El precio que se paga por emplear esta característica de límites superiores e inferiores simples consiste en la pérdida de un poco de información en el Informe de sensibilidad generado después de la optimización. La única información de sensibilidad disponible acerca de las restricciones con límite superior e inferior son sus precios sombra, pero sin la información referente al rango de aplicación generado para los precios sombra que corresponden a una restricción normal.

En virtud de que, como máximo, en la optimalidad sólo puede ser activa u obligatoria una restricción con límite superior o una con límite inferior para una variable de decisión dada, y puesto que no hay información disponible acerca de los rangos, el resultado es un Informe de sensibilidad compacto si el precio sombra relevante distinto de cero de una restricción con límite superior o inferior simple, si la hay, aparece junto a su variable de decisión asociada. La columna de Costo reducido del Informe de sensibilidad siempre tiene una celda por variable de decisión, así que Solver pone cualquier precio sombra diferente de cero que haya en una restricción con límite superior o inferior en la columna de Costo reducido, junto a la variable de decisión relevante. Por ejemplo, los precios sombra de ambas restricciones sobre el tipo de préstamo se presentan, de la manera convencional, en la figura 5.15, como 3% y –5% en las restricciones de Firma y Primera hipoteca, respectivamente. Esos valores se presentan para el modelo de Wayne, en la figura 5.14, en la columna de Costo reducido, junto a las variables de decisión de Firma y Primera hipoteca, respectivamente. En virtud de que para cada una de estas variables de decisión se han especificado dos restricciones en el modelo de PL, no resulta claro en forma inmediata cuál es el límite activo que produce la entrada de precio sombra diferente de cero para esa variable, en la columna de Costo reducido del modelo de Wayne.

La cantidad de préstamo contra firma tiene tanto una restricción de límite inferior simple (la restricción de no negatividad "≥ 0") como una restricción de límite superior simple ("≤ \$1,500"). Sin embargo, ambos límites sobre la decisión de firma no pueden ser obligatorios simultáneamente. Al inspeccionar la situación se observa que el límite superior es obligatorio; así que la cifra 0.03 de la columna de Costo reducido del modelo de Wayne debe ser el precio sombra de la restricción "Firma ≤ \$1,500". Por tanto, debido a que no está activa, la restricción "Firma ≥ 0" debe tener un precio sombra de cero.

De igual manera, hay dos restricciones de límite inferior en la decisión de primera hipoteca ("Primera hipoteca ≥ 0" y "Primera hipoteca ≥ 9,000"), las cuales no pueden ser obligatorias. Puesto que la decisión de Primera hipoteca es de \$9,000, la entrada de precio sombra en la columna de Costo reducido del modelo de Wayne deberá corresponder a la restricción activa de límite inferior simple "Primera hipoteca ≥ 9,000". En consecuencia, puesto que la restricción de "Primera hipoteca ≥ 0" no está activa, entonces deberá tener un precio sombra igual a cero.

Por tanto, no se pierde la información del precio sombra cuando se manejan límites superiores e inferiores en las formulaciones de PL si usted ya ha aprendido dónde buscarla y cómo deducir el límite al que se refiere cualquier precio sombra diferente de cero. Puesto que los límites inferiores y superiores simples sobre las decisiones nos llevan a una distribución más atractiva de las hojas de cálculo electrónicas y a tiempos de solución más cortos (notorios en los modelos grandes), es común emplearlos en la formulación de modelos de PL en hoja de cálculo electrónica. Sin embargo, tenga presente que, al usarlos, se generan Informes de sensibilidad que violan la definición estándar de Costo reducido dada en la sección 5.3.

Recuerde que una interpretación del costo reducido para una variable de decisión la representa como el precio sombra de la restricción de no negatividad de tal variable. En cambio, las cifras de costo reducido de los modelos de PL de Solver que contienen límites superiores e inferiores simples son los precios sombra de cualquiera de los límites, si es que existe alguno, obligatorios para dicha variable de decisión. La tabla 5.2 nos ofrece un cuadro más completo de los valores que puede asumir el precio sombra del Costo reducido, en los modelos de Solver, que contengan límites superiores e inferiores simples.

¿Hay alguna manera de deducir la información sobre el rango del LD que aparece en el Informe de sensibilidad de la figura 5.16 en las columnas de Incremento permisible y Decremento permisible, pero que falta cuando se emplean límites superiores e inferiores simples? Desafortunadamente, la respuesta es no. Si fuera posible, Solver siempre presentaría un Informe de sensibilidad como el de la figura 5.16. Si es importante la información del rango del LD para límites superiores e inferiores simples, entonces usted deberá reformular la representación en hoja de cálculo del modelo de PL de la figura 5.13 para evitar que Solver detecte la presencia de límites superiores e inferiores simples, y luego habrá de volver a optimizar el modelo. Solver no recurrirá a su procedimiento de límites superiores e inferiores simples si el límite superior e inferior de las variables de decisión se especifican indirectamente en la hoja de cálculo electrónica. Esta "referencia indirecta" puede lograrse mediante alguna fórmula intermedia, como las fórmulas SUMAPRODUCTO de la figura 5.16, que relacionan cada variable de decisión con su límite por medio de una tercera celda de LI. De otro modo, si Solver detecta referencias a Celdas cambiantes en el cuadro "Sujetas a las siguientes restricciones" del cuadro

TABLA 5.2 Valores de costos reducidos

VALOR DE LA VARIABLE DE DECISIÓN EN LA OPTIMALIDAD	ENTRADA DE COSTO REDUCIDO, MODELO DE MAXIMIZACIÓN	ENTRADA DE COSTO REDUCIDO, MODELO DE MINIMIZACIÓN
Obligatoria en el límite inferior (≥)	Precio sombra cero o negativo	Precio sombra cero o positivo
Obligatoria en el límite superior (≤)	Precio sombra cero o positivo	Precio sombra cero o negativo
Ningún límite obligatorio	Precio sombra cero	Precio sombra cero

de diálogo de Parámetros de Solver (excepto las de no negatividad), entonces invocará su procedimiento especial de limitación. Por ejemplo, el modelo de Wayne en la figura 5.13 hace referencia a las celdas cambiantes C5 y E5 en las dos primeras restricciones que aparecen en el cuadro “Sujetas a las siguientes restricciones” del cuadro de diálogo de Parámetros de Solver, con lo cual se disparó el procedimiento de limitación superior e inferior de Solver.

INTERPRETACIÓN DEL PRECIO SOMBRA

Como dijimos anteriormente, el precio sombra de .120 dado por Solver para la restricción de presupuesto de Wayne *no* es incorrecto; en realidad, lo que metió en problemas a Wayne fue su interpretación de tal precio sombra. Observe que el modelo de Wayne en la figura 5.13 tiene fórmulas del lado derecho para las restricciones de Límite de préstamo para firma y Primera hipoteca en las celdas C6 y D6, respectivamente, lo cual constituye una violación a una de las reglas de formulación de hoja de cálculo electrónicas que hemos recomendado en el capítulo 3. Recuerde que la definición de precio sombra es: el cambio en el VO del PL por unidad de cambio en el valor de LD de una restricción dada *manteniendo constante toda la demás información, inclusive los demás LD*. Por tanto, el precio sombra de .120 consignado en el Informe de sensibilidad de Wayne que aparece en la figura 5.14 tiene que interpretarse en la siguiente forma: conservando el LD del límite de préstamo para los Préstamos contra firma y el LD de los préstamos de Primera hipoteca dentro de sus respectivos límites de $1,500 y $9,000, el mejoramiento que se obtiene en el valor de la función objetivo es de .12 por cada dólar adicional de presupuesto.

La conservación de los valores originales de LD de Firma y Primera hipoteca permite que el presupuesto incrementado sólo tenga una opción en el modelo de Wayne: asignarlo como préstamo sobre Muebles, con una retribución de 12%. Por tanto, Solver está reportando correctamente el precio sombra original para el modelo de Wayne. Por supuesto, la conservación de los valores originales para los Préstamos contra firma y Primera hipoteca resulta inconsistente con los resultados de una solución nuevamente optimizada en la que se ajustarán los *tres* LD para reflejar la actualización de los límites de LD implícita en un presupuesto adicional. El error de Wayne fue suponer que las restricciones porcentuales de política de Friendly sobre el presupuesto total se conservarían en su Informe de sensibilidad, pero tal cosa no es cierta en su modelo, gracias a las fórmulas que aparecen en dos de sus LD.

Con la formulación de la PL que presentamos en la figura 5.16 se evita esta interpretación errónea, pues se hace referencia a las cifras totales de préstamo, en lugar de referirse a la cantidad de presupuesto total de las restricciones, y poniendo todas las fórmulas en el LI de las restricciones, dejando como constantes todos los LD. Al dejar del LI de las restricciones las fórmulas relacionadas con préstamos se obliga a Solver a efectuar los ajustes necesarios en los tres LI durante la evaluación de la contribución de un presupuesto aumentado. Este ajuste del LI produce un Informe de sensibilidad que da el precio sombra correcto de .093 en la figura 5.16. Es claro que la formulación de la figura 5.16 refleja el modelo de las restricciones de política que pretendía Wayne.[9]

La conclusión que podemos sacar de este ejemplo es que la aplicación de límites superiores e inferiores sencillos y el empleo de fórmulas para el LD de las formulaciones puede dar como resultado modelos en hoja de cálculo electrónica más compactos y más atractivos desde el punto de vista de la gerencia. Debido a esto, nos valdremos ampliamente de tales formulaciones de modelos en las aplicaciones de Solver durante los tres capítulos siguientes. Recuerde, sin embargo, que con ese tipo de formulaciones tal vez se requiera mayor cuidado para interpretar la información que tiene un importante valor administrativo del Informe de sensibilidad de Solver.

5.7 RESUMEN

En el presente capítulo se hizo énfasis en la interpretación del Informe de sensibilidad generado por Solver de un modelo de PL, según lo que se presentó en las secciones 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6. Hemos destacado la rica información disponible por medio del análisis de sensibilidad de los lados derechos y de los coeficientes de función objetivo. También hemos estudiado el papel que juega la degeneración y las señales que indican óptimos alternativos.

[9]Observe que, en el modelo original de Wayne, si él hubiera interpretado que sus requerimientos de préstamo se aplicarían a la cantidad total prestada (LI), en lugar de a la cantidad de presupuesto (LD), entonces su modelo también habría generado el precio sombra de .093.

En la primera parte de este capítulo (sección 5.2) hemos estudiado los confusos resultados del Informe de sensibilidad generados por Solver cuando se aplican límites superiores e inferiores directamente a las variables de decisión, y los errores en los que se puede caer al interpretar los precios sombra cuando se ponen fórmulas en el LD de las restricciones y cuando algunas de las fórmulas del modelo se basan en el LI contra el LD de las restricciones obligatorias.

Términos clave

Precio sombra. El precio sombra i^a del Informe de sensibilidad de Solver es la razón de cambio del VO a medida que aumenta el LD i^a.
Rango permisible de LD. Rango de valores de LD sobre el que permanece constante el precio sombra.
Rangos de coeficiente objetivo. Da los rangos de los coeficientes de función objetivo a través de los cuales no sucede cambio alguno en la solución óptima.
Solución degenerada. Solución para la cual la cantidad de variables con valor positivo es menor que la cantidad de restricciones activas.
Solución no degenerada. Solución para la cual la cantidad de variables con valores óptimos positivos es igual a la cantidad de restricciones activas.
Soluciones óptimas alternativas. Existencia de más de una solución óptima.
Variable de holgura o de excedente. Se emplea para convertir una restricción de desigualdad en restricción de igualdad.

Ejercicios de repaso

Verdadero-falso

1. **V F** Si un punto no satisface la restricción ≤, el valor de holgura asociado es negativo.
2. **V F** La degeneración es importante porque debemos hacer interpretaciones más restrictivas de la salida de Solver cuando la solución óptima es degenerada.
3. **V F** El precio sombra de una restricción dada es la razón de cambio del VO a medida que aumenta el LD.
4. **V F** El precio sombra de la i^a restricción es una función lineal no constante de b_i sobre el rango, dada por el incremento y el decremento permisible.
5. **V F** Las variables de holgura con valores positivos en la optimalidad indican restricciones redundantes.
6. **V F** Una restricción ≤ con una holgura óptima positiva siempre tendrá un incremento permisible infinito para el LD.

Las siguientes preguntas (7-8) se refieren a la salida de la hoja de cálculo presentada en la figura 5.12:

7. **V F** Si los requerimientos de A y de C aumentan en 0.5 libras, el análisis de sensibilidad nos dice que el costo óptimo aumentará en $24.44.
8. **V F** El que todos los precios sombra sean ≥ 0 se explica exclusivamente por el hecho de que estamos trabajando con un modelo Min.

Opciones múltiples

9. Una solución óptima degenerada
   a. tiene menos de m variables positivas (donde m es la cantidad de restricciones)
   b. no proporciona alguna información sobre óptimos alternativos
   c. tal vez no proporcione alguna información sobre el rango completo de incremento y decremento permisibles de los coeficientes objetivos
   d. los tres puntos anteriores
10. La "mejora" de un modelo de PL significa
    a. que el VO aumenta en los modelos Max
    b. que el VO disminuye en los modelos Min
    c. tanto a como b
11. Para una solución óptima no degenerada de un modelo Max, si el coeficiente c_1 de la función objetivo aumenta en (exactamente) el incremento permisible

- **a.** podría cambiar el VO
- **b.** la solución óptima previa permanece óptima
- **c.** habrá una nueva solución óptima con un valor óptimo mayor de x_1
- **d.** los tres puntos anteriores

12. Acabamos de resolver un modelo de minimización de costos y $x_1^* = 0$. La administración quisiera saber: "¿cuánto habrá que reducir el costo de x_1 antes de que comencemos a emplearlo con un valor positivo en una solución óptima?" ¿En qué parte de la hoja de trabajo o del Informe de sensibilidad de Solver se encuentra la respuesta?
- **a.** en los valores de las variables
- **b.** en los cambios permisibles del LD de la primera restricción
- **c.** en el incremento permisible del coeficiente de x_1
- **d.** en el costo reducido

13. Suponga que la primera restricción de un PL, evaluada en un punto dado P_0, tiene un valor de cero para la variable de holgura. Entonces
- **a.** P_0 cae en el límite de la región factible
- **b.** P_0 cae en la primera línea de restricción
- **c.** tanto a como b

14. Una relación correcta es
- **a.** las restricciones con precio sombra igual a cero deben estar inactivas
- **b.** las restricciones con precio sombra positivo deben estar activas
- **c.** tanto a como b

Las siguientes preguntas (15-18) se refieren a la salida de hoja de cálculo electrónica que aparece en la figura 5.12:

15. Si el requerimiento de A cambiara de 5 a 6.5
- **a.** el VO disminuiría en $66.66
- **b.** el VO mejoraría en $66.66
- **c.** el VO aumentaría en $66.66
- **d.** el VO no cambiaría

16. Si el requerimiento de C se redujera de 30 a 20
- **a.** el VO disminuiría en $44.44
- **b.** el VO aumentaría en $44.44
- **c.** el VO mejoraría en $31.00 cuando menos

17. Si el costo del mineral de la localidad 2 disminuyera a $300 por tonelada
- **a.** el VO no cambiaría
- **b.** la solución óptima no cambiaría
- **c.** ni a ni b
- **d.** tanto a como b

18. Si el costo del mineral de la localidad 1 se redujera a $680 por tonelada
- **a.** habría una nueva solución óptima con $T1^* > 0.259$
- **b.** habría óptimos alternativos
- **c.** la solución óptima anterior seguiría siendo óptima
- **d.** los tres anteriores

Respuestas

1.	V	**6.**	V	**11.**	d	**15.**	c
2.	V	**7.**	F	**12.**	d	**16.**	c
3.	V	**8.**	F	**13.**	b	**17.**	b
4.	F	**9.**	d	**14.**	b	**18.**	d
5.	F	**10.**	c				

Problemas

5-1. Considere una PL con 3 variables y 14 restricciones. ¿Cuántas variables positivas tendría como máximo una solución óptima de Solver?

5-2. Para el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \text{Max } & x_1 + x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Utilice el GLP para dibujar gráficamente una representación geométrica del modelo. ¿Existen vértices degenerados?

(b) Añada la restricción $x_1 + x_2 \leq 8$. ¿Existen ahora vértices degenerados?

5-3. Considere una PL con 80 variables y 30 restricciones.

(a) ¿Cuántas variables positivas tendrá ahora una solución óptima no degenerada de Solver?

(b) ¿Cuántas variables positivas tendrá ahora una solución óptima degenerada de Solver?

··5-4. Karma Computers produce dos modelos de computadoras, la Estándar y la De lujo. El primer modelo se fabrica ensamblando un solo disco duro y un chasis Estándar. El segundo modelo se produce ensamblando dos unidades de disco y un chasis De lujo. El modelo Estándar tiene una ganancia neta por unidad de $300, mientras que el modelo De lujo tiene una ganancia neta por unidad de $400. El inventario actual de Karma consiste en 60 chasis Estándar, 50 chasis De lujo y 120 unidades de disco.

(a) Formule el modelo de PL de Karma y utilice GLP para generar una gráfica con su representación geométrica.

(b) Optimice el modelo de Karma con GLP y con el resultado llene los valores que faltan en las celdas en blanco de la hoja de trabajo de la figura 5.17.

	A	B	C	D	E	F	G
1	KARMA COMPUTER						
2	Variables de decisión	S	D				
3	Cantidad			GANANCIAS			
4	Margen contrib.	$300	$400				
5	Sujeto a:			LI		LD	Holgura
6	Restricción chasis Estándar	1			≤	60	
7	Restricción chasis de lujo		1		≤	50	
8	Restricción unidades disco				≤		

FIGURA 5.17

(c) Con el resultado de la hoja de cálculo anterior ponga los valores correctos en las celdas de Valor final y Restricción lado derecho del Informe de sensibilidad que sigue. A continuación, válgase del modelo GLP de Karma para determinar los valores de las demás celdas en blanco del Informe de sensibilidad de la figura 5.18.

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$B$3	Cantidad S			300		
$C$3	Cantidad D			400	200	400

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
$D$6	Restricción chasis Estándar LI			60	60	
$D$7	Restricción chasis De lujo LI			50		20
$D$8	Restricción unidades disco LI					60

FIGURA 5.18

5-5. Refiérase a la figura 5.4.

(a) Suponga que hay 5 horas más de trabajo disponibles en el departamento A. ¿Cuál será el cambio del VO?

(b) Suponga que hay 20 horas menos de trabajo disponibles en el departamento A. ¿Cuál será el cambio del VO?

(c) ¿Para qué rango de valores de LD es válido el precio sombra del departamento A?

5-6. ¿Qué valor tiene siempre el precio sombra de una restricción inactiva? ¿Qué puede decir acerca del precio sombra de una restricción activa?

5-7. Considere una restricción con un valor de holgura óptimo positivo. ¿Cuál debe ser el precio sombra?

5-8. Refiérase a la salida de Solver tal como aparece en la figura 5.4.

(a) Supongamos que cambiara a 6 el lado derecho de la restricción del total unidades de la fila 10. ¿Cuál sería el efecto de esto en el VO?

(b) ¿En qué cantidad podría constreñirse la restricción de requerimiento del total de unidades antes de que pudiera cambiar el precio sombra?

(c) Suponga que hay 50 horas más disponibles en el departamento B. ¿En cuánto cambiará el VO?

··5-9. Note que en la figura 5.8 hay un incremento permisible de cero para la capacidad del departamento B. ¿Qué anomalía es la que produjo esto?

5-10. Refiérase a la figura 5.8. ¿La solución exhibida es degenerada o no degenerada? Sustente su respuesta.

5-11. Refiérase a la figura 5.4. Suponga que el margen de contribución de *E* se reduce a $4,000 por unidad.

(a) ¿Cuál es la solución óptima que resulta?

(b) ¿Cuál es el *cambio* del VO?

5-12. Refiérase a la figura 5.4. Suponga que el margen de contribución de *F* aumenta a $5,000 por unidad.

(a) ¿Cuál es la solución óptima que resulta?

(b) ¿Cuál es el *cambio* del VO?

5-13. Refiérase a la figura 5.12.

(a) ¿Cuánto tendría que disminuir el precio por tonelada de mineral de la localidad 4 para que la opción de comprarlo se vuelva atractiva?

(b) Supongamos que el precio del mineral de la localidad 1 disminuyera en $80 por tonelada. ¿Habría algún cambio en la solución óptima y en el VO?

(c) Suponga que el precio del mineral de la localidad 1 aumenta en $100 por tonelada. ¿Ha habido algún cambio en la solución óptima? ¿Cuál es el cambio (si lo hay) del costo de una tonelada de mezcla óptima?

5-14. Refiérase a la figura 5.12.

(a) Suponga que el precio del mineral de la localidad 3 aumenta en $50 la tonelada. ¿Hay algún cambio en la solución óptima? ¿Cuál es el cambio (si lo hay) del VO?

(b) Analice el efecto sobre la solución óptima de la disminución del costo de mineral de la localidad 3 en $118.269 por tonelada. (Por ejemplo, ¿continúa siendo óptima la solución actual? ¿Existe alguna otra solución óptima y, de ser así, cómo podría definirla?)

(c) Para el cambio que hemos descrito en la parte (b), ¿cuál sería el nuevo VO?

5-15. Suponga que acaba de resolver un modelo de PL. Observe que tiene una solución no degenerada y, para algún coeficiente de función objetivo ve un cero en la columna de Incremento permisible. ¿Qué le dice esto?

··5-16. Explique cómo se emplean los costos reducidos para saber si hay soluciones óptimas alternativas.

5-17. Utilizando los términos *razón* y *VO*, haga la interpretación correcta del precio sombra en el Informe de sensibilidad de Solver.

··5-18. Considere el modelo de Buster Sod: Buster Sod opera una granja de riego de 800 acres en el Red River Valley de Arizona. Las principales actividades de Sod son el cultivo de trigo y alfalfa, y la cría de ganado vacuno. La Autoridad de Aguas del Red River Valley acaba de indicar las asignaciones de agua para el siguiente año (a Sod se le asignaron 1,000 pies-acre) y Sod está ocupado en la preparación de su plan de producción para el siguiente año. Él calcula que los precios del ganado vacuno se conservarán en $500 aproximadamente por tonelada y que el trigo se venderá a $2 por paca. Las estimaciones más precisas indican que la alfalfa podría venderse a $22 por tonelada, pero si Sod llegara a necesitar más alfalfa de la que puede producir para alimentar su ganado, tendría que pagar $28 por cada tonelada que adquiera para esos propósitos.

Algunas características tecnológicas del negocio de Sod son: rendimiento de alfalfa, 70 pacas por acre; rendimiento de alfalfa, 4 toneladas por acre. Otras características aparecen en la siguiente tabla. Defina las variables:

ACTIVIDAD	MANO DE OBRA, MAQUINARIA Y OTROS COSTOS ($)	REQUERIMIENTO DE AGUA (PIES-ACRE)	REQUERIMIENTO DE TERRENO (ACRES)	REQUERIMIENTO DE ALFALFA (TONELADAS)
1 acre de trigo	20	2	1	
1 acre de alfalfa	28	3	1	
1 tonelada de ganado vacuno	50	0.05	0.1	5

Trigo = trigo cultivado y vendido (acres)

Acres de alfalfa = alfalfa cultivada (toneladas)

Ganado vacuno = ganado vacuno criado y vendido (toneladas)

Alfalfa comprada = alfalfa comprada (toneladas)

Alfalfa vendida = alfalfa vendida (toneladas)

En la figura 5.19 se muestra la formulación de una PL y la solución del modelo de Buster Sod. Con base en la información de la figura 5.19, conteste las siguientes preguntas.

(a) Muestre los cálculos que expliquen los valores del coeficiente *Trigo* de la función objetivo y los coeficientes de *Acres de alfalfa* de la primera y segunda restricciones.

(b) ¿Cuánta agua se está empleando?

(c) ¿Cuánto ganado vacuno se está produciendo?

(d) ¿Sod compra o vende alfalfa?

(e) ¿Cuánto debería pagar Sod para comprar un pie-acre adicional de agua?

(f) Interprete el precio sombra del “Límite de acres” de 800.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Trigo	Alfalfa	Ganado vacuno	Alfalfa comprada	Alfalfa vendida				
2	Rendimiento	70 pacas/acre	4 ton./acre							
3	Precio	$2/paca		$500/ton.	$28/ton.	$22/ton.				
4	Costos	$20/acre	$28/acre	$50/ton.						
5		Acres de trigo	Acres de alfalfa	Toneladas de ganado vacuno	Toneladas de alfalfa comprada	Toneladas de alfalfa vendida				
6		0	0	8,000	40,000	0	Ganancias			
7		$120/acre	$(7)/acre	$450/ton.	$(28)/acre	$22/acre	$ 2,480,000			
8							Total		Disponible	Holgura
9	Límite acres	1	0.25	0.1			800	≤	800	-0
10	Límite agua	2	0.75	0.05			400	≤	1000	600
11	Balance		-1	5	-1	1	-7.276E-12	=	0	0

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$B$6	Acres trigo	0	-2980	120	2980	1E+30
$C$6	Acres alfalfa	0	-754	-7	754	1E+30
$D$6	Ganado vacuno ton	8000	0	450	1E+30	298
$E$6	Alfalfa comprada ton	40000	0	-28	6	55.85
$F$6	Alfalfa vendida tone	0	-6	22	6	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
$G$9	Límite acres total	800	3100	800	1200	800
$G$10	Límite agua total	400	0	1000	1E+30	600
$G$11	Balance total	0	28	0	40000	1E+30

FIGURA 5.19

Solución e Informe de sensibilidad del modelo en PL de Buster Sod

(g) ¿Qué sucede con la política óptima de cultivo si se triplica el precio del trigo? ¿Qué le sucede al VO?

(h) ¿Cuánto recibirá Sod por concepto de ganancias de la operación óptima de su granja?

(i) ¿Qué sucede con el valor óptimo de la función objetivo si el costo de la compra de alfalfa aumenta de $28 a $29?
Nota: el coeficiente de *Alfalfa comprada* actualmente es –$28 y se volverá –$29. Por tanto, el coeficiente *disminuirá* en $1.

(j) ¿Cuánto puede disminuir el precio de compra de alfalfa antes de que cambie la política óptima actual de cultivo?

5-19. Una planta puede fabricar cualquier combinación de cinco productos diferentes. La fabricación de cada producto requiere cierto tiempo en tres máquinas diferentes, como se indica en la siguiente tabla. Todas las cifras están expresadas en minutos por libra de producto.

	TIEMPO-MÁQUINA (MIN/LB)		
PRODUCTO	1	2	3
A	12	8	5
B	7	9	10
C	8	4	7
D	10	0	3
E	7	11	2

Cada máquina está disponible durante 128 horas por semana. Los productos A, B, C, D y E son muy competitivos y puede venderse cualquier cantidad que se produzca a precios por libra de \$5, \$4, \$5, \$4 y \$4, respectivamente. Los costos variables de mano de obra son \$4 por hora para las máquinas 1 y 2 y \$3 por hora para la máquina 3. Los costos de material son \$2 por cada libra de los productos A y C y \$1 por cada libra de los productos B, D y E. Lo que usted desea es maximizar las ganancias de la compañía. La solución de PL y el Informe de sensibilidad correspondiente aparecen en la figura 5.20.

(a) ¿Cuántas horas de trabajo se destinan a cada una de las tres máquinas?

(b) ¿Cuáles son las unidades de los precios sombra correspondientes a las restricciones de las cuales depende la capacidad de las máquinas?

(c) ¿Cuánto debería estar dispuesta a gastar la compañía para disponer de una hora adicional en la máquina 2

(d) ¿Cuánto puede aumentar el precio de venta del producto A antes de que cambie el plan óptimo de producción? Exprese su respuesta en las unidades adecuadas.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Producto	A	B	C	D	E				
2	Precio/lb	\$5	\$4	\$5	\$4	\$4				
3	Costo/hr máq. 1	\$4	\$4	\$4	\$4	\$4				
4	Costo/hr máq. 2	\$4	\$4	\$4	\$4	\$4				
5	Costo/hr. máq. 3	\$3	\$3	\$3	\$3	\$3				
6	Costos mat./lb	\$2	\$1	\$2	\$1	\$1				
7	Producto	A	B	C	D	E			Horas máq. dispon./semana	
8	Libras prod.	0	0	512	0	512	Ganancia		128	
9	Margen contrib./lb	\$ 1.417	\$ 1.433	\$ 1.850	\$ 2.183	\$ 1.700	\$ 1,817.60			
10							Total		Mins. dispon./sem	Holgura
11	Mins. máq. 1	12	7	8	10	7	7680	≤	7680	7E-07
12	Mins. máq. 2	8	9	4	0	11	7680	≤	7680	2E-08
13	Mins. máq. 3	5	10	7	3	2	4608	≤	7680	3072
14										
15										

=B2-SUMAPRODUCTO(B3:B5,B11:B13)/60-B6; Copiado a C9:F9

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$B\$8	Libras prod. A	0	-1.380	1.417	1.380	1E+30
\$C\$8	Libras prod. B	0	-0.245	1.433	0.245	1E+30
\$D\$8	Libras prod. C	512	0	1.85	0.093	0.041
\$E\$8	Libras prod. D	0	-0.075	2.183	0.075	1E+30
\$F\$8	Libras prod. E	512	0	1.700	0.1125	0.081

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Lado derecho restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
\$G\$11	Mins. máq. 1 total	7680	0.2258	7680	2671.304	2792.727
\$G\$12	Mins. máq. 2 total	7680	0.0108	7680	4388.571	3840
\$G\$13	Mins. máq. 3 total	4608	0	7680	1E+30	3072

FIGURA 5.20

Solución del modelo de cinco productos y tres máquinas

··**5-20.** *Modelo de mezcla de productos/selección de procesos*. Dos productos, A y B, se procesan en tres máquinas. Ambos productos tienen dos rutas posibles. La ruta 1 procesa el producto en las máquinas 1 y 2, mientras que la ruta 2 procesa el producto en las máquinas 1 y 3. Los tiempos de procesamiento en horas por unidad aparecen en la siguiente tabla.

		TIEMPO-MÁQUINA (HRS/UNIDAD)		
PRODUCTO	**RUTA**	**1**	**2**	**3**
A	1	2	1	
A	2	2		1.5
B	1	1	2	
B	2	1		3

Los costos por hora en las máquinas 1, 2 y 3 son \$20, \$30 y \$18, respectivamente. Cada máquina está disponible 40 horas a la semana. La compañía puede vender cualquier cantidad de los productos A y B a \$110 y \$150 por unidad, respectivamente. La solución de PL y el Informe de sensibilidad correspondiente aparecen en la figura 5.21, donde

$$A_i = \text{unidades de A producidas por la ruta } i \ (i = 1, 2)$$
$$B_i = \text{unidades de B producidas por la ruta } i \ (i = 1, 2)$$

(a) Muestre cálculos que expliquen los valores de los coeficientes de la primera función objetivo.
(b) ¿Cuánto producto B se está produciendo? ¿Cuánto se produce por la primera ruta? (Interprete los números como razones de producción. Por tanto, 4.44 representaría 4.44 unidades por semana. Esto podría lograrse produciendo la primera semana 4 unidades y comenzando la 5ª, en la primera semana terminando la 5ª y produciendo hasta la 8ª y comenzando la 9ª, en la segunda semana, etc.)
(c) ¿Cuántas horas se emplea cada una de las máquinas?
(d) ¿Cuáles son las unidades de los precios sombra en las restricciones de capacidad de las máquinas?
(e) Suponga que hay la oportunidad de trabajar hasta 8 horas de tiempo extra en la máquina 2, con un costo de \$45 por hora (50% más que el costo de tiempo normal de \$30 por hora). ¿Debería programarse la máquina 2 para trabajar 8 horas más?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Producto	A1	A2	B1	B2				
2	Precio	$ 110	$ 110	$ 150	$ 150				
3	Costo/hr máq. 1	$ 20	$ 20	$ 20	$ 20				
4	Costo/hr máq. 2	$ 30	$ 30	$ 30	$ 30				
5	Costo/hr máq. 3	$ 18	$ 18	$ 18	$ 18				
6	Producto	A1	A2	B1	B2				
7	Cant. prod.	4.444	0.000	17.778	13.333	Ganancia			
8	Margen contrib.	$ 40	$ 43	$ 70	$ 76	$ 2,435.56			
9						Total		Hrs. dispon.	Holgura
10	Hrs. máq. 1	2	2	1	1	40	≤	40	-0
11	Hrs. máq. 2	1		2		40	≤	40	-0
12	Hrs. máq. 3		1.5		3	40	≤	40	0

Microsoft Excel 8.0 Reporte de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$B$7	Cant. prod. A1	4.444	0	40	100	0
$C$7	Cant. prod. A2	0	0	43	0	1E+30
$D$7	Cant. prod. B1	17.78	0	70	0	50
$E$7	Cant. prod. B2	13.33	0	76	1E+30	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
$F$10	Hrs. máq. 1 Total	40	3.333	40	53.333	6.667
$F$11	Hrs. máq. 2 Total	40	33.333	40	13.333	26.667
$F$12	Hrs. máq. 3 Total	40	24.222	40	20.000	40

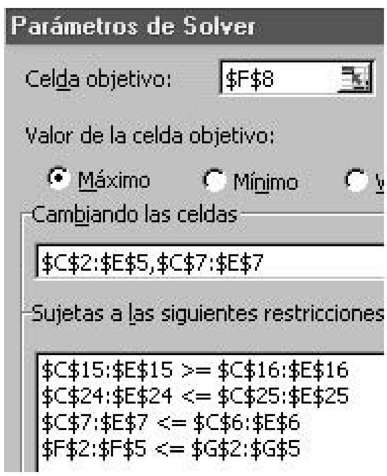
FIGURA 5.21
Formulación de la PL correspondiente al problema 5-20

••**5-21.** *Un modelo de mezclas*. Un viñedo desea mezclar su producción de cuatro cosechas diferentes para elaborar tres tipos de vino combinado. Se han impuesto ciertas restricciones sobre el porcentaje de composición de las mezclas (véase la tabla siguiente).

MEZCLA	COSECHA 1	COSECHA 2	COSECHA 3	COSECHA 4	PRECIO DE VENTA POR GALÓN ($)
A	cuando menos 75% de 1 y 2		*	como máximo 5%	70
B	*	cuando menos 35% de 2 y 3		*	40
C	cuando menos 50% de 1 y 3, sin restricción de 2			como máximo 40%	30
Existencias (galones)	180	250	200	400	

*Indica que no hay restricciones

	A	B	C	D	E	F	G
1		Decisiones	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C	Total	Existencia
2		Cosecha 1	180.00	0	0	180	<=180
3		Cosecha 2	246.71	3.29	0	250	<=250
4		Cosecha 3	0	200.00	6.46E-26	200	<=200
5		Cosecha 4	22.46	377.54	0	400	<=400
6		Total producido	449.17>=	580.83>=	0.00>=		
7		Total vendido	449.17	580.83	0.00	Ganancias	
8		Precio de venta	$70	$40	$30	$54,675	
9		% mezcla mínima	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C		
10		Cosecha 1	180.00		0		
11		Cosecha 2	246.71	3.29			
12		Cosecha 3		200.00	6.46E-26		
13		Cosecha 4					
14		Menos % del total	75%	35%	50%		
15		Balance	89.83	0.00	0.00		
16		Debe ser	>=0	>=0	>=0		
17							
18		% mezcla máxima	mezcla A	mezcla B	mezcla C		
19		Cosecha 1					
20		Cosecha 2					
21		Cosecha 3					
22		Cosecha 4	22.46		0		
23		Menos % del total	5%	0%	40%		
24		Balance	0.00	0.00	0.00		
25		Debe ser	<=0	<=0	<=0		



Celda	Fórmula	Copie a
C6	= SUMA(C2:C5)	D6:E6
C10	= C2	C11, D11:D12, E10, E12
C15	= SUMA(C10:C13) - C$6*C14	D15:E15, C24:E24

FIGURA 5.22

Modelo de PL y solución del problema 5-21

La solución de PL aparece en la figura 5.22 y el Informe de sensibilidad en la figura 5.23.

(a) ¿Cuál es el propósito de las restricciones que aparecen en F2:G5?

(b) ¿Qué finalidad tienen las restricciones que aparecen en C15:E16 y C24:E25?

(c) Explique por qué el LI y el LD de la restricción C15:C16 han asumido los valores que tienen. ¿Qué impedimento representa esta restricción?

(d) ¿Cuál es el ingreso máximo que puede lograrse al mezclar las cuatro cosechas?

(e) ¿Qué cantidad de cada mezcla deberá producirse? ¿Cuál es la composición de cada mezcla?

(f) ¿La solución actual es degenerada o no degenerada? ¿Cómo puede saberlo?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Microsoft Excel 8.0a Informe de sensibilidad**							
2	Celdas cambiantes							
3				**Valor**	**Gradiente**	**Coeficiente**	**Aumento**	**Reducción**
4		**Celda**	**Nombre**	**Final**	**reducido**	**objetivo**	**permisible**	**permisible**
5		$C$2	Cosecha 1 Mezcla A	180.00	0.00	0	1E+30	0
6		$D$2	Cosecha 1 Mezcla B	0.00	-50.000	0	50.000	1E+30
7		$E$2	Cosecha 1 Mezcla C	0.00	0.00	0	0	0
8		$C$3	Cosecha 2 Mezcla A	246.71	0.00	0	0	0
9		$D$3	Cosecha 2 Mezcla B	3.29	0.00	0	0	40.602
10		$E$3	Cosecha 2 Mezcla C	0.00	0.00	0	85.000	0
11		$C$4	Cosecha 3 Mezcla A	0.00	0.00	0	0	1E+30
12		$D$4	Cosecha 3 Mezcla B	200.00	0.00	0		0
13		$E$4	Cosecha 3 Mezcla C	0.00	0.00	0	37.5	1E+30
14		$C$5	Cosecha 4 Mezcla A	22.46	0.00	0	771.429	46.154
15		$D$5	Cosecha 4 Mezcla B	377.54	0.00	0	46.154	21.862
16		$E$5	Cosecha 4 Mezcla C	0.00	-56.250	0	56.250	1E+30
17		$C$7	Total vendido Mezcla A	449.17	0.00	70	38.571	30.000
18		$D$7	Total vendido Mezcla B	580.83	0.00	40	30.000	14.211
19		$E$7	Total vendido Mezcla C	0.00	0.00	30	22.500	30
20	Restricciones							
21				**Valor**	**Sombra**	**Restricción**	**Aumento**	**Reducción**
22		**Celda**	**Nombre**	**Final**	**precio**	**lado derecho**	**permisible**	**permisible**
23		$C$15	Balance Mezcla A	89.83	0.00	0	89.833	1E+30
24		$D$15	Balance Mezcla B	0.00	-50.00	0	155.816	2.079
25		$E$15	Balance Mezcla C	0.00	0.00	0	0	0
26		$C$24	Balance Mezcla A	0.00	50.00	0	5.643	20.731
27		$D$24	Balance Mezcla B	0.00	0.00	0	1E+30	0
28		$E$24	Balance Mezcla C	0.00	106.25	0	0	144.000
29		$F$2	Cosecha 1 Total	180	72.5	180	112.857	180
30		$F$3	Cosecha 2 Total	250	72.5	250	112.857	239.717
31		$F$4	Cosecha 3 Total	200	72.5	200	3.198	200
32		$F$5	Cosecha 4 Total	400	22.5	400	445.188	5.940
33		$C$7	Total vendido Mezcla A	449.17	70.00	0	1E+30	449.167
34		$D$7	Total vendido Mezcla B	580.83	40.00	0	1E+30	580.833
35		$E$7	Total vendido Mezcla C	0.00	30.00	0	1E+30	0

FIGURA 5.23

Informe de sensibilidad del problema 5-21

(g) ¿Cuál es la cantidad mínima en la cual tendría que cambiar el precio de venta de la mezcla C, y en qué dirección, para que la solución óptima fuera producir la mezcla C?

(h) ¿Cuáles son los precios sombra de las cuatro cosechas? ¿En qué unidades están expresados estos precios sombra?

(i) Suponga que un terremoto destruyó la mitad de la cosecha 3 disponible. ¿Qué podría usted decir acerca del impacto que tendría este acontecimiento sobre la solución y el ingreso óptimos?

••5-22. La Party Nut Company tiene disponibles 550 libras de cacahuates, 150 libras de nueces de la India, 90 libras de nueces del Brasil y 70 libras de avellanas. Envasa y vende cuatro variedades de mezclas de nueces en latas normales de 8 onzas (media libra). Los requerimientos de mezcla y el margen de contribución correspondiente a cada lata aparecen en la tabla siguiente. La compañía puede vender toda la producción que ponga a la venta. ¿Qué mezclas de productos debe elaborar para maximizar la contribución a las ganancias?

MEZCLA	CONTENIDO	MARGEN DE CONTRIBUCIÓN POR LATA
1 (cacahuates)	Sólo cacahuates	$0.26
2 (mezcla Party)	No más de 50% de cacahuates; cuando menos 15% de nueces de la India; cuando menos 10% de nueces del Brasil	0.40
3 (nueces de la India)	Sólo nueces de la India	0.51
4 (mezcla de lujo)	Cuando menos 30% de nueces de la India; cuando menos 20% de nueces del Brasil; cuando menos 30% de avellanas	0.52

El modelo puede formularse como el programa lineal de la figura 5.24. Observe que en el modelo de esta figura, el coeficiente para la mezcla de cacahuates en la función objetivo es de $0.52, en lugar de $0.26, porque hay dos latas de 8 onzas por cada libra de cacahuates vendidos como sólo cacahuates.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Decisiones	Mezcla de cacahuate	Mezcla Party	Mezcla de nueces	Mezcla de lujo	Total	Existencia
2		Cacahuates	380.00	123.333		46.667	550	<=550
3		Nueces de la India		80.00	0.00	70	150	<=150
4		Nueces del Brasil		43.33		46.667	90	<=90
5		Avellanas		0.00		70	70	<=70
6		Total	380.00	246.667	0.00	233.333	Ganancia	
7	Margen de contribución		$0.52	$0.80	$1.02	$1.04	$637.60	
8								
9		% mezcla	Mezcla de cacahuate	Mezcla Party	Mezcla de nueces	Mezcla de lujo		
10		Cacahuates	=100% del Total	<=50% del Total				
11		Nueces de la India		>=15% del Total	=100% del Total	=30% del Total		
12		Nueces del Brasil		>=10% del Total		>=20% del Total		
13		Avellanas				>=30% del Total		
14								
15		Balance >= 0	Mezcla cacahuates	Mezcla Party	zcla nueces de la I	Mezcla de lujo		
16		Cacahuates	0	0				
17		Nueces de la India		43.000	0	0		
18		Nueces del Brasil		18.667		0		
19		Avellanas				0		

	B	C	D	E	F	G
6	Total	=SUMA(C2:C5)	=SUMA(D2:D5)	=SUMA(E2:E5)	=SUMA(F2:F5)	Ganancias
7	Margen contrib.	0.52	0.8	1.02	1.04	=SUMAPRODUCTO($C$6:$F$6,C7:F7)
8						
9	mezcla %	Mezcla de cacah	Mezcla Party	Mezcla de nueces	Mezcla de lujo	
10	Cacahuates	1	0.5			
11	Nueces de la India		0.15	1	0.3	
12	Nueces del Brasil		0.1		0.2	
13	Avellanas				0.3	
14						
15	Balance >= 0	Mezcla de cacah	Mezcla Party	Mezcla de nueces	Mezcla de lujo	
16	Cacahuates	=C2-C10*C$6	=-(D2-D10*D$6)			
17	Nueces de la India		=D3-D11*D$6	=E3-E11*E$6	=F3-F11*F$6	
18	Nueces del Brasil		=D4-D12*D$6		=F4-F12*F$6	
19	Avellanas				=F5-F13*F$6	

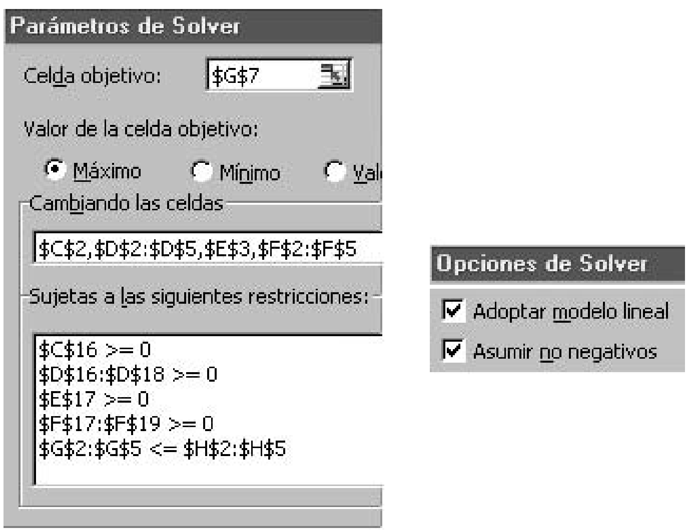


FIGURA 5.24

Modelo de PL y solución del modelo de Party Nut

En el Informe de sensibilidad de la figura 5.25 hemos excluido intencionalmente varios de los precios sombra y de los costos reducidos. Emplee esta salida para contestar las siguientes preguntas. Si no le es posible responder alguna de ellas, explique la causa.

(a) Explique el cálculo que justifique que $1.02 sea el coeficiente de mezcla de nueces de la India en la función objetivo.

(b) ¿Cuántas latas de mezcla Party se producen en la solución óptima?

(c) ¿El precio sombra de la restricción G3:H3 es ≥ 0 o ≤ 0? Explique por qué.

(d) ¿Cuál es el valor del precio sombra de la restricción D18 ≥ 0? ¿Cómo lo sabe?

(e) ¿Qué significa que el contenido de la celda D17 sea positivo? Explique (sin emplear el léxico técnico de la PL).

(f) ¿Cuál sería el efecto sobre la solución óptima y el VO si el precio de venta de la mezcla de cacahuates aumentara a $0.27 por lata de 8 onzas?

(g) ¿Cuál es el valor numérico del precio sombra de la restricción G2:H2? (*Sugerencia:* ¿qué haría con otra libra de cacahuates, si la tuviera?)

(h) ¿Por qué es infinito el incremento permisible del LD de la restricción G2:H2? (*Sugerencia:* la respuesta de la parte (g) es la base del razonamiento.)

(i) Explique por qué es posible tener una solución óptima, inclusive si existe un excedente positivo en la restricción D11.

(j) ¿Cuál es el valor numérico de los precios reducidos de los cacahuates en la mezcla Party y de las nueces de la India en la mezcla de tales nueces?

••5-23. ¿Por qué el decremento permisible del coeficiente objetivo de *F* es igual a 1,500 en la figura 5.8 y a 19,000 en la figura 5.10?

••5-24. Observe que el LD de la restricción de mezcla correspondiente al balance de mercado de la fila 8 presenta un incremento permisible de 1E+30 en la figura 5.8 y de 3.75 en la figura 5.10. Aun en ese caso, como puede ver al comparar las figuras 5.7 y 5.9, el vértice óptimo es el mismo en ambos casos. Por medio de la geometría, trate de explicar esta diferencia en los valores de incrementos permisibles.

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$C$2	Cacahuates Mezcla de cacahua	380.00	0	0.52	0.06	0.12
$D$2	Cacahuates Mezcla Party	123.33		0.8	0.09	0.06
$D$3	Nueces de la India Mezcla Party	80.00	0	0.8	0.24	0.06
$D$4	Nueces del Brasil Mezcla Party	43.33	0	0.8	0.36	0.56
$D$5	Avellanas Mezcla Party	0	-0.24	0.80	0.24	1E+30
$E$3	Nueces de la India Mezcla de nu	0		1.02	0.06	1E+30
$F$2	Cacahuates Mezcla de lujo	46.67	0	1.04	1E+30	0.36
$F$3	Nueces de la India Mezcla de luj	70	0	1.04	0.56	0.24
$F$4	Nueces del Brasil Mezcla de lujo	46.67	0	1.04	0.56	0.36
$F$5	Avellanas Mezcla de lujo	70	0	1.04	1E+30	0.24

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado de recho	Incremento permisible	Decremento permisible
$G$2	Cacahuates Total	550		550	1E+30	380
$G$3	Nueces de la India Total	150		150	93.33	61.43
$G$4	Nueces del Brasil Total	90	1.08	90	143.33	23.33
$G$5	Avellanas Total	70	1.32	70	56	70
$C$16	Cacahuates Mezcla de cacahua	0	0	0	0	1E+30
$D$16	Cacahuates Mezcla Party	0	-0.56	0	61.67	93.33
$D$17	Nueces de la India Mezcla Party	43.00	0	0	43	1E+30
$D$18	Nueces del Brasil Mezcla Party	18.67		0	18.67	1E+30
$E$17	Nueces de la India Mezcla de nu	0	0	0	0	1E+30
$F$17	Nueces de la India Mezcla de luj	0	-0.56	0	46.67	70
$F$18	Nueces del Brasil Mezcla de lujo	0	-0.56	0	23.33	46.67
$F$19	Avellanas Mezcla de lujo	0	-0.80	0	28	56

FIGURA 5.25

Informe de sensibilidad del modelo de Party Nut

Caso práctico — Preguntas relacionadas con el caso Red Brand Canners

La primera vez que vimos el caso de Red Brand Canners (RBC) fue en el capítulo 3, y en esa ocasión formulamos el modelo y presentamos algunas suposiciones. En las siguientes preguntas continuaremos ese análisis. Aquí se requiere que usted resuelva en Excel varias formulaciones y que después analice los Informes de sensibilidad de Solver.

1. Use Solver para optimizar su formulación de PL del modelo de producción correspondiente a Red Brand Canners. No incluya la opción de compra de hasta 80,000 libras adicionales de tomates grado A.
2. ¿Cuál es la ganancia neta obtenida después de descontar el costo de la cosecha?
3. Myers ha propuesto que la ganancia neta obtenida por su política será de $144,000. ¿Es cierto esto? De no ser así, ¿cuál es su ganancia neta (tomando en cuenta, como en la pregunta 2, el costo de la cosecha)?
4. Suponga que Cooper sugiere que, para apegarse a su esquema de contabilidad, presentado en el Anexo 2 del caso original, debería restarse el costo de la cosecha de 18 centavos por libra de cada coeficiente de la función objetivo. Cambie su formulación según esto y vuelva a resolver el modelo. Usted deberá obtener un valor objetivo óptimo mayor que el conseguido en la pregunta 2. Explique esta aparente discrepancia (suponga que los tomates no utilizados se estropearán).

5. Suponga ahora que los tomates no utilizados pueden venderse a 18 centavos por libra. ¿Qué solución sería preferible bajo estas condiciones? ¿Cuánto puede reducirse el precio de reventa sin afectar esta preferencia?
6. Use el Informe de sensibilidad de la pregunta 1 para determinar si debe efectuarse la compra adicional de hasta 80,000 libras de tomates grado A. ¿Puede usted decir qué cantidad sería conveniente comprar?
7. Reformule el modelo para obtener una mezcla óptima de productos aprovechando la opción de compra adicional. La solución de su modelo reformulado debe mostrar explícitamente la manera de utilizar la compra adicional.
8. Suponga que en la pregunta 1 el Departamento de Investigación de Mercados siente que la demanda de jugo podría aumentar en 25,000 cajas por medio de una campaña publicitaria. ¿Cuánto debería estar dispuesta a pagar Red Brand por dicha campaña?
9. Suponga en la pregunta 1 que el precio del jugo aumentó 30 centavos por caja. ¿Su Informe de sensibilidad de Solver le indica cambios en el plan de producción óptimo?
10. Suponga que RBC está obligada a reducir a 2 el número de productos elaborados con tomate. ¿Tendría usted que ejecutar Solver una vez más para saber qué producto conviene dejar de fabricar?
11. Suponga que en la pregunta 1 estuviera disponible una partida adicional de 50,000 libras de tomates grado B. ¿Cuánto debería estar dispuesta a pagar RBC por esta partida de tomates grado B?

Preguntas alternativas sobre Red Brand Canners

Para responder las siguientes preguntas, supongamos que existen tres grados de tomates, como en las preguntas alternativas del capítulo 3.

12. Utilice Solver para optimizar su formulación de PL para la pregunta 8 de las preguntas alternativas de Red Brand Canners que aparecen en el capítulo 3.
13. ¿Cuál es la ganancia neta obtenida después de descontar el costo de la cosecha?
14. Myers asegura que la ganancia neta de su política de producción de 2,000,000 libras de puré y 1,000,000 libras de jugo es de $268,800. ¿Es correcto esto? De no serlo, ¿cuál es su ganancia neta (tomando en cuenta, como en la pregunta 13, el costo de la cosecha)?
15. Suponga que Cooper sugiere que, para apegarse a su esquema contable, presentado en la muestra 2 del caso original, el costo de la cosecha de 18 centavos por libra debería restarse de cada coeficiente de la función objetivo. Cambie su formulación según esto y vuelva a resolver el modelo, suponiendo un costo por cosecha de 21 centavos por libra. Usted debería obtener una solución distinta de la que obtuvo en la pregunta 12. ¿Qué solución tiene una mayor ganancia neta (suponga que los tomates no usados se estropean)? ¿Es correcto incluir el costo del tomate en la función objetivo?
16. Si en la pregunta 15 los tomates no usados pueden revenderse a 21 centavos por libra, ¿cuál sería la solución preferible? ¿Cuánto podría reducirse el precio de reventa sin afectar dicha preferencia?
17. Utilice el Informe de sensibilidad de la pregunta 12 para determinar si debe efectuarse la compra adicional de hasta 80,000 libras de tomates de grado A. ¿Puede usted decir qué cantidad debería comprarse?
18. Con un modelo reformulado, obtenga una mezcla óptima de productos, valiéndose de la opción de compra adicional. La solución a su modelo reformulado deberá mostrar explícitamente cómo usar la compra adicional.
19. Suponga que, en la pregunta 12, el Departamento de Investigación de Mercados piensa que puede aumentar en 3,000 cajas la demanda de puré mediante una campaña publicitaria. ¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar Red Brand por tal campaña?
20. Suponga que, en la pregunta 12, el precio de los tomates enteros enlatados disminuyó en 48 centavos por caja. ¿Su Informe de sensibilidad de Solver le indica si habrá cambios en el plan óptimo de producción?
21. Suponga que el Departamento de Investigación de Mercados sugiriera que, si la calidad promedio del puré fuera menor que 4, el producto ya no sería aceptable para los clientes. ¿Tendría usted necesidad de volver a ejecutar Solver para determinar el plan óptimo de producción si se agregara esta nueva restricción al modelo?
22. Supongamos que en el caso de la pregunta 12 hubiera disponible una partida adicional de 200,000 libras de tomates grado C. ¿Cuánto tendría que estar dispuesta a pagar la RBC por esta partida de tomates grado C?

Caso práctico — Crawler Tread y un nuevo enfoque

En varios aspectos importantes, parte del trabajo de un gerente se relaciona con el análisis y evaluación del trabajo de otras personas, en lugar de elaborar personalmente su propia formulación y análisis "desde cero". En su papel de buscador de diagnósticos, el administrador juzgará el modelo de otra persona. ¿Se han planteado las preguntas correctas? ¿Se ha llevado a cabo el análisis correcto? El siguiente diálogo capta la esencia de tal situación. Aquí se le pide a usted que haga comentarios sobre el análisis de una nueva oportunidad.

Ralph Hanson ha sido el jefe de metalurgistas de la fundición de hierro de PROTRAC durante los últimos cinco años. Con su presencia aporta varias características importantes para su puesto. Para empezar, tiene una magnífica experiencia. Se graduó en la Universidad Case Western con el título de MCM (maestro en ciencias de materiales) y tuvo cinco años de experiencia en la U.S. Steel antes de ingresar a PROTRAC. Se ha servido de esta capacitación y experiencia para efectuar varios cambios que han contribuido a mejorar la calidad de los productos y la eficiencia de los procesos. Además se ha vuelto un administrador eficaz. A través de su instrucción formal y el estudio autodidáctico, se ha familiarizado con muchas técnicas y enfoques administrativos modernos y ha pugnado para que dichos métodos se apliquen en las condiciones apropiadas. De hecho, Ralph es el autor de la idea de aplicar los modelos de PL a las actividades de mezcla de minerales y reciclaje de desechos en PROTRAC.

Ralph era el jefe de metalurgistas cuando se completó Crawler Tread, la primera aplicación de su mezcla de minerales. Actualmente, tanto Ralph como Sam Togas, el administrador de la planta, emplean con soltura los modelos de PL en el área de mezcla de minerales. Por lo general, Ralph formula, resuelve e interpreta por su cuenta la salida del modelo. Actualmente se enfrenta a un nuevo problema. La recesión ha afectado seriamente la demanda de equipo pesado y la mayoría de los departamentos de PROTRAC tienen un exceso de capacidad, incluyendo el de fundición. Sin embargo, las industrias de defensa están en auge. Un fabricante de tanques requiere un mineral de alto grado para la producción de rodamientos para tanques. De hecho, los requerimientos son exactamente los mismos que empleó PROTRAC en el modelo Crawler Tread (véase la sección 5.4). El fabricante de tanques está dispuesto a pagar a PROTRAC $850 por tonelada de mineral, por un máximo de 150,000 toneladas que deberán ser entregadas el próximo mes. Ralph se entera de que puede disponer de hasta 98,000 toneladas de mineral, el cual está compuesto de 21,000 toneladas de material procedente de la mina 1; 40,000 de la mina 2; 15,000 de la mina 3 y 22,000 de la mina 4.

A partir de esta información, Ralph ha formulado un nuevo modelo de PL. En este modelo, T_i representa los miles de toneladas de mineral de la mina *i* (donde $i = 1, 2, 3, 4$) que intervienen en la mezcla y *B* son los miles de toneladas de mineral mezclado. Con el mayor cuidado, ha anotado la formulación para poder explicar fácilmente su análisis a Sam, el administrador de la planta. La formulación y la solución aplicadas por Ralph para su presentación aparecen en el Anexo 1.

A Sam le encantó el proyecto. Da un margen de contribución de $30,500,000 y ocupa recursos (mano de obra y maquinaria) que de otra manera estarían ociosos. De inmediato hizo que el departamento legal elaborara un contrato por la venta de 98,000 toneladas de mineral.

Cuando Ralph llegó, al día siguiente, Sam ya lo estaba esperando. Entonces sostuvieron la siguiente conversación:

Sam: El contrato está listo y cuando ya me disponía a telefonear para confirmar el acuerdo, surgieron nuevos acontecimientos. Acabamos de recibir un télex de la mina 1. Debido a la cancelación de otro pedido, tenemos a nuestra disposición hasta 3,000 toneladas más de material al precio normal de $800 por tonelada, si las queremos. ¿Qué debemos hacer? Por qué no regresas y resuelves de nuevo tu modelo, incluyendo la posibilidad de las 3,000 toneladas más de la mina 1 y preparas un nuevo contrato si la solución es mejor. Obviamente, no nos puede ir peor que ahora, y la verdad es que no nos va tan mal.

Ralph: En realidad, no hay necesidad de resolverlo de nuevo. Una de las mejores cosas de la PL es que podemos contestar muchas preguntas referentes a posibles cambios en el modelo original. En particular, el precio sombra de la cantidad de T_1 disponible nos da un límite superior sobre cuánto más debemos pagar por la oportunidad de adquirir una tonelada adicional de mineral de la mina 1. Si el precio sombra es positivo, digamos $10, deberíamos estar dispuestos a pagar hasta $10 más por la oportunidad de comprar otra tonelada de mineral (es decir, hasta $810 por tonelada de mineral de la mina 1). Si es cero, el aumento de la cantidad de mineral disponible en la mina 1 no nos permitirá incrementar las ganancias.

Una rápida inspección de la solución nos revela que el precio sombra de esta restricción es cero.

Ralph: En virtud de que no podemos aumentar nuestro margen de contribución, dejemos el contrato tal como está y regresemos a trabajar.

Sam: ¡Caramba, Ralph, no lo entiendo! Podemos comprar mineral a $800 la tonelada y venderlo a $850, ¿y me dices que no lo debemos hacer?

Ralph: Comprendo que es difícil de entender, pero yo sé que si se aumenta el lado derecho de la restricción (celda I7) el valor óptimo de la función objetivo permanecerá igual. Esto implica que las toneladas de mineral extra de la mina 1 no nos ayudarán. Supongo que es porque no podemos añadir este mineral nuevo a nuestra mezcla y aun así satisfacer los requerimientos mínimos de elementos. Recuerda que el mineral de la mina 1 sólo tiene 90 libras del elemento B por tonelada y que la mezcla debe tener cuando menos 100.

Sam: Mira, Ralph, debo reunirme con el comité ahora. No puedo pasar más tiempo con este proyecto. No te diré que entiendo bien tu respuesta, pero tú eres el experto. Sigamos pues con el contrato actual.

Preguntas

1. ¿Es correcta la interpretación que ha hecho Ralph de las cifras que aparecen en el informe?
2. ¿Es correcta la respuesta que dio Ralph en cuanto a la oportunidad de efectuar la compra adicional? Si usted cree que se equivocó, ¿dónde estuvo la falla?
3. Suponga que se eliminara del modelo la fila 11 (restricción total del mineral disponible). ¿Cuál sería el precio sombra de la restricción límite del material de la mina 1? ¿Y de la restricción límite del material de la mina 2?
4. ¿Puede usted determinar qué sucedería con el VO si se modificara el valor del LD de la restricción de la mina 2 (celda I8) a 39.999?
5. Suponga que el LD de la restricción de la mina 2 (celda I8) aumenta a 40.001. ¿Cuáles son los nuevos valores óptimos de T_1, T_2, T_3 y T_4?
6. Determine por qué el incremento permisible de esta restricción (celda I8) es de 0.5714.
7. ¿Es degenerada la solución del modelo de Ralph? De ser así, ¿puede identificar cuál o cuáles son las restricciones que provocan la degeneración del modelo?
8. El Anexo 2 es un intento de Ralph por reformular el PL de manera más compacta, parecida a la del modelo de Wayne Foley presentado en la sección 5.6. Su solución óptima es la misma, pero el Informe de sensibilidad tiene una apariencia distinta que el Informe que aparece en el Anexo 1. ¿Cómo explica los coeficientes objetivo y los costos reducidos que aparecen en el Informe de sensibilidad en el Anexo 2 comparados con los correspondientes al del informe del Anexo 1?¿Puede responder las preguntas 4 y 5 basándose en el Anexo 2?

ANEXO 1 Modelo de PL de Ralph

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Producto	Mezcla	T1	T2	T3	T4				
2	Cant. Prod. (miles)	98.0	21.0	40.0	15.0	22.0	Ganancia			
3	Margen contrib.	$ 850	$ (800)	$ (400)	$ (600)	$ (500)	$ 30,500			
4							Total		LD	Holgura
5	Mineral mezclado	1	-1	-1	-1	-1	0	=	0	0
6	Límite de mezcla	1					98	≤	150	52
7	Límite mineral mina 1		1				21	≤	21	1E-04
8	Límite mineral mina 2			1			40	≤	40	0
9	Límite mineral mina 3				1		15	≤	15	0
10	Límite mineral mina 4					1	22	≤	22	0
11	Total mineral dispon.		1	1	1	1	98	≤	98	0
12	Mínimo A		5	-2	3	-3	4	≥	0	4
13	Mínimo B		-10	50	-25	75	3065	≥	0	3065
14	Mínimo C		15	-5	-10	7	119	≥	0	119

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$B$2	Cant. prod. (miles) Mezcla	98.0	0.0	850	1E+30	50
$C$2	Cant. prod. (miles) T1	21.0	0.0	-800	200	50
$D$2	Cant. prod. (miles) T2	40.0	0.0	-400	1E+30	400
$E$2	Cant. prod. (miles) T3	15.0	0.0	-600	1E+30	200
$F$2	Cant. prod. (miles) T4	22.0	0.0	-500	1E+30	300

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Lado derecho restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
$G$1	Mínimo A Total	4	0	0	4	1E+30
$G$1	Mínimo B Total	3065	0	0	3065	1E+30
$G$1	Mínimo C Total	119	0	0	119	1E+30
$G$5	Mineral mezclado Total	0	850	0	52	98
$G$6	Límite de mezcla Total	98	0	150	1E+30	52
$G$7	Límite mineral mina 1 Total	21	0	21	1E+30	0
$G$8	Límite mineral mina 2 Total	40	400	40	0.5714	0
$G$9	Límite mineral mina 3 Total	15	200	15	2	0
$G$10	Límite mineral mina 4 Total	22	300	22	0.5	0
$G$11	Total mineral dispon. Total	98	50	98	0	0.8

ANEXO 2 Segundo modelo de PL de Ralph

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Producto	T1	T2	T3	T4	Mezcla	Ganancia	
2	Margen contrib.	$ (800)	$ (400)	$ (600)	$ (500)	$ 850	$ 30,500	
3	Cant. prod. (miles)	21.0	40.0	15.0	22.0	98.0	<=98	
4	Límite oferta o demanda	<=21	<=40	<=15	<=22	<=150		
5	Restricciones de elementos					Total	LD	Holgura
6	Mínimo A	5	-2	3	-3	4	>=0	4
7	Mínimo B	-10	50	-25	75	3065	>=0	3065
8	Mínimo C	15	-5	-10	7	119	>=0	119

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Producto	T1	T2	T3	T4	Mezcla	Ganancia	
2	Margen contrib.	-800	-400	-600	-500	850	=SUMAPRODUCTO($B$3:$F$3,B2:F2)	
3	Cant. prod. (miles	21	40	15	22	=SUMA(B3:E3)	98	
4	Límite oferta o de	21	40	15	22	150		
5	Restricciones de					Total	LD	Holgura
6	Mínimo A	5	-2	3	-3	=SUMAPRODUCTO($B$3:$E$3,B6:E6)	0	=F6-G6
7	Mínimo B	-10	50	-25	75	=SUMAPRODUCTO($B$3:$E$3,B7:E7)	0	=F7-G7
8	Mínimo C	15	-5	-10	7	=SUMAPRODUCTO($B$3:$E$3,B8:E8)	0	=F8-G8

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$B$3	Cant. prod. (miles) T1	21	50	50	1E+30	50
$C$3	Cant. prod. (miles) T2	40	450	450	1E+30	450
$D$3	Cant. prod. (miles) T3	15	250	250	1E+30	250
$E$3	Cant. prod. (miles) T4	22	350	350	1E+30	350

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Lado derecho restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
$F$6	Mínimo A Total	4	0	0	4	1E+30
$F$7	Mínimo B Total	3065	0	0	3065	1E+30
$F$8	Mínimo C Total	119	0	0	119	1E+30
$F$3	Cant. prod. (miles) Mezcla	98	0	150	1E+30	52
$F$3	Cant. prod. (miles) Mezcla	98	0	98	1E+30	0

Caso práctico Saw Mill River Feed y Grain Company[1]

El propósito de este caso es ejercitar tanto su juicio como sus habilidades técnicas. Usted tendrá que decidir, con base en los objetivos del señor Overton, cuál es la información que usted debe proporcionarle. Entonces tendrá que formular un modelo (o varios) de PL, optimizarlo(s) y presentar, en un informe abreviado, los resultados relevantes.

El lunes 28 de agosto de 1996 el señor Overton llamó a su gerente de ventas y a su gerente de compras para estudiar la política del próximo mes. Saw Mill había aceptado órdenes de compra de Turnbull Co. y de McClean Bros. y tenía la opción de aceptar un pedido de Blue River, Inc. También tenía la opción de comprar un poco de grano adicional de Cochrane Farm. El señor Overton, director administrativo de Saw Mill, tenía como plazo hasta el fin de esa semana para decidir qué se debía hacer.

Generalmente, las compras de grano finalizan hacia los últimos días de agosto. Sin embargo, Saw Mill tiene todavía la posibilidad de comprar grano adicional a Cochrane Farm. Este compromiso tiene que concretarse antes de la fecha límite: el 1 de septiembre. El grano sería entregado en el elevador de granos de Midwest el día 15 del mes a más tardar. Este elevador funciona simplemente como almacén de Saw Mill.

Es una política invariable de la compañía cobrar un cargo adicional de 15% sobre el costo del grano suministrado a sus clientes. Los pagos al elevador de granos Midwest se manejan como un gasto general y esa política no debe ser modificada. Turnbull, McClean y Blue River han acordado pagar por sus pedidos actuales cualquier precio que cobre Saw Mill. Sin embargo, Saw Mill se da cuenta de que, si eleva demasiado su precio, va a perder negocios en el futuro.

COMPAÑÍA SOLICITANTE	CANTIDAD (BUSHELS)	PORCENTAJE MÁXIMO DE HUMEDAD (POR LB)	PESO MÍNIMO POR BUSHEL (LB)	PORCENTAJE MÁXIMO DE DAÑOS (POR LB)	PORCENTAJE MÁXIMO DE MATERIAL EXTRAÑO (POR LB)	FECHA DE ENTREGA
Turnbull	40,000–45,000	13	56	2	2	9/20
McClean	32,000–36,000	15.5	54	5	3	9/22
Blue River	50,000–54,000	15	56	2	4	9/26

TIPO DE MAÍZ	CANTIDAD (BUSHELS)	COSTO POR BUSHEL ($)	PORCENTAJE DE CONTENIDO DE HUMEDAD	PESO POR BUSHEL (LB)	PORCENTAJE DE DAÑO TOTAL (POR LB)	PORCENTAJE DE MATERIAL EXTRAÑO (POR LB)
1	30,000	1.45	12	57	2	1.5
2	45,000	1.44	15	57	2	1
3	25,000	1.45	12	58	3	3
4	40,000	1.42	13	56	4	2
5	20,000	1.38	15	54	4	2
6	30,000	1.37	15	55	5	3
7	75,000	1.37	18	57	5	1
8	15,000	1.39	14	58	2	4
9	16,000	1.27	17	53	7	5
10	20,000	1.28	15	55	8	3
11	10,000	1.17	22	56	9	5

Los detalles de los pedidos de Turnbull, McClean y Blue River se presentan en la primera tabla anexa. Se indica la cantidad, así como el contenido máximo de humedad, el peso mínimo por bushel, el porcentaje máximo de daños y el porcentaje máximo de material extraño.

La compañía tiene la opción de suministrar cualquier cantidad de grano que desee, dentro del rango especificado. Claro está que deberá satisfacer los requerimientos. A más tardar el 4 de septiembre, Saw Mill debe informar a Turnbull y a McClean la cantidad de granos que recibirán. En la misma fecha, debe notificar a Blue River si aceptará su pedido, así como la cantidad de grano que le entregará si lo acepta.

Saw Mill mezcla los granos que le pertenecen para atender los pedidos de los clientes. El 28 de agosto, la compañía tenía 326,000 bushels de maíz almacenados en el elevador. Obviamente sería imposible identificar la composición exacta de cada grano de maíz depositado por la Saw Mill River Feed and Grain Company en el elevador. Por tanto, la segunda tabla anexa representa la información adicional acerca de las características de los distintos tipos de grano acreditados en la cuenta del elevador de Saw Mill River. Los 326,000 bushels se subdividen en 11 tipos de maíz, las cuales difieren en cuanto a (1) cantidad disponible, (2) costo por bushel, (3) porcentaje de contenido de humedad, (4) peso por bushel, (5) porcentaje de grano dañado y (6) porcentaje de material extraño.

[1]Según una idea de Jonathan Kornbluth, basada en la información que se publicó originalmente en *Introduction of Linear Programming: Methods & Cases*, por Thomas H. Naylor, Eugene T. Byrne y John M. Vernon (Belmont, CA: Wadsworth Publishing, 1971).

El grano que ofrece la Cochrane Farm es un cargamento de hasta 50,000 bushels, con un promedio de 15% de humedad, 3% de daño y 2% de material extraño. La carga tiene una densidad de 57 libras por bushel y Straddle (el gerente de compras) está convencido de que el pedido puede obtenerse a un costo de $1.41 por bushel.

Desarrolle un modelo de PL como ayuda para analizar el modelo de Overton. (Emplee la notación T_i = bushels de maíz tipo i por enviar a Turnbull; lo mismo para M_i y B_i. Además, denominemos maíz tipo 12 al procedente de Cochrane Farm.) Sin extenderse más de una página, llamada "Resumen ejecutivo", acompañada con anexos relevantes de su modelo, ofrezca la información más concisa posible que ayude a Overton a responder sus preguntas. Sus objetivos principales consisten en maximizar las ganancias y mantener los precios de venta a los clientes lo suficientemente bajos para atraer más negocios. Puede esperarse que él se base en su buen juicio para tomar la decisión; el trabajo de usted es proporcionarle la información adecuada que le permita analizar las principales ventajas y desventajas. Usted también tendrá que hacer sus propias recomendaciones.

La presentación de usted será juzgada por la economía de su formulación (es decir, formule su modelo o modelos de la manera más eficiente posible *para el conjunto de datos dado*), así como por sus recomendaciones acerca de

(a) si se debe comprar o no el producto de Cochrane;
(b) si se debe aceptar o no la opción de Blue River;
(c) la cantidad de maíz que conviene suministrar a Blue River, a Turnbull y a McClean.

Caso práctico — Kiwi Computer

La Kiwi Computer de Nueva Zelandia fabrica dos tipos de computadoras personales: un modelo portátil y un modelo de escritorio. Kiwi ensambla los gabinetes y las tarjetas de circuito impreso en su planta, en la cual fabrican también los gabinetes e integran los componentes a las tarjetas de circuito impreso. La producción mensual está limitada por las capacidades que aparecen en la siguiente tabla:

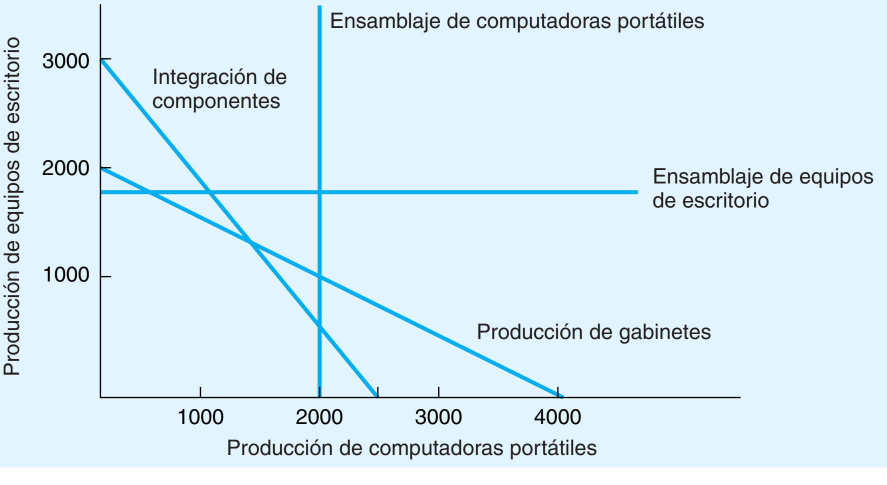
OPERACIÓN	PORTÁTIL	ESCRITORIO
Producción de gabinetes	4000	2000
Integración de tarjetas	2500	3000
Ensamblaje de computadoras portátiles	2000	—
Ensamblaje de equipo de escritorio	—	1800

Por ejemplo, en un mes es posible producir 4,000 gabinetes para computadoras portátiles si no se producen gabinetes para escritorio; o bien, ningún gabinete para computadoras portátiles y 2,000 gabinetes para escritorio; o también, si se dedican tiempos iguales para ambos productos, 2,000 gabinetes para modelos portátiles y 1,000 para los de escritorio. Para que sea factible, la producción de computadoras portátiles y de escritorio de cada mes debe satisfacer todas las restricciones simultáneamente. El conjunto de planes de producción factibles aparece en el Anexo 1

El precio de mayoreo al cual Kiwi vende sus productos a las tiendas de menudeo es $1,500 por la computadora de escritorio y $1,400 por la portátil. Para poder competir en el mercado, Kiwi tiene que vender sus computadoras a precios que son varios cientos de dólares más bajos que los de un fabricante de computadoras rival muy grande y conocido.

La aparición de este fabricante ha causado un auge en la industria, pues el mercado se ha transformado, de uno dirigido principalmente a los profesionales de los negocios a un mercado de usuarios de computadoras para las empresas y el hogar. Debido a este desplazamiento, el mercado ahora es un "mercado de vendedores" y actualmente Kiwi vende todas las computadoras que produce de ambos modelos. Durante el primer trimestre del año, Kiwi fabricó 2,000 modelos portátiles cada mes y 600 computadoras de escritorio. Tanto la integración de componentes como el ensamblaje de computadoras portátiles operaron a toda su capacidad, pero había cierta holgura en la producción de gabinetes y en

ANEXO 1



ANEXO 2

	GASTOS GENERALES FIJOS TOTALES (MILES DE $)*	GASTOS GENERALES FIJOS POR UNIDAD ($)
Producción de gabinetes	247	95
Integración de componentes	533	205
Ensamblaje de computadoras de escritorio	249	415
Ensamblaje de computadoras portátiles	230	115
Total	1259	

*Tomando como base una producción de 600 computadoras de escritorio y 2,000 portátiles al mes.

el ensamblaje de equipos de escritorio. Los contadores de costos de Kiwi determinaron gastos generales y costos estándar fijos, como podemos apreciar en los anexos 2 y 3. La información sobre los gastos generales fijos del Anexo 3 se deriva de los gastos generales fijos totales del Anexo 2.

ANEXO 3

	COMPUTADORAS DE ESCRITORIO		PORTÁTILES	
Materiales directos		$800		$ 690
Mano de obra directa				
Producción de gabinetes	$20		$15	
Integración de componentes	100		90	
Ensamblaje final	5	125	10	115
Gastos generales fijos				
Producción de gabinetes	$ 95		$ 95	
Integración de componentes	205		205	
Ensamblaje final	415	715	115	415
Total		$1640		$1220

En una reunión trimestral de los ejecutivos de la compañía, se expresó gran insatisfacción por el desempeño reciente de las ganancias de Kiwi. El presidente esperaba ganancias mucho mayores como resultado de la magnitud de su mercado. Como una respuesta, el gerente de ventas indicó que era imposible vender la computadora de escritorio con ganancias. Por tanto, para mejorar las ganancias, sugirió que ese modelo se eliminara de la línea de productos de la compañía.

El contralor objetó esta sugerencia. Sostuvo que el problema real al cual se enfrentaban las computadoras de escritorio era que tenían que absorber la totalidad de los gastos generales fijos del departamento de ensamblaje de computadoras de escritorio cuando sólo se producía una cantidad pequeña de ellas. Indicó que la producción y venta de las computadoras de escritorio estaban haciendo, de hecho, una contribución positiva a los gastos generales y a las ganancias. Esta contribución simplemente era insuficiente para cubrir los costos fijos. Ésta fue su conclusión: "Si producimos más computadoras de escritorio, podremos disminuir el costo fijo de ensamblaje final de $415. Ahora es muy alto porque estamos produciendo muy pocas unidades."

El gerente de ventas se asombró al escuchar estas palabras. El trabajo del contralor consistía en ofrecer a todos los ejecutivos de Kiwi información de contabilidad que les ayudara a tomar las decisiones de negocios adecuadas. Si la suposición del contralor era realmente correcta, entonces las cifras de costos del Anexo 3 resultaban bastante engañosas, y así lo habían sido por bastante tiempo.

Haciendo eco de las conjeturas del contralor, el gerente de producción sugirió un modo de aumentar la producción. "Podemos aumentar la producción si un subcontratista efectúa parte de la integración de componentes en las tarjetas de circuito impreso. Podríamos suministrarle las tarjetas y los componentes y pagarle algún precio pactado por cada tarjeta de computadora de escritorio que integre y otro precio pactado (probablemente diferente) por cada tarjeta de computadora portátil que integre."

En ese momento, el presidente intervino en el debate. Él concluyó la junta pidiendo al gerente de ventas, al contralor y al gerente de producción que se reunieran para pensar en una recomendación sobre la mezcla de productos de la compañía y de la subcontratación. Les dijo que supusieran que la demanda se mantendría alta y que la capacidad actual permanecería fija. Específicamente, les pidió que consideraran en grupo dos preguntas derivadas de sus comentarios. Esas preguntas fueron las siguientes:

A. Suponiendo que no hubiera algún cambio en la capacidad o en los precios de venta de las computadoras y suponiendo también que no se subcontratara la integración de las tarjetas, ¿cuál sería la mezcla de computadoras de escritorio y portátiles que le reportaría mayores ganancias a Kiwi? Además, ¿habría en esa mezcla menos computadoras de escritorio, como lo sugirió el gerente de ventas?

B. ¿Cuál sería el precio de venta máximo por tarjeta integrada que debería estar dispuesto a pagar Kiwi al subcontratista encargado de integrar las tarjetas de las computadoras de escritorio, y cuál sería el precio máximo por tarjeta integrada que debería estar dispuesto a pagar Kiwi al subcontratista por la integración de las tarjetas de las computadoras portátiles, manteniendo a la vez las ganancias en el nivel más alto posible si se integran en su totalidad las tarjetas de ambos modelos de computadora en la planta de Kiwi?

Preguntas

Parte A. Sin permitir la subcontratación.

1. En el Anexo 3, el costo de los gastos generales estándar asignado a las computadoras de escritorio para el ensamblaje final es $415. Explique con claridad cómo se obtuvo esta cifra.
2. (a) ¿Las computadoras de escritorio hacen una contribución a las ganancias? En otras palabras, dado que los gastos generales son fijos en el corto plazo, ¿las ganancias de la compañía serían mayores si no se produjeran computadoras de escritorio?
   (b) El cálculo correcto de la ganancia por unidad demostraría que el modelo portátil reporta mayores ganancias que el de escritorio. ¿Significa esto que deberían producirse más de ellas o únicamente modelos portátiles? ¿Por qué?
3. Al contestar esta pregunta, suponga que las tarjetas no pudieran ser integradas por un subcontratista. Construya un modelo de programación lineal para determinar la mezcla óptima de productos.
4. Conteste la primera pregunta del presidente optimizando su modelo mediante Solver e indique cuál sería la mezcla óptima de computadoras de escritorio y portátiles. Se aceptan respuestas expresadas en números no enteros.

5. Encuentre la mejor respuesta entera factible que sea posible, redondeando a enteros las soluciones que haya encontrado para la pregunta 4.
6. (a) Retroceda un poco y vuelva a calcular los "costos estándar" de la compañía, utilizando sus respuestas redondeadas para la pregunta 5, y compárelos con los costos obtenidos para el Anexo 3.
(b) ¿Cuánto aumentarían las ganancias si se aplicara la nueva mezcla (usando las respuestas en enteros de la pregunta 5), en lugar de la anterior (es decir, 600 computadoras de escritorio y 2,000 portátiles)?

Parte B. Se permite la subcontratación.

Ahora permitiremos que algunas de las tarjetas sean integradas por un subcontratista. Suponga que la producción de una computadora cuya tarjeta va a ser integrada por el subcontratista requiriera la misma cantidad de tiempo para la producción del gabinete y el ensamblaje final, que una cuya tarjeta ha sido integrada en la fábrica.

7. Suponga que el subcontratista va a cobrar $110 por integrar cada tarjeta de computadora de escritorio y $100 por cada tarjeta de computadora portátil. Kiwi proporciona al subcontratista los materiales necesarios. ¿Le convendría a Kiwi emplear al subcontratista para que integre las tarjetas? Exponga sus argumentos a favor o en contra sin formular ni resolver un nuevo modelo de PL.
8. Construya ahora un modelo de PL donde esté incluida la subcontratación. En su formulación, haga la distinción entre las computadoras producidas con tarjetas integradas interna y externamente.
9. Suponga que, además del cargo por tarjeta, el subcontratista ha decidido añadir ahora un cargo fijo por integrar un lote de tarjetas (el cargo será el mismo, sin importar la cantidad de tarjetas que integre ni su tipo). ¿Cuál sería el cargo fijo con el cual a Kiwi le resultaría igual subcontratar todas sus tarjetas o integrarlas internamente?

Parte C. Análisis de sensibilidad.

10. Use como referencia la formulación de programación lineal que aparece en la pregunta 8. ¿La solución óptima es degenerada? Explique su respuesta.
11. Tomando como referencia la formulación de programación lineal correspondiente a la pregunta 8, ¿existen soluciones óptimas alternativas? Explique.
12. Use como referencia la formulación de programación lineal para la pregunta 8. El subcontratista cobra actualmente $110 por cada tarjeta de escritorio que integra. ¿Cuánto tendría que disminuir este cargo para que la solución óptima de Kiwi fuera que el subcontratista integrara las tarjetas a los equipos de escritorio? ¿Por qué?
13. Tome como referencia la formulación de programación lineal correspondiente a la pregunta 3. Supongamos que Kiwi pudiera aumentar la capacidad de integración de tarjetas para integrar una cantidad adicional igual a 600 tarjetas de computadoras de escritorio o a 500 tarjetas de computadoras portátiles o a cualquier combinación equivalente de ellas. ¿Debería aumentar Kiwi la capacidad si el costo fuera $175,000 al mes? Responda *sin* volver a resolver el modelo de PL.
14. Use como referencia la formulación de PL de la pregunta 3. Suponga que la unidad de escritorio ha sido rediseñada de tal manera que ahora se usan menos chips y, por tanto, se han reducido los costos de los materiales directos en $200. ¿Su Informe de sensibilidad le indica algún cambio en el plan óptimo de producción? Explique su respuesta.
15. Conteste la segunda pregunta del presidente.

Preguntas altenativas sobre Kiwi Computer

Kiwi está considerando la opción de consolidar en el mismo departamento el ensamblaje de computadoras de escritorio y de modelos portátiles. El nuevo departamento tendría capacidad suficiente para ensamblar cada mes 3,000 computadoras portátiles y ninguna de escritorio, o ninguna portátil y 2,200 de escritorio o, si se le dedicara igual cantidad de tiempo a ambas, 1,500 portátiles y 1,100 de escritorio. Se estima que los gastos generales fijos mensuales de este departamento serían menores de $479,000, es decir, los actuales gastos generales combinados de los departamentos de ensamblaje de computadoras de escritorio y portátiles. Para responder a las siguientes preguntas, suponga que los departamentos ya están unificados.

Parte A. No se permite la subcontratación.

1. Sean D y P la tasa mensual de producción de computadoras de escritorio y la de computadoras portátiles respectivamente, y F los gastos generales fijos del nuevo departamento de ensamblaje unificado. Exprese usted las ganancias totales en función de D, P y F.
2. ¿Es indispensable conocer el valor de F para determinar la mezcla óptima de productos? Suponga que los gastos generales fijos no son afectados por los valores de D y P.
3. Para contestar esta pregunta, suponga que las tarjetas no pudieran ser integradas por un subcontratista. Construya un modelo de programación lineal para determinar la mezcla óptima de productos.
4. Optimice su modelo por medio de Solver e indique la mezcla óptima de computadoras de escritorio y portátiles. Son aceptables las respuestas fraccionarias.
5. Encuentre la mejor respuesta factible que sea posible obtener con números enteros, mediante el redondeo a los enteros adyacentes de las respuestas que obtuvo para la pregunta 4.
6. Suponga que si no se combinan ambos departamentos de ensamblaje, la ganancia óptima (los ingresos menos *todos* los costos) es de $330,286. ¿Cuál sería el valor máximo que podrían alcanzar los gastos generales fijos de un departamento de ensamblaje combinado para que Kiwi siguiera prefiriendo unificar los dos departamentos?

Parte B. Se permite la subcontratación.

7. Supongamos que el subcontratista decidiera cobrar $150 por la integración de cada tarjeta de computadora de escritorio y $135 por la de cada tarjeta de computadora portátil. Kiwi le proporcionaría al subcontratista todos los materiales necesarios. ¿Debería emplear Kiwi al subcontratista para la integración de las tarjetas? Fundamente su respuesta sin construir ni resolver un nuevo modelo de PL.
8. Ahora formule un modelo de PL donde esté incluida la subcontratación. En su formulación, haga la distinción entre las

computadoras producidas con tarjetas integradas interna y externamente.

9. Supongamos que, además del cargo que cobra por tarjeta, el subcontratista decidiera incluir un cargo fijo por la integración de un lote de tarjetas (el cargo sería el mismo, sin importar la cantidad de tarjetas ni su tipo). ¿Cuál sería el cargo fijo con el cual a Kiwi le resultaría igual subcontratar o integrar todas sus tarjetas internamente?

Parte C. Análisis de sensibilidad.

10. Use usted como referencia la formulación de programación lineal de la pregunta 8. ¿La solución óptima es degenerada? Explique su respuesta.
11. Tome como referencia la formulación de programación lineal presentada en la pregunta 8. ¿Existen soluciones óptimas alternativas? Explique su respuesta.
12. Tome ahora como referencia la formulación de programación lineal utilizada en la pregunta 8. El subcontratista cobra actualmente $150 por cada tarjeta de escritorio que integra. ¿Podría reducir el subcontratista su precio en grado suficiente para que la solución óptima de Kiwi consistiera en permitir que él integrara sus tarjetas para computadoras de escritorio? Explique su respuesta.
13. Tome como referencia la formulación de programación lineal presentada en la pregunta 3. Suponga que Kiwi puede aumentar la capacidad de integración de tarjetas para integrar una cantidad adicional de 600 tarjetas de computadoras de escritorio o de 500 tarjetas de computadoras portátiles, o a cualquier combinación equivalente de ellas. ¿Le convendría a Kiwi aumentar la capacidad si el costo de ello fuera de $175,000 al mes? Responda *sin* resolver nuevamente el modelo de PL.
14. Use como referencia la formulación de PL presentada en la pregunta 3. Supongamos que se ha rediseñado la unidad de escritorio, de manera que ahora se utilizan menos chips y, por tanto, se ha logrado reducir los costos de los materiales directos en $200. ¿El informe de su hoja de cálculo electrónica muestra que habría algún cambio en el plan óptimo de producción? Explique su respuesta.

Referencias

De-Li Yang y Weiqin Mou, “An Integrated Decision Support System in a Chinese Chemical Plant”, en *Interfaces*, 23 núm. 6 (1993), págs. 93-100.

Honorio Carino y Clinton LeNoir, “Optimizing Wood Procurement in Cabinet Manufacturing”, en *Interfaces*, 18, núm. 2 (1988), págs. 10-19.

CAPÍTULO

6

Programación lineal: Aplicaciones

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN

Ici on parle HASTUS: Montreal moderniza la programación de su sistema de transporte por medio de la PL

El control de los costos del transporte público es un problema que no conoce fronteras. Un enfoque muy exitoso fue el desarrollado por la Société de la Communauté Urbaine de Montreal (S.T.C.U.M.), en Canadá. Esta organización, con una planta de 8,000 empleados y un presupuesto anual de más de $575 millones, proporciona cada año cerca de 400 millones de viajes a sus pasajeros. Con ese fin, opera 1,700 autobuses y 750 carros de tren subterráneo, para los cuales tiene que programar 3,000 conductores y demás personal diariamente.

La programación eficiente es de enorme importancia: mejora el servicio y las condiciones de trabajo y puede tener un impacto apreciable en los costos de operación. Pero esa programación es difícil, debido a las grandes variaciones de los niveles de servicio requeridos a lo largo del día. Durante las horas pico de demanda, pueden requerirse 1,500 vehículos aproximadamente, mientras que en las horas de baja demanda sólo se requiere la quinta parte de esa cifra. En la programación se debe tomar en cuenta tanto la frecuencia de los recorridos de los vehículos en cada ruta en el transcurso del día, como el efecto de las condiciones del tráfico (por ejemplo, los aglomeramientos en las horas pico) sobre la velocidad promedio de los vehículos a distintas horas.

La programación del sistema de transporte se realiza en dos operaciones sucesivas. Primero se lleva a cabo la programación de los vehículos. La meta es proporcionar la cantidad de autobuses y trenes subterráneos necesarios para mantener la frecuencia de servicio deseada en cada ruta. A continuación, se realiza la programación del personal, asignando los conductores a los vehículos. Para simplificar estas operaciones, la S.T.C.U.M. desarrolló el sistema HASTUS en colaboración con el Centro de Investigaciones sobre el Transporte, de la Universidad de Montreal. El programa está constituido por tres módulos principales de software:

- Uno sirve para proporcionar la programación óptima de vehículos, empleando los modelos de optimización de redes descritos en este capítulo.
- El segundo utiliza modelos de PL a fin de obtener una "buena" solución inicial para la programación del personal. Mediante simplificaciones cuidadosamente seleccionadas, la enorme cantidad de variables se reduce a 3,000, con lo cual el modelo se puede resolver con mucha rapidez.
- El último módulo refina la solución y genera las asignaciones detalladas de los conductores, empleando los modelos de optimización de asignación y de ruta más corta, también descritos en este capítulo.

El departamento de programación ha comparado cuidadosamente el costo de encontrar soluciones por el método manual y soluciones paralelas generadas por computadora. Se observó que HASTUS disminuye el número de errores de programación manual, lo cual ahorra cuando menos $100,000 anuales por concepto de salarios innecesarios. En consecuencia, el sistema se pagó por sí solo en menos de tres meses. Además, se ha demostrado que HASTUS reduce en 20% el tiempo improductivo que se paga a los conductores y otros empleados, en comparación con las soluciones manuales utilizadas anteriormente. El ahorro anual total es de unos $4 millones: $3 millones por la programación de mano de obra y $1 millón por la programación de vehículos.

El sistema permite a los administradores realizar análisis de sensibilidad y de "¿qué pasaría si?". Estas simulaciones, que habrían requerido semanas enteras si se hubieran efectuado con técnicas manuales, ahora pueden llevarse a cabo en minutos. Los análisis correspondientes han ayudado a la gerencia a elaborar las mejores propuestas costo-beneficio, durante sus negociaciones con los sindicatos de trabajadores.

HASTUS es fácil de aprender y usar, y ha resultado del agrado de los programadores pues hace más interesante y emocionante su trabajo. El éxito del programa ha sido tan grande, que hoy existen versiones de HASTUS en varios idiomas para ayudar a quienes planean cerca de 40 ciudades en todo el mundo.

6.1 INTRODUCCIÓN

La programación lineal es un caballo de batalla en el mundo de los modelos cuantitativos. Su capacidad para manejar cientos de miles de variables de decisión y restricciones, y la enorme cantidad de interacciones que implican estos números hacen que la PL sea una herramienta importante para la resolución de gran variedad de problemas.

En este capítulo nos concentramos en algunas aplicaciones de la programación lineal. En particular, consideramos diez modelos específicos. La sección 6.2 está dedicada al *modelo de transporte*. Con este modelo, la gerencia se propone determinar la manera de asignar los productos de sus diferentes almacenes a sus clientes, a fin de satisfacer la demanda con el menor costo de transportación posible. Este modelo es importante porque tiene muchas aplicaciones exitosas y porque puede resolverse con rapidez y eficiencia. En la sección 6.3 investigaremos algunas variaciones del modelo de transporte, como el caso en que la oferta y la demanda difieren.

La sección 6.4 está dedicada al *modelo de asignación*. Este modelo permite a la gerencia determinar la asignación óptima de los agentes de ventas a los territorios, de los puestos de trabajo a las máquinas o de los editores a los libros en producción. El modelo mismo constituye un tipo especial del modelo de transporte. Ambos son casos especiales de un tipo más general de modelos llamado *modelos de red*, el cual examinaremos en las secciones 6.5 a 6.10. Los modelos de red se aplican con frecuencia a situaciones de logística que involucran el movimiento o asignación de entidades físicas.

En la sección 6.11 se presenta un modelo de planeación financiera y de producción. Aunque es pequeño y relativamente simple para el nivel de las aplicaciones actuales, ilustra la manera de construir y resolver modelos de planeación más complicados. La sección 6.12 presenta un importante modelo de mercadotecnia. Conocido como *modelo de selección de medios*, se aplica en este caso al diseño de una campaña eficaz de publicidad. En concreto, la gerencia debe decidir la cantidad de anuncios que es conveniente colocar en varios medios publicitarios disponibles. La decisión está restringida por la asignación global del presupuesto, la cantidad de espacios para publicidad en los distintos medios y las reglas empíricas impuestas por la administración. El modelo de selección de medios es un ejemplo específico de un tipo importante de modelos de administración, los modelos de maximización de ganancias, en los que una variable de decisión rinde ganancias marginales decrecientes frente a los aumentos de valor de la variable. A continuación, en las secciones 6.13 y 6.14, investigamos los modelos dinámicos en los cuales la toma de decisiones se presenta a través del tiempo. Ilustraremos los modelos dinámicos por medio de ejemplos en los que interviene el inventario físico de productos, incluso uno de administración de efectivo en el curso del tiempo.

6.2 EL MODELO DE TRANSPORTE

EL PROBLEMA DE DISTRIBUCIÓN DE PROTRAC: ENVÍO DE MOTORES DIESEL DE LOS PUERTOS A LAS PLANTAS

PROTRAC tiene cuatro plantas de montaje en Europa. Éstas se encuentran en Leipzig, Alemania (1); Nancy, Francia (2); Lieja, Bélgica (3); y Tilburg, Países Bajos (4). Los motores empleados por estas plantas se fabrican en Estados Unidos, se embarcan a los puertos de Amsterdam (A), Amberes (B) y El Havre (C) y de allí se transportan a las plantas para su ensamblado.

Se han preparado los planes de producción del tercer trimestre, julio a septiembre. Los *requerimientos* (la *demanda* en los **destinos**) de los motores diesel aparecen en la tabla 6.1.

Las cantidades de motores E-4 *disponibles* en los puertos (la *oferta* en los **orígenes**), a tiempo para utilizarse en el tercer trimestre, aparecen en la tabla 6.2. Observe que éste es un modelo balanceado en el sentido de que la oferta total de motores disponibles es igual a la cantidad total requerida. La figura 6.1 ilustra el modelo. En esta figura, las cifras que aparecen sobre los nombres de los puertos indican la cantidad demandada. Las líneas indican las posibles rutas de entrega.

PROTRAC tiene que decidir cuántos motores debe enviar desde cada puerto hasta cada planta. Los motores serán transportados por un transportista común y los costos correspondientes se cobrarán por motor.

TABLA 6.1 Demanda de motores diesel

PLANTA	CANTIDAD DE MOTORES REQUERIDOS
(1) Leipzig	400
(2) Nancy	900
(3) Lieja	200
(4) Tilburg	500
	2000

TABLA 6.2 Oferta de motores diesel

PUERTO	CANTIDAD DE MOTORES DISPONIBLES
(A) Amsterdam	500
(B) Amberes	700
(C) El Havre	800
	2000

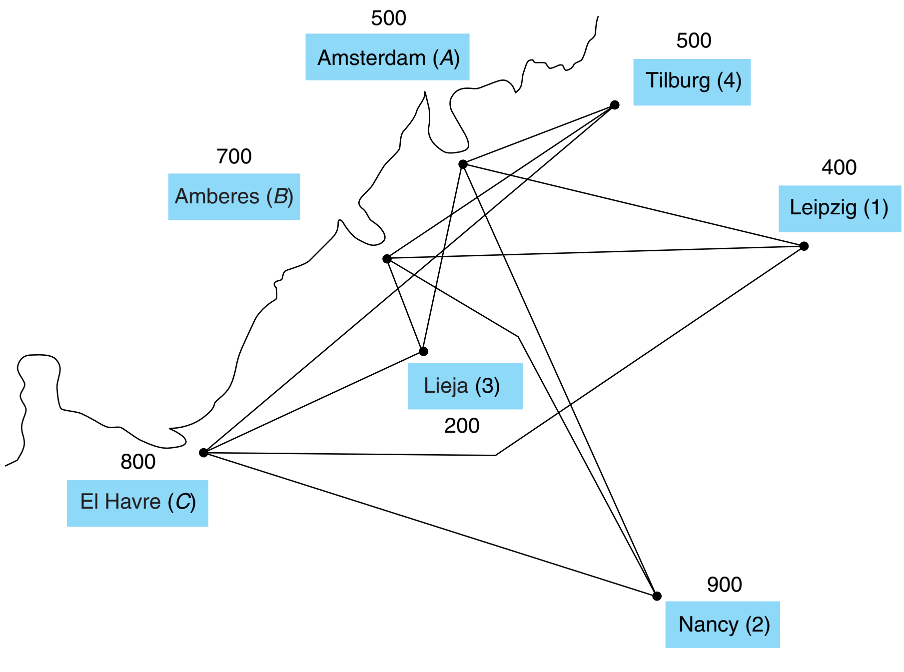


FIGURA 6.1
Problema de transportación de PROTRAC

TABLA 6.3 Costo de transportación de un motor desde un origen hasta un destino ($)

DEL ORIGEN	AL DESTINO (1) Leipzig	(2) Nancy	(3) Lieja	(4) Tilburg
(A) Amsterdam	120	130	41	62
(B) Amberes	61	40	100	110
(C) El Havre	102.50	90	122	42

Los costos relevantes aparecen en la tabla 6.3. Para simplificar la presentación, nos referiremos a los puertos por medio de letras y a las plantas por medio de números, como se indica en la información anterior sobre la oferta y la demanda.

FORMULACIÓN Y SOLUCIÓN DE PL

La meta de PROTRAC es minimizar el costo total del transporte de los motores E-4 de los muelles a las plantas. Dado que el costo de transportación de cualquier combinación puerto-planta específica (por ejemplo, Amberes-Nancy) es directamente proporcional a la cantidad de motores enviados del puerto a la planta ($40 por motor en el ejemplo Amberes-Nancy), podemos formular esta situación como un modelo de PL. Para esto,

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \text{cantidad de motores enviados desde el puerto } i \text{ hasta la planta } j \\ i &= \text{A, B, C} \\ j &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Por tanto, x_{C4} es la cantidad de motores enviados de C, El Havre, a 4, Tilburg. Con esta definición, el costo total de transportación, que es nuestra función objetivo, se vuelve

$$120x_{A1} + 130x_{A2} + \cdots + 42x_{C4}$$

El modelo tiene dos tipos generales de restricción:

1. La cantidad de elementos enviados desde un puerto no puede exceder la cantidad disponible. Por ejemplo,

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}$$

es el total de motores enviados desde A. Dado que únicamente hay 500 motores disponibles en A, la restricción es

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} \leq 500$$

Se requiere una restricción parecida para cada origen.[1]

2. Debe satisfacerse la demanda de cada planta. Por ejemplo,

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1}$$

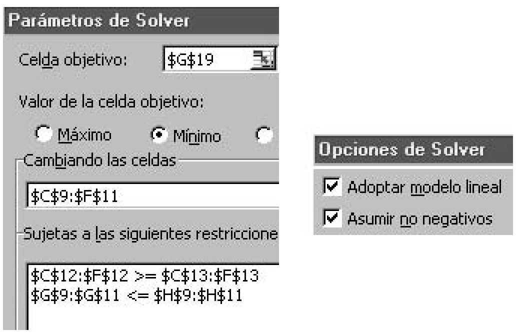
es el total de motores enviados a la planta 1. Dado que se requieren cuando menos 400 motores en la planta 1, la restricción es

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \geq 400$$

Se requiere una restricción parecida para cada planta. Como sucede con las restricciones de oferta, pueden aplicarse igualdades como restricciones de demanda, en virtud de que la oferta y la demanda están balanceadas.

[1]Dado que la oferta y la demanda están balanceadas en este modelo, podrían usarse restricciones de igualdad, en lugar de desigualdades, para expresar las restricciones de la oferta.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Modelo de transporte de PROTRAC					
3		Costo unitario de\a	Leipzig	Nancy	Lieja	Tilburg	
4		Amsterdam	$ 120.0	$ 130.0	$ 41.0	$ 62.0	
5		Amberes	$ 61.0	$ 40.0	$ 100.0	$ 110.0	
6		El Havre	$ 102.5	$ 90.0	$ 122.0	$ 42.0	
7							
8		Embarques de\a	Leipzig	Nancy	Lieja	Tilburg	Total
9		Amsterdam	300	0	200	0	500
10		Amberes	0	700	0	0	700
11		El Havre	100	200	0	500	800
12		Total	400	900	200	500	
13		Requerido	>=400	>=900	>=200	>=500	
14							
15		Costo total de\a	Leipzig	Nancy	Lieja	Tilburg	Total
16		Amsterdam	$ 36,000	$ -	$ 8,200	$ -	$ 44,200
17		Amberes	$ -	$ 28,000	$ -	$ -	$ 28,000
18		El Havre	$ 10,250	$ 18,000	$ -	$ 21,000	$ 49,250
19		Total	$ 46,250	$ 46,000	$ 8,200	$ 21,000	$ 121,450
20							



Celda	Fórmula	Cópiese a
C16	= C4*C9	C16:F18
G9	= SUMA(C9:F9)	G10:G11
C12	= SUMA(C9:C11)	D12:F12

FIGURA 6.2

Solución óptima del modelo de transporte de PROTRAC

La formulación y la solución, así como el Informe de sensibilidad de Excel para el modelo de transporte de PROTRAC se presentan en las figuras 6.2 y 6.3, respectivamente. Observe cómo la distribución del modelo aprovecha la organización "desde-hasta" del modelo de transporte y emplea tres bloques de celdas: parámetros de costos, variables de decisión y costos totales.[2] En la figura 6.2, vemos que se usan 6 de las 12 rutas posibles y que el costo mínimo de transportación es de $121,450. Además, el análisis del Informe de sensibilidad nos muestra, por ejemplo, que los costos totales descenderían a razón de $107.50 por motor hasta llegar a un máximo de 200 motores si se redujeran los requerimientos de Nancy, y que los costos totales bajarían a razón de $17.50 por motor hasta un máximo de 300 motores si aumentara la oferta de motores en El Havre. (El movimiento en la dirección opuesta [aumento de la demanda o disminución de la oferta] no es "permisible", pues provocaría situaciones no factibles.) Para que ponga usted a prueba su propia comprensión del Informe de sensibilidad del modelo, intente responder la siguiente pregunta. ¿Cuánto tendría que descender el costo de transportación de un motor desde Amberes hasta Lieja para que PROTRAC pudiera considerar atractiva esta ruta?

[2]Como se describió en el capítulo 5, en este caso el formato fue "alterado" para presentar el LD junto con los símbolos de restricción del modelo.

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$C$9	Amsterdam Leipzig	300	0	120	2.5	17.5
$D$9	Amsterdam Nancy	0	22.5	130	1E+30	22.5
$E$9	Amsterdam Lieja	200	0	41	98.5	41
$F$9	Amsterdam Tilburg	0	2.5	62.0	1E+30	2.5
$C$10	Amberes Leipzig	0	8.5	61	1E+30	8.5
$D$10	Amberes Nancy	700	0	40	8.5	1E+30
$E$10	Amberes Lieja	0	126.5	100	1E+30	126.5
$F$10	Amberes Tilburg	0	118	110	1E+30	118
$C$11	El Havre Leipzig	100	0	102.5	8.5	2.5
$D$11	El Havre Nancy	200	0	90	22.5	8.5
$E$11	El Havre Lieja	0	98.5	122	1E+30	98.5
$F$11	El Havre Tilburg	500	0	42	2.5	59.5

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	LD de la restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
$G$9	Amsterdam Total	500	0	500	1E+30	0
$G$10	Amberes Total	700	-67.5	700	200	0
$G$11	El Havre Total	800	-17.5	800	300	0
$C$12	Total Leipzig	400	120	400	0	300
$D$12	Total Nancy	900	107.5	900	0	200
$E$12	Total Lieja	200	41	200	0	200
$F$12	Total Tilburg	500	59.5	500	0	300

FIGURA 6.3

Informe de sensibilidad del modelo de transporte de PROTRAC

DEGENERACIÓN EN LOS MODELOS DE TRANSPORTE

Los modelos de transporte balanceados (es decir, los modelos en los cuales la oferta total es igual a la demanda total) siempre tienen una restricción redundante. ¿Por qué razón? Suponga usted que alguien le indicó cuáles son las cantidades óptimas para los embarques desde Amberes y El Havre hacia las cuatro plantas del modelo de PROTRAC presentado anteriormente (es decir, que le informaron los valores óptimos para las celdas de las filas 10 y 11 de la figura 6.2). Sabiendo que la oferta total tiene que ser igual a la demanda total, con un poco de deducción encontraría usted rápidamente los embarques apropiados desde Amsterdam hasta las cuatro plantas de la fila 9. Con un razonamiento similar, si se le indicaran las cantidades óptimas para los embarques destinados a las otras tres plantas, usted podría encontrar las cifras correspondientes para los embarques destinados a una cuarta planta. En consecuencia, a un modelo balanceado de transporte se le puede quitar una de sus restricciones sin que eso afecte la solución óptima.

Dado que en un modelo balanceado de transporte, por lo menos una restricción es redundante, el precio sombra de cuando menos una restricción será igual a cero en el Informe de sensibilidad de Solver, como vemos en el caso del modelo de PROTRAC de la figura 6.3. Esto implica que la solución al modelo balanceado de transporte con m orígenes y n destinos debe tener *cuando mucho* $m + n - 1$ variables de decisión positivas. Si hay menos de $(m + n - 1)$ variables de decisión positivas, entonces la solución es degenerada. Esto significa que, en un modelo de transporte balanceado, la solución debe tener precisamente $(m + n - 1)$ variables de decisión positivas en condiciones de optimalidad, para que sea no degenerada. El recuento de las variables de decisión del modelo de PROTRAC que aparece en la figura 6.2 indica que es no degenerada. Sin embargo, la **degeneración** en los modelos de transporte es un hecho común en la práctica. Su presencia es más bien una cuestión técnica y no debe ser motivo de preocupación en particular, excepto la relacionada con la interpretación del Informe de sensibilidad del modelo, como se explicó cuando estudiamos el caso de las soluciones degeneradas de los modelos de PL en el capítulo 5.

6.3 VARIACIONES EN EL MODELO DE TRANSPORTE

En general, el término **modelo de transporte** se refiere a un modelo de PL que permite encontrar la forma menos costosa de satisfacer las demandas en n destinos con las ofertas en m orígenes.

RESOLUCIÓN DE MODELOS DE TRANSPORTE DE MAXIMIZACIÓN

Supongamos que, en este ejemplo, el objetivo de usted era maximizar el valor de la función objetivo, en lugar de minimizarlo. Podría utilizar el mismo modelo, pero con un cambio pequeño, aunque fundamental. Defina los coeficientes de la función objetivo como márgenes de contribución, es decir, como rendimientos unitarios, en lugar de costos unitarios. De este modo, se modifica la formulación de Solver para quedar como un modelo de maximización, y no de minimización.

CUANDO LA OFERTA Y LA DEMANDA DIFIEREN

Suponga que, en el modelo de nuestro ejemplo la oferta en Amsterdam fuera de 600 motores, en lugar de 500. Entonces, una vez que se hubiera satisfecho toda la demanda, la suma de los motores remanentes en los tres orígenes sería 100. Debido a que se manejaron desigualdades en el modelo de Solver de la figura 6.2, esto no plantearía algún problema especial. La oferta que no se hubiera asignado en cada uno de los lugares de origen aparecería como una holgura en la restricción de oferta correspondiente a dicho origen.

Si la demanda es mayor que la oferta, el modelo de PL no tiene solución factible. Sin embargo, la gerencia de PROTRAC podría estar interesada en abastecer toda la demanda que fuera posible con un costo mínimo. Hay dos enfoques para construir el modelo de esta situación. Podemos reescribir como igualdades las restricciones de oferta de los puertos, obligando a que toda la oferta de motores disponible sea embarcada a alguna planta, y reformular la restricción de demanda como una desigualdad del tipo $\leq$ para la demanda de cada planta destino; es decir, que los embarques de motores a una planta no excederán su demanda. La demanda no cubierta aparecerá como holgura en estas restricciones de demanda cuando se realice la optimización mediante Solver. De manera alternativa, podemos reajustar el modelo para añadir un **origen ficticio** que tenga una oferta igual a la diferencia entre la demanda y la oferta total real. Este origen ficticio es una fuente imaginaria que se agrega al modelo de transporte para que la oferta total sea igual a la demanda total. El costo de abastecer a cualquier destino desde este origen es igual a cero. Cualquier oferta asignada por Solver desde el origen ficticio hacia algún destino se interpreta como demanda no satisfecha. Una ventaja de este segundo enfoque es que podemos asignar costos unitarios a cada una de las variables de decisión que enlazan el origen ficticio con cada destino. Si estos costos reflejan con precisión los costos de oportunidad de la demanda no satisfecha en dicho destino, Solver tomará debidamente en cuenta estos costos, junto con los costos de transporte, al recopilar sus datos para elaborar la optimización y el Informe de sensibilidad.

ELIMINACIÓN DE LAS RUTAS NO ACEPTABLES

Suponga que ciertas rutas de un modelo de transporte no fueran aceptables. Las restricciones propias de la organización, así como las referentes a cuestiones regionales y las del tiempo de entrega, nos inducirían a pensar que ciertos orígenes no pueden ofrecer servicio a determinados destinos. (Por ejemplo, suponga que la ruta Amsterdam-Lieja no puede usarse.) Este hecho se maneja al formular los modelos de transporte asignando un costo arbitrariamente grande, identificado como M, a la ruta. Se selecciona M con un valor tan grande que M más o menos un número finito siga siendo más grande que cualquier otro costo en la formulación. Esto entonces eliminaría de manera automática el uso de tal ruta, puesto que el costo de hacerlo sería mucho mayor que el de cualquier otra alternativa factible. En el caso ilustrado en este ejemplo, si se asigna a la celda E4 de la figura 6.2 un coeficiente de costo unitario de, digamos, $10,000,000, esa ruta queda eliminada de la consideración de Solver.

SOLUCIONES CON VALORES ENTEROS

Esta observación está relacionada con el hecho de que el modelo de transporte tiene soluciones enteras en condiciones bastante generales. Desde los primeros capítulos sabemos que, en general, los modelos de PL *no* producen soluciones enteras. Incluso los modelos generales de PL en los que todos los parámetros son enteros (por ejemplo, el modelo original de PROTRAC), no necesariamente producen soluciones enteras. El modelo de transporte es una excepción.

Si todas las ofertas y demandas de un modelo de transporte tienen valores enteros, los valores óptimos de las variables de decisión también tendrán valores enteros.

CÁPSULA DE APLICACIÓN

¡Play ball! La Liga Americana usa un modelo de PL de asignación para programar su personal de arbitraje

Cada año, la Liga Americana de Beisbol, después de realizar la ardua tarea de programar 162 juegos para sus 14 equipos, debe asignar el personal de arbitraje que participará en cada juego. Por lo común, los equipos juegan entre sí en series de 2, 3 o 4 juegos, completando cada equipo un total de 52 series en el curso de la temporada regular de 26 semanas. A cada serie se le tiene que asignar uno de los siete grupos de arbitraje de la liga.

No es de sorprender que, por la presencia de equipos de esta liga en ciudades de casi toda la Unión Americana, desde Baltimore hasta Seattle y desde Texas hasta Toronto, la minimización de los costos de transporte sea una de las metas más importantes de los que elaboran los programas. Sin embargo, éste no es el único factor que ellos deben tomar en cuenta. Para garantizar la equidad, existen límites sobre el número de veces que cada equipo debe enfrentarse a cada uno de los demás, tanto en sus juegos en casa como en los que juega como visitante. Además, se hace todo lo posible por evitar que un grupo de personal de arbitraje tenga que ser asignado al mismo equipo de jugadores en más de dos series consecutivas.

Las restricciones de viaje imponen restricciones adicionales al programa. Algunas de las más importantes son:

- Un grupo de arbitraje no puede trabajar en un juego nocturno en una ciudad y, al día siguiente, en un juego vespertino en otra ciudad.
- En virtud de los cambios de horario, el personal no puede viajar desde una ciudad de la costa oeste hasta Chicago, ni a ninguna ciudad del este, sin tomar un día libre entre ambas series de juegos.
- Debido a los limitados horarios de vuelo de las aerolíneas, el personal que viaje desde o hacia Toronto debe tomar un día libre si viene de, o va a, cualquier otra ciudad que no sea Nueva York, Boston, Detroit o Cleveland.

Aun cuando la cantidad total de asignaciones de personal es demasiado grande para poder evaluarlas individualmente, la programación de árbitros puede formularse como un modelo de asignación relativamente sencillo. La liga utiliza en la actualidad un sistema para apoyo de decisiones basado en la PC, desarrollado por el doctor Jim Evans de la Universidad de Cincinnati, que genera un programa mejor en menos de la mitad del tiempo que se requería con anterioridad.

El programa asigna códigos de color a cada equipo, en la pantalla de asignaciones de programas. Esto simplifica las cosas para el usuario que desea seguir el rastro de un grupo de árbitros en particular y examinar la secuencia de sus asignaciones. Además del modelo de asignación de programas, el sistema incluye un programa de cálculo estadístico y una base de datos que simplifica la tarea de seguir la pista de las combinaciones de los distintos grupos de arbitraje y los equipos de jugadores. En consecuencia, el balance de la exposición de los grupos ha mejorado desde que se empezó a emplear el sistema. En su primer año de uso, el sistema le ahorró a la Liga Americana unos $30,000 en costos de transporte. (Véase Blaise *et al*.)

Pasemos ahora a un importante caso especial del modelo de transporte, llamado *modelo de asignación*.

6.4 EL MODELO DE ASIGNACIÓN

El **modelo de asignación** se presenta en muchos contextos administrativos. En términos generales, el problema consiste en determinar la asignación óptima de n agentes u objetos "*indivisibles*" a n tareas. Por ejemplo, la administración tal vez tenga que asignar agentes de ventas a territorios de ventas, o representantes de ventas a llamadas de servicio, o editores a manuscritos, o dibujantes comerciales a material publicitario. Los agentes u objetos por asignar son indivisibles, en el sentido de que ningún agente puede dividirse entre varias tareas. Para cada agente, la restricción importante es que *sólo puede ser asignado a una tarea*.

EL PROBLEMA DE AUDITORÍA DE PROTRAC-EUROPA

Ilustraremos el modelo de asignación por medio de un problema particular que el presidente de PROTRAC-Europa debe resolver. Las oficinas europeas de PROTRAC están en Bruselas. Este año, como parte de su auditoría anual, el presidente ha decidido que cada uno de los cuatro vicepresidentes corporativos visite y audite una de las plantas de montaje durante las primeras dos semanas de junio. Como usted recordará, las plantas de montaje se encuentran en Leipzig, Alemania; Nancy, Francia; Lieja, Bélgica; y Tilburg, Países Bajos.

Hay algunas ventajas y desventajas en varias de las asignaciones de los vicepresidentes a las plantas. Entre los asuntos a considerar están:

1. La correlación de las áreas de experiencia de los vicepresidentes con la importancia de ciertas áreas problema específicas de cada planta.
2. El tiempo que cada vicepresidente tendrá que dedicar a la auditoría y a las demás exigencias que reciba durante ese periodo de dos semanas.

TABLA 6.4 Costos de asignación en miles de $ por cada combinación vicepresidente-planta

	PLANTA			
VICEPRESIDENTE	**Leipzig (1)**	**Nancy (2)**	**Lieja (3)**	**Tilburg (4)**
Finanzas (F)	24	10	21	11
Mercadotecnia (M)	14	22	10	15
Operaciones (O)	15	17	20	19
Personal (P)	11	19	14	13

TABLA 6.5 Alternativa con una asignación

ASIGNACIÓN		
VICEPRESIDENTE	**Planta**	**COSTO**
F	1	24
M	2	22
O	3	20
P	4	13
	Costo total (miles de $)	79

3. La correlación entre la habilidad lingüística de los vicepresidentes y el idioma que se usa predominantemente en las plantas.

Tratar de tener presentes todos estos factores y llegar a una asignación adecuada de vicepresidentes a plantas es un problema complicado. Para empezar, el presidente decide realizar una estimación de cuánto le costará a PROTRAC enviar cada vicepresidente a cada planta. Los datos correspondientes aparecen en la tabla 6.4.

Con estos costos, el presidente puede evaluar cualquier asignación de sus vicepresidentes a las distintas plantas. Por ejemplo, si seleccionara la asignación de la tabla 6.5, incurriría en un costo total de $79,000.

RESOLUCIÓN POR ENUMERACIÓN EXHAUSTIVA

En virtud de que solamente hay una cantidad finita de formas de realizar las asignaciones de los vicepresidentes, podríamos ensayar una *enumeración exhaustiva*, es decir, calcular el costo de cada patrón de asignación factible y seleccionar el menor. Sin embargo, a semejanza del ejemplo de Oak Products presentado en el capítulo 3, la enumeración exhaustiva de todas las alternativas pronto se vuelve muy engorrosa. Veamos cuántas soluciones existen para este modelo de asignación de vicepresidentes. Considere la opción de asignar los vicepresidentes en el orden F, M, O, P. Así tenemos los siguientes pasos:

1. F puede ser asignado a cualquiera de las cuatro plantas.
2. Una vez que F ha sido asignado, M puede ser asignado a cualquiera de las tres plantas restantes.
3. De igual manera, O puede ser asignado a cualquiera de las dos plantas que quedan.
4. P debe ser asignado a la única planta restante.

Por tanto, existen $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ soluciones posibles. En general, si hubiera n vicepresidentes y n plantas, habría $n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(2)(1)$ soluciones, lo cual es n factorial, $n!$ A medida que n aumenta, $n!$ se incrementa con enorme rapidez. Presentamos aquí la relación entre n y $n!$ para valores (enteros) de n, entre 1 y 10:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40,320	362,880	3,628,800

Por tanto, si actualmente el presidente estuviera preocupado por cuál de sus 10 agentes de ventas debe ser asignado a cada uno de los 10 distritos, resulta claro que la enumeración exhaustiva no sería un enfoque fácil de modelar en Excel. (Para 20 agentes de ventas asignados a 20 distritos, hay $20! \approx 2.4 \times 10^{18}$ asignaciones posibles.) Esto nos muestra con cuanta rapidez pueden crecer los problemas de combinaciones. Aun cuando puede ser fácil resolver modelos pequeños por inspección, introspección o intuición, cuando los modelos crecen incluso moderadamente, se requiere un método de optimización seguro y eficiente.

FORMULACIÓN Y SOLUCIÓN EN PL

Para crear este modelo nos basamos en la misma definición de variables utilizada con el modelo de transporte. En particular, sea

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \text{número de vicepresidentes tipo } i \text{ asignados a la planta } j \\ i &= \text{F, M, O, P} \\ j &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

El modelo de asignación de PROTRAC aparece en la figura 6.4, que también presenta la asignación de costo mínimo. En esta figura notamos que sólo hay disponible un vicepresidente de cada tipo (oferta) y que se requiere de un vicepresidente en cada planta (demanda). Además es un modelo balanceado, en el sentido de que la cantidad total de vicepresidentes disponibles es igual a la cantidad requerida. Por tanto, podríamos haber indicado restricciones de igualdad, en lugar de las de desigualdad. Cada uno de los números de las celdas C18:F21 es el costo de PROTRAC para la asignación correspondiente.

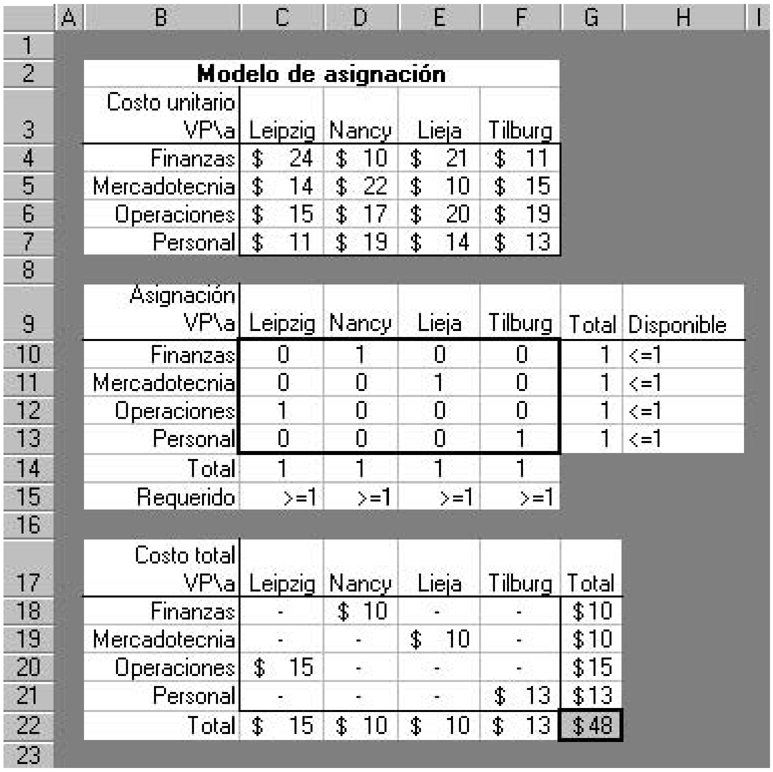
En esta formulación, la primera restricción de la figura 6.4 indica que la cantidad de vicepresidentes “enviados” de Finanzas, F, no debe ser mayor que 1. Se imponen restricciones similares para los vicepresidentes M, O y P, respectivamente. Por tanto, cada celda de variable de decisión de C10:F13 se restringe a 0 y 1 por estas restricciones de límite superior y por la especificación de no negatividad del cuadro de diálogo de Opciones de Solver. La restricción “Requerido” sobre Leipzig estipula que debe asignarse cuando menos 1 vicepresidente a la planta 1. Las restricciones restantes imponen un requerimiento similar sobre las plantas 2, 3 y 4, respectivamente.

Puesto que la figura 6.4 también presenta la solución óptima, vemos que todas las variables de decisión son 0 o 1; la asignación óptima aparece en la tabla 6.6.

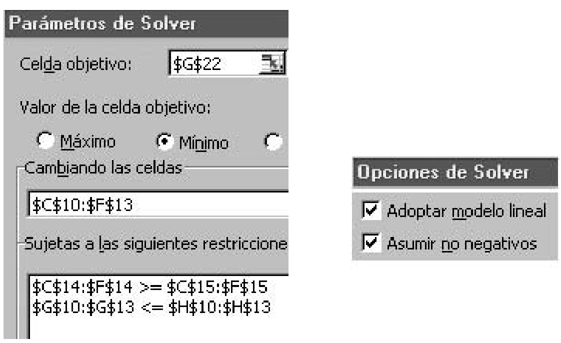
RELACIÓN CON EL MODELO DE TRANSPORTE

Por supuesto, esta representación persistentemente familiar nos hace recordar el modelo de transporte presentado en la sección 6.2. Sólo existe una diferencia, ya que en el modelo de asignación debemos respetar la característica adicional de que la oferta no puede distribuirse a más de un destino. Es decir, como dijimos antes, cada unidad de oferta (cada vicepresidente) debe acudir a uno, y sólo uno, de los destinos. Una respuesta que recomendara enviar tres cuartas partes de un vicepresidente a Leipzig y la cuarta parte sobrante a Lieja no tendría sentido y, por tanto, estaría prohibida. Recuerde que, cuando utilizamos modelos de transporte, si todas las ofertas y demandas son números enteros, las asignaciones óptimas también serán números enteros. En el modelo de asignación, todas las ofertas y demandas tienen valor 1; por tanto, son números enteros. Así pues, podemos estar seguros de que no obtendremos asignaciones fraccionarias. Concluimos que:

> El modelo de asignación puede formularse como un modelo de transporte en el cual la oferta en cada origen y la demanda en cada destino son iguales a 1.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		**Modelo de asignación**						
3		Costo unitario VP\a	Leipzig	Nancy	Lieja	Tilburg		
4		Finanzas	$ 24	$ 10	$ 21	$ 11		
5		Mercadotecnia	$ 14	$ 22	$ 10	$ 15		
6		Operaciones	$ 15	$ 17	$ 20	$ 19		
7		Personal	$ 11	$ 19	$ 14	$ 13		
8								
9		Asignación VP\a	Leipzig	Nancy	Lieja	Tilburg	Total	Disponible
10		Finanzas	0	1	0	0	1	<=1
11		Mercadotecnia	0	0	1	0	1	<=1
12		Operaciones	1	0	0	0	1	<=1
13		Personal	0	0	0	1	1	<=1
14		Total	1	1	1	1		
15		Requerido	>=1	>=1	>=1	>=1		
16								
17		Costo total VP\a	Leipzig	Nancy	Lieja	Tilburg	Total	
18		Finanzas	-	$ 10	-	-	$10	
19		Mercadotecnia	-	-	$ 10	-	$10	
20		Operaciones	$ 15	-	-	-	$15	
21		Personal	-	-	-	$ 13	$13	
22		Total	$ 15	$ 10	$ 10	$ 13	$48	
23								



Celda	Fórmula	Cópiese a
C18	= C4*C10	C18:F21
G10	= SUMA(C10:F10)	G11:G13
C14	= SUMA(C10:C13)	D14:F14

FIGURA 6.4

Solución óptima para el modelo de asignación de PROTRAC

Por tanto, en la solución del modelo de asignación de PROTRAC, cada celda de variable de decisión en C10:F13 contendrá un 0 o un 1, donde 1 representa la asignación de un vicepresidente específico a una planta específica.[3]

EL MODELO DE ASIGNACIÓN: OTRAS CONSIDERACIONES

El modelo de asignación de PROTRAC es un modelo de minimización en el cual el número de vicepresidentes es igual al número de plantas, y todas las asignaciones posibles son aceptables.

[3]A las variables de decisión de un modelo que están restringidas a un valor de 0 o de 1, como las de este ejemplo, se les llama a menudo variables "indicadoras" o "binarias".

TABLA 6.6 La asignación óptima

ASIGNACIÓN		
VICEPRESIDENTE	Planta	COSTO
F	2	10
M	3	10
O	1	15
P	4	13
	Costo total (miles $)	48

TABLA 6.7 Costos de asignación en miles $, oferta mayor que la demanda

	PLANTA			
VICEPRESIDENTE	Leipzig (1)	Nancy (2)	Lieja (3)	NÚMERO DE VP DISPONIBLES
F	24	10	21	1
M	14	22	10	1
O	15	17	20	1
P	11	19	14	1
Número de VP requeridos	1	1	1	4 / 3

Consideraremos a continuación modelos tipo asignación donde no todas esas condiciones se cumplen. En particular, vamos a considerar situaciones en las que

1. Hay una desigualdad entre el número de “personas” por asignar y el número de “destinos” que requieren personas asignadas.
2. Hay un modelo de maximización.
3. Existen asignaciones inaceptables.

Oferta y demanda desiguales: nueva consideración del problema de auditoría Queremos analizar dos casos. Para empezar, suponga usted que la oferta es mayor que la demanda. En particular, supongamos que el presidente de la compañía se propone realizar personalmente una auditoría en la planta de Tilburg. A continuación, tendrá que decidir a cuál de los cuatro vicepresidentes debe asignar a cada una de las tres plantas restantes, como podemos ver en la matriz de costos de la tabla 6.7.

Para formular este modelo revisado, suprimiremos simplemente la restricción que requería un vicepresidente en Tilburg para el modelo de la figura 6.4. El resultado de este cambio es que la holgura correspondiente a las restricciones a la oferta para uno de los cuatro vicepresidentes sería 1 en la nueva solución óptima; es decir, que uno de los vicepresidentes no sería asignado a alguna planta.

Consideremos ahora el caso en que la demanda es mayor que la oferta. Suponga, por ejemplo, que el vicepresidente de personal tuviera que visitar las oficinas generales internacionales de PROTRAC en Illinois durante las dos primeras semanas de junio y, por tanto, no pudiera participar en la auditoría europea. En esas condiciones, el problema del presidente estaría representado por la matriz de costos de la tabla 6.8.

Demanda > oferta: Inclusión de un vicepresidente ficticio En esta forma, el modelo no es factible. Resulta claro que es imposible satisfacer la demanda de cuatro vicepresidentes con una oferta de tres. Si el presidente deseara averiguar cuáles son las tres plantas que debería auditar

TABLA 6.8 Asignación de costos en miles $, demanda mayor que la oferta

VICEPRESIDENTE	PLANTA 1	2	3	4	NÚMERO DE VP DISPONIBLES
F	24	10	21	11	1
M	14	22	10	15	1
O	15	17	20	19	1
Número de VP requeridos	1	1	1	1	3 / 4

TABLA 6.9 Inclusión de un vicepresidente ficticio

VICEPRESIDENTE	PLANTA 1	2	3	4	NÚMERO DE VP DISPONIBLES
F	24	10	21	11	1
M	14	22	10	15	1
O	15	17	20	19	1
Ficticio	0	0	0	0	1
Número de VP requeridos	1	1	1	1	4

Oferta ficticia; ahora oferta = demanda

Costo cero para asignar al VP ficticio

para minimizar su costo, podría (1) modificar las desigualdades de las restricciones en la misma forma que lo hicimos anteriormente, cuando la demanda era mayor que la oferta, en el ejemplo del modelo de transporte; o (2) agregar un vicepresidente ficticio a la matriz de costos, como se aprecia en la tabla 6.9. En la solución, el vicepresidente ficticio sería asignado a una planta. En la realidad, esta planta no sería auditada. Sin embargo, igual que en el ejemplo anterior referente al modelo de transporte, una ventaja del segundo enfoque es que nos resulta más lógico pensar que PROTRAC tendría que pagar algún costo si cualquiera de sus plantas no fuera auditada por un vicepresidente, y que ese costo podría variar de una a otra planta. Con esas suposiciones, la nueva fila del modelo podría rotularse como "no auditada" y el costo apropiado se podría introducir en cada celda.

La solución óptima es la que permite minimizar el costo de las auditorías realizadas por F, M y O. En cualquier caso, cuando la demanda es mayor que la oferta, podemos agregar al modelo una o varias nuevas filas de oferta con los costos correspondientes, si tal cosa es pertinente, para que sea posible encontrar una solución factible.

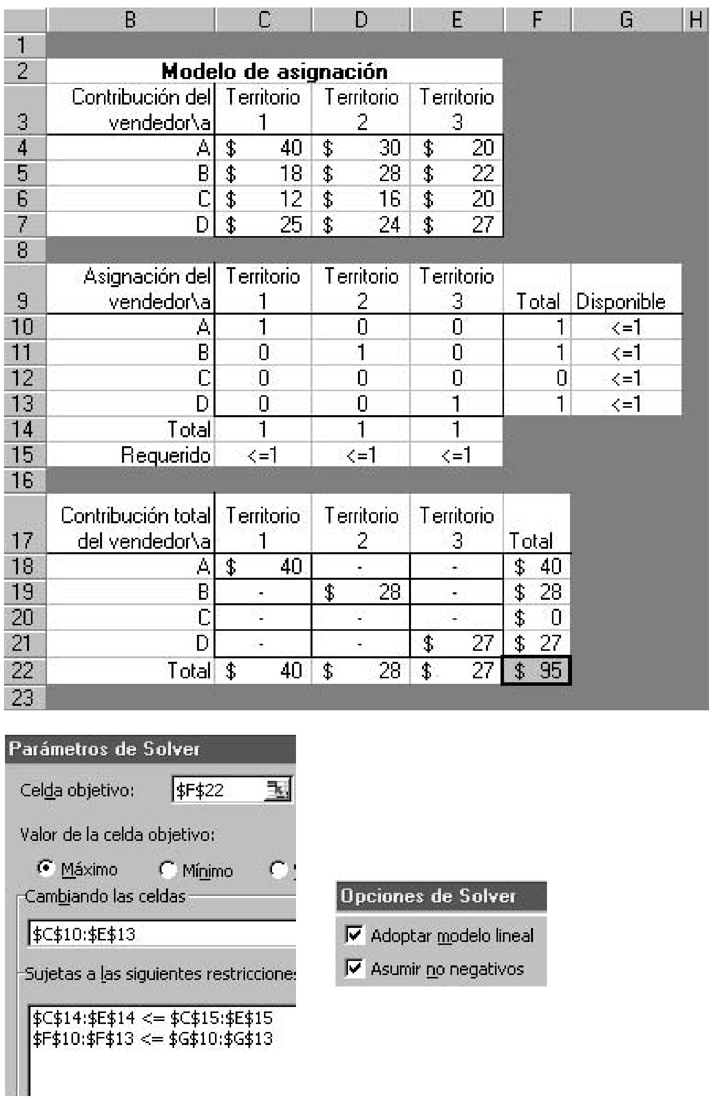
Modelos de maximización Considere un modelo de asignación en el que la respuesta de la asignación es una ganancia y no un costo. Por ejemplo, suponga que PROTRAC tiene que asignar nuevos vendedores a sus territorios de ventas. Cuatro personas bien capacitadas están listas para ser asignadas y tres territorios requieren un nuevo vendedor. Uno de esos nuevos vendedores tendrá que esperar hasta que otro territorio quede disponible para que le pueda ser asignado.

El efecto de la asignación de un vendedor cualquiera a un territorio se mide por el incremento marginal esperado en la contribución de dicha asignación a las ganancias. Naturalmente, a PROTRAC le interesa maximizar la contribución total a las ganancias. La matriz de *ganancias* para este modelo se presenta en la tabla 6.10. La única característica nueva que vemos en ella es que el número contenido en cada celda no representa un costo, sino una contribución a las ganancias. La formulación en hoja de cálculo electrónica y la solución óptima para este modelo se presentan en la figura 6.5.

TABLA 6.10 Problema de maximización de las asignaciones

VENDEDOR	TERRITORIO 1	TERRITORIO 2	TERRITORIO 3	NÚMERO DE VENDEDORES DISPONIBLES
A	40	30	20	1
B	18	28	22	1
C	12	16	20	1
D	25	24	27	1
Número de vendedores requeridos	1	1	1	4 \ 3

Ganancia si A es asignado a 3



	B	C	D	E	F	G
2	**Modelo de asignación**					
3	Contribución del vendedor\a	Territorio 1	Territorio 2	Territorio 3		
4	A	$ 40	$ 30	$ 20		
5	B	$ 18	$ 28	$ 22		
6	C	$ 12	$ 16	$ 20		
7	D	$ 25	$ 24	$ 27		
9	Asignación del vendedor\a	Territorio 1	Territorio 2	Territorio 3	Total	Disponible
10	A	1	0	0	1	<=1
11	B	0	1	0	1	<=1
12	C	0	0	0	0	<=1
13	D	0	0	1	1	<=1
14	Total	1	1	1		
15	Requerido	<=1	<=1	<=1		
17	Contribución total del vendedor\a	Territorio 1	Territorio 2	Territorio 3	Total	
18	A	$ 40	-	-	$ 40	
19	B	-	$ 28	-	$ 28	
20	C	-	-	-	$ 0	
21	D	-	-	$ 27	$ 27	
22	Total	$ 40	$ 28	$ 27	$ 95	

FIGURA 6.5

PL para el modelo de maximización de las asignaciones

Celda	Fórmula	Cópiese a
C18	= C4*C10	C18:E21

Situaciones con asignaciones inaceptables Supongamos que usted está construyendo un modelo de asignación y sabe que ciertas asignaciones son sencillamente inaceptables. Por ejemplo, suponga que, por un fuerte conflicto de personalidades, el presidente de PROTRAC-Europa no tiene el menor deseo de que el vicepresidente de operaciones (O) realice una auditoría en la planta de montaje de Nancy (2). Para lograr esta meta, él asigna un *costo* arbitrariamente *grande* a la celda D6 en la figura 6.4. Elige un número tan grande, que al restar de él cualquier número finito se obtiene siempre un valor mayor que otros números relevantes. Esa asignación eliminará automáticamente la asignación del vicepresidente O a Nancy. Por supuesto, éste es el mismo enfoque general empleado para asegurarse de que las rutas inaceptables no formarán parte de la solución óptima en un modelo de transporte.

6.5 MODELOS DE RED

Los modelos de transporte y asignación que estudiamos en las secciones anteriores forman parte de un tipo más general de modelos, en los cuales intervienen orígenes y destinos, conocidos como *modelos de red.* Comenzaremos ilustrando una forma más general del modelo de transporte, llamada modelo de *transbordo.* Con este ejemplo a la mano estaremos en condiciones de considerar el *modelo de red* y su importancia, tanto teórica como práctica, además de varias formas especiales del modelo.

6.6 MODELO DE TRANSBORDO CON CAPACIDADES

Seymour Miles es el gerente de distribución de Zigwell Inc., el mayor distribuidor de PROTRAC en el oeste medio de Estados Unidos. Zigwell distribuye sus tractores oruga en cinco estados de esa región. En la actualidad, Seymour tiene 10 máquinas E-9 en lo que designaremos

CÁPSULA DE APLICACIÓN

Diario llega nueva mercancía: modelos de red ayudan a una cadena de tiendas de descuento a mantener sus costos de embarque a niveles increíblemente bajos

La tarea de encontrar las rutas más económicas para transportar mercancía, desde los proveedores hasta los almacenes y desde los almacenes hasta las tiendas minoristas, es un problema complejo que muchas cadenas de venta al menudeo deben afrontar. El problema es particularmente difícil cuando la compañía crece a razón de 30% anual. Tal es el caso de Marshall, la cadena de tiendas minoristas de ropa a precios de descuento. A fin de abrir nuevas tiendas a ritmo acelerado, Marshall tenía que ser capaz de modificar con rapidez sus patrones de embarque para ajustarlos a esa expansión, y decidir dónde deberían estar localizados los nuevos centros de distribución. Como un elemento auxiliar para alcanzar esos objetivos, Marshall adoptó un sistema computarizado para su planeación de logística.

Una parte de este sistema, Network Optimization, consiste en tres módulos de software creados con el propósito de minimizar los costos de embarque.

- Un módulo "hacia el interior" se ocupa del flujo de mercancía desde los proveedores hasta los almacenes y los centros de procesamiento.
- Un módulo "hacia el exterior" se ocupa de los embarques desde los almacenes y los centros de procesamiento hasta las tiendas minoristas.
- Un tercer módulo analiza la ubicación de nuevos almacenes, pues esta decisión influye bastante en los dos primeros módulos.

Cada módulo tiene cuatro componentes:

1. Un generador de red, que construye enlaces y nodos
2. Un editor de red, que permite a los usuarios modificar la red cambiando directamente costos, demandas y restricciones
3. Un programa de optimización
4. Un posprocesador para mostrar los resultados de la optimización en un formato legible para que pueda usarlos la gerencia.

Cada uno de los tres módulos requirió un enfoque diferente, en la construcción del modelo, para captar importantes ventajas y desventajas económicas de la situación en particular, sin dejar de garantizar la factibilidad del cómputo. Las dimensiones fueron un verdadero desafío en los modelos "hacia adentro" y "hacia afuera", cada uno de los cuales requirió inicialmente la resolución de una red de 350,000 eslabones o enlaces. El uso de un método heurístico y otras simplificaciones ingeniosas redujo ese número a cerca de 20,000. En virtud de esta depuración, los modelos pudieron funcionar en una PC, y ya no solamente en las grandes computadoras centrales, lo cual permitió incorporar características muy accesibles para el usuario; por ejemplo, gráficos interactivos. Convertidos ahora en los caballos de batalla de todo este sistema, dichos módulos han permitido que los gerentes examinen diversos escenarios, modificando factores tales como el número de camiones utilizados y sus capacidades, los costos y la ubicación de los almacenes, para luego volver a optimizarlos con rapidez. Gracias a la velocidad del proceso, puede obtenerse realimentación interactiva para el análisis de sensibilidad.

Gracias a esos modelos, Marshall pudo evaluar los costos y los niveles de servicio de su red de suministro, obteniendo ahorros estimados en $250,000 al año. Además, el modelo ayudó a determinar la ubicación de un nuevo centro de distribución con el cual la compañía espera ahorrar $1.4 millones en costos de embarque. (Véase Carlisle *et al*.)

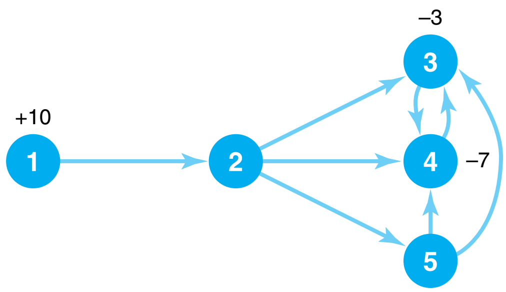


FIGURA 6.6

Diagrama de red para el modelo de Seymour

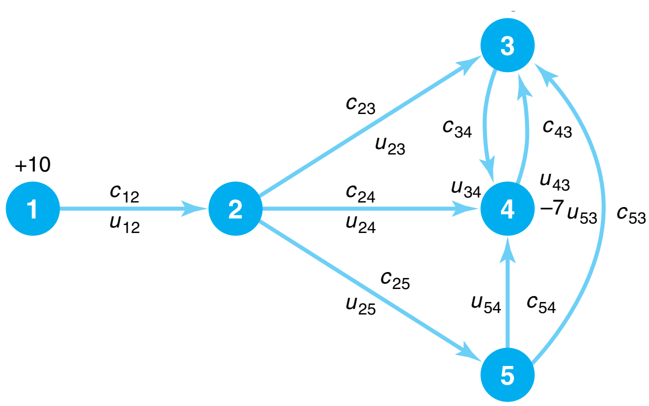


FIGURA 6.7

Capacidades y costos agregados al final

como el lugar ①. Estos tractores deben ser enviados a los dos locales de construcción más importantes, designados como ③ y ④. Se necesitan tres E-9 en el lugar ③ y siete en el lugar ④. A causa de los itinerarios previamente concertados, de los cuales depende la disponibilidad de los conductores, los tractores solamente pueden ser distribuidos de acuerdo con las rutas alternativas que se muestran en la figura 6.6.

TERMINOLOGÍA DE REDES

La figura 6.6 es un ejemplo de **diagrama de red.** Cada una de las flechas que aparecen entre dos locales se llama **arco** o **rama** de la red. A veces, el arco de ② a ④ se designa simbólicamente con el par (2, 4). Cada uno de los locales recibe el nombre de **nodo** de la red.

La figura muestra un número +10 asociado con el lugar ①. Esto significa que hay 10 máquinas E-9 disponibles (artículos de *oferta*) en ese lugar. Los indicadores −3 y −7 asociados a los locales ③ y ④, respectivamente, denotan los *requerimientos* o *demandas* de esos dos locales. La figura indica también que las E-9 pueden ser enviadas al lugar ③ a través de cualquiera de las rutas alternativas ①→②→③, ①→②→④→③, ①→②→⑤→④→③, o ①→②→⑤→③.

Los *costos* asociados al hecho de recorrer las rutas, y las *capacidades* a lo largo de las mismas, determinarán cuál de ellas será elegida finalmente. La figura 6.7 muestra estos datos adicionales. Por comodidad, los costos de recorrido y las capacidades se representan en notación simbólica (es decir, paramétrica). Los costos c_{ij} son *costos unitarios.* Por ejemplo, el costo de recorrer el arco (5,3) es c_{53} por cada tractor. Estos costos se deben principalmente a combustible, peajes y el salario del conductor durante el tiempo promedio que tarda en recorrer el arco. Debido a los acuerdos establecidos previamente con los conductores, Zigwell tiene que cambiar de conductor en cada lugar que encuentre sobre las rutas. Las limitaciones en la disponibilidad actual de conductores hacen que exista una cota superior en el número de tractores que pueden recorrer cualquier arco dado. Así, por ejemplo, u_{53} es la cota superior o capacidad en el arco (5,3).

FORMULACIÓN DEL MODELO DE PL

El problema de Seymour consiste en encontrar un plan de embarques que satisfaga la demanda a un costo mínimo, considerando las restricciones de capacidad. Ahora podemos apreciar los intercambios que Seymour debe hacer. Por ejemplo, si (c_{25} + c_{53}) es menor que c_{23}, la ruta ①→②→⑤→③ tendrá un costo total menor que el de la ruta ①→②→③ y, por consiguiente, ①→②→⑤→③ se prefiere a ①→②→③. Sin embargo, el máximo número de máquinas E-9 que es posible enviar por la ruta preferida es MIN (u_{12}, u_{25}, u_{53}). Si este último número es menor que 3, es decir, la cantidad de máquinas E-9 requeridas en el lugar 3, entonces no podrá enviarse todo el embarque por la ruta ①→②→⑤→③. Este modelo tiene solamente cinco nodos y ocho arcos, pero incluso en un ejemplo simplificado como éste, la solución óptima puede no ser evidente. Imagine usted la situación cuando el modelo tiene 30 o 40 nodos y muchos arcos más.

El modelo de Seymour recibe el nombre de **modelo de transbordo con capacidades.** Es esencialmente idéntico al modelo de transporte que vimos con anterioridad, salvo por lo siguiente:

1. Cualquier planta o almacén puede enviar embarques a cualquier otra planta o almacén, y
2. Puede haber cotas (capacidades) superiores o inferiores en cada embarque (rama).

Puesto que esas capacidades se pueden agregar al modelo, y los embarques pueden pasar de un almacén a otro (o de una a otra planta), se dice que éste es un modelo de transbordo con capacidades. Ahora mostraremos que este modelo se puede expresar fácilmente como un PL. Vamos a definir primero las variables de decisión

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \text{número total de E-9 enviadas por el arco } (i, j) \\ &= \text{flujo del nodo } i \text{ al nodo } j \end{aligned}$$

En consecuencia, éste es el modelo:

$$\text{Min } c_{12}x_{12} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{25}x_{25} + c_{34}x_{34} + c_{43}x_{43} + c_{53}x_{53} + c_{54}x_{54}$$

$$\begin{array}{lrrrrrrrrcr}
\text{s.a.} & +x_{12} & & & & & & & & = & 10 \\
 & -x_{12} & +x_{23} & +x_{24} & +x_{25} & & & & & = & 0 \\
 & & -x_{23} & & & -x_{43} & -x_{53} & +x_{34} & & = & -3 \\
 & & & -x_{24} & & +x_{43} & & -x_{34} & -x_{54} & = & -7 \\
 & & & & -x_{25} & & +x_{53} & & +x_{54} & = & 0
\end{array}$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \text{ todos los arcos } (i, j) \text{ de la red}$$

PROPIEDADES DE LA PL

Debemos hacer varias observaciones acerca de este modelo.

1. El modelo es en realidad una PL. Para cada arco de la red hay una variable x_{ij} asociada a él (figura 6.7). En esta red hay ocho arcos y, por tanto, ocho variables correspondientes, x_{12}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{43}, x_{53}, x_{34} y x_{54}. El objetivo es minimizar el costo total.

2. Hay una **ecuación de balance de flujo** material asociada a cada nodo de la red. La primera ecuación indica que el flujo total que *sale* del nodo ① es de diez unidades. Recuerde que ésta es la oferta total en el nodo ①. La segunda ecuación expresa que el flujo total que *sale* del nodo ② (es decir, $x_{23} + x_{24} + x_{25}$) menos el flujo total que *entra* al nodo ② (es decir, x_{12}) es cero. En otras palabras, el flujo total que sale del nodo ② debe ser igual al flujo total que entra al nodo ②. La tercera ecuación indica que el flujo total que *sale* del nodo ③ (es decir, x_{34}) debe ser 3 unidades menor que el flujo total que *entra* al nodo ③ (es decir, $x_{23} + x_{43} + x_{53}$). Ésta es la expresión matemática correspondiente al requerimiento de una *entrega neta* de 3 unidades para el nodo ③. Las ecuaciones correspondientes a los nodos ④ y ⑤, respectivamente, tienen interpretaciones similares. En consecuencia, la ecuación de cada nodo expresa un balance de flujo y toma en consideración el hecho de que el nodo puede ser un punto de oferta, de demanda o de ninguna de las dos cosas. Los nodos intermedios (como el ② y ⑤ en la figura 6.6) que no son puntos de oferta ni de demanda se conocen con frecuencia como *nodos de transbordo.*

3. Los lados derechos positivos corresponden a nodos que son proveedores netos (orígenes). Los lados derechos negativos corresponden a nodos que son destinos netos. Los lados derechos con valor nulo corresponden a nodos que no tienen ni oferta ni demanda. La suma de todos los términos de los lados derechos es cero, lo cual significa que la oferta total de la red es igual a la demanda total.

4. La *estructura especial* de este modelo de red se manifiesta al colocar los datos de las restricciones en el formato que aparece en la tabla 6.11, conocido como **matriz de incidencia nodo-arco.** Cada fila de la tabla corresponde a un nodo y contiene los datos de la restricción correspondiente en el modelo de PL. Cada una de las columnas de la tabla corresponde a un arco (o una variable). Puesto que hay ocho arcos en el modelo, habrá ocho columnas en la tabla. La clave de la *estructura especial* de este modelo de red es el hecho de que cada columna de la matriz de incidencia nodo-arco contiene un $+1$ y un -1, y los términos restantes son ceros. El $+1$ está en la fi-

TABLA 6.11 Matriz de incidencia nodo-arco

NODO	ARCO (1,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(4,3)	(5,3)	(3,4)	(5,4)	LD
1	+1	0	0	0	0	0	0	0	10
2	−1	+1	+1	+1	0	0	0	0	0
3	0	−1	0	0	−1	−1	+1	0	−3
4	0	0	−1	0	+1	0	−1	−1	−7
5	0	0	0	−1	0	+1	0	+1	0

la correspondiente al nodo en el que se origina el arco. El −1 está en la fila que corresponde al nodo en el cual termina el arco. Considere la columna que está debajo del arco (2, 5) en la tabla 6.11. Dado que este arco se origina en el nodo ②, hay un +1 en la fila 2. Como el arco termina en el nodo ⑤, hay un −1 en la fila 5. Todos los demás datos de esta columna son ceros. Conviene señalar que la matriz de incidencia nodo-arco puede construirse directamente a partir de la figura 6.6, sin necesidad de escribir antes la PL. Así mismo, la figura 6.6 se puede construir a partir de los datos de la tabla (o de la PL). En otras palabras, la figura 6.6 y la tabla de incidencia nodo-arco son formas equivalentes para expresar la estructura de red del modelo de Seymour.

5. Dado que el modelo de Seymour es una PL, se puede optimizar con Solver como cualquier otra PL.

6.7 FORMULACIÓN GENERAL DEL MODELO DE TRANSBORDO CON CAPACIDADES

El modelo de Seymour es un caso particular de la siguiente forma simbólica general de un modelo de red en PL. Las variables de decisión x_{ij} denotarán nuevamente el "flujo" del nodo i al nodo j a lo largo del arco que conecta esos dos nodos, y L_j representará la oferta en el nodo j.

$$\text{Minimice } \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a. } \sum_k x_{jk} - \sum_k x_{kj} = L_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

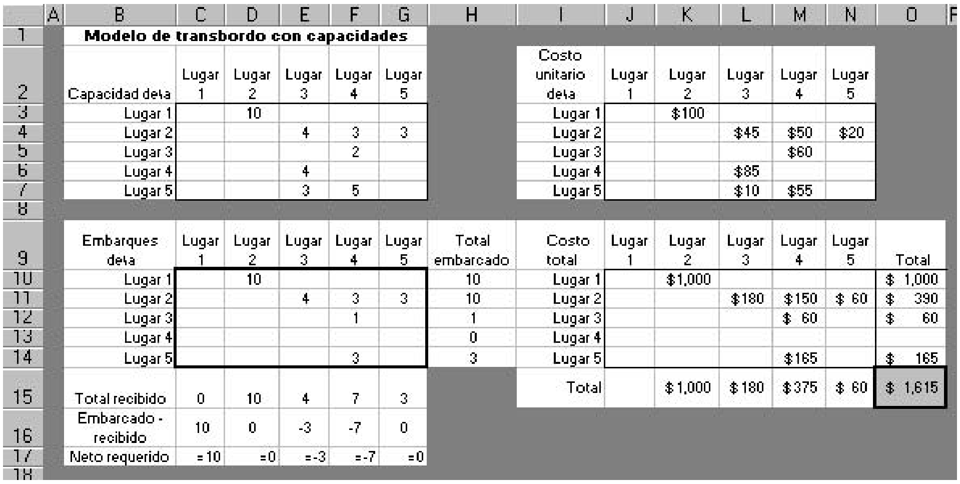
$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \text{ para todo } (i, j) \text{ de la red}$$

Observemos que

1. Se considera que la suma $\sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$ en la función objetivo incluye todos los arcos de la red. Por tanto, el objetivo consiste en minimizar el costo total del flujo.
2. Considere la j-ésima restricción, para algún valor dado de j. Se entiende que la suma $\sum_k x_{jk}$ incluye toda k para la cual existe un arco (j, k), con j fija, en la red. Así, $\sum_k x_{jk}$ es el flujo total que *sale* del nodo j especificado. En forma similar, $\sum_k x_{kj}$ es válida para toda k para la cual el arco (k, j), con j dada, pertenece a la red. Así, $\sum_k x_{kj}$ es el flujo total que *entra* al nodo j. Por consiguiente, la j-ésima restricción es una ecuación de balance de flujo según la cual

   flujo total que sale del nodo j – flujo total que entra al nodo j = oferta en el nodo j

   donde la oferta negativa (es decir, $L_j < 0$) representa un requerimiento. Los nodos donde la oferta es negativa se llaman **destinos,** *recipientes* o *puntos de demanda.* Los nodos con oferta positiva (es decir, $L_j > 0$) se llaman **orígenes,** *fuentes* o *puntos de oferta.* A los nodos cuya oferta es cero se les llama *puntos de transbordo.*
3. Para simplificar, se supone que $\sum_j L_j = 0$ (es decir, oferta total = demanda total) y que toda $c_{ij} \geq 0$.



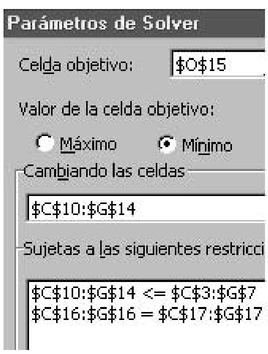
Modelo de transbordo con capacidades					
Capacidad de\a	Lugar 1	Lugar 2	Lugar 3	Lugar 4	Lugar 5
Lugar 1		10			
Lugar 2			4	3	3
Lugar 3				2	
Lugar 4			4		
Lugar 5			3	5	

Costo unitario de\a	Lugar 1	Lugar 2	Lugar 3	Lugar 4	Lugar 5
Lugar 1		$100			
Lugar 2			$45	$50	$20
Lugar 3				$60	
Lugar 4			$85		
Lugar 5			$10	$55	

Embarques de\a	Lugar 1	Lugar 2	Lugar 3	Lugar 4	Lugar 5	Total embarcado
Lugar 1		10				10
Lugar 2			4	3	3	10
Lugar 3				1		1
Lugar 4						0
Lugar 5				3		3
Total recibido	0	10	4	7	3	
Embarcado - recibido	10	0	-3	-7	0	
Neto requerido	=10	=0	=-3	=-7	=0	

Costo total	Lugar 1	Lugar 2	Lugar 3	Lugar 4	Lugar 5	Total
Lugar 1		$1,000				$ 1,000
Lugar 2			$180	$150	$ 60	$ 390
Lugar 3				$ 60		$ 60
Lugar 4						
Lugar 5				$165		$ 165
Total		$1,000	$180	$375	$ 60	$ 1,615

Celda	Fórmula	Cópiese a
J10	= C10*J3	J10:N14
H10	= SUMA(C10:G10)	H11:H14
C15	= SUMA(C10:C14)	D15:G15



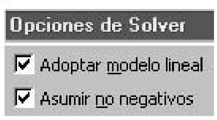


FIGURA 6.8

Modelo de transbordo de Seymour

4. El último conjunto de restricciones impone *capacidades* a los flujos x_{ij}. Como caso especial, algunos de los u_{ij} pueden ser infinitamente grandes, lo cual significa que esos arcos carecen de restricciones de capacidad. Asignar el valor cero a un u_{ij} sería equivalente a eliminar de la red el arco (i, j).
5. Los datos dados para el modelo son los c_{ij}, las L_j y las u_{ij}.

La figura 6.8 muestra una formulación en hoja de cálculo electrónica para el modelo de transbordo de Seymour. Las capacidades u_{ij} y los costos unitarios c_{ij} del ejemplo están especificados como parámetros en las filas 3 a 7. La especificación del LD de la restricción de requerimientos se presenta aquí en la fila 17.

Las cantidades "enviadas– recibidas" que aparecen en la fila 16 se calculan restando las cantidades del total recibido en C15:G15 de las cantidades del total enviado en H10:H14.[4] Para los valores de los parámetros de este ejemplo, la solución óptima para las variables de decisión y los costos totales aparecen en las filas 10 a 14.

El modelo de transbordo con capacidades (conocido a menudo como el modelo de **red**) es importante porque algunos de sus casos particulares son modelos de decisiones vitales para la gerencia. En especial, el modelo de transporte, el modelo de asignación y el modelo de la ruta más

[4]La única forma de hacer esto en Excel por medio de una sola fórmula requiere operaciones de matriz que utilizan la función TRANSPONER. Seleccione C16:G16 y teclee la fórmula de matriz {=TRANSPONER(H10:H14)-C15:G15} en C16. Consulte el Apéndice Excel para mayores detalles sobre las operaciones con matrices. Si no lo hace de esta forma, tendrá que introducir fórmulas por separado para cada celda: C16 contiene "=H10 - C15", D16 contiene "H11-D15", y así sucesivamente.

corta, que describiremos a continuación, son casos particulares del modelo de transbordo con capacidades, y el modelo de flujo máximo descrito en la sección 6.9 está muy relacionado con él.

SOLUCIONES ÓPTIMAS CON ENTEROS

El hecho de poder identificar un problema como un caso particular del modelo de red (o del modelo de transbordo con capacidades) ofrece dos ventajas. Primera, los resultados teóricos que se establecen para el modelo general se aplican automáticamente a los casos específicos. El ejemplo más notable de este fenómeno es la propiedad de los enteros para el modelo de red. La propiedad de los enteros puede expresarse así:

> Si todos los términos L_j y u_{ij} son enteros en el modelo de transbordo con capacidades, siempre habrá una solución óptima con valores enteros para este modelo.

Desde los primeros capítulos usted sabe que, generalmente, los modelos de PL no producen soluciones óptimas en las que las variables tengan valores enteros. Pues bien, el modelo de red con valores enteros para toda L_j y u_{ij} sí las produce. Esto es importante con relación a la utilidad de las diferentes versiones del modelo de red.

PROCEDIMIENTOS DE SOLUCIÓN EFICIENTES

La segunda razón por la cual es útil identificar un modelo como algún caso particular del modelo de transbordo con capacidades es que la *estructura* de este último modelo suele permitir la aplicación de métodos de resolución especiales, los cuales optimizan el modelo con mayor rapidez que el método símplex empleado por Solver. Así es posible optimizar rápidamente modelos de red muy grandes, utilizando software especial para optimización de redes.

El efecto de algunos de los métodos de resolución supereficientes, derivados de la estructura especial del modelo de red, es verdaderamente asombroso. Por ejemplo, el Internal Revenue Service (el Ministerio de Hacienda de Estados Unidos) construyó un modelo de red con 50,000 restricciones y 600 millones de variables. Para optimizar este modelo bastó una hora de trabajo en una gran computadora central.

Las dos secciones siguientes estarán dedicadas al modelo de la ruta más corta y al modelo de flujo máximo, respectivamente. En cada caso, el modelo estará representado por un diagrama de red, y se presentará una formulación especial, en hoja de cálculo electrónica, para resolver el modelo. El modelo de la ruta más corta es otro caso particular del modelo de transbordo con capacidades.

6.8 EL MODELO DE LA RUTA MÁS CORTA

El **modelo de la ruta más corta** se refiere a una red en en la cual cada arco (i, j) tiene asociado un número, c_{ij}, el cual se interpreta como la distancia (o tal vez el costo o el tiempo) desde el nodo i hasta el nodo j. Una *ruta* o *camino* entre dos nodos es cualquier secuencia de arcos que los conecte. El objetivo consiste en encontrar las rutas más cortas (o de menor costo o más rápidas) desde un nodo específico hasta cada uno de los demás nodos de la red.

Digamos, por ejemplo, que Aaron Drunner envía con frecuencia remesas de vino a siete localidades diferentes. La figura 6.9 muestra esas siete localidades, junto con las rutas posibles para viajar entre todas ellas. Observe que aquí, a diferencia del modelo de transbordo, los arcos *no están orientados.* Esto significa que en cada arco se permite el flujo en cualquier dirección. Por supuesto, es posible asignar una orientación a los arcos entre los nodos, por lo cual el costo del nodo 1 al 2 es diferente que el costo del 2 al 1. Esto podría ocurrir cuando el tráfico está en la hora pico en una dirección, pero no en la otra; o cuando el tráfico puede avanzar de 1 a 2 pero no de 2 a 1 (una calle de un solo sentido). Cada arco de la figura 6.9 ha sido rotulado con la distancia entre los nodos conectados por él. El punto de partida principal se designa con H. Aaron considera que el total de sus costos se minimizaría si pudiera asegurarse de que todos los envíos futuros a cualquiera de las localidades se realicen siguiendo la ruta más corta. Por tanto, su objetivo consiste en especificar cuáles son las rutas más cortas desde el nodo H hasta cualquiera de los otros siete nodos. Observe usted que en este modelo, tal como se especificó, la tarea no consiste en encontrar las x_{ij}, sino una ruta óptima.

En la figura 6.10 se presenta el modelo de Aaron para encontrar el camino más corto entre dos nodos cualesquiera; en este caso, desde la base hasta la localidad 5. El nodo inicial, al cual

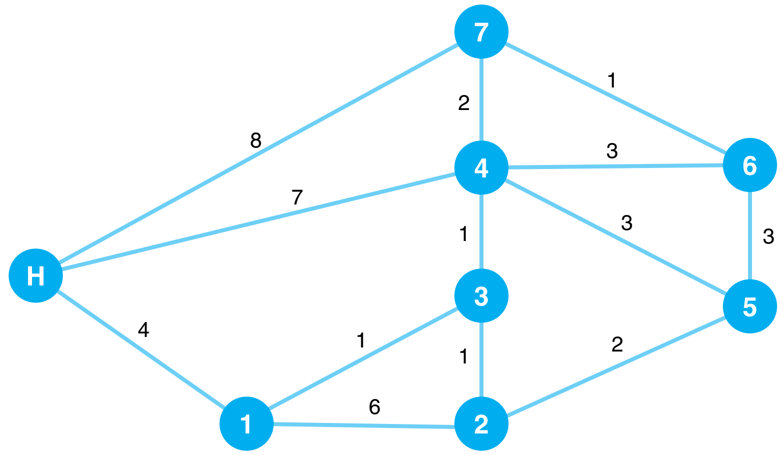


FIGURA 6.9

Red de las localidades de Aaron

Modelo de la ruta más corta

	Conectividad de\a	Base	Local 1	Local 2	Local 3	Local 4	Local 5	Local 6	Local 7
3	Base		1			1			1
4	Local 1	1		1	1				
5	Local 2		1		1		1		
6	Local 3		1	1		1			
7	Local 4	1			1		1	1	1
8	Local 5			1		1		1	
9	Local 6					1	1		1
10	Local 7	1				1		1	

Distancia de\a	Base	Local 1	Local 2	Local 3	Local 4	Local 5	Local 6	Local 7
Base		4			7			8
Local 1	4		6	1				
Local 2		6		1		2		
Local 3		1	1		1			
Local 4	7			1		3	3	2
Local 5			2		3		3	
Local 6					3	3		1
Local 7	8				2		1	

	Ruta de\a	Base	Local 1	Local 2	Local 3	Local 4	Local 5	Local 6	Local 7	Total desde
13	Base		1							1
14	Local 1				1					1
15	Local 2						1			1
16	Local 3			1						1
17	Local 4									0
18	Local 5									0
19	Local 6									0
20	Local 7									0
21	Total desde	0	1	1	1	0	1	0	0	
22	Total desde – Total hasta	1	0	0	0	0	-1	-0	0	
23	Neto requerido	=1	=0	=0	=0	=0	=-1	=0	=0	
24										

Distancia total	Base	Local 1	Local 2	Local 3	Local 4	Local 5	Local 6	Local 7	Total
Home		4						0	4
Site 1				1					1
Site 2						2			2
Site 3			1						1
Site 4									
Site 5									
Site 6									
Site 7							0		0
Total		4	1	1		2	0	0	8

Celda	Fórmula	Cópiese a
M13	= C13*M3	M13:T20

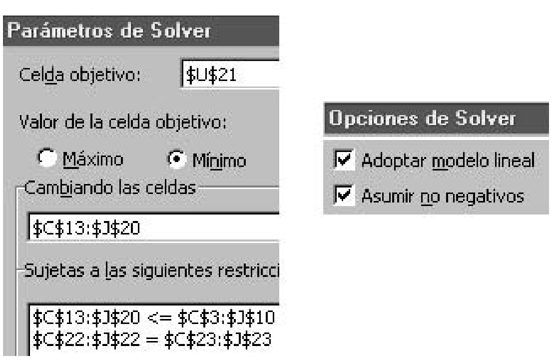


FIGURA 6.10

Modelo de Aaron para hallar el camino más corto desde la base H hasta el nodo 5 llamaremos base, y el nodo final, que es la localidad 5, se especifican en la fila 23 con 1 y –1, respectivamente. En las celdas M3:T10 se especifican las distancias de los arcos como parámetros. Salvo por el uso de variables indicadoras para denotar la conectividad nodo-arco en las celdas C3:J10, el modelo tiene la misma forma que el modelo de transbordo general. Las variables de decisión están restringidas entre los valores de 0 y 1, igual que en el modelo de asignación, y la función objetivo que debe minimizarse en U21 es la distancia total.

UNA APLICACIÓN DE LA RUTA MÁS CORTA: SUSTITUCIÓN DE EQUIPO

Lisa Carr está a cargo de conseguir equipo de reproducción (máquinas de fotocopiado) para el servicio secretarial de PROTRAC. Ella tiene que escoger entre arrendar nuevo equipo con alto costo de alquiler, pero bajo costo de mantenimiento, o equipo usado con costos de alquiler más bajos, pero con costos de mantenimiento más altos. Lisa deberá considerar un horizonte de cuatro años. Usaremos c_{ij} para denotar el costo de *alquilar* nuevo equipo al inicio del año i, $i = 1$, 2, 3, 4, y su mantenimiento hasta el inicio del año j, donde j sólo puede tomar los valores 2, 3, 4, 5. Si el equipo sólo puede mantenerse hasta el inicio del año j, para $j < 5$, habrá que alquilar otra vez nuevo equipo al inicio de j. Por ejemplo, tres políticas factibles alternativas son:

1. Arrendar nuevo equipo al inicio de cada año. Se supone que esa política implicaría los más altos cargos por alquiler y los cargos mínimos por mantenimiento. El costo total (alquiler + mantenimiento) de esta política sería $c_{12} + c_{23} + c_{34} + c_{45}$.
2. Arrendar nuevo equipo sólo al inicio del año 1 y pagar su mantenimiento todos los años siguientes. Sin duda ésta sería una política de mínimo costo de alquiler, pero máximo costo de mantenimiento. El costo total (alquiler + mantenimiento) de esta política sería c_{15}.
3. Arrendar equipo nuevo al inicio de los años 1 y 3. El costo total sería $c_{13} + c_{35}$.

De todas las políticas factibles, Lisa desea aquélla en la cual el costo sea mínimo. La solución para este modelo se obtiene encontrando la ruta más corta (es decir, la que corresponda al costo mínimo en este caso) desde el nodo 1 hasta el nodo 5 de la red ilustrada en la figura 6.11.

CÁPSULA DE APLICACIÓN — La autopista Hanshin de Japón

La autopista Hanshin comenzó con un tramo de sólo 2.3 kilómetros en 1964. Era la primera autopista urbana de peaje en Osaka. Al cabo de dos años se inauguró una autopista en Kobe que comunicaba a esa ciudad con Osaka. Cerca de 5,000 automóviles usaban diariamente la autopista a mediados de los años 60. Esta región de Japón, en la isla principal de Honshu, es la segunda área más poblada de Japón (Tokio es la primera). En 1992, la autopista controlaba una red de 200 km con un promedio de 828,000 vehículos que la transitaban todos los días.

El número promedio de automóviles por unidad de tierra de cultivo es mucho mayor en Japón que en Estados Unidos. Casi todas las ciudades y poblados de Japón sufren un intenso congestionamiento de tráfico. Como la tierra es escasa, se calcula que la capacidad de las redes de carreteras jamás logrará satisfacer la demanda. De este modo, la importancia de encontrar métodos para maximizar la utilización de las redes de caminos persistirá en el futuro previsible.

En 1970, la autopista empezó a funcionar auxiliada por un sistema automatizado para el control de tráfico, con miras a maximizar el volumen total que circulaba por toda su red de carreteras. La idea del flujo máximo es un poco engañosa. Se podría pensar que para maximizar el flujo habría que permitir el acceso a todos los vehículos e incluso rebajar el peaje para alentar la demanda. Sin embargo, si se permite el acceso de demasiados autos, puede haber grandes cuellos de botella, lo cual reduce considerablemente el volumen total de circulación en el sistema.

Una de las medidas de control aplicadas por la Autopista de Hanshin consistió en limitar el acceso de vehículos a la autopista, en cada rampa de entrada, para evitar el atolladero. Esto se realiza calculando el flujo máximo permisible de entrada, para lo cual se resuelve un modelo de programación lineal (PL) cada cinco minutos, usando datos procedentes de detectores instalados a intervalos de 500 metros en la autopista y en todas las rampas. El objetivo de ese programa lineal es maximizar el flujo en la autopista, lo cual maximiza automáticamente los ingresos. Con la solución de PL, la gerencia de la autopista decide cuántos autos más puede admitir en la autopista por cada rampa. La gerencia puede usar también el modelo de PL cuando se produce un accidente, para determinar cuántos autos deben ser obligados a salir antes del lugar del accidente. Para reducir congestionamientos y cuellos de botella, la autoridad de la autopista analizó también el número de accidentes, vehículos averiados y obras de mantenimiento de la carretera que podrían esperar. Un segundo método de control consistió en brindar a los conductores la información más reciente y precisa sobre la autopista y sus cercanías, incluso los tiempos previstos de recorrido y los accidentes.

La administración ha logrado mantener el costo de su sistema de control de tráfico en 1% del total de ingresos por peaje aproximadamente. El beneficio más importante ha sido el ahorro de tiempo de recorrido para los conductores. El total del tiempo ahorrado en la década de 1970 se calculó en 17,850,000 horas. Considerando el beneficio promedio por hora para los ciudadanos de Osaka, esto representa unos 27,300,000,000 yenes ($260 millones de dólares estadounidenses según el tipo de cambio de 1994). El modelo PL de Hanshin ha servido también como prototipo para el resto de Japón y Taiwán, en sus intentos por implantar sistemas automáticos de control de tráfico para obtener los mismos beneficios. (Véase Yoshino *et al*.)

Cada nodo de la ruta más corta denota un reemplazo; es decir, un año en el cual habrá que alquilar nuevo equipo.

La figura 6.12 presenta el modelo de reemplazo de equipo de Lisa, suponiendo un costo de \$1,600 más \$500 por mantenimiento durante el año que el equipo es alquilado, y costos anuales de mantenimiento de \$1,000, \$1,500 y \$2,200 por cada año adicional que se conserve el equipo a partir de entonces. Usando los parámetros de las celdas I3:I8, en las celdas K3:O7 se computan las consecuencias de costo de alquilar y mantener una máquina a partir de un año hasta llegar a un año final. Por ejemplo, la fórmula contenida en la celda N3 es "=I3+I5+I6+I7". El año inicial y el año final para las necesidades de equipo de Lisa están especificados en la fila 17 por medio de 1 y –1, respectivamente. Igual que en el modelo anterior del camino más corto, se usan

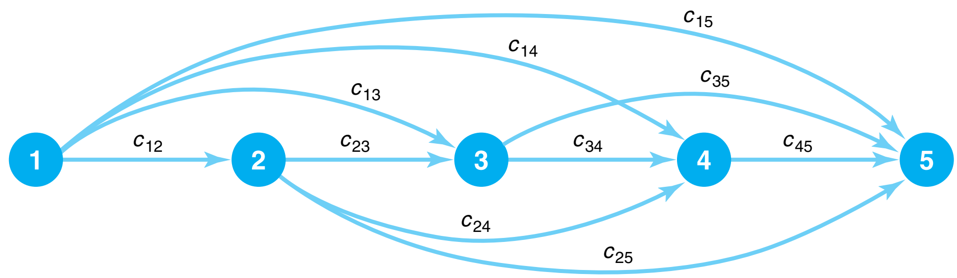
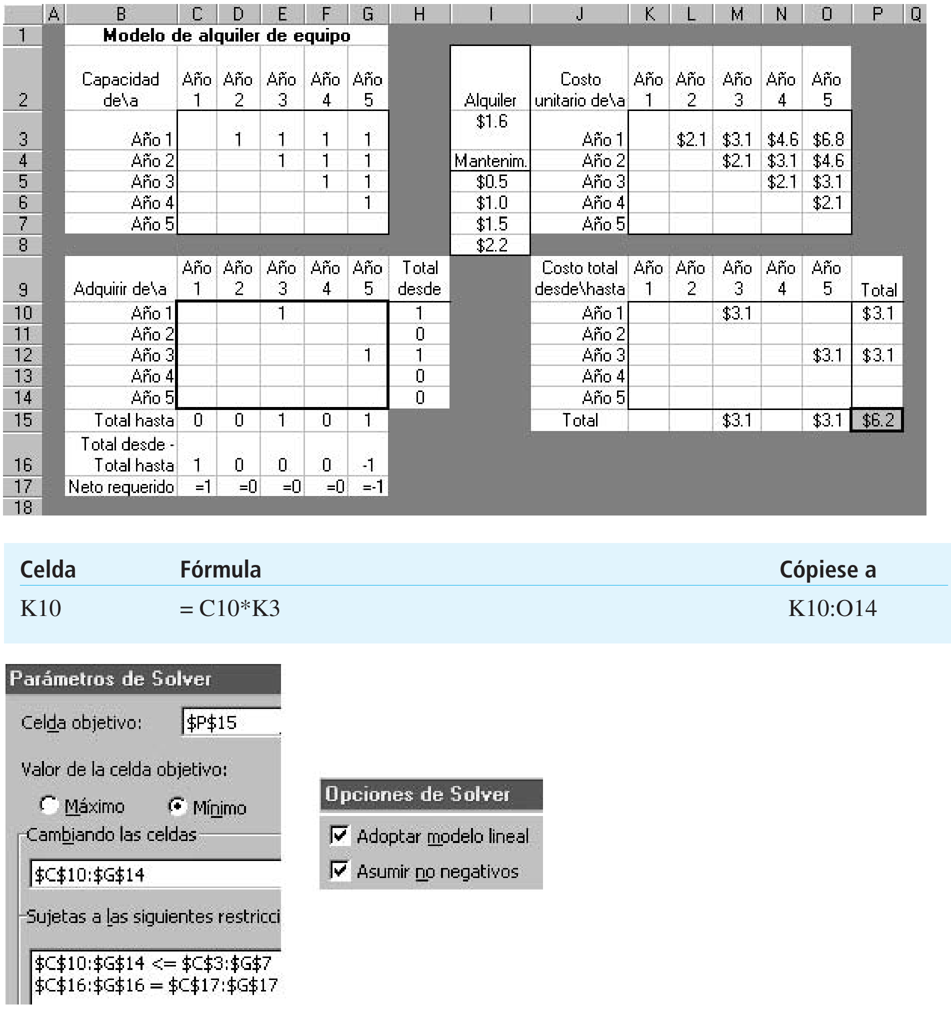


FIGURA 6.11
Red para la decisión sobre el reemplazo de equipo de Lisa



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		Modelo de alquiler de equipo															
2		Capacidad de\a	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5		Alquiler	Costo unitario de\a	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5		
3		Año 1		1	1	1	1		\$1.6	Año 1		\$2.1	\$3.1	\$4.6	\$6.8		
4		Año 2			1	1	1		Mantenim.	Año 2			\$2.1	\$3.1	\$4.6		
5		Año 3				1	1		\$0.5	Año 3				\$2.1	\$3.1		
6		Año 4					1		\$1.0	Año 4					\$2.1		
7		Año 5							\$1.5	Año 5							
8									\$2.2								
9		Adquirir de\a	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Total desde		Costo total desde\hasta	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Total	
10		Año 1			1			1		Año 1			\$3.1			\$3.1	
11		Año 2						0		Año 2							
12		Año 3					1	1		Año 3					\$3.1	\$3.1	
13		Año 4						0		Año 4							
14		Año 5						0		Año 5							
15		Total hasta	0	0	1	0	1			Total			\$3.1		\$3.1	\$6.2	
16		Total desde - Total hasta	1	0	0	0	-1										
17		Neto requerido	=1	=0	=0	=0	=-1										
18																	

Celda	Fórmula	Cópiese a
K10	= C10*K3	K10:O14

FIGURA 6.12
Modelo para el reemplazo de equipo de Lisa

variables indicadoras para señalar la conectividad nodo-arco en las celdas C3:G7, mientras que las celdas K10:O14 computan los costos de las decisiones en las celdas C10:G14.

6.9 EL MODELO DE FLUJO MÁXIMO

En el **modelo de flujo máximo** hay un solo nodo *fuente* (el nodo de entrada) y un solo nodo *recipiente* o destino (el nodo de salida). La meta consiste en encontrar la máxima cantidad de flujo total (petróleo, dinero, mensajes de Internet, tráfico de vehículos) que puede circular a través de la red (desde la fuente hasta el recipiente) en una unidad de tiempo. La cantidad de flujo por unidad de tiempo en *cada arco* está limitada por *restricciones de capacidad.* Por ejemplo, los diámetros de las tuberías limitan el flujo de petróleo en las diversas partes del sistema de distribución. La capacidad de flujo de los nodos no está especificada. El único requisito en este caso es que para cada nodo (con excepción de la fuente o el recipiente) la ecuación de balance de flujo

$$\text{flujo que sale del nodo} = \text{flujo que entra al nodo}$$

debe satisfacerse.

En términos formales, sea el nodo 1 la fuente y el nodo n el recipiente. El modelo es

$$\text{Max } f$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{Bmatrix} f, \text{ si } i=1 \\ -f, \text{ si } i=n \\ 0, \text{ en otras condiciones} \end{Bmatrix}$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \text{ para todo } (i, j) \text{ de la red}$$

Observamos que:

1. Las variables x_{ij} denotan el flujo por unidad de tiempo a través del arco (i, j) que conecta el nodo i y el nodo j.
2. Considere la i-ésima restricción, para algún valor fijo de i. La suma $\sum_j x_i$ abarca toda j para la cual el arco (i, j) con i fijo pertenezca a la red. Entonces $\sum_j x_{ij}$ es el flujo total que *sale* del nodo i. Asimismo, la suma $\sum_j x_{ji}$ abarca toda j para la cual exista un arco (j, i) en la red (donde i es fijo). Así, $\sum_j x_{ji}$ es el flujo total que *entra* al nodo i.
3. El símbolo f es una variable que denota el flujo total que pasa por la red en cada unidad de tiempo. Por definición, esto es equivalente al flujo por unidad de tiempo que sale de la fuente, el nodo 1 (la primera restricción). También es igual al flujo por unidad de tiempo que entra al recipiente, nodo n (la segunda restricción). El objetivo es maximizar esta última cantidad.
4. Las u_{ij} indican las capacidades de los flujos por unidad de tiempo a través de los diversos arcos.

Este modelo, junto con el modelo del camino más corto, resulta interesante por sí mismo. También se presenta como submodelo, al resolver otros modelos más complicados. Por esas razones, y por algunos de sus fundamentos teóricos (que están fuera del alcance de nuestro interés presente), a veces se dice que estos dos modelos (el del camino más corto y el del flujo máximo) son de importancia capital para la teoría de redes.

UNA APLICACIÓN DE FLUJO MÁXIMO: LA COMISIÓN DE PLANEACIÓN DEL DESARROLLO URBANO

Gloria Stime está a cargo de la Comisión de Planeación del Desarrollo Urbano (UDPC por sus siglas en inglés), un grupo de estudio *ad hoc* de interés especial. La responsabilidad actual del grupo consiste en coordinar la construcción del nuevo sistema de vías subterráneas con el departamento de mantenimiento de caminos. En virtud de que el nuevo sistema de vía subterránea se construirá cerca del circuito periférico de la ciudad, el tráfico de éste que se dirige al oriente deberá ser desviado. La desviación planeada es en realidad una red de rutas alternas propuestas por el departamento de mantenimiento de caminos. Los diferentes límites de velocidad y los patrones de tráfico producen distintas capacidades de flujo en los diferentes arcos de la red propuesta, como se aprecia en la figura 6.13.

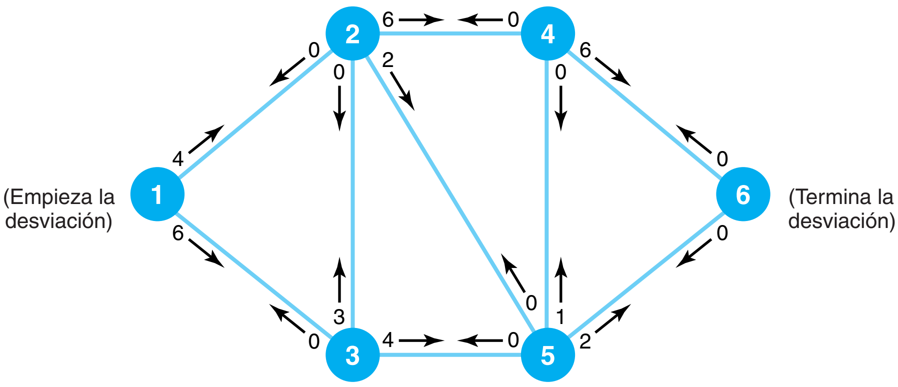


FIGURA 6.13

Red y capacidades de flujo propuestas (miles de vehículos por hora)

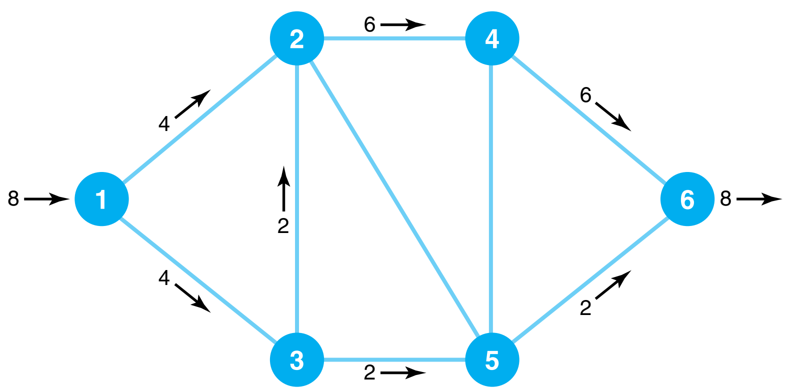


FIGURA 6.14

Patrón de flujo máximo para la red de Gloria

El nodo ① indica el inicio de la desviación; es decir, en punto en el cual el tráfico que se dirigía hacia el oriente sale de la vía periférica. El nodo ⑥ es el punto en el cual el tráfico desviado entra de nuevo en la vía periférica. Además, en la figura 6.13, las capacidades de flujo dependen de la dirección de éste. El símbolo 6 en el arco (1,3) denota una capacidad de 6,000 vehículos por hora en la dirección 1 → 3. El símbolo 0 en el mismo arco significa que existe una capacidad cero en la dirección 3 → l. Es así porque el arco en cuestión (1,3) denota una vía de un solo sentido desde ① hasta ③. En este ejemplo se observa que cada uno de los otros arcos indica tráfico en un solo sentido. (El modelo en hoja de cálculo electrónica que vamos a presentar se aplicará también a modelos cuyos arcos permiten niveles positivos de flujos de ambas direcciones.) El flujo máximo es 8,000 vehículos por hora, como muestra la figura 6.14. La respuesta se encontró optimizando el modelo de hoja de cálculo electrónica que presentamos en la figura 6.15.

Salvo por la ausencia de datos sobre costos, el modelo de la figura 6.15 tiene una forma similar a los otros modelos de red que hemos visto. Las variables de decisión (no negativas) de las celdas C10:H14 son los flujos de nodo a nodo restringidos a un valor no mayor que el parámetro de capacidad del arco dado en las celdas C3:H7. Este modelo maximiza el flujo que sale del nodo 1 como su función objetivo en la celda I10. (De modo equivalente podríamos haber maximizado el flujo que llega al nodo 6, celda H15, como función objetivo.) Las restricciones de las celdas C17:G17 especifican que la suma del flujo neto en cada uno de los nodos intermedios debe ser igual a cero; es decir, que el flujo total que llega a cada nodo intermedio es igual al flujo total que sale de dicho nodo.

Como es costumbre con los modelos de red, existen soluciones óptimas alternativas para el modelo de Gloria, como muestra la figura 6.16.

6.10 NOTAS SOBRE LA APLICACIÓN DE MODELOS DE RED

Los modelos de red figuran entre las aplicaciones más importantes de la logística y la distribución en la ciencia de la administración, y también tienen muy vastas aplicaciones en ingeniería y en la ciencia de la computación. Por tanto, en los últimos años hemos visto surgir varias firmas de consultoría que trabajan exclusivamente con aplicaciones de redes. El interés fundamen-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Modelo de flujo máximo								
2		Capacidad de\a	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6		
3		Nodo 1		4	6					
4		Nodo 2				6	2			
5		Nodo 3		3			4			
6		Nodo 4						6		
7		Nodo 5						2		
8										
9		Flujo de\a	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6	Total desde	
10		Nodo 1		4	4				8	
11		Nodo 2				6			6	
12		Nodo 3		2			2		4	
13		Nodo 4						6	6	
14		Nodo 5						2	2	
15		Total hasta		6	4	6	2	8		
16		Total desde - Total hasta		-0	0	0	0			
17		Neto requerido		=0	=0	=0	=0			
18										

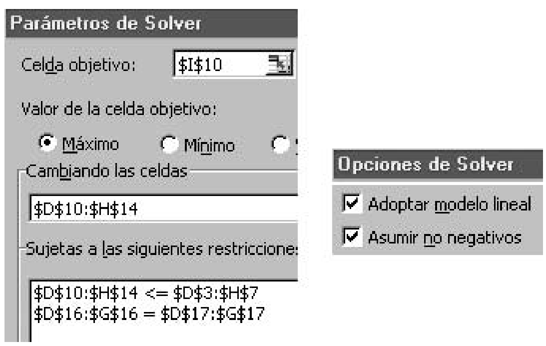


FIGURA 6.15

Modelo de flujo máximo en hoja de cálculo para la red de Gloria

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Modelo de flujo máximo								
2		Capacidad de\a	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6		
3		Nodo 1		4	6					
4		Nodo 2				6	2			
5		Nodo 3		3			4			
6		Nodo 4						6		
7		Nodo 5						2		
8										
9		Flujo de\a	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6	Total desde	
10		Nodo 1		4	4				8	
11		Nodo 2				6	1		7	
12		Nodo 3		3			1		4	
13		Nodo 4						6	6	
14		Nodo 5						2	2	
15		Total hasta		7	4	6	2	8		
16		Total desde - Total hasta		0	0	0	0			
17		Neto requerido		=0	=0	=0	=0			
18										

FIGURA 6.16

Solución óptima alternativa para el modelo de red de Gloria tal de esas firmas se centra a menudo en modelos de planeación estratégica, desde el punto de vista de los estudios de distribución, donde el término *distribución* se interpreta en sentido muy general: es un flujo de productos materiales, información, vehículos, dinero, y así sucesivamente. Esas compañías y otros vendedores de software le pueden vender algunos de los programas más modernos para optimizar aplicaciones de red en una escala muy elevada (si tiene usted que manejar modelos demasiado grandes para Solver).

La aplicación de modelos de red a situaciones reales requiere mucha habilidad y experiencia en el proceso de adaptar modelos (los cuales inicialmente pueden no parecer modelos de red), a representaciones de red. Para aprovechar las ventajas de la estructura de red, muchas veces vale la pena "forzar" la formulación inicial a fin de hacerla encajar en una representación de red. Como observación final, conviene destacar que muchos modelos de situaciones reales incluyen submodelos que pueden tener el formato de red.

6.11 PLANEACIÓN FINANCIERA Y DE PRODUCCIÓN

El modelo de producción de PROTRAC, Inc. fue presentado en el capítulo 2. Se trata de un modelo de mezcla de productos; es decir, un instrumento con el cual PROTRAC decide cuántas unidades E-9 y cuántas F-9 debe fabricar el mes siguiente, sujetándose a diversas restricciones. Recuerde que E es el número de unidades E-9 que deberá producir y F es el número de las F-9 por fabricar. El modelo completo es

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Max} & 5000E + 4000F & & \\
\text{s.a.} & E + F & \geq 5 & \text{(requisitos del total de unidades)} \\
 & E - 3F & \leq 0 & \text{(requisitos de mezcla)} \\
 & 10E + 15F & \leq 150 & \text{(horas en el departamento A)} \\
 & 20E + 10F & \leq 160 & \text{(horas en el departamento B)} \\
 & 30E + 10F & \geq 135 & \text{(horas para pruebas)} \\
 & E, F & \geq 0 &
\end{array}
$$

El gerente de producción se siente satisfecho porque, en su opinión, en este modelo se ha captado la esencia de la situación. Entonces envía una propuesta al comité administrativo, indicando que se considere la posibilidad de implantar las recomendaciones del modelo.

CONSIDERACIONES FINANCIERAS

Cuando el comité administrativo revise las actividades propuestas para el próximo mes, muy pronto verá claramente que el modelo de producción de PROTRAC capta sólo una parte de la situación real. En particular, algunas consideraciones financieras importantes han sido pasadas por alto. En especial, el próximo mes PROTRAC tendrá costos por concepto de materiales y mano de obra directa que deberá pagar, mientras que los pagos de sus posibles clientes no serán recibidos sino hasta después de tres meses más. La formulación actual no considera el hecho de que PROTRAC tendrá que pedir fondos en préstamo para cubrir por lo menos parte de sus gastos actuales.

Los datos de la tabla 6.12 son pertinentes para las consideraciones financieras. PROTRAC ha presupuestado $100,000 en efectivo para cubrir los costos actuales de materiales y mano de obra, y ha planeado solicitar a crédito los fondos adicionales que se requieran para pagar esos costos de materiales y mano de obra. PROTRAC puede obtener dinero en préstamo con una tasa de interés anual de 16%, pero a fin de protegerse frente a posibles riesgos, el banco limita el adeudo total permisible (capital más intereses) a no más de dos tercios de la suma del efectivo disponible y las cuentas por cobrar de PROTRAC. Al comité administrativo le preocupa que el valor del dinero en función del tiempo haya sido pasado por alto, en el modelo, al calcular las contribuciones a las ganancias. Sus miembros piensan que si el valor presente del flujo de caja

TABLA 6.12 Datos financieros

PRODUCTO	COSTOS DE MATERIALES Y MANO DE OBRA POR UNIDAD ($)	CONTRIBUCIÓN A LAS GANANCIAS ($)	PRECIO DE VENTA ($)
E	75,000	5000	80,000
F	20,000	4000	24,000

neto se maximizara, se producirían menos unidades E-9 y más F-9, a causa de los costos relativamente altos de materiales y mano de obra que corresponden a las máquinas E-9. Sin embargo, el comité no logra ponerse de acuerdo sobre cuál sería la tasa de descuento apropiada. Algunos miembros proponen una tasa de descuento anual de 12%, otros prefieren 16% y unos cuantos recomiendan 20%.

EL MODELO COMBINADO

El problema de PROTRAC es formular una nueva función objetivo, determinar cuánto debe pedir en préstamo (o nada), y elaborar un plan de producción que incluya esa nueva información. Para crear el modelo de esta situación, es conveniente introducir una variable. Sea

$$D = \text{deuda (es decir, total de dólares obtenidos a crédito) en miles de dólares}$$

El flujo neto de efectivo del mes próximo, en dólares, será $1{,}000D - 75{,}000E - 20{,}000F$, pero (considerando que los pagos no se realizarán sino hasta tres meses después) el flujo neto de efectivo tres meses más tarde será $80{,}000E + 24{,}000F - 1040D$. El coeficiente 1,040 se obtuvo a partir de lo dicho anteriormente, según lo cual PROTRAC puede obtener dinero en préstamo a 16% anual y, por tanto, a 4% durante tres meses. Defina el factor de descuento, α, basado en la tasa de descuento anual, R, como $\alpha = 1/(1 + R/4)$. El objetivo es maximizar el valor presente del flujo neto de efectivo, de manera que la función objetivo sea expresada en dólares

$$\text{Max } 1000D - 75{,}000E - 20{,}000F + \alpha(80{,}000E + 24{,}000F - 1040D)$$

Por ejemplo, si $R = 20\%$ y $\alpha = 0.952381$, la función objetivo se vuelve

$$\text{Max } 1190.48E + 2857.14F + 9.52381D$$

Observe que D tiene aquí un coeficiente positivo, porque PROTRAC está suponiendo que puede ganar 20% sobre sus inversiones, pero que sólo tendrá que pagar 16% de intereses sobre los fondos obtenidos en préstamo. Si $R = 16\%$ o $R < 16\%$, entonces el coeficiente de D sería cero o negativo, respectivamente.

También es necesario introducir otras restricciones:

1. PROTRAC debe pedir en préstamo lo suficiente para cubrir los costos de materiales y mano de obra asociados a la producción. En términos generales, la desigualdad apropiada es

$$\text{deuda} + \text{efectivo disponible} \geq \text{costos de materiales y mano de obra}$$

Para ampliar esta expresión, observamos que PROTRAC dispone de \$100,000 en efectivo. Además, según la tabla 6.12, los costos totales de materiales y mano de obra son \$75,000 por cada E y \$20,000 por cada F. Así, expresando todo esto en miles de dólares, nuestra ecuación se vuelve

$$D + 100 \geq 75E + 20F$$

2. El banco exige que el monto total que se le adeuda (es decir, la deuda más los intereses) no sea mayor que dos tercios del efectivo disponible de PROTRAC más las cuentas por cobrar. En otras palabras,

$$\frac{2}{3}(\text{efectivo disponible} + \text{cuentas por cobrar}) \geq \text{deuda} + \text{intereses}$$

En la tabla 6.12 podemos observar que cada E se vende a \$80,000 y cada F a \$24,000. Por consiguiente, el total de las cuentas por cobrar es $80E + 24F$, en miles de dólares, y la restricción se convierte en

$$100 + 80E + 24F \geq 1.5(1.04D)$$

Observe que la cota inferior del valor de D (en forma implícita en la primera de las restricciones anteriores) depende del costo de la mano de obra y los materiales, mientras que el límite superior de D (implícito en la última de dichas restricciones) se basa en los precios de venta.

La formulación completa (con fórmulas seleccionadas) y la solución del modelo de PROTRAC revisado para el caso $R = 20\%$ aparecen en la hoja de cálculo de la figura 6.17. En la solución, observamos que PROTRAC tendría que pedir en préstamo $279,490 aproximadamente. Las variables de excedentes para las restricciones de efectivo, que aparecen en las filas 20 y 21, indican que (como la restricción del saldo de cuentas por cobrar es activa) PROTRAC pedirá en préstamo la mayor cantidad posible, lo cual (dado que el saldo de efectivo tiene excedente po-

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Plan financiero y de producción de PROTRAC						
2					Meses de retraso del pago		3	
3		Tasa de descuento anual, R	20%		Tasa de interés anual		16%	
4		Factor de descuento	0.952381		Límite del adeudo al banco		2/3	
5			E-9	F-9	Deuda (miles $)			
6		Precio	$80,000	$24,000	$1,000			
7		Costos unitarios var.	$75,000	$20,000	$1,040			
8		Mar. cont. unitar. V.P.	$1,190.48	$2,857.14	$9.5238	Ganancia		
9		Decisiones	1.5	9	$279.49	$30,162		
10								
11		Restricciones	Uso de recursos			Horas en total	Hrs. disponibles	Holgura
12		Depto. A	10	15		150	<= 150	0
13		Depto. B	20	10		120	<= 160	40
14						Horas en total	Hrs. requeridas	
15		Pruebas	30	10		135	>= 135	0
16						Cantidad total	Prod. requerida	
17		Producción	1	1		10.5	>=5	5.5
18		Requerimiento mixto	1	-3		-25.5	<=0	25.5
19						Total	Efectivo dispon.	Superávit
20		Saldo de caja (miles $)	$75	$20	-1	$13.01	<=$100	$86.99
21		Saldo por cobrar (miles $)	-$80	-$24	1.56	$100.00	<=$100	$0.00
22								

FIGURA 6.17

Modelo de PROTRAC para planeación financiera y de producción

Parámetros de Solver

Celda objetivo: $F$9

Valor de la celda objetivo:

(•) Máximo ( ) Mínimo ( )

Cambiando las celdas

$C$9:$E$9

Sujetas a las siguientes restriccione

$F$12:$F$13 <= $G$12:$G$13
$F$15 >= $G$15
$F$17 >= $G$17
$F$18 <= $G$18
$F$20:$F$21 <= $G$20:$G$21

Opciones de Solver

[x] Adoptar modelo lineal
[x] Asumir no negativos

	A	B	C	D	E	F	G
1		Plan financiero y de producción de PROTRAC					
2						Meses de retraso del pago	3
3		Tasa de descuento	0.2			Tasa de interés anual	0.16
4		Factor de descuen	=1/(1+C3/(12/G2))			Límite del adeudo al banco	=2/3
5			E-9	F-9	Deuda (miles $)		
6		Precio	80000	24000	1000		
7		Costos unitarios v.	75000	20000	=(1+G3/(12/G2))*1000		
8		Mar. cont. unitar. V.	=-C7+$C$4*C6	=-D7+$C$4*D6	=E6-$C$4*E7	Ganancia	
9		Decisiones	1.5	9	279.487179487179	=SUMAPRODUCTO($C$9:$E$9,C8:E8)	
10							
20		Balance de caja (m	=C7/1000	=D7/1000	-1	=SUMAPRODUCTO($C$9:$E$9,C20:E20)	100
21		Saldo por cobrar (m	=-C6/1000	=-D6/1000	=E7/G4/1000	=SUMAPRODUCTO($C$9:$E$9,C21:E21)	100
22							

TABLA 6.13 Resumen de resultados

	PRODUCCIÓN PURA	PRODUCCIÓN Y FINANZAS		
		R = 12%	R = 16%	R = 20%
E	4.5	1.5	1.5	1.5
F	7.0	9.0	9.0	9.0
D	—	$192.50	$192.50	$279.49
OV	$50,500	$31,845	$30,577	$30,162

sitivo) es más de lo que se requiere para financiar los costos de materiales y mano de obra. Es así porque en el modelo se supone que los fondos excedentes pueden invertirse para ganar 20% de interés, mientras el costo de dichos fondos es solamente 16%.

EFECTO DE LAS CONSIDERACIONES FINANCIERAS

Observamos que al introducir consideraciones financieras en el modelo original de la mezcla de producción, obtuvimos un plan muy diferente del que resultó cuando nos basamos solamente en las restricciones de producción. La tabla 6.13 resume los resultados para el modelo original de producción pura de PROTRAC y para este modelo con restricciones financieras, usando tres valores diferentes para la tasa de descuento, R. El valor óptimo de la función objetivo es menor en los modelos de producción y finanzas porque en ellos los flujos de efectivo futuros son descontados y los costos de intereses son incluidos. En el modelo de producción y finanzas, el plan de producción óptima no depende del valor de la tasa de descuento, dentro del margen observado de 12 a 20%. La deuda óptima sí depende de dicho valor, pero en forma simple. Si $R < 16\%$, solicite usted en préstamo la menor cantidad posible, es decir $192,500. Si $R > 16\%$, pida en préstamo lo más posible, es decir $279,490. Si $R = 16\%$, entonces existen soluciones óptimas alternativas en las cuales el valor de D se encuentra entre $192,500 y $279,490.

6.12 EL MODELO DE SELECCIÓN DE MEDIOS

Cuando una empresa o una agencia de publicidad se propone desarrollar una campaña promocional efectiva, emplea el modelo de selección de medios. En términos muy sencillos, su pregunta es cuántas “inserciones” (anuncios) debe comprar la firma en cada uno de los diversos medios accesibles (p. ej., radio, televisión, periódicos y revistas). En un sentido no muy específico, la meta consiste en encontrar la campaña publicitaria más efectiva posible. Como veremos, el objetivo explícito que vamos a adoptar es subjetivo. Las restricciones para la toma de decisiones son de ordinario el presupuesto total para publicidad y el número de oportunidades disponibles para insertar anuncios en cada uno de los medios. La gerencia puede restringir aún más la decisión imponiendo sus propias reglas empíricas. Por ejemplo, podría insistir en que por lo menos cierta cantidad de dólares se gastara en un medio específico (p. ej., que se gastaran $10,000 o más en anuncios en los periódicos). En forma alternativa, podría estipular que no se gastara más que cierto porcentaje (digamos 50%) en un mismo medio publicitario.

Por último, en la decisión puede influir “la ley de rendimientos decrecientes”; es decir, la gerencia puede estar convencida de que la eficacia de un anuncio disminuye a medida que aumenta el número de sus exposiciones (presentaciones) en un medio determinado, en un espacio de tiempo o periodo específico. Por ejemplo, la décima exposición de un anuncio por televisión en una misma semana no tendría, de ordinario, el mismo impacto sobre la audiencia que la primera o la segunda exposición.

Presentaremos en detalle un ejemplo de selección de medios. Sin embargo, será interesante señalar primero que el modelo tiene una función objetivo poco usual. Por supuesto, a la gerencia le gustaría seleccionar su campaña de publicidad para maximizar la demanda. En ese caso, en términos conceptuales, el modelo tendría que encontrar una campaña publicitaria capaz de maximizar la demanda y satisfacer las restricciones presupuestarias y de otra índole. Por desgracia, el vínculo entre la demanda y la campaña publicitaria es tan vago que resulta difícil construir un modelo útil a partir de este enfoque. El enfoque que usaremos aquí consistirá en medir la respuesta a un anuncio dado, en un medio específico, en términos de lo que llamaremos **unidades de ex-**

TABLA 6.14 Datos sobre los medios

MEDIO PUBLICITARIO	NÚMERO DE UNIDADES DE COMPRA ALCANZADAS POR ANUNCIO	COSTO POR ANUNCIO ($)
Radiodifusión diurna	30,000	1700
Televisión vespertina	60,000	2800
Diarios impresos	45,000	1200

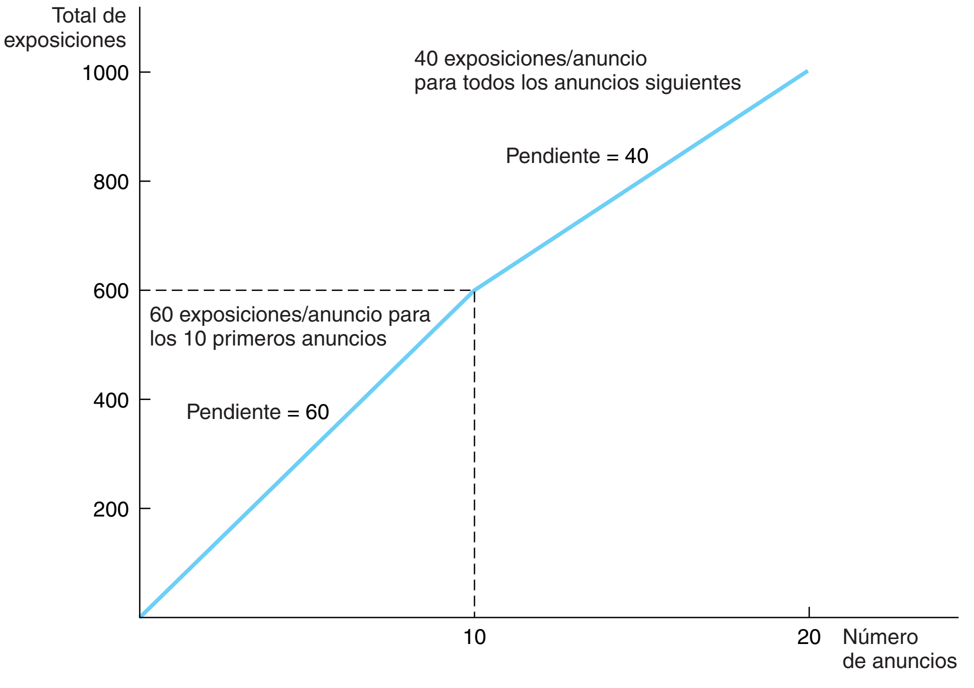


FIGURA 6.18

Total de exposiciones *versus* número de anuncios por radio

posición. Estas unidades representan una medida subjetiva, basada en la forma en que la gerencia evalúa la calidad del anuncio en cuestión, lo deseable del mercado potencial, y así por el estilo. En otras palabras, es una medida arbitraria de las "bondades" de un anuncio en particular. La unidad de exposición se puede considerar como una especie de función de utilidad. Así, la meta de la gerencia se convierte en maximizar el total de las unidades de exposición, tomando en cuenta otras propiedades del modelo (p. ej., el costo por número de clientes potenciales alcanzados, y consideraciones semejantes). Veamos a continuación un ejemplo específico.

PROMOCIÓN DE UN NUEVO PRODUCTO DE PROTRAC

PROTRAC ha decidido incursionar en el mercado de los vehículos recreativos con el Rover, un vehículo tipo motocicleta con neumáticos de gran tamaño. Por tratarse de una nueva línea de productos, la empresa planea lanzar una campaña publicitaria en el mes de su presentación, y ha asignado un presupuesto de $72,000 para esa campaña.

En su campaña de publicidad, PROTRAC decide insertar sus anuncios en la radiodifusión diurna, la televisión vespertina y los diarios impresos. Los datos acerca del costo por anuncio en cada uno de esos medios, y el número de unidades de compra que cada anuncio ha logrado alcanzar han sido proporcionados por la agencia de publicidad de PROTRAC. Estos datos aparecen resumidos en la tabla 6.14.

Como dijimos anteriormente, la eficacia de un anuncio se mide en términos de exposiciones. La gerencia elige arbitrariamente una escala de 0 a 100 para la oferta de cada anuncio. En particular, se supone que cada uno de los 10 primeros anuncios de radio tiene un valor de 60 unidades de exposición, y cada anuncio de radio (después de los 10 primeros) tiene 40 exposiciones según esta clasificación. La figura 6.18 muestra una gráfica del total de exposiciones en función del número de anuncios presentados en la radiodifusión diurna durante el mes.

Observe que en esta figura la pendiente del primer segmento de recta es 60, porque cada uno de los 10 primeros anuncios de radio tiene una clasificación de 60 exposiciones. Después de los 10 primeros anuncios, considerando que cada anuncio de radio tiene una clasificación de 40 exposiciones, la pendiente del segundo segmento de recta es 40. En consecuencia, los anuncios de radio resultan afectados por rendimientos decrecientes. Según la evaluación subjetiva de la gerencia, los primeros anuncios son más efectivos que los últimos. Esa evaluación se apoya sobre todo en la suposición de que gran parte de las personas que ven/oyen los últimos anuncios en un medio determinado, también vieron/oyeron los primeros anuncios.

Los analistas de PROTRAC consideran que se presentaría la misma situación en el caso de los anuncios por televisión y en los periódicos; es decir, que también en estos medios habría rendimientos decrecientes. En realidad, ellos suponen que en los tres casos citados la pendiente (es decir, las exposiciones por anuncio) cambiarán en el décimo anuncio. Sin embargo, las exposiciones por anuncio (es decir, la pendiente de los dos segmentos de recta), variarán según el medio de que se trate. Estos datos están resumidos en la tabla 6.15. Las exposiciones totales, en función del número de anuncios insertados en cada medio, se presentan en la figura 6.19.

La gerencia quiere asegurarse de que la campaña publicitaria satisfaga ciertos criterios que, a su juicio, son importantes. En particular: (1) no deben aparecer más de 25 anuncios en un mismo medio, (2) es preciso alcanzar en total 1,800,000 unidades de compra a través de todos los medios, y (3) por lo menos la cuarta parte de los anuncios debe aparecer en la televisión vespertina. Para construir el modelo de la selección de medios de PROTRAC como un modelo de PL, hagamos

TABLA 6.15 Exposiciones por anuncio

MEDIO PUBLICITARIO	LOS PRIMEROS DIEZ ANUNCIOS	TODOS LOS SIGUIENTES ANUNCIOS
Radiodifusión diurna	60	40
Televisión vespertina	80	55
Diarios impresos	70	35

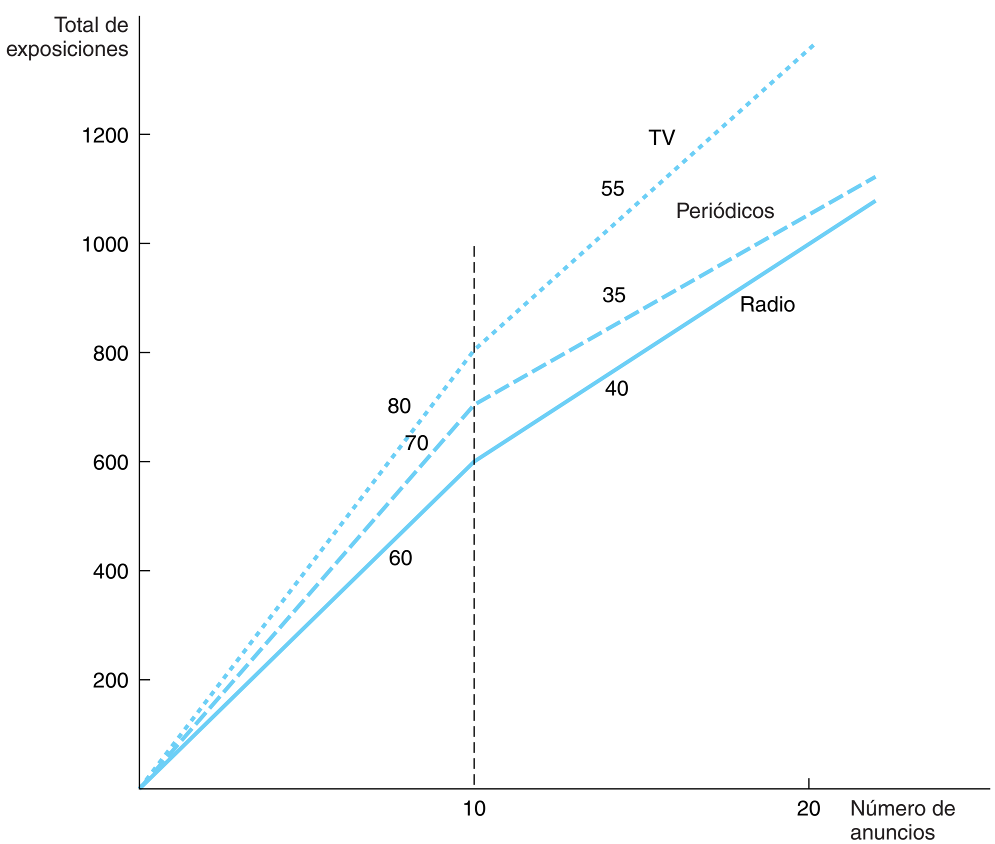


FIGURA 6.19

Total de exposiciones *versus* número de anuncios

x_1 = número de anuncios por la radiodifusión diurna hasta llegar a los 10 primeros
y_1 = número de anuncios por la radiodifusión diurna después de los 10 primeros
x_2 = número de anuncios por la televisión vespertina hasta los 10 primeros
y_2 = número de anuncios por la televisión vespertina después de los 10 primeros
x_3 = número de anuncios en los periódicos hasta los 10 primeros
y_3 = número de anuncios en los periódicos después de los 10 primeros

Con este tipo de notación, observamos que $60x_1$ es el total de exposiciones correspondiente al número de los "10 primeros" anuncios de radio, y $40y_1$ es el total de exposiciones que corresponden a todos los anuncios de radio restantes. Así, la función objetivo es

$$\text{Max } 60x_1 + 40y_1 + 80x_2 + 55y_2 + 70x_3 + 35y_3$$

En lo que se refiere a las restricciones, observamos que

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 &= \text{total de anuncios por radio} \\ x_2 + y_2 &= \text{total de anuncios por televisión} \\ x_3 + y_3 &= \text{total de anuncios en periódicos} \end{aligned}$$

En la tabla 6.14 vemos que cada anuncio por radio cuesta \$1,700. La expresión correspondiente al total gastado en anuncios por radio es $1,700(x_1 + y_1)$. Dado que los anuncios por televisión cuestan \$2,800 cada uno y los anuncios en periódicos \$1,200 cada uno, el gasto total en publicidad es $1700(x_1 + y_1) + 2800(x_2 + y_2) + 1200(x_3 + y_3)$. PROTRAC ha asignado \$72,000 para la campaña de promoción. Esta restricción se aplica por medio de la siguiente desigualdad:

$$1700x_1 + 1700y_1 + 2800x_2 + 2800y_2 + 1200x_3 + 1200y_3 \leq 72{,}000$$

La restricción según la cual no deben insertarse más de 25 anuncios en la radiodifusión diurna se incorpora al modelo mediante la desigualdad $x_1 + y_1 \leq 25$. Cada uno de los demás medios requiere una restricción similar.

Refiriéndonos de nuevo a la tabla 6.14, vemos que cada anuncio por radio llega a 30,000 unidades compradoras. Así, el número total de estas unidades que los anuncios de radio pueden alcanzar es $30{,}000\ (x_1 + y_1)$. El requisito de que toda la campaña llegue a 1,800,000 unidades compradoras, por lo menos, se impone mediante la desigualdad.

$$30{,}000x_1 + 30{,}000y_1 + 60{,}000x_2 + 60{,}000y_2 + 45{,}000x_3 + 45{,}000y_3 \geq 1{,}800{,}000$$

Finalmente, la restricción de que por lo menos una cuarta parte de los anuncios se presente en la televisión vespertina ha quedado garantizada con la restricción

$$\frac{x_2 + y_2}{x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3} \geq \frac{1}{4}$$

o bien

$$x_2 + y_2 \geq .25(x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3)$$

La formulación completa se presenta en la hoja de cálculo electrónica de la figura 6.20. Observe que las tres restricciones de las celdas H3:J3 corresponden a la cota superior de 10 anuncios para las variables x_1, x_2, y x_3, mientras que las tres restricciones de las celdas H4:J4 imponen una gran cota superior de 1,000 sobre las variables y_1, y_2 y y_3. Sin embargo, debemos considerar algo más. Según las definiciones, x_1 es el número de anuncios por radio hasta los 10 primeros; y además y_1 es el número de anuncios por radio después de los 10 primeros. Sean x_1^* y y_1^* los valores óptimos de esas variables. Por supuesto, no tendría sentido una solución óptima con $x_1^* < 10$ y $y_1^* > 0$; es decir, sería absurdo hablar de anuncios después de los 10 primeros si nunca existieron esos 10 primeros. Ninguna restricción previene este caso. Sin embargo, tal cosa nunca ocurrirá. La razón es que la contribución marginal de x_1 en la función objetivo es mayor que la de y_1. Si $x_1 < 10$ y $y_1 > 0$ es factible, usted podrá observar que, en las restricciones, los valores $x_1 + \epsilon$ y $y_1 - \epsilon$ también serán factibles, siendo ϵ un número positivo muy pequeño. Además, en virtud de que el coeficiente de x_1 es mayor que el coeficiente de y_1 en la función objetivo, esta sustitución producirá un valor objetivo mejorado. Dicho en forma muy simple, la maximización llevará a x_1 hasta su límite (10 anuncios) antes que y_1 llegue a ser mayor que cero. Un comentario análogo se aplica a x_2, y_2 y también a x_3, y_3.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Modelo de selección de medios											
2	Núm. anuncios	Anuncios radio	Anuncios TV	Anuncios periódico	Total		Límites de segmentos	Anuncios radio	Anuncios TV	Anuncios periódico		Límite TV %
3	Segmento 1	10	10	10	30		Segmento 1	<=10	<=10	<=10		25%
4	Segmento 2	0	0.47	11.41	11.87		Segmento 2	<=1000	<=1000	<=1000		
5	Total	10	10.47	21.41	41.87		Unid. compradas/anu	30	60	45	Total unid.	Requeridas
6	Límite de medios	<=25	<=25	<=25			Total unid. comprac	300	628.13	963.281	1891.41	>=1800
7	Límite TV %		>=10.47									
8	Exposiciones por anuncio	Anuncios radio	Anuncios TV	Anuncios periódico			Costo unit./anuncio	Anuncios radio	Anuncios TV	Anuncios periódico		
9	Segmento 1	60	80	70			Segmento 1	$ 1.70	$ 2.80	$ 1.20		
10	Segmento 2	40	55	35			Segmento 2	$ 1.70	$ 2.80	$ 1.20		
11												
12	Total de exposiciones	Anuncios radio	Anuncios TV	Anuncios periódico	Total		Costo total	Anuncios radio	Anuncios TV	Anuncios periódico	Total	
13	Segmento 1	600	800.0	700	2,100		Segmento 1	$17.00	$28.00	$12.00	$57.00	
14	Segmento 2	0	25.78	399.2	425		Segmento 2	$0.00	$1.31	$13.69	$15.00	Presupuesto
15	Total	600	825.78	1099.2	2,525		Total	$17.00	$29.31	$25.69	$72.00	<=$72

Celda	Fórmula	Cópiese a
D7	= M3*F5	—
I6	= C5*I5	J6:K6
C13	= C3*C9	C13:E14
I13	= C3*I9	I13:K14

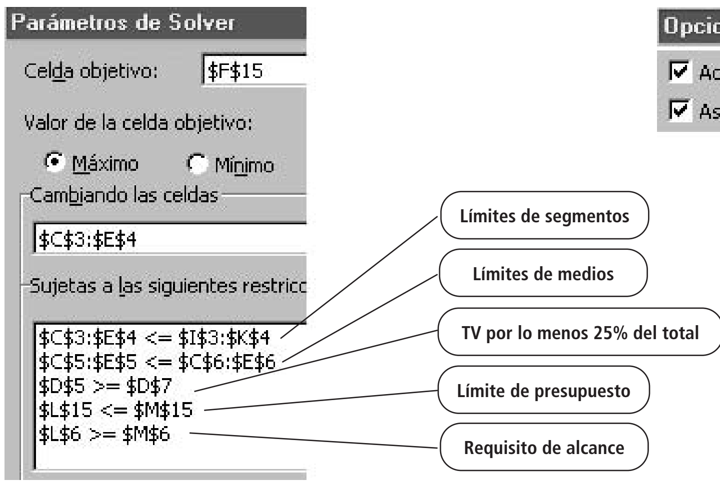


FIGURA 6.20

Hoja de cálculo para el modelo de selección de medios

6.13 MODELOS DINÁMICOS

La mayoría de los modelos que hemos visto hasta ahora en este libro se han limitado a un solo periodo, ya sea una semana, un mes o un año. Los modelos que abarcan un solo intervalo de tiempo se llaman **modelos estáticos** porque el tiempo no interviene en ellos, como no sea para definir las unidades de medición de alguna de las variables. En cambio, los **modelos dinámicos** están definidos para varios periodos y, evidentemente, son una abstracción más apegado a la realidad. Muchos modelos de decisión con propósitos administrativos incluyen toma de decisiones a través del tiempo; así, las posibilidades de tomar decisiones en el futuro son afectadas por las decisiones que se toman en periodos anteriores. Esta dependencia de toma de decisiones a través de múltiples periodos hace que los modelos dinámicos, utilizados con Solver, sean un método de análisis especialmente atractivo; la intuición humana tiende a fallar cuando se enfrenta a muchas decisiones relacionadas entre sí. Claro está que por el realismo adicional de los modelos dinámicos se tiene que pagar un precio: es preciso prestar atención a más detalles cuando se construye un modelo dinámico. Por ejemplo, generalmente cada periodo tiene su propia medida de desempeño, pero la optimización requiere que esas medidas individuales de desempeño se unifiquen en una sola, en la que se capte el desempeño a través de todos los periodos. Además, se debe definir con precisión el momento en que cada uno de los eventos se presente, para que así la secuencia de decisiones y resultados intermedios aparezca en orden correcto. La mejor forma de ilustrar éstas y otras ideas es estudiar un ejemplo sencillo de administración de inventario a través del tiempo.

MODELOS DINÁMICOS DE INVENTARIO

Los **modelos dinámicos de inventario,** llamados a menudo **modelos de inventario para periodos múltiples,** son un tipo importante de modelos que se prolongan de un periodo al siguiente y se aplican a inventarios de materiales, dinero en efectivo y empleados. Este ejemplo es un modelo clásico, llamado determinista, de inventario de un solo producto. Se llama *determinista* porque suponemos que la demanda (es decir, el número de pedidos por atender) en cada periodo futuro es conocida desde el principio del periodo 1. Por ejemplo, un fabricante de poliuretano tiene un buen número de pedidos para las próximas 6 semanas. Sea d_i un parámetro que denota esta demanda conocida (p. ej., el número de galones del producto que será necesario entregar a los clientes durante la semana i) y supongamos que $d_i > 0$ para toda i. Sea C_i el costo de elaborar un galón durante la semana i, y sea K_i la cantidad máxima que puede ser producida (a causa de limitaciones de la capacidad) en la semana i. Finalmente, sea h_i el costo unitario del inventario disponible al final de la semana i. (Por tanto, el inventario se mide por el número de galones en existencia desde la semana i hasta la semana $i + 1$.) Supongamos que el inventario inicial (al principio del periodo 1, del cual no se señalan cargos por mantenimiento en inventario) es conocido y se expresa como I_0 galones. Encuentre un plan de producción y mantenimiento de inventario que satisfaga el programa de entrega del producto para las próximas 6 semanas, previamente conocido, a un costo total mínimo.

Antes de formular el modelo de optimización restringido, será conveniente desarrollar una expresión para el inventario disponible al final de cada periodo. Ya que existe un cargo por mantenimiento de inventario, resulta claro que éste tendrá un papel que desempeñar en la función objetivo.

Sea I_i el inventario disponible al final de la semana i. Defina la variable de decisión x_i como los galones de poliuretano fabricados durante la semana i. La ecuación del balance de flujo para la semana 1 es

$$I_1 = I_0 + x_1 - d_1$$

Es decir, que el inventario disponible al final de la semana 1 es igual al inventario disponible al final de la semana 0 (el inicio de la semana 1), más la producción de la semana 1 menos las entregas de la semana 1. (Estamos suponiendo que toda la demanda deberá ser satisfecha. Por tanto, la demanda conocida en la semana i, d_i es, por definición, la cantidad entregada en la semana i.) En forma similar

$$I_2 = I_1 + x_2 - d_2$$

y, en general, el mismo razonamiento, aplicado a cualquier semana t, produce la siguiente expresión

$$I_t = I_{t-1} + x_t - d_t$$

Esta importante ecuación de balance de flujo de inventarios expresa que

$$\begin{aligned}\text{inventario al final de } t &= \text{inventario al inicio de } t\\ &+ \text{producción en } t - \text{demanda en } t\end{aligned}$$

donde suponemos que el inventario al final de la semana $t - 1$ es igual al inventario al inicio de la semana t. Si sustituimos la expresión conocida para I_1 en la ecuación correspondiente a I_2, obtenemos

$$I_2 = \underbrace{I_0 + x_1 - d_1}_{I_1} + x_2 - d_2 = I_0 + \sum_{i=1}^{2} x_i - \sum_{i=1}^{2} d_i$$

Dicho en palabras, eso significa que Producción + Viejo Inventario − Demanda = Nuevo Inventario. A continuación podemos sustituir la expresión anterior por I_2 en la ecuación correspondiente a I_3 y obtenemos

$$I_3 = I_0 + \sum_{i=1}^{3} x_i - \sum_{i=1}^{3} d_i$$

Repitiendo este procedimiento, llegamos a una ecuación de inventario equivalente

$$I_t = I_0 + \sum_{i=1}^{t} (x_i - d_i)$$

para cualquier semana t.

Observe que esta última expresión relaciona el inventario al final de la semana t con toda la producción previa (los valores x_i). La ecuación indica simplemente que el inventario al final de la semana t es igual al inventario inicial, más la producción total hasta la semana t, menos el total de producto entregado hasta la semana t. La variable I_t se conoce a veces como *variable de consecuencia* o *de definición*, porque se define en términos de otras variables de decisión (los valores x_i) del modelo. El uso de variables de definición hace que a veces resulte más fácil distinguir la formulación apropiada. Antes de escribir con palabras el modelo correspondiente a esta situación, debemos encontrar la forma de expresar que la producción en cada periodo debe ser, *por lo menos,* suficiente para que la demanda (es decir, la lista de entregas) pueda satisfacerse. En la semana 1, esto significa que $I_0 + x_1 \geq d_1$, o $I_0 + x_1 - d_1 \geq 0$. Como $I_0 + x_1 - d_1$ es igual que I_1, esto equivale a decir que el inventario al final de la semana 1 es no negativo. Satisfacer la demanda en la semana 2 significa que el inventario al inicio de la semana 2 (el final de la semana 1) más la producción de la semana 2 será $\geq d_2$. Es decir,

$$I_1 + x_2 \geq d_2 \text{ or } I_1 + x_2 - d_2 \geq 0$$

lo cual equivale a decir que el inventario al final de la semana 2 es no negativo. Ahora ya debe ser posible distinguir el patrón esencial.

La condición de que la demanda debe satisfacerse en un periodo t es equivalente a la condición de que el inventario I_t al final del periodo t debe ser no negativo.

Esto se ilustra en la figura 6.21.

Modelo verbal

Minimizar costo de producción + costo de inventario

sujeto a estas restricciones

inventario al final de la semana $t \geq 0$ $\quad$ t = 1, 2, . . . , 6

producción en la semana $t \leq K_t$ $\quad$ $t = 1, 2, \ldots, 6$

Variables de decisión

$$x_t = \text{producción en la semana } t$$

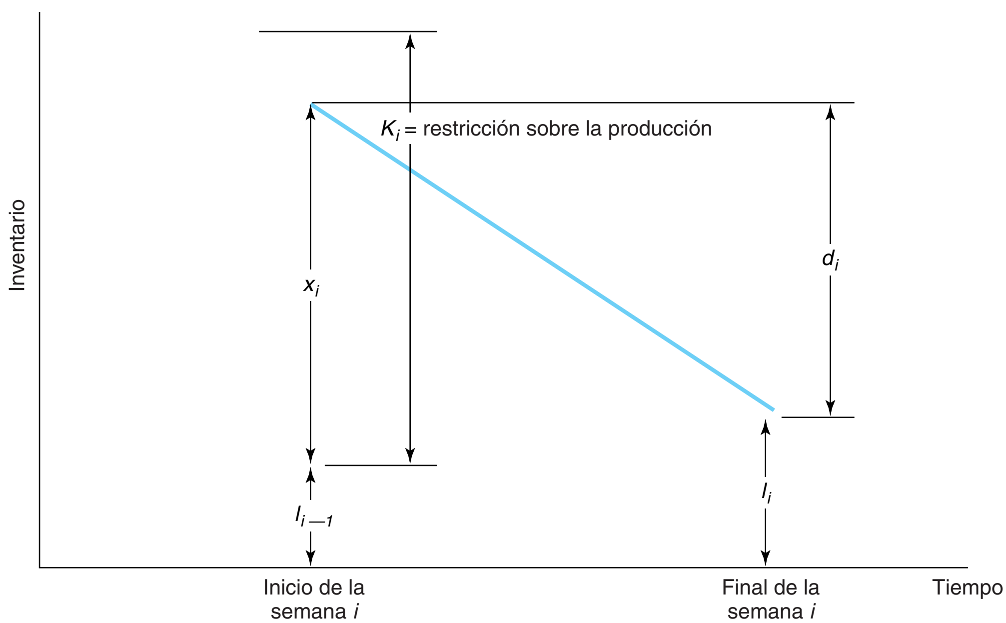


FIGURA 6.21

Diagrama de relaciones de inventario

El modelo

$$Min \sum_{t=1}^{6} C_t x_t + \sum_{t=1}^{6} h_t I_t$$

$$\text{s.a.} \quad \left.\begin{array}{l} I_t = I_{t-1} + x_t - d_t \\ x_t \leq K_t \\ x_t \geq 0, \qquad I_t \geq 0 \end{array}\right\} \; t = 1, 2, \ldots, 6$$

En general, la estructura de estos modelos es bastante compleja. Es decir, que en ellos se presentan interacciones de un gran número de variables. Por ejemplo, el inventario al final de un periodo t dado está determinado por todas las decisiones de producción tomadas en los periodos transcurridos desde 1 hasta t. Esto se desprende de la ecuación del inventario.

$$I_t = I_0 + \sum_{i=1}^{t} (x_i - d_i)$$

Por tanto, el costo en el periodo t está determinado también por todas las decisiones de producción tomadas en los periodos 1 a t. Por último, se observa que la formulación anterior puede escribirse en forma equivalente sin que aparezcan en ella las variables I_t.

Presentamos a continuación un ejemplo práctico de un modelo de inventario con periodos múltiples, es decir, la situación a la cual se enfrenta Andrew Tan.

UN INVENTARIO PARA PERIODOS MÚLTIPLES

Andrew Tan se encarga del montaje final y la entrega de los grandes generadores eléctricos industriales de PROTRAC, alimentados con diesel, en Singapur. Los generadores son ensamblados con partes importadas, se les somete a pruebas en Singapur y se exportan a los clientes asiáticos de PROTRAC. La tabla 6.16 muestra el número de generadores que deberán ser entregados en cada uno de los cuatro meses próximos, así como los cálculos estimados de Andrew sobre la capacidad de producción mensual y los costos variables de fabricación de dichos generadores. Estas capacidades y costos varían a causa de la logística del embarque de partes hacia las plantas y por la variabilidad del costo de los materiales básicos, en particular el alambre de cobre. En la tabla 6.16 aparecen también los costos que implica almacenar un generador completo en un almacén comercial, de un mes a otro. Los costos comerciales de almacenaje para grandes generadores son un factor significativo para Andrew, a causa de la extremada escasez de espacio en Singapur. Observe que la posibilidad de mantener el inventario de un mes al siguiente es el factor por el cual el caso de Andrew produce un modelo de inventario para periodos múltiples, mientras que si no hubiera opciones de inventario sería sólo una serie de cuatro modelos estáticos.

La tarea de Andrew consiste en fabricar y entregar el número necesario de generadores en el intervalo de cuatro meses, al menor costo total para dichos meses, considerando que al comienzo de enero tiene 15 generadores en inventario. La hoja de cálculo de la figura 6.22 presenta el modelo de Andrew junto con la solución óptima. En ella se aplica una convención muy común en los modelos dinámicos hechos en hojas de cálculo, por la cual a cada periodo corresponde una columna. En este modelo, los valores del inventario final que aparecen en las celdas C10:F10 son variables de consecuencia (o de definición) que, en este caso, se han calculado para cada mes como

$$= \text{producción} + \text{inventario inicial} - \text{requisitos de entrega}$$

TABLA 6.16 Datos mensuales para la producción de generadores

	ENE.	FEB.	MAR.	ABR.
Requerimientos de entrega	58	36	34	59
Capacidad de producción	60	62	64	66
Costos de producción unitarios (miles)	\$28	\$27	\$27.8	\$29
Costo de acarreo por unidad de inventario	\$300	\$300	\$300	\$300

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Producción de generadores eléctricos en Singapur						
2		Costos unitarios	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	
3		Producción	$28.0	$27.0	$27.8	$29.0		
4		Inventario	$0.3	$0.3	$0.3	$0.3		
5								
6		Cant. produc.	53	62	64	0		
7		Límites de producción	<=60	<=62	<=64	<=66		
8		Inventario inicial	15	10	36	66		
9		Requerim. entrega	58	36	34	59		
10		Inventario final	10	36	66	7	>=7	
11								
12		Costo de producción	$ 1,484.00	$ 1,674.00	$ 1,779.20	$ -		
13		Costo de inventario	$ 3.75	$ 6.90	$ 15.30	$ 10.95	Total (000s)	
14		Total	$ 1,487.75	$ 1,680.90	$ 1,794.50	$ 10.95	$ 4,974.10	
15								

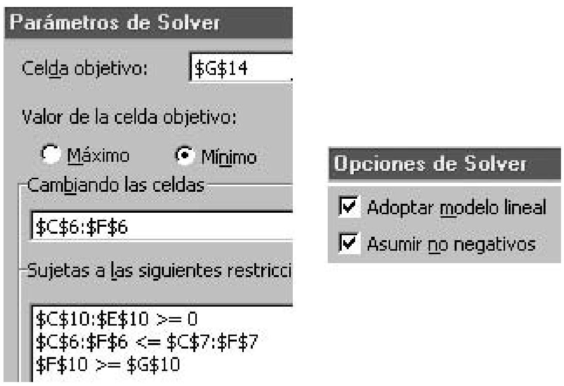


FIGURA 6.22

Modelo de producción e inventario para los generadores de Andrew

El inventario inicial de cada mes (celdas D8:F8) se establece de modo que sea igual al inventario final del mes anterior (celdas C10:E10). Como dijimos antes, se tiene que añadir una restricción de inventario final no negativo al diálogo de Parámetros de Solver. Así se evita que Solver reduzca artificialmente los costos recomendando que en un mes determinado se embarquen más generadores de los que existen en realidad.

En el modelo de Andrew están implícitas dos decisiones fundamentales que deben tomarse en todo modelo dinámico: el intervalo general de tiempo que abarca, conocido como el *horizonte de planeación* del modelo, y el número de épocas temporales discretas que se incluirán en ese intervalo. Para el modelo de Andrew, el horizonte de planeación es de cuatro meses, y el tiempo se divide en cuatro épocas de un mes cada una. Estas dos decisiones pueden influir profundamente en la utilidad del modelo para la situación de Andrew. Por ejemplo, por definición, el horizonte de planeación de cuatro meses significa que el modelo no puede tomar en cuenta requisitos de producción y entrega más allá de abril; es decir, que el mundo de la producción de generadores termina después de abril, en lo que se refiere al modelo.

Además, la escala de tiempo mensual discreta requiere que Andrew calcule aproximadamente las actividades que ocurren dentro de un mes, mediante un solo conjunto de números aplicables a dicho periodo. Por ejemplo, el inventario final de enero es el resultado de sumar la producción de ese mes y el inventario inicial, y restarle las entregas en enero, lo cual equivale a un solo número, aunque la cantidad real en inventario variará cada uno de los días del mes, a medida que se producen y entregan generadores. Para aclarar esto, considere el caso extremo en el que toda la producción se realiza el primer día hábil de enero, y todas las entregas se efectúan el último día laboral del mismo mes. En ese caso extremo, el costo de mantenimiento de inventario en enero se determina por la suma de la cantidad de producción más el inventario inicial, y no por dicha suma menos las entregas. En el otro extremo, si toda la producción y las entregas tuvieran lugar el último día hábil de enero, entonces los costos de mantenimiento de inventario para los generadores terminados sólo se aplicaría al inventario inicial de enero. Suponiendo que la producción y las entregas se presentaran uniformemente durante el mes, Andrew decidió aproximar los costos de inventario a partir del inventario promedio de cada mes: (inventario inicial + inventario final)/2. Esto es equivalente a suponer que toda la producción y las entregas se realizarán a la mitad del mes. Como es obvio, para captar el movimiento de generadores con más precisión durante el mes, sería necesario subdividir el modelo en más periodos, tal vez semanas, días o incluso horas. Una retícula de tiempo más fina permite efectuar mediciones más precisas del movimiento real de los generadores que entran y salen del inventario, lo cual ayuda a rastrear con mayor precisión los costos de inventario registrados en el modelo.

Además de usar una retícula de tiempo más fina para rastrear con mayor precisión los costos durante el mes, también los costos de Andrew asociados a actividades para los meses faltantes a partir de abril pueden incorporarse si se amplía el horizonte de planeación del modelo. Desgraciadamente, los horizontes de planeación más prolongados y las retículas de tiempo más finas hacen que el tamaño del modelo dinámico crezca en forma exponencial. Por ejemplo, un modelo diario con un horizonte de planeación de un año tendría cientos de columnas y pronto rebasaría el límite de 256 columnas de Excel y el límite de 200 variables de decisión de Solver. Además, aunque estas barreras técnicas pudieran reducirse, Andrew tendría que estimar muchos centenares más de valores para los parámetros, tales como los requisitos diarios de embarque de generadores, el costo diario de materiales y la capacidad de producción diaria para la fabricación de generadores. La tentación de reflejar un mayor realismo mediante retículas de tiempo más finas y horizontes de planeación más largos, en los modelos dinámicos, se conoce a menudo como la "maldición de la dimensionalidad", porque cada nueva columna añade una nueva dimensión al modelo, en términos de nuevas variables de decisión, vínculos entre las variables de decisión y las de consecuencias a través del tiempo, y parámetros que es preciso tomar en cuenta.

Finalmente, en todo modelo dinámico también se debe prestar atención a lo que se conoce como las "condiciones de borde" del mismo. Éstas son el conjunto de parámetros que deben especificarse al inicio y al final del periodo incluido en el modelo. En el modelo de Andrew, esos parámetros son los valores del inventario inicial en enero y el inventario final en abril. Igual que en el caso de Andrew en el cual el inventario inicial era de 15 generadores en enero, los valores iniciales de los parámetros suelen ser datos conocidos o fáciles de estimar. Sin embargo, la condición de borde final es más problemática porque debe ser sostenible como una condición inicial razonable para cualquier tiempo más allá del horizonte de planeación. En este modelo, Andrew decidió que 7 generadores para el inventario final en abril serían una "buena" condición de inventario inicial para los meses subsecuentes.

La figura 6.23 muestra el resultado de optimizar el modelo de Andrew cuatro veces, una para cada uno de los cuatro meses. Es decir, que primero Solver fue ejecutado solamente para enero, usando la producción de dicho mes como variable de decisión y el costo total de enero como función objetivo. Después se hizo lo mismo para febrero, y así sucesivamente hasta llegar a abril, con un total de cuatro ejecuciones de Solver. Observe que no se mantienen inventarios de un mes al siguiente, porque cada mes se considera como un modelo estático por separado;[5] la producción que exceda los embarques requeridos en un mes eleva el costo total y, en un modelo estático, no existen ahorros compensatorios. Por esta razón, a veces se dice que los modelos estáticos son "miopes", puesto que pasan por alto muchas consecuencias de las decisiones ac-

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Producción de generadores eléctricos en Singapur						
2		Costos unitarios	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	
3		Producción	$28.0	$27.0	$27.8	$29.0		
4		Inventario	$0.3	$0.3	$0.3	$0.3		
5								
6		Cant. producción	43	36	34	66		
7		Límites de producción	<=60	<=62	<=64	<=66		
8		Inventario inicial	15	0	0	0		
9		Requerim. entrega	58	36	34	59		
10		Inventario final	0	0	0	7	>=7	
11								
12		Costo de producción	$ 1,204.00	$ 972.00	$ 945.20	$1,914.00		
13		Costo de inventario	$ 2.25	$ -	$ -	$ 1.05	Total (000s)	
14		Total	$ 1,206.25	$ 972.00	$ 945.20	$1,915.05	$ 5,038.50	
15								

FIGURA 6.23

Modelo de Andrew optimizado como cuatro modelos estáticos

[5]Las cifras de los dos costos de inventarios que aparecen en enero y abril, en la figura 6.23, representan el costo, a medio mes, del mantenimiento del inventario inicial para enero y el inventario final requerido para abril.

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas por ajustar

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$C$6	Cant. producción, ene	53	0	29.05	0.10	0.8
$D$6	Cant. producción, feb.	62	-1.3	27.75	1.3	1E+30
$E$6	Cant. producción, mar	64	-0.8	28.25	0.8	1E+30
$F$6	Cant. producción, abr.	0	0.1	29.15	1E+30	0.10

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	LD de la restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
$F$10	Inventario final, abr.	7	29.05	7	7	10
$C$10	Inventario final, ene.	10	0	0	10	1E+30
$D$10	Inventario final, feb.	36	0	0	36	1E+30
$E$10	Inventario final, mar.	66	0	0	66	1E+30

FIGURA 6.24

Informe de sensibilidad del modelo de inventario de Andrew para cuatro meses

tuales sobre los resultados futuros. Las ventajas de usar un solo modelo dinámico de cuatro meses, en lugar de cuatro modelos estáticos mensuales, se ilustran comparando la diferencia entre los costos totales en cuatro meses que aparecen en las figuras 6.22 y 6.23. Observamos un ahorro mayor de $64,000 en este caso. Basta un poco de reflexión para convencerse de que el modelo dinámico de la situación de toma de decisiones en cuatro meses de Andrew nunca podrá producir resultados peores que si usamos cuatro modelos estáticos para la misma situación.

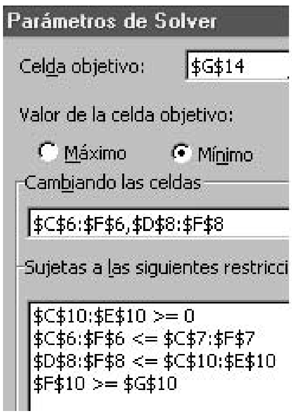
La figura 6.24 muestra el Informe de sensibilidad para el modelo dinámico de cuatro meses de la figura 6.22. Observe que como los cuatro límites de producción fueron especificados como simples cotas superiores para las variables de decisión de la producción, los precios sombra de esas restricciones aparecen en la columna de costo reducido del Informe de sensibilidad y, por tanto, no se ofrece información acerca de intervalos para esos precios sombra. Además, a primera vista, los coeficientes objetivo para el modelo del Informe de sensibilidad parecen ser incorrectos. Por ejemplo, el coeficiente de la función objetivo para la producción de enero aparece como $29,050, mientras que el costo de producción variable de un generador en enero es de $28,000, como podemos apreciar en la figura 6.22.

Muchos usuarios de Solver suponen que éste “lee” de alguna manera cada coeficiente objetivo en la celda correspondiente de la hoja de cálculo activa. En realidad Solver no lo hace así, porque el cálculo de ese coeficiente puede encontrarse disperso entre las fórmulas de varias celdas en el modelo original de la hoja de cálculo. En lugar de eso, Solver “ejercita” la hoja de cálculo en forma individual para cada variable de decisión, ensaya con algunos valores y tabula el efecto que cada uno de esos cambios produce en el valor de la función objetivo, una vez que la hoja de cálculo vuelve a trabajarse. A partir de esa información, Solver estima los coeficientes objetivo.[6] Por supuesto, esto no responde la pregunta de por qué existe una discrepancia entre el costo variable de producción en enero y el coeficiente objetivo para la producción en ese mes estimado por Solver y tabulado en el Informe de sensibilidad.

Podemos observar con facilidad que los $29,050 representan el costo de producción de un generador en enero más el costo de mantenimiento de $1,050 para conservar ese generador $3^1/_2$ meses en inventario, hasta mayo. (Recuerde que el uso de los niveles de inventario promedio de Andrew es equivalente a suponer que la producción tiene lugar a mediados de un mes.) Usted puede comprobar que $29.05 es en realidad el coeficiente objetivo correcto, si abre la hoja de cálculo de la figura 6.22 en Excel, teclea una decisión de producción tentativa para enero, observa el número total que corresponde al costo por cuatro meses, y suma después 1 a esa decisión de producción provisional para enero. Observará que el generador adicional fabricado en enero se sumará a los niveles de inventario de todos los meses futuros y elevará en uno el inventario final de abril, produciendo en consecuencia un incremento de $29.05 en el costo total correspondiente a esos cuatro meses.

[6]Este procedimiento para la estimación de coeficientes es similar a lo que Solver realiza mientras se presenta el mensaje “Planteando el problema...”, que aparece cuando usted hace clic en el botón Resolver. (Para los lectores que tienen inclinación matemática, diremos que Solver desarrolla una serie de Taylor para la función objetivo a partir de esta información, y usa dicha serie en su proceso de optimización. Con modelos de PL, la estimación de la serie de Taylor es exacta.)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Producción de generadores eléctricos en Singapur						
2		Costos unitarios	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	
3		Producción	$28.0	$27.0	$27.8	$29.0		
4		Inventario	$0.3	$0.3	$0.3	$0.3		
5								
6		Cant. producción	53	62	64	0		
7		Límites de producción	<=60	<=62	<=64	<=66		
8		Inventario inicial	15	10	36	66		
9		Requerim. entrega	58	36	34	59		
10		Inventario final	10	36	66	7	>=7	
11								
12		Costo de producción	$ 1,484.00	$ 1,674.00	$ 1,779.20	$ -		
13		Costo de inventario	$ 3.75	$ 6.90	$ 15.30	$ 10.95	Total (000s)	
14		Total	$ 1,487.75	$ 1,680.90	$ 1,794.50	$ 10.95	$ 4,974.10	
15								



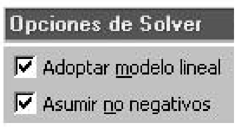


FIGURA 6.25

Modelo de producción de Andrew donde las decisiones son el inventario inicial

Para entender por qué $29.05 es el coeficiente correcto para enero, recordemos que todo lo demás (los generadores producidos y entregados durante los otros meses) se mantiene constante y, por tanto, ese generador añadido en enero no puede tener cabida en ningún otro lugar, salvo en el inventario final de abril. Sin embargo, durante la optimización del modelo por Solver, ese generador agregado en enero crea una oportunidad para que Solver reduzca la decisión de producción de otro mes. Por ejemplo, si el generador adicional de enero permitiera que Solver redujera la producción de febrero en uno, el efecto neto sería la diferencia entre los dos coeficientes objetivo para enero y febrero, $29,050 − $27,750 = $1,300. Esta diferencia representa correctamente el impacto de estos dos cambios simultáneos sobre el costo incrementado; es decir, el hecho de trasladar la producción de un generador de febrero a enero hace que el costo de producción $28,000 − $27,000= $1,000 más alto de enero, más el costo de $300 para mantener en inventario el generador producido en enero, se refleje a mediados de febrero. Así pues, los coeficientes objetivo que ocasionaban confusiones en el Informe de sensibilidad son correctos y resultan de las interacciones más complejas que tienen lugar entre las distintas variables de decisión de un modelo dinámico.

Una segunda versión del modelo de Andrew aparece en la figura 6.25. Su diferencia con el modelo original de Andrew, que vemos en la figura 6.22, es que el inventario inicial de cada mes (celdas D8:F8) no está formulado como una variable de consecuencia, sino como una variable de decisión.[7] Por supuesto, a fin de que este enfoque tenga sentido, es necesario agregar restricciones para impedir que Solver considere el inventario inicial como una decisión independiente de las decisiones de producción. En este caso, el inventario inicial en D8:F8 está restringido, pues no puede ser mayor que el inventario final C10:E10 del mes anterior. Además de esta complicación adicional, el modelo de la figura 6.25 es lógicamente equivalente al modelo original

[7]Observe que los intervalos no contiguos de variables de decisión pueden introducirse en el casillero “Cambiando las celdas” de Solver, separados por una coma.

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas por ajustar

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
$C$6	Cant. producción, ene.	53	0	28.15	0.1	0.8
$D$6	Cant. producción, feb.	62	-1.3	27.15	1.3	1E+30
$E$6	Cant. producción, mar.	64	-0.8	27.95	0.8	1E+30
$F$6	Cant. producción, abr.	0	0.1	29.15	1E+30	0.1
$D$8	Inventario inicial, feb.	10	0	0.3	0.1	0.8
$E$8	Inventario inicial, mar.	36	0	0.3	0.1	0.8
$F$8	Inventario inicial, abr.	66	0	0.3	0.1	29

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	LD de la restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
$F$10	Inventario final, abr.	7	29	7	7	10
$C$10	Inventario final, ene.	10	0	0	10	1E+30
$D$10	Inventario final, feb.	36	0	0	36	1E+30
$E$10	Inventario final, mar.	66	0	0	66	1E+30
$D$8	Inventario inicial, feb.	10	-28.15	0	10	7
$E$8	Inventario inicial, mar.	36	-28.45	0	10	7
$F$8	Inventario inicial, abr.	66	-28.75	0	10	7

FIGURA 6.26

Informe de sensibilidad para el modelo revisado de Andrew

de Andrew de la figura 6.22. Sin embargo, las ventajas de esta otra formulación son evidentes si observamos su respectivo Informe de sensibilidad en la figura 6.26.

Observe que la información adicional de interés para la gerencia aparece en el Informe de sensibilidad de este modelo. Por ejemplo, la sensibilidad del costo total a los cambios del costo de mantenimiento de inventario se evidencia ahora de inmediato porque la estructura del modelo de la figura 6.25 incluye variables de decisión y restricciones adicionales al inventario y, por tanto, también los márgenes de sus precios sombra y sus coeficientes, todo lo cual era imperceptible cuando el modelo del inventario tenía solamente una variable de consecuencia. En general, al formular un modelo dinámico es necesario meditar con anterioridad cuáles deberán ser las variables de consecuencia y cuáles serán las variables de decisión. Con una formulación bien diseñada, se puede generar a menudo valiosa información adicional para la gerencia. Observe también, en la figura 6.26, un beneficio adicional del nuevo modelo: al modelar el inventario como una variable de decisión, los costos unitarios se aíslan en coeficientes de producción por separado (costo unitario más la mitad del costo de mantenimiento mensual) y los coeficientes de inventario, con lo cual se logra que los coeficientes de la función objetivo aparezcan tal como se especificó originalmente en el modelo construido en la hoja de cálculo.

En la siguiente sección presentaremos otros dos ejemplos de modelos dinámicos para ilustrar la gama de situaciones que es posible representar por medio de modelos. El primero de ellos, el de Bumles, nos presenta un modelo de inventario más complicado con periodos múltiples.

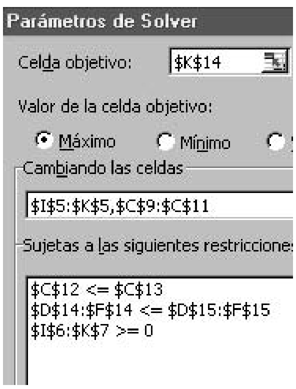
6.14 EJEMPLOS DE MODELOS DINÁMICOS

BUMLES, INC. (CONTROL DE PRODUCCIÓN E INVENTARIO)

Bumles, Inc. utiliza parte de su capacidad de producción en su planta de Sudamérica para fabricar teteras pintadas a mano. Cada tetera requiere 0.5 hora de trabajo de un pintor. Bumles tiene 30 pintores disponibles. La planta se usa para fabricar teteras el jueves, viernes y sábado de cada semana. El resto de la semana, la capacidad productiva se destina a otra línea de productos. No siempre participan los 30 pintores, pero cada uno de los que intervienen está disponible para trabajar cualquier fracción de una jornada laboral de 8 horas, 2 días a la semana. Un pintor puede ser asignado a cualquier programa de 2 días y se le pagan 16 horas de trabajo regular, sin importar qué fracción de ese tiempo dedique realmente a la producción de teteras. Si no hay suficiente producción para tener ocupados durante todo el día a todos los trabajadores asignados a dicha tarea, el tiempo restante (holgura) se dedica a la limpieza de la planta y a otras actividades similares.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		**Modelo de Bumles**		**Jueves**	**Viernes**	**Sabado**			**Jueves**	**Viernes**	**Sabado**	
2		Precio de la tetera	$15	$15	$15			Demanda	100	300	600	
3		Tasa salarial/hora	$8	$8	$8			Inventario inicial	0	0	120	
4		Costo de manejo de inventario	$0.5	$0.5	$0.5			Producción	60	420	480	
5		Costo unitario de las ventas perdidas	$1	$3	$5			Ventas	60	300	600	
6		Horas/teteras	0.5	0.5	0.5			Inventario final	0	120	0	
7		Horas/día	8	8	8			Ventas perdidas	40	0	0	
8												
9		# pintores prog. JV	0	0	0			Ingresos	$900	$4,500	$9,000	
10		# pintores prog. JS	3.75	3.75		3.75		Costo del trabajo	$240	$1,680	$1,920	
11		# pintores prog. VS	26.25		26.25	26.25		Costo man. inventario.	$0	$60	$0	
12		Total de pintores empleados	30	3.75	26.25	30		Costo de ventas perdidas	$40	$0	$0	
13		Pintores disponibles	<=30					Contribución	$620	$2,760	$7,080	
14		Horas de trabajo requeridas		30	210	240			Contribución total		$10,460	
15		Horas de trabajo disponibles		<=30	<=210	<=240						
16												

Celda	Fórmula	Cópiese a
D14	= I4*D6	E14:F14
D15	= D12*D7	E15:F15
I6	= I3−I5+I4	J6:K6
I7	= I2-I5	J7:K7
I10	= D12*D3*D7	J10:K10



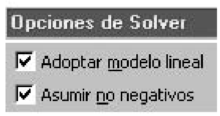


FIGURA 6.27

El modelo de producción de Bumles

Si no se toman en cuenta los costos de mano de obra, el ingreso neto (después de descontar otros costos) por la venta de una tetera es $15. La demanda debe satisfacerse el día que se presenta, pues de lo contrario se perderá. La producción en un día determinado puede usarse para satisfacer la demanda de ese día o la que se presente después, durante la semana (es decir, las teteras fabricadas el jueves pueden usarse para satisfacer la demanda del viernes o el sábado). Sin embargo, a causa del cambio en las operaciones de la planta para fabricar estatuas pintadas a mano los lunes, martes y miércoles, todas las teteras fabricadas durante la semana deben embarcarse en el curso de la misma (esto quiere decir que nunca existe un inventario el jueves por la mañana). En virtud del aumento de los costos de manejo, cuesta $0.50 mantener una tetera en el inventario final desde un día hasta el siguiente. Una unidad de demanda perdida se traduce en un costo de penalización total de $1 por unidad los jueves, $3 los viernes y $5 los sábados. A los pintores se les paga $8 por hora de trabajo. La demanda semanal de teteras es de 100 los jueves, 300 los viernes y 600 los sábados.

La figura 6.27 ilustra el modelo de Bumles, en el cual los pintores y la producción se han programado con miras a maximizar los ingresos menos los costos, considerando que los costos equivalen al trabajo más la penalización más los costos de mantenimiento de inventario. Como las ventas pueden ser menores que la demanda, el modelo relaciona las ventas, la demanda y las ventas perdidas en un día determinado, mediante:

$$\text{ventas perdidas el día } x = \text{demanda el día } x - \text{ventas el día } x$$

Además de la relación anterior entre la demanda, las ventas y las ventas perdidas, el modelo incluye también la siguiente relación de balance de materiales entre la producción, el inventario y las ventas:

inventario al final del día x = inventario al inicio del día x + producción del día x − ventas del día x

Por último, como vimos anteriormente con el modelo de Andrew, el balance de materiales durante los periodos sucesivos queda incluido al exigir que el inventario inicial de cada día sea igual al inventario final del día anterior. Estas relaciones han sido captadas en las fórmulas de las celdas I3:K7, donde las variables de decisión para cada día son el número de teteras por producir y el número de éstas por vender. De este modo, las ventas perdidas cada día y el inventario final del mismo se interpretan como variables de definición, es decir, variables de consecuencia. Una forma equivalente de expresar lo anterior consiste en decir que el inventario y las ventas perdidas se han interpretado como variables dependientes.

Las demás decisiones que Bumles debe tomar son el número de pintores que habrá de programar para cada uno de los tres turnos de dos días en las celdas C9:C11. Las celdas D9:F11 contienen referencias a C9:C11 a fin de asignar los pintores incluidos en cada programa a los días apropiados. El cuadro de diálogo de Parámetros de Solver contiene la restricción I6:K7> = 0 esto significa que, en un día dado, no puede haber ni inventarios negativos ni ventas perdidas negativas. Esto último se requiere para asegurarse de que las ventas no excedan a la demanda ninguno de esos días.

WINSTON-SALEM DEVELOPMENT CORPORATION (PLANEACIÓN FINANCIERA)

Ésta es una aplicación interesante de los modelos dinámicos de PL en la planeación financiera. Winston-Salem Development Corporation (WSDC) está tratando de completar sus planes de inversiones para los dos próximos años. En la actualidad, WSDC tiene $2,000,000 disponibles para invertir. En 6, 12 y 18 meses, WSDC espera recibir un flujo de ingresos de sus inversiones precedentes. Los datos se presentan en la tabla 6.17. Hay dos proyectos de desarrollo en los cuales WSDC está considerando la posibilidad de participar, junto con otros inversionistas.

1. El desarrollo urbanístico de Foster City. Si WSDC participa en un nivel de 100%, tendrá el flujo de efectivo proyectado que muestra la tabla 6.18 (los números negativos representan inversión y los positivos, ingresos). Así, para participar en el proyecto de Foster City al nivel de 100%, WSDC tendría que aportar de inmediato $1,000,000. En 6 meses haría otro desembolso de $700,000, y así sucesivamente.

2. El segundo proyecto consiste en hacerse cargo de la administración de varios viejos conjuntos de Vivienda para Gente de Medianos Ingresos, con la condición de financiar ciertas reparaciones iniciales en los inmuebles. El flujo de efectivo para este proyecto, con un nivel de participación de 100%, sería el que aparece en la tabla 6.19.

TABLA 6.17 Ingresos procedentes de inversiones previas

	6 MESES	12 MESES	18 MESES
Ingresos	$500,000	$400,000	$380,000

TABLA 6.18 Flujo de efectivo de Foster City

	INICIAL	6 MESES	12 MESES	18 MESES	24 MESES
Ingresos	$−1,000,000	$−700,000	$1,800,000	$400,000	$600,000

TABLA 6.19 Flujo de efectivo del proyecto de Vivienda para gente de medianos ingresos

	INICIAL	6 MESES	12 MESES	18 MESES	24 MESES
Ingresos	$−800,000	$500,000	$−200,000	$−700,000	$2,000,000

Por política de la compañía, a WSDC no se le permite recibir dinero en préstamo. Sin embargo, al comienzo de cada periodo de 6 meses, todos los fondos excedentes (los que no hayan sido asignados ni a Foster City ni a Vivienda para gente de medianos ingresos) serán invertidos en un certificado de depósito (CD) que produce un rédito de 7% durante ese periodo de 6 meses. WSDC puede participar en cualquier proyecto a un nivel inferior de 100%, en cuyo caso otros inversionistas aportarán la diferencia, y todos los flujos de efectivo de ese proyecto se reducirán proporcionalmente para WSDC. Por ejemplo, si WSDC optara por participar en Foster City a un nivel de 30%, los flujos de efectivo asociados a esta decisión serían 0.3 veces los datos presentados en la tabla correspondiente a Foster City. La tarea actual de WSDC consiste en decidir qué parte de los $2,000,000 disponibles deberá invertir en cada uno de los proyectos, y cuánto tendrá que invertir en un certificado por un rédito semestral de 7%. La meta de la gerencia es *maximizar el efectivo disponible al final de 24 meses.*

En las restricciones de este modelo es necesario señalar que, al inicio de cada uno de los cuatro periodos de 6 meses: dinero invertido $\leq$ dinero disponible. Por tanto, definamos ahora las variables de decisión:

F = participación parcial en el proyecto de Foster City
M = participación parcial en el proyecto de Vivienda para gente de medianos ingresos
S_1 = excedente de los fondos iniciales (no invertido inicialmente en F o M) que se invertirá en un CD a 7%
S_2 = fondos excedentes al cabo de 6 meses que se invertirán en un CD a 7%
S_3 = fondos excedentes después de 12 meses que se invertirán en un CD a 7%
S_4 = fondos excedentes después de 18 meses que se invertirán en un CD a 7%

Entonces, la primera restricción debe expresarse así:

$$\text{inversión inicial} \leq \text{fondos iniciales disponibles, o}$$
$$1{,}000{,}000F + 800{,}000M + S_1 \leq 2{,}000{,}000$$

En virtud de que el interés pagado S_1 alcanza el valor de $1.07S_1$ después de 6 meses, y lo mismo ocurre con S_2, S_3 y S_4, las tres restricciones restantes son

$$\begin{aligned}700{,}000F + S_2 &\leq 500{,}000M + 1.07S_1 + 500{,}000\\ 200{,}000M + S_3 &\leq 1{,}800{,}000F + 1.07S_2 + 400{,}000\\ 700{,}000M + S_4 &\leq 400{,}000F + 1.07S_3 + 380{,}000\end{aligned}$$

Las restricciones anteriores equilibran los flujos (de efectivo en este caso) de un periodo a otro. Observe que en las restricciones se podrían haber usado igualdades en lugar de desigualdades, puesto que el flujo no invertido no genera réditos. Sin embargo, el buen estilo en la construcción de modelos aconseja que no se empleen igualdades, a menos que sea indispensable. La formulación de estos modelos por medio de desigualdades le brinda oportunidad para que Solver confirme esta idea acerca del efectivo ocioso, pues verá usted que esta herramienta hace que las restricciones de desigualdad sean activas durante la optimización.

La función objetivo es maximizar el efectivo (no descontado) disponible al final de los 24 meses, que es

$$600{,}000F + 2{,}000{,}000M + 1.07S_4$$

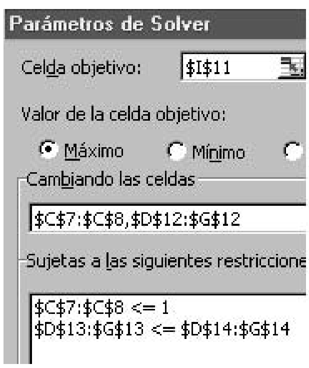
Así pues, hemos desarrollado el siguiente modelo:

$$\begin{array}{lll}\text{Max} & 600{,}000F + 2{,}000{,}000M + 1.07S_4 & \\ \text{s.a.} & 1{,}000{,}000F + 800{,}000M + S_1 & \leq 2{,}000{,}000\\ & 700{,}000F - 500{,}000M - 1.07S_1 + S_2 & \leq 500{,}000\\ & -1{,}800{,}000F + 200{,}000M - 1.07S_2 + S_3 & \leq 400{,}000\\ & -400{,}000F + 700{,}000M - 1.07S_3 + S_4 & \leq 380{,}000\end{array}$$
$$\mathrm{F} \leq 1, \text{ y } \mathrm{M} \leq 1$$
$$F \geq 0, M \geq 0, S_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

El modelo construido en la hoja de cálculo aparece en la figura 6.28. Las variables de decisión son el monto de efectivo excedente que se invertirá en un CD (celdas D12:G12) y el porcentaje de participación en los dos proyectos (celdas C7:C8). Los montos de inversión que aparecen en las celdas D7:G8 se calculan multiplicando el porcentaje de participación en el proyecto por los requerimientos de flujo de efectivo que se encuentran en las celdas D3:I4. Por comodidad y para respetar las restricciones anteriores, la convención de signos se ha invertido en los valores de las inversiones, en la porción del modelo correspondiente a desembolsos en efectivo.

	B	C	D	E	F	G	I
1	Proyecto de Desarrollo Winston Salem						
2	Tasa de interés CD	7%	**Inicial**	**6 mes.**	**12 mes.**	**18 mes.**	**24 mes.**
3	Flujo de efectivo en Foster City		$ (1,000)	$ (700)	$ 1,800	$ 400	$ 600
4	Flujo de efect. en Medianos ingresos		$ (800)	$ 500	$ (200)	$ (700)	$ 2,000
5			**Desembolsos en efectivo**				
6	**Fondos invertidos**	Participación en el proyecto	Inversión inicial	6 meses	12 meses	18 meses	**Efectivo en réditos (24 meses)**
7	Foster City	100%	$ 1,000	$ 700	$ (1,800)	$ (400)	$ 600
8	Middle Income	100%	$ 800	$ (500)	$ 200	$ 700	$ 2,000
9	Vencimiento del CD			$ (200)	$ (514)	$ (2,550)	$ 2,808
10	Ingreso por intereses del CD			$ (14)	$ (36)	$ (178)	197
11	Requerimientos totales de efectivo		$ 1,800	$ (14)	$ (2,150)	$ (2,428)	$ 5,605
12	Efectivo excedente invertido en CD		$ 200	$ 514	$ 2,550	$ 2,808	
13	Nuevo efectivo invertido		$ 2,000	$ 500	$ 400	$ 380	
14	Nuevo efectivo disponible		<=$2000	<=$500	<=$400	<=$380	
15							

Celda	Fórmula	Cópiese a
E9	= −D12	F9:G9
E10	= −D12*$C$2	F10:G10
D13	= D11+D12	E13:G13



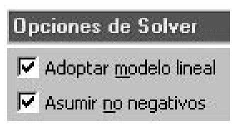


FIGURA 6.28

Modelo de desarrollo para Winston-Salem

6.15 RESUMEN

Este capítulo estuvo dedicado a ciertas aplicaciones de la programación lineal. La sección 6.2 correspondió al modelo de transporte. El modelo genérico consiste en determinar el método de menor costo para satisfacer la demanda en múltiples destinos, embarcando materiales tomados de las existencias disponibles en diversos lugares de origen. Este modelo fue construido para analizar un problema específico de PROTRAC-Europa. En la sección 6.3 mostramos las adaptaciones que es necesario realizar para resolver el modelo de transporte cuando los modelos difieren del original. Finalmente, vimos que el modelo de transporte tiene una propiedad especial: si todas las ofertas y demandas son valores enteros, existe una solución óptima cuyo valor también es entero.

La sección 6.4 trató sobre el modelo de asignación, siguiendo la pauta del modelo de transporte. El modelo genérico de asignación consiste en asignar *n* personas a *n* tareas para minimizar el costo total de las asignaciones. Este modelo fue motivado también por un problema específico de PROTRAC-Europa. En este proceso observamos que el modelo de asignación es un tipo especial de modelo de transporte, donde todas las ofertas y demandas tienen valor de 1.

Las secciones 6.5 a 6.10 estuvieron dedicadas a modelos de red. Los modelos de red son importantes por varias razones. Para empezar, gran variedad de modelos del mundo real pueden formularse como modelos de red. Los flujos incluidos en ellos pueden representar cantidades físicas, paquetes de datos de Internet, dinero en efectivo, vehículos, etc. Con frecuencia, los modelos de grandes dimensiones son los que se prestan para el enfoque de red. Podemos imaginar, por ejemplo, el modelo de red de una empresa internacional que se dedica a la fabricación de papel. La red podría corresponder a un sistema de distribución general en periodos múltiples, desde el bosque hasta el almacén de madera, gran diversidad de fábricas de papel, almacenes sumamente dispersos, e incluso distribuidores mayoristas en numerosos distritos de comercialización. Un modelo correspondiente a una operación tan vasta crea la posibilidad de obtener ganancias cuantiosas al mejorar la eficiencia en las operaciones mundiales de la firma. Además, con restricciones poco estrictas sobre los datos, siempre será válido decir que existen soluciones óptimas con valores enteros.

Con frecuencia, el elemento crucial en la construcción de modelos de red es el ingenio del constructor para reflejar el complejo modelo original en un formato de red. De ordinario, esto es mucho más que un simple ejercicio de formulación de modelos y a menudo requiere una larga experiencia práctica en las operaciones representadas en el modelo.

En la sección 6.11 expusimos y formulamos el ejemplo de un modelo de PL utilizado para la planeación financiera y de producción, y en la sección 6.12 analizamos la selección de medios publicitarios en el contexto de la mercadotecnia.

Los modelos dinámicos fueron expuestos con cierto detalle en la sección 6.13. Se estableció la diferencia entre los modelos estáticos (de un periodo) y los modelos dinámicos. Observamos que, en términos de resultados, un modelo dinámico construido para un horizonte de planeación determinado siempre puede funcionar igualmente bien, y a menudo mucho mejor, que una serie de modelos estáticos hechos para abarcar el mismo horizonte de tiempo. Para la correcta formulación de modelos dinámicos, es necesario prestar atención a las definiciones de variables dentro de un periodo y a la ubicación cronológica de las actividades y los avances del flujo de materiales a través de los distintos periodos. Es preciso determinar las condiciones limítrofes para los periodos inicial y final. En la sección 6.14 desarrollamos otros dos ejemplos ilustrativos de los modelos dinámicos.

Términos clave

Arco. Punto de conexión entre dos nodos de una red.

Degeneración. Condición reconocible en un modelo de transporte por el hecho de que en él se utiliza un número de rutas menor que $(m + n - 1)$.

Destino. Nodo de una red en el cual la demanda es positiva.

Diagrama de red. Representación esquemática constituida por una serie de nodos y arcos a través de los cuales puede transitar el flujo.

Ecuación de balance (equilibrio) de flujo. Restricción para el balance de materiales en un modelo de red, según la cual la suma de la oferta más el flujo total que entra en un nodo tiene que ser igual a la suma de la demanda más el flujo total que sale de dicho nodo.

Matriz de incidencia nodo-arco. Formato de tabla para presentar los datos de las restricciones en un modelo de red. A cada uno de los arcos de la red corresponde una columna de la tabla. A cada nodo le corresponde una fila de la tabla. Cada columna tiene solamente dos entradas diferentes de cero, $+1$ y -1. El $+1$ (-1) se encuentra en la fila correspondiente al nodo en el cual se origina (o termina) el arco.

Modelo de asignación. Modelo para determinar la asignación óptima de n agentes u objetos "indivisibles" a n tareas.

Modelo de flujo máximo. Modelo cuyo objetivo es conducir el máximo volumen de flujo a través de una red.

Modelo de inventario dinámico. Modelo dinámico para la toma de decisiones que afecta inventarios de objetos en múltiples periodos.

Modelo de inventario para periodos múltiples. Significa lo mismo que el modelo de inventario dinámico.

Modelo de la ruta más corta. Modelo para encontrar el camino más corto, dentro de una red, desde un nodo específico (el origen) hasta otro nodo.

Modelo de red. En general, se refiere al modelo de transbordo con capacidades o alguna de sus formas especiales.

Modelo de transbordo con capacidades.. Modelo de red donde las ofertas están en puntos de origen específicos, las demandas se localizan en puntos de destino específicos y las diversas alternativas de embarque se ofrecen a través de nodos intermedios, siguiendo rutas cuyas capacidades están definidas desde los orígenes hasta los destinos.

Modelo de transporte. Modelo de PL para encontrar la forma menos costosa de satisfacer demandas en n destinos con suministros de m orígenes.

Modelo dinámico. Modelo de toma de decisiones interrelacionadas, en múltiples periodos, en el cual el conjunto de decisiones posibles en periodos posteriores se ve afectado por las decisiones tomadas en periodos anteriores.

Modelo estático. Modelo en el que las decisiones se toman en un solo periodo sin considerar sus efectos sobre periodos futuros.

Nodo. Uno de los elementos de una red.
Origen. Nodo de una red en el cual la oferta es positiva.
Origen ficticio. Fuente u origen imaginario que se agrega a un modelo de transporte para que la oferta total sea igual a la demanda total.
Rama. Sinónimo de *arco*.
Unidades de exposición. Medida arbitraria de las "bondades" de un anuncio, utilizada para resolver modelos de selección de medios publicitarios.

Ejercicios de repaso

Verdadero-falso

1. **V F** El coeficiente de x_{ij} en la función objetivo de un modelo de transporte es el costo de transporte de una unidad desde i hasta j.
2. **V F** Si en un modelo de transporte la demanda total es mayor que la oferta total, una opción para encontrar una solución consiste en agregar un origen ficticio cuyo costo de transporte a todos los destinos es cero.
3. **V F** Un modelo de transporte no puede tener una solución óptima con valores enteros, a menos que todas las ofertas, demandas y costos de transporte tengan valores enteros.
4. **V F** Un modelo de transbordo con capacidades tiene una variable para cada nodo.
5. **V F** Una matriz de incidencia nodo-arco para el modelo de red tiene un solo $+1$, un solo -1, y un 0 en todas las demás entradas de cada columna.
6. **V F** En un modelo de transbordo con capacidades, si el lado derecho de la desigualdad de capacidad de cualquier arco es cero, el modelo no es factible.
7. **V F** Una serie de modelos estáticos definidos por separado para cada uno de los periodos que forman un horizonte de planeación, siempre dará un resultado por lo menos tan bueno como el producido por un solo modelo dinámico definido para el mismo horizonte total de planeación.

Opción múltiple

8. La degeneración se presenta en un modelo de transporte cuando
   a. la demanda es mayor que la oferta
   b. la oferta es mayor que la demanda
   c. se usan menos de $(m + n - 1)$ celdas
   d. ninguna de las afirmaciones anteriores
9. El modelo de asignación
   a. es un caso especial del modelo de transporte
   b. puede ser resuelto utilizando el algoritmo símplex
   c. siempre tiene una solución óptima con valores enteros
   d. todo lo anterior
10. Si en una ecuación de balance de flujo, perteneciente a un modelo de transbordo con capacidades, el lado derecho es positivo, eso indica que
    a. el nodo es un origen
    b. el nodo es un destino
    c. el nodo es un nodo de transbordo
    d. ninguno de los anteriores
11. ¿Cuál de las siguientes condiciones garantiza que existe una solución óptima con valores enteros para un modelo de transbordo con capacidades?
    a. el lado derecho de todas las ecuaciones de flujo (las L_j) tiene valor entero
    b. las capacidades de los arcos (las u_{ij}) son enteros
    c. una de las dos anteriores, ya sea la a o la b
    d. Las dos afirmaciones anteriores, tanto a como b
12. El camino más corto
    a. conecta cada uno de los pares de nodos
    b. es el conjunto de arcos que se utiliza para indicar el camino más corto desde un nodo base H hasta un nodo de destino dado
    c. tanto a como b

Las preguntas 13 a 17 se refieren al siguiente modelo: una compañía tiene dos plantas y tres almacenes. La primera planta puede suministrar como máximo 500 libras de un producto dado, y la segunda planta 200 libras como máximo. La demanda en el primer almacén es 150, en el segundo es 200 y en el tercero 350. El costo de fabricación de una libra del producto en la planta i y el transporte del mismo al almacén j se indica a continuación.

	AL ALMACÉN		
Desde la planta	1	2	3
1	8	10.2	12.6
2	7	9	11.8

Supongamos que el propósito del modelo es determinar un programa de embarques que satisfaga la demanda al menor costo.

13. Este modelo es
    a. un modelo de red
    b. un modelo de transporte
    c. un modelo dinámico
    d. todo lo anterior
    e. a y b
14. Sea x_{ij} la cantidad enviada desde la planta i hasta el almacén j. La restricción de la demanda para el primer almacén se puede expresar correctamente como
    a. $x_{11} + x_{21} = 150$
    b. $x_{11} + x_{21} \geq 150$

c. tanto a como b son correctas (es decir, no importa que se use = o ≥)

d. ninguna de las anteriores

e. tanto a como b son correctas (es decir, no importa que se use = o ≤)

15. Sea x_{ij} la cantidad enviada desde la planta i hasta el almacén j. En símbolos, las restricciones de la oferta pueden expresarse así

a. $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \leq s_j, j = 1, 2$

b. $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = s_j, i = 1, 2$

c. $\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = s_j, i = 1, 2$

16. Solver siempre podrá encontrar una solución entera para este modelo.

a. V

b. F

17. Puesto que oferta total = demanda total, todas las restricciones (de oferta y demanda) deberán expresarse como igualdades.

a. V

b. F

Respuestas

1. V
2. V
3. F
4. F
5. V
6. F
7. F
8. c
9. d
10. a
11. d
12. b
13. e
14. c
15. d
16. a
17. b

Problemas

6-1. Considere las siguientes restricciones lineales para un modelo de transbordo. Construya la matriz de incidencia correspondiente y el diagrama de red, rotulando cada nodo con su oferta o demanda.

$$
\begin{aligned}
x_{13} + x_{12} + x_{14} \quad &= 2 \\
- x_{12} + x_{24} \quad &= 1 \\
- x_{13} + x_{35} \quad &= 0 \\
- x_{24} - x_{14} + x_{46} + x_{45} \quad &= 0 \\
- x_{35} + x_{56} - x_{45} \quad &= 0 \\
- x_{46} - x_{56} \quad &= -3 \\
x_{ij} \geq 0, \text{ para todo } (i,j) &
\end{aligned}
$$

6-2. Considere las siguientes restricciones:

$$
\begin{aligned}
x_{12} + x_{13} \quad &= 2 \\
- x_{12} + x_{24} + x_{25} \quad &= 0 \\
- x_{13} + x_{34} \quad &= 0 \\
- x_{24} - x_{34} + x_{45} \quad &= -1 \\
- x_{25} - x_{45} \quad &= -1
\end{aligned}
$$

Construya la matriz de incidencia y el diagrama de red correspondientes.

6-3. Escriba las restricciones lineales correspondientes a la red de transbordo de la figura 6.29.

6-4. Escriba las restricciones lineales correspondientes a la red de transbordo de la figura 6.30.

6-5. Construya la matriz de incidencia para la red descrita en el problema 6-4.

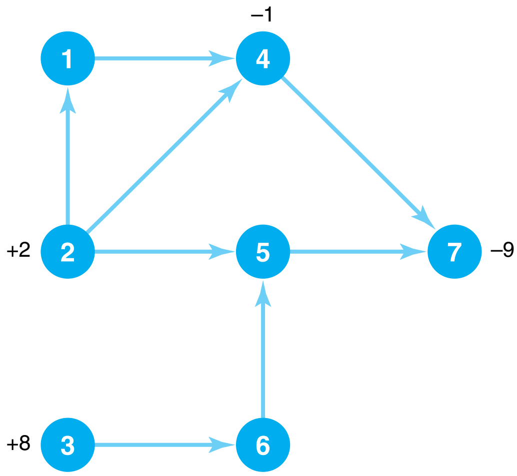
6-6. Considere la red de distribución que muestra la figura 6.31. Encuentre la ruta más corta desde el nodo 1 hasta el nodo 8 de la red.

6-7. Considere la red de distribución que muestra la figura 6.32. Encuentre el camino más corto desde el nodo 1 hasta el nodo 7.

6-8. El la figura 6.31, ¿cuánto tendría que disminuir la distancia sobre el arco desde 4 hasta 7, para que llegara a formar parte del árbol que representa el camino más corto desde el nodo 1 hasta el nodo 8?

6-9. *Distribución de crudo.* Lindsay Doyle es responsable del transporte de petróleo crudo a varios depósitos de almacenamiento. La figura 6.33 muestra una parte de la red de oleoductos utilizada. ¿Cuál es el flujo máximo desde el nodo 1 hasta el nodo 7?

•• **6-10.** El señor Crimmage administra el Chicago Health Club utilizando equipo y espacio alquilados. A últimas fechas, el arrendador le sugirió un plan de arrendamiento a largo plazo. Basado en el plan de arrendamiento a largo plazo, el señor Crimmage obtuvo la tabla adjunta, donde se muestra el



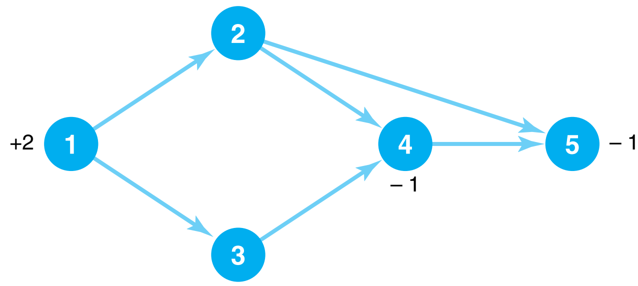


FIGURA 6.29

FIGURA 6.30

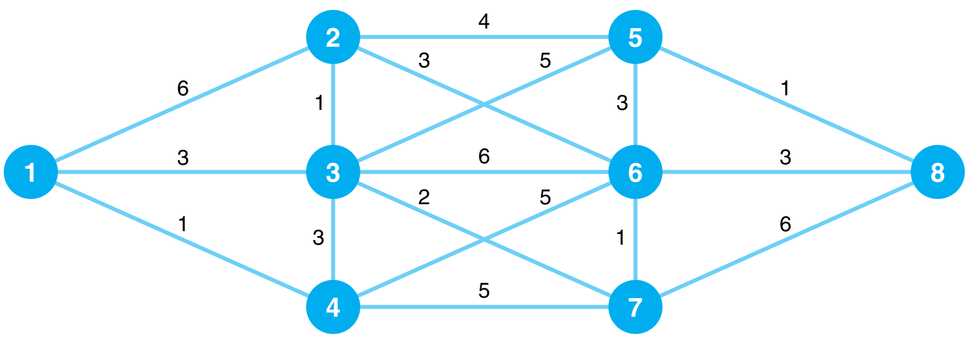


FIGURA 6.31

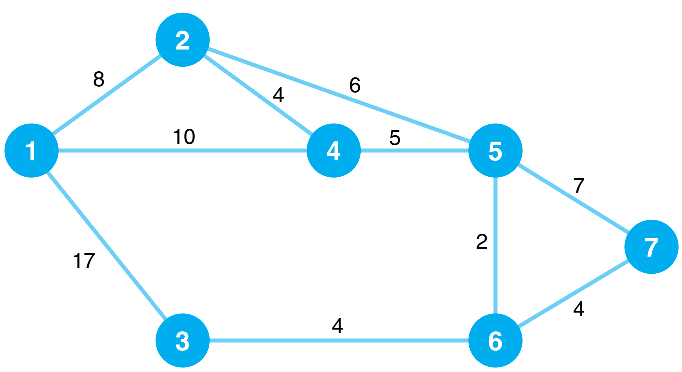


FIGURA 6.32

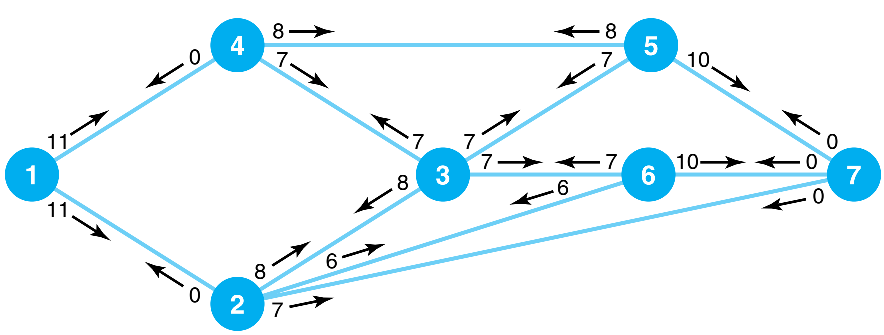


FIGURA 6.33

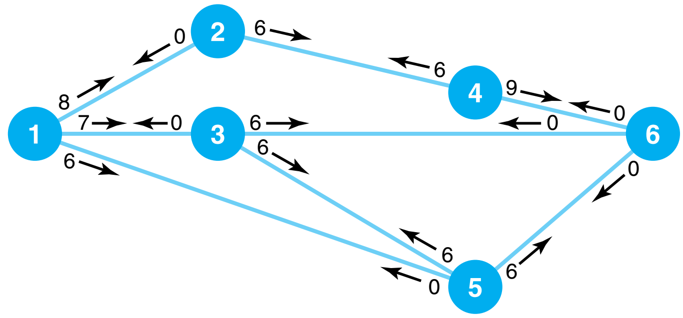


FIGURA 6.34

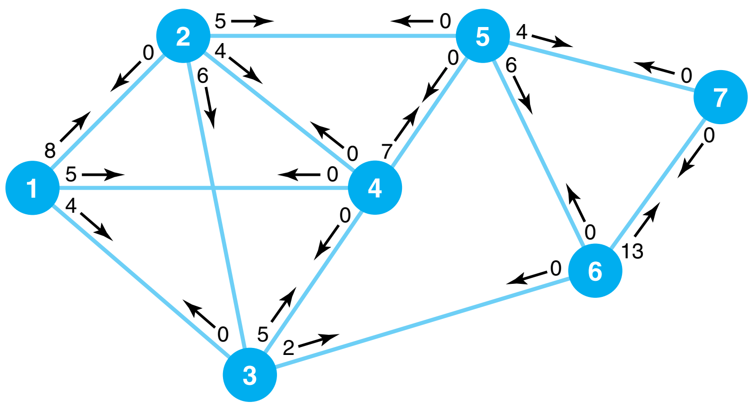


FIGURA 6.35

costo neto esperado si el alquiler abarca desde el inicio del año *i* hasta el inicio del año *j* (en miles de dólares).

	j			
i	2	3	4	5
1	13	25	37	45
2		12	21	30
3			10	20
4				9

El señor Crimmage desea saber cuándo y por cuánto tiempo debe recurrir al alquiler a fin de minimizar el costo durante los 4 años siguientes. Formule este modelo y resuélvalo. ¿Existen soluciones óptimas alternativas?

6-11. Determine el flujo máximo desde el nodo ① hasta el nodo ⑥ a través de la red de carreteras ilustrada en la figura 6.34.

6-12. Considere la red que aparece en la figura 6.35. Encuentre el flujo máximo. Suponga que ① es la fuente y ⑦ es el recipiente.

••• **6-13.** Demuestre que el modelo de transporte con *S* orígenes y *D* destinos es un caso especial del modelo de transbordo con capacidades.

•• **6-14.** Demuestre que el modelo de asignación es un caso especial del modelo de transbordo con capacidades.

••• **6-15.** Demuestre que el modelo utilizado para determinar la ruta de costo mínimo desde un nodo hasta otro nodo específico se puede expresar como un caso especial del modelo de transbordo con capacidades.

••• **6-16.** Moebius Products, Inc. se encuentra en la siguiente situación. Tiene que entregar 1,000 botellas Klein mensuales durante los próximos cuatro meses. El costo de producción de cada botella es \$5 en el mes 1, \$9 en el mes 2, \$10 en el mes 3 y \$14 en el mes 4. El costo de mantenimiento de cada botella en el inventario es \$3 al mes. Al gerente de la compañía le agradaría encontrar el programa de producción más eficiente en términos de costo; es decir, cuántas botellas es conveniente fabricar de una sola vez y cuándo. Suponga que la producción se realiza en múltiplos de 1,000 botellas. Es decir, que la producción del mes *i* cubre la demanda para los meses *i* a *j*, para cualquier $j \geq i$. Formule usted este modelo como una representación de red y resuélvalo.

••• 6-17. Considere la red de transbordo de la figura 6.36. Los nodos ① y ⑤ son las localidades donde están las plantas. Las plantas producen 200 y 150 cargas de camión, respectivamente. Los nodos ③, ⑥, y ⑨ son las localidades de los centros de venta. La demanda en éstas es de 50, 250 y 50 cargas de camión respectivamente. El número que aparece sobre el arco (*i, j*) indica los costos del transporte de una carga de camión desde *i* hasta *j*. Suponga que el costo de *i* a *j* es igual al costo de *j* a *i*.

(a) Encuentre los menores costos para llevar una carga de camión desde ① hasta ③, ⑥, y ⑨.
(b) Encuentre los menores costos para llevar una carga de camión desde ⑤ hasta ③, ⑥, y ⑨.
(c) Formule y resuelva el modelo de transporte. ¿Cuál es el costo total mínimo?

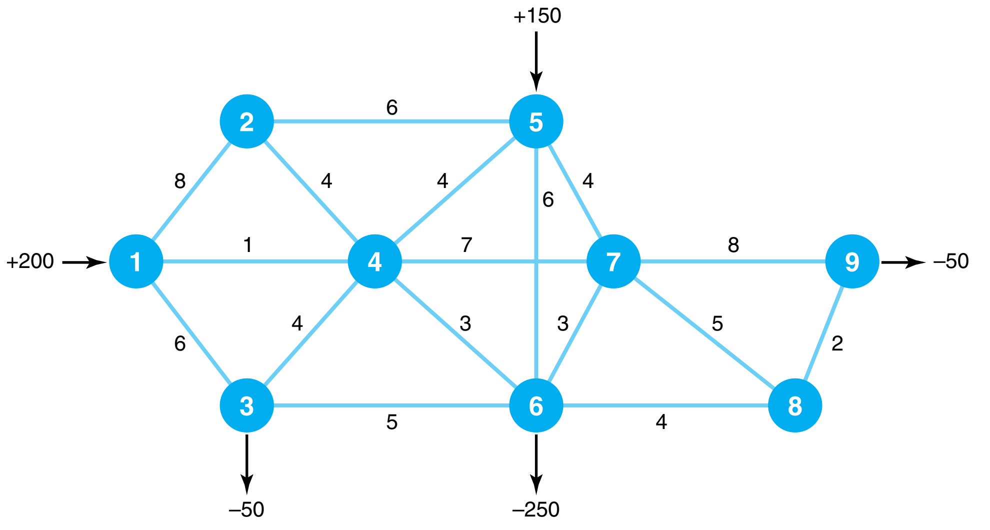


FIGURA 6.36

6-18. Slick Oil Company tiene tres almacenes desde los cuales puede embarcar productos a cualquiera de los tres centros de venta al menudeo. La demanda de latas del producto Gunkout es de 100 en la tienda minorista 1; de 250 en la 2 y de 150 en la 3. El inventario de Gunkout en el almacén 1 es 50; en el 2 es 275 y en el 3 es 175. El costo de transportar una unidad de Gunkout desde cada almacén hasta cada tienda minorista se presenta a continuación. Formule un PL a fin de determinar cuántas unidades deben embarcarse desde cada almacén hasta cada tienda minorista para satisfacer la demanda de cada una de éstas al costo mínimo.

	MINORISTA		
ALMACÉN	1	2	3
1	5	7	6
2	8	9	10
3	4	3	11

6-19. Bob Frapes produce frutas exóticas envueltas para regalo. Prepara sus paquetes en dos locales, desde los cuales los envía a cinco distribuidores mayoristas. Los costos del empaque en las localidades 1 y 2 son \$5.25 y \$5.70, respectivamente. Los pronósticos de Bob acerca de la demanda de embarques aparecen en la siguiente tabla.

MAYORISTA	1	2	3	4	5
Embarque requerido	4000	6000	2000	10,000	8000

La capacidad de empaque en la localidad 1 es de 20,000 paquetes y en la localidad 2 es 12,000. Los costos unitarios de distribución, en dólares, desde las dos localidades hasta los cinco mayoristas se presentan en la tabla adjunta. Formule un modelo de PL para determinar cuántos paquetes deberá enviar Bob desde cada localidad hasta cada mayorista.

DESDE LA LOCALIDAD	MAYORISTA 1	2	3	4	5
1	.60	.40	1.20	.90	.50
2	1.50	.90	.50	.80	.80

6-20. Wonka Widget, Inc. tiene el siguiente modelo de inventario que incluye tres periodos. El costo de fabricación por peluca varía de un periodo a otro. Esos costos son $2, $4 y $3 para los periodos 1, 2 y 3, respectivamente. Cada unidad de inventario que se mantiene de un periodo al siguiente tiene un costo de $1. La demanda es de 10,000, 20,000 y 30,000 unidades en los periodos 1, 2 y 3 respectivamente. Formule una PL que le permita determinar cuál deberá ser la producción del fabricante en cada periodo para satisfacer la demanda al costo mínimo.

•• **6-21.** *Compras.* Jack Biensaulk está a cargo de realizar las compras de artículos enlatados para el servicio de alimentos GAGA, en una universidad grande. Él sabe cuál será la demanda en el curso del año escolar y también ha estimado los precios de compra. Estos datos aparecen en la siguiente tabla. Así puede comprar adelantándose a la demanda a fin de evitar las alzas de precio, pero en ese caso hay un costo mensual de mantenimiento de inventario, de $0.20 por caja, que se aplica al inventario presente al final del mes. Formule y resuelva una PL que le indique a Jack cuándo deberá hacer sus compras a fin de minimizar los costos. SUGERENCIA: Sea P_t el número de cajas compradas en el mes t y sea I_t el número de cajas en inventario al final del mes t.

	SEP.	OCT.	NOV.	DIC.	ENE.	FEB.	MAR.	ABR.	MAY.
Demanda (cajas)	1000	900	850	500	600	1000	1000	1000	500
Costo por caja $	20	20	20	21	21	21	22	22	22

6-22. Un fabricante tiene que manejar un caso de de inventario en tres periodos para un artículo cuyo precio de venta es $4. El costo de fabricación es $4 en el primer periodo y $3 en los otros dos periodos. Los costos de demanda e inventario son iguales que los del problema 6-20. El fabricante no está obligado a satisfacer la demanda. Sin embargo, cada unidad de ventas perdida le cuesta a la compañía $1.50. La producción está restringida a 40,000 unidades en el primer periodo y a 10,000 en los otros dos periodos. Formule una PL para encontrar el programa de producción que maximice las ganancias del fabricante.

6-23. Johnson Electric produce motores eléctricos pequeños para cuatro fabricantes de aparatos domésticos, en cada una de sus tres plantas. Los costos de producción por unidad varían de una localidad a otra por sus diferencias en términos de equipo de producción y en la productividad de los trabajadores. La siguiente tabla muestra los pedidos de los clientes que deberán atenderse con la producción del mes entrante.

CLIENTE	DEMANDA
1	300
2	500
3	400
4	600

Los costos unitarios de producción y las capacidades mensuales (de oferta) aparecen en la siguiente tabla.

PLANTA	COSTOS DE PRODUCCIÓN POR UNIDAD ($)	CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN MENSUAL
A	17	800
B	20	600
C	24	700

El costo por atender a estos clientes varía de una planta a otra. Los costos unitarios de transporte, en dólares, aparecen en la siguiente tabla.

	HASTA			
DESDE	1	2	3	4
A	3	2	5	7
B	6	4	8	3
C	9	1	5	4

Johnson debe decidir cuántas unidades le conviene producir en cada planta y qué proporción de la demanda de cada cliente tendrá que ser atendida. La empresa desea minimizar los costos totales de producción y transporte. Formule el problema de Johnson como un modelo de transporte y resuélvalo para hallar la solución óptima.

•• **6-24.** *Un modelo de programación.* En una maniobra financiera calculada, PROTRAC adquirió una nueva instalación de altos hornos para la producción de hierro fundido. A usted se le pide que responda la siguiente pregunta: ¿cuántos nuevos miembros del personal del foso de escoria deben ser contratados y capacitados en los próximos seis meses? En la siguiente tabla se presentan los requisitos que deben satisfacer los empleados capacitados para trabajar en los fosos y las tasas salariales mensuales para los próximos seis meses.

	MES					
	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.
Requerimientos de mano de obra (horas)	7800	7500	7500	9200	10000	9000
Tasas salariales mensuales ($)	3600	3600	3900	3900	4200	4200

Se contratan aprendices al principio de cada mes. Otra consideración que se debe tomar en cuenta es una regla del sindicato según la cual los trabajadores deben tener un mes de instrucción en el aula antes de iniciar sus faenas en los fosos. Por tanto, el aprendiz debe ser contratado por lo menos un mes antes que se requieran sus servicios como trabajador. En el aula, cada estudiante necesita que un empleado capacitado para laborar en el foso de escoria le dedique 80 horas de su tiempo, por lo cual dicho empleado dispondrá de 80 horas menos para trabajar en el foso. Además, por un convenio contractual, cada empleado capacitado puede trabajar un máximo de 165 horas al mes (tiempo total, incluye instrucción y faenas en el foso). Si el tiempo total máximo disponible de los empleados capacitados excede los requerimientos de un mes, la gerencia podrá despedir hasta un máximo de 15% de los empleados capacitados, al principio del mes. A todos los empleados se les pagará el salario completo de un mes, aunque sean despedidos. Cada aprendiz cuesta $1,800 mensuales por concepto de salario y otros beneficios. Hay 40 empleados capacitados disponibles al inicio de enero. Formule usted el modelo de contratación y capacitación correspondiente como un modelo de programación lineal. SUGERENCIA: Sea x_t el número de empleados capacitados que están disponibles al inicio del mes t antes de cualquier despido; sea y_t el número de aprendices contratados en el mes t y sea z_t el número de empleados capacitados que son despedidos al inicio del mes t.

6-25. Un socio de la agencia de publicidad Foot, Thompson and McGrath, está tratando de decidir cuál de los cuatro ejecutivos de cuenta habrá de asignarse a cada uno de los cuatro clientes más importantes. Los costos estimados de cada asignación para cada ejecutivo, en miles de dólares, se presentan en la tabla siguiente. Formule usted un modelo y resuélvalo para encontrar la solución óptima.

	CUENTA			
EJEC.	1	2	3	4
A	15	19	20	18
B	14	15	17	14
C	11	15	15	14
D	21	24	26	24

•• **6-26.** *Planeación financiera.* Un inversionista tiene acceso a dos actividades lucrativas, conocidas como Alfa y Beta, al comienzo de cada uno de los cuatro años próximos. Cada dólar que invierta en

Alfa al inicio de un año producirá un rédito dos años después (a tiempo para su inmediata reinversión). Cada dólar invertido en Beta al comienzo de un año producirá un rédito tres años después. Una tercera posibilidad de inversión, en proyectos de construcción, estará disponible a principios del segundo año. Cada dólar invertido en la construcción rendirá réditos un año después. (Esta opción también estará disponible a principios del tercero y cuarto año.) El inversionista empieza con $50,000 al inicio del primer año y desea maximizar la suma total de dinero disponible al final del cuarto año. Los rendimientos sobre la inversión se presentan en la tabla siguiente.

ACTIVIDAD	RENDIMIENTO POR DÓLAR INVERTIDO ($)
Alfa	1.50
Beta	1.80
Construcción	1.20

(a) Identifique las variables de decisión y formule un modelo de PL. SUGERENCIA: Sea M_i el dinero disponible al inicio del año *i*. Ahora maximice M_5 bajo las restricciones apropiadas.
(b) ¿Puede determinar la solución por medio de un análisis directo, sin usar Solver?

6-27. PROTRAC está tratando de decidir cuál de sus cuatro distritos de ventas, en el oeste medio, debe asignarse a cada uno de cuatro vendedores. Cada vendedor puede alcanzar un volumen de ventas diferente, en miles de dólares, en cada distrito. Las cifras estimadas se presentan en la siguiente tabla. PROTRAC desea maximizar el volumen de ventas total. Sin embargo, es imposible asignar el vendedor B al distrito 1 o el vendedor A al distrito 2, porque tales asignaciones violarían las políticas de rotación de personal. Construya un modelo para este problema y encuentre la solución óptima.

	DISTRITO			
VENDEDOR	1	2	3	4
A	65	73	55	58
B	90	67	87	75
C	106	86	96	89
D	84	69	79	77

•• **6-28.** *Un modelo de arbitraje.* Un especulador administra un silo con capacidad de 6,000 bushels para almacenar maíz. Al principio del mes 1, el silo contiene 5,000 bushels. La tabla siguiente presenta los precios estimados de venta y compra de maíz para los cuatro próximos meses.

MES	PRECIO DE COMPRA POR 1000 BUSHELS ($)	PRECIO DE VENTA POR 1000 BUSHELS ($)
1	45	40
2	50	45
3	60	56
4	70	65

El maíz vendido durante un mes cualquiera es extraído del silo al principio de dicho mes. Así, en el mes 1 están disponibles para la venta 5000 bushels. El maíz comprado en cualquier mes dado se almacena en el silo a mediados de ese mes, pero no puede ser vendido sino hasta el mes siguiente. Suponga que el costo de almacenaje del maíz está basado en el inventario promedio y que cuesta $0.01 almacenar un bushel durante un mes. El costo del almacenaje de cada mes se deberá pagar al final del mismo. Todas las compras tendrán que pagarse al contado en la fecha de entrega. El especulador tiene $100 disponibles para invertir y no desea solicitar un préstamo ni para comprar maíz ni para pagar costos de almacenaje. Por tanto, si no dispone de efectivo al inicio de un mes, tendrá que vender parte de sus acciones para pagar el cargo de almacenaje al final del mes y para pagar el maíz, si lo compra en cualquier cantidad. Considerando los precios de compra y venta, y el costo de almacenaje, el especulador desea saber cuánto maíz habrá de comprar y vender cada mes para maximizar sus ganancias totales poco después del inicio del cuarto mes (es decir, después de cualquier venta que pueda realizarse en dicho mes). Formule y resuelva el modelo de PL. SUGERENCIA: Sea A_t la cantidad de bushels que contiene el silo inmediatamente después de extraer la cantidad vendida en el mes t (x_t); sea B_t la cantidad de bushels contenida en el silo inmediatamente después de recibir el grano comprado en el mes t (y_t); y sea P_t la posición al final del mes t, en términos de efectivo.

6-29. Sam tiene cuatro plataformas de reparaciones en el taller de mantenimiento y tres puestos de trabajo por asignarse en ellas. A causa de diferencias en el equipo disponible, en las personas asignadas a cada plataforma y en las características del puesto, cada empleo requiere que el operario pase diferente cantidad de tiempo en cada plataforma. Los tiempos estimados en minutos para cada empleo, en cada plataforma, aparecen en la tabla siguiente. Sam desearía minimizar el tiempo total requerido. Formule el modelo y encuentre la solución óptima. ¿Existen soluciones óptimas alternativas?

	PUESTO		
PLATAFORMA	**1**	**2**	**3**
A	27	48	30
B	38	51	28
C	27	55	23
D	35	59	24

••• **6-30.** Fernwood Lumber fabrica madera terciada o tríplex. El costo de producir 1,000 pies tabla de ese tipo de madera cambia de un mes a otro a causa de las variaciones en los costos de manejo, el consumo de energía y el precio de las materias primas. El costo de producción por 1,000 pies tabla en cada uno de los 6 meses próximos aparece en la siguiente tabla.

	MES					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Costo de producción ($)	900	950	1250	1050	900	850

La demanda para los 6 meses próximos es la siguiente:

	MES						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**TOTAL**
Demanda	60	70	110	80	70	60	450

Fernwood puede producir hasta 90,000 pies tabla al mes. También tiene la opción de mantener el inventario de un mes al mes siguiente, al costo mensual de $25 por 1,000 pies tabla. Por ejemplo, 1,000 pies tabla producidos en el mes 1 para la demanda del mes 2 cuesta $25 por concepto de mantenimiento de inventario. Además, la demanda no satisfecha en un mes puede satisfacerse en periodos posteriores al costo de $40 por 1,000 pies tabla por cada mes de retraso. Fernwood desea saber cuánto le conviene producir cada mes y cuántas existencias deberá mantener para satisfacer la demanda al costo mínimo. Formule el problema de Fernwood como un modelo de transporte y resuélvalo para encontrar la solución óptima.

6-31. Una compañía inmobiliaria planea vender cuatro predios y ha recibido propuestas de compra individuales de cinco firmas constructoras. En vista de la cantidad de capital que se requiere, esas propuestas fueron hechas bajo el entendimiento de que ninguna constructora compraría más de un predio. Las propuestas, en miles de dólares, aparecen en la tabla siguiente. La compañía inmobiliaria desea maximizar el ingreso total procedente de esas propuestas. Formule el modelo y optimícelo.

	CONSTRUCTOR				
PREDIO	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A	19	19	29	23	24
B	23	21	27	19	25
C	19	19	22	0	20
D	23	0	19	21	18

Caso práctico Trans World Oil Company[1]

Trans World Oil Company es una empresa internacional dedicada a producir, refinar, transportar y distribuir petróleo, gasolina y productos petroquímicos. Es una compañía matriz y tiene firmas subsidiarias que le pertenecen en forma parcial o total. Uno de los grandes problemas de Trans World consiste en coordinar las actividades de sus subsidiarias en un plan corporativo general, manteniendo a la vez un grado razonable de autonomía operativa para cada una de ellas.

Para lidiar con este predicamento, la empresa desarrolló un plan anual que abarca toda la corporación y detalla el patrón de embarques entre las diversas subsidiarias. El plan no era rígido, sino una especie de guía general que se revisaba en forma periódica, de acuerdo con los cambios de sus condiciones de operación. Dentro del marco de este plan, las compañías podían tomar sus decisiones y hacer sus propios planes.

Este plan corporativo surgió inicialmente del ensayo y el error. Sin embargo, este enfoque tenía dos desventajas. La primera era que las gerencias de las subsidiarias se quejaban de que quienes planeaban no tomaban en cuenta las condiciones de operación en las cuales cada una de ellas tenía que trabajar. El plan podía imponerles operaciones y planes de distribución que resultaban imposibles de realizar. La segunda desventaja era que a la gerencia corporativa le preocupaba que dicho plan no bastara para optimizar toda la compañía.

La técnica de programación lineal pareció un procedimiento adecuado para ayudar en el proceso anual de planeación, ya que, al menos en parte, podía responder a las dos objeciones precedentes. Además, la construcción de ese modelo permitiría cambiar rápidamente los planes cuando fuera necesario.

Operaciones en el Lejano Oriente

Vamos a describir ahora los detalles del modelo de planeación de 1996 para las operaciones en el Lejano Oriente.

Se usan dos fuentes de origen de petróleo crudo, Irán y Borneo. El crudo iraní es relativamente más pesado (24° API) y en 1996 el sector del Lejano Oriente podía obtener hasta 60,000 barriles diarios (b/d) al costo de $18.50 por barril, en Abadán. Una segunda fuente de crudo son los yacimientos de Brunei en Borneo. Este petróleo crudo es más liviano (36° API). Bajo un acuerdo con la Netherlands Petroleum Company en Borneo, se suministrará una cantidad fija de 40,000 b/d de crudo de Brunei, al costo de $20.50 por barril, en 1996.

Dos subsidiarias realizan operaciones de refinación. Una está en Australia y tiene una refinería en Sydney con capacidad total de 50,000 b/d. La compañía comercializó también sus productos en toda Australia y tuvo excedentes de productos refinados disponibles para su embarque a otras subsidiarias.

La segunda subsidiaria está en Japón, cuya refinería tiene 30,000 b/d de capacidad. En Japón se realizan operaciones de mercadotecnia y la producción excedente puede ser enviada a las subsidiarias en el Lejano Oriente.

[1]© 1996 por Board of Trustees of the Leland Stanford Junior University. Reservados todos los derechos. Una versión anterior de este caso fue presentada en *Computer Models for Decision Analysis* (Scientific Press, 1980) por Charles P. Bonini.

Existen además dos subsidiarias comercializadoras sin capacidad de refinación. Una se encuentra en Nueva Zelandia y otra en las Filipinas. Sus necesidades pueden satisfacerse con embarques de Australia, Japón o de la subsidiaria de Trans World Oil en Estados Unidos. Esta última no es un miembro regular de las operaciones en el Lejano Oriente, pero puede usarse como fuente de productos refinados.

Finalmente, la compañía posee una flota de buques cisterna que transportan el petróleo crudo y sus productos entre las distintas subsidiarias.

Operaciones de una refinería

El funcionamiento de una refinería es un proceso complejo. Las características de los crudos disponibles, la producción deseada, la tecnología específica de la refinería, etc. hacen que sea difícil usar un modelo sencillo para describir todo el proceso. De hecho, la gerencia en Australia y la de Japón usan complicados modelos de programación lineal, que tienen cerca de 300 variables y 100 restricciones, para tomar decisiones detalladas en plan diario o semanal.

Para los fines de la planeación anual, el modelo de la refinería está sumamente simplificado. Los dos crudos (iraní y de Brunei) son datos de entrada. Dos productos generales son las salidas: (a) productos de gasolina y (b) otros subproductos conocidos colectivamente como *el destilado*. Además, aunque la refinería tenía una flexibilidad de procesamiento que le permitía una amplia gama de producción, para propósitos de planeación se decidió incluir solamente los valores a sus tasas de conversión más alta y más baja (la intensidad del proceso). Cada refinería podía usar cualquier combinación de las dos intensidades extremas. La tabla 1 muestra estos rendimientos.

Los costos incrementales de operación de la refinería dependían, en cierto modo, del tipo de crudo utilizado y de la intensidad del proceso. Estos costos aparecen en la tabla 1. Allí podemos ver también los costos incrementales de transporte, ya sea desde Borneo o desde Irán.

Operaciones de comercialización

La comercialización se realiza en dos áreas sede (Australia y Japón) y también en las Filipinas y Nueva Zelandia. La demanda estimada de gasolina y destilado en todas las áreas, para 1996, se aprecia en la siguiente tabla.

	DEMANDA EN 1996 (MILES DE B/D)	
Área	Gasolina	Destilado
Australia	9.0	21.0
Japón	3.0	12.0
Filipinas	5.0	8.0
Nueva Zelandia	5.4	8.7
Total	22.4	49.7

Los costos variables del suministro de gasolina o destilado a Nueva Zelandia y las Filipinas se presentan en la siguiente tabla.

	COSTOS VARIABLES DE EMBARQUE DE GASOLINA/DESTILADO EN $/BBL.	
Desde\hasta:	Nueva Zelandia	Filipinas
Australia	.30	.45
Japón	.30	.60

TABLA 1 Costos y rendimientos de las refinerías

UBICACIÓN, CRUDO, INTENSIDAD DEL PROCESO	Costo incremental del crudo/bbl.	Costos incrementales de embarque/bbl.	Costos incrementales de refinación/bbl.	Costos totales	RENDIMIENTOS (BBL. DE PRODUCCIÓN POR BBL. DE INSUMO CRUDO) Gasolina	Destilado
Australia:						
Brunei, crudo, baja (BBA)	$20.50	$.78	$.36	$21.64	.259	.688
Brunei, crudo, alta (BAA)	20.50	.78	.84	22.12	.365	.573
Irán, crudo, baja (IBA)	18.50	1.86	.45	20.81	.186	.732
Irán, crudo, alta (IAA)	18.50	1.86	.90	21.26	.312	.608
Japón:						
Brunei, crudo, baja (BBJ)	20.50	.72	.48	21.70	.259	.688
Brunei, crudo, alta (BAJ)	20.50	.72	1.02	22.24	.350	.588
Irán, crudo, baja (IBJ)	18.50	1.77	.60	20.87	.186	.732
Irán, crudo, alta (IAJ)	18.50	1.77	1.17	21.44	.300	.620

Operaciones de los buques cisterna

Se usan buques cisterna para transportar el crudo desde Irán y Borneo hasta Australia y Japón, y para llevar productos refinados de Australia y Japón a las Filipinas y Nueva Zelandia. Los costos variables de estas operaciones están incluidos en la tabla de embarques anterior. Sin embargo, la capacidad disponible en términos de buques cisterna es limitada. La flota tenía una capacidad de 6.9 buques cisterna equivalentes (de dimensiones estándar).

La capacidad necesaria para entregar un barril desde un destino hasta otro depende de la distancia recorrida, del tiempo en el puerto y de otros factores. La tabla siguiente muestra la fracción de un buque cisterna de dimensiones estándar que se requiere para entregar 1000 b/d por las rutas indicadas. También es posible fletar buques independientes. El alquiler era $8,600 diarios por un buque cisterna de dimensiones estándar.

Factores de uso de buques cisterna (fracción necesaria de buque cisterna tamaño estándar para entregar 1,000 b/d)

ENTRE	AUSTRALIA	JAPÓN
Irán	.12	.11
Borneo	.05	.045
Filipinas	.02	.01
Nueva Zelandia	.01	.06

Oferta de Estados Unidos

En 1996, se esperaba que las operaciones de Estados Unidos en la costa oeste del país tuvieran excedentes de 12,000 b/d de destilado. El costo del destilado en el puerto de embarque de Los Ángeles era $19.80 por barril. No había capacidad excedente de gasolina. Los costos de embarque variables estimados y los buques cisterna requeridos para el transporte de destilado desde Estados Unidos eran:

	COSTO VARIABLE DE LOS EMBARQUES ($ POR BBL.)	BUQUES REQUERIDOS (FRACCIÓN NECESARIA DE BUQUE CISTERNA TAMAÑO ESTÁNDAR PARA ENTREGAR 1,000 B/D)
Nueva Zelandia	2.10	.18
Filipinas	1.65	.15

¿Qué se requiere?

1. Formular un programa lineal que la compañía pueda usar para generar un plan que abarque todas las operaciones en el Lejano Oriente.
2. Utilizar el modelo anterior para responder estas cuatro nuevas solicitudes.

Memorando para: Oficinas Generales de Trans World Oil

De: Compañía Afiliada en Australia

Asunto: Suplementos para el plan anual

Desde la presentación de datos correspondientes a la planeación anual, han surgido dos oportunidades adicionales. Nos agradaría incluirlas en nuestros planes.

A. *Licitación para concursar por un contrato para vender gasolina al gobierno de Australia*

El gobierno de Australia pondrá a concurso un contrato por 1,500 b/d de gasolina para 1996. Esperamos obtener ese contrato y lograr ganancias a un precio de licitación de $29.20 por barril. Solicitamos autorización para presentar esta licitación por dicho contrato.

B. *Expansión de la refinería en Australia*

En los dos años precedentes, nuestra refinería en Australia ha funcionado a toda su capacidad. Solicitamos autorización para realizar inversión de capital a fin de ampliar la capacidad de la refinería a 65,000 b/d. La necesidad de esta expansión obedece a varias razones:

1. Australia puede satisfacer los requerimientos actuales de Nueva Zelandia y las Filipinas a menor precio que Japón.
2. La licitación propuesta a fin de concursar por el contrato del gobierno de Australia referente a la venta de gasolina (véase más arriba).
3. Tenemos entendido que la filial en Nueva Zelandia estudia la posibilidad de aumentar sus requerimientos en 4,800 b/d. [Véase el memorando siguiente.]

El costo de esta expansión es $6,000,000. Para recuperar la inversión necesitamos un ahorro anual de $1,228,000.

(Esto supone una tasa de 20% en el costo de capital. Aquí se incluyen los efectos de la depreciación para propósitos fiscales. Con estas consideraciones, el ahorro de $1,228,000 anual es equivalente a la inversión de $6 millones.)

Memorando para: Oficinas Generales de Trans World Oil

De: Compañía Afiliada en Nueva Zelandia

Asunto: Suplemento para el plan anual

Hemos iniciado negociaciones con la NOZO Oil Company de Nueva Zelandia. Se trata de un distribuidor que vende 1,600 b/d de gasolina y 3,200 b/d de destilado. Si las negociaciones llegan a feliz término, estos requerimientos se sumarán a los actuales para Nueva Zelandia, lo cual arrojará los siguientes totales:

Gasolina: 7,000 b/d

Destilado: 11,900 b/d

Los ingresos esperados de esta adquisición (después de haber descontado los costos variables de comercialización) son \$34.30 por barril en el caso de la gasolina, y \$25.90 por barril para el destilado. Se espera que el costo de compra del petróleo NOZO sea de unos \$31.0 millones. Sobre una base anual, se requeriría una ganancia incremental de \$5.2 millones al año para justificar esta compra.

Memorando para: Oficinas Generales de Trans World Oil

De: Compañía Afiliada de Buques Cisterna

Asunto: Suplemento para el plan anual

Actualmente estamos operando nuestra flota de buques cisterna a toda su capacidad. Cualquier requerimiento adicional elevaría los requisitos de transporte, tanto del crudo como de los productos refinados. Será necesario fletar navíos, a menos que adquiramos mayor capacidad en términos de buques.

Podemos alquilar buques cisterna adicionales a razón de \$4,800 dólares diarios por el equivalente de 1 unidad cisterna. Nos proponemos alquilar 0.5 de unidad cisterna equivalente para completar una capacidad total de 7.4 unidades equivalentes. El costo de esto podría ser \$3,500 diarios o \$1,278,000 anuales.

Memorando para: Oficinas Generales de Trans World Oil

De: Oficina en Borneo

Asunto: Suplemento para el plan anual

Se nos acaba de proponer la posibilidad de aumentar el contrato con nuestro proveedor de crudo en Brunei. Están dispuestos a suministrarnos 5 mil b/d adicionales al costo de \$21.50 por barril. ¿Debemos aceptar esta oferta?

Caso práctico — Planeación de la producción en Bumles

(Antes de resolver este caso, tal vez desee usted revisar la solución del ejemplo de Bumles presentado en este capítulo, ya que la formulación correcta de este modelo será similar.) Bumles, Inc. usa parte de su capacidad para fabricar dos tipos de estatuas pintadas a mano. Los productos terminados pueden agruparse lógicamente en dos categorías, A y B. A requiere 0.5 horas de trabajo de un pintor y B requiere 0.75 horas. Bumles dispone de 45 pintores, pero no es necesario que los emplee a todos. La planta se usa para fabricar estatuas pintadas a mano el lunes, martes y miércoles de cada semana. El resto de la semana, la capacidad productiva se dedica a otra línea de productos. Cada uno de los pintores contratados está disponible para pintar estatuas durante cualquier porción de una jornada de 8 horas, dos días a la semana. Un pintor puede ser asignado a cualquier programa de dos días y se le paga por 16 horas de horario de trabajo regular, sin importar qué fracción de ese tiempo haya dedicado realmente a fabricar estatuas. Si no hay suficiente producción para mantener ocupados durante todo el día a todos los trabajadores asignados en una fecha determinada, el tiempo restante se dedica a limpiar la planta y otras actividades similares. Además, en un día cualquiera, Bumles puede requerir que cada pintor trabaje hasta 4 horas extras (es decir, si Ed Jones trabaja normalmente el martes, Bumles puede pedirle que trabaje 2, 3 o cualquier otro número de horas, entre 0 y 4, como tiempo extra en ese mismo día).

La venta de una unidad A produce un ingreso de \$21 y la de una B, \$30. La demanda debe satisfacerse el mismo día que se presenta, pues de lo contrario se perderá. La producción de un día determinado puede usarse para satisfacer la demanda de ese mismo día o la del resto de la semana; es decir, las estatuas fabricadas el lunes pueden usarse para satisfacer la demanda del lunes, el martes o el miércoles, y las estatuas producidas el martes pueden usarse para satisfacer la demanda del martes o el miércoles. Sin embargo, debido al cambio de operaciones en la producción, todas las estatuas fabricadas durante una semana tienen que ser embarcadas en esa misma semana, es decir, que nunca hay existencias en inventario el lunes por la mañana. A causa del incremento de los costos de manejo, cuesta \$0.25 mantener una unidad A y \$0.30 mantener una B en inventario desde un día hasta el siguiente. Una unidad de demanda perdida resulta en un costo total de penalización de \$2 por una unidad de A el lunes, \$4 el martes y \$5 el miércoles. Los costos de penalización por unidad para una unidad B son \$5 el lunes, \$10 el martes y \$11 el miércoles. A los pintores se les paga \$10 por hora en jornada laboral regular y \$15 por hora en horario extra.

La demanda varía notablemente en Bumles. La gerencia está considerando dos patrones genéricos de demanda, la alta previa a la navidad y la baja después de navidad, como se aprecia en las siguientes tablas.

Temporada alta antes de navidad

	LUN.	MAR.	MIÉR.
A	1500	1000	150
B	240	90	1100

Temporada baja después de navidad

	LUN.	MAR.	MIÉR.
A	240	48	64
B	160	32	64

Bill Bumle, el vicepresidente ejecutivo, comenta que las unidades A contribuyen con $21/0.5 = \$42$ por hora de trabajo, mientras que las B aportan $30/0.75 = \$40$ por hora de trabajo. Agrega que la penalización por las ventas perdidas va aumentando a medida que avanza la semana. Concluye que Bumles debería satisfacer primero toda la demanda de A, a partir del miércoles, luego el martes y después el lunes, utilizando finalmente la capacidad restante (si la hay) para producir unidades B.

Consideraciones específicas

1. Comente el enfoque sugerido por Bill Bumle.
2. Pasando por alto las condiciones de que los valores sean enteros (es decir, permitiendo valores fraccionarios en todas las variables de decisión), construya un modelo de PL en Excel que permita programar a los pintores y la producción a fin de maximizar el resultado del ingreso menos el costo, donde el costo es igual a la mano de obra más la penalización y los costos de mantenimiento de inventario. El modelo deberá ser correcto para cualquier conjunto de demandas. En su formulación, las seis primeras restricciones deberán reflejar la demanda de A los lunes, martes y miércoles, y la demanda de B los lunes, martes y miércoles. De este modo, para resolver el modelo con cualquier conjunto de demandas, es preciso indicar solamente los LD de esas restricciones. En su formulación del modelo, preste atención a las relaciones entre producción, ventas, ventas perdidas, demanda e inventario en un día determinado. Por ejemplo,

demanda del día t = ventas durante t + ventas perdidas durante t

3. ¿Cuáles son las variables de decisión? Defínalas usted con cuidado.
4. Optimice el modelo para cada uno de los dos patrones de demanda específicos anteriores.

Después, para ambos patrones de demanda, resuma lo siguiente en un informe dirigido al gerente general:

5. Cuántos artículos de cada clase es necesario producir diariamente.
6. Cómo programar a todos los pintores que va a emplear; por ejemplo, programe 14.3 pintores para trabajar en un programa de lunes/martes, y así sucesivamente.
7. Cuántas horas de horario extraordinario deberá utilizar cada día.
8. Qué inventario de cada producto deberá mantener cada día para el siguiente.
9. Cuántas unidades de ventas perdidas podrá tener cada día.
10. Use usted su modelo para responder la siguiente pregunta: Suponga que el año está constituido por 32 semanas de demanda alta antes de navidad y 18 semanas de demanda baja después de navidad. Si Bumles desea que cada uno de los 45 pintores trabaje el mismo número de semanas, ¿cuántas semanas tendrá que trabajar cada pintor?

Consideraciones adicionales

[Las preguntas de esta sección deberán responderse tomando como referencia el modelo formulado en la pregunta 2 anterior, pero con nuevos parámetros y realizando análisis adicionales a medida que se requiera.]

El sindicato de pintores ha propuesto un contrato que incluye una cláusula sobre el salario anual garantizado (SAG). En particular, este acuerdo especifica que a cada pintor se le deben pagar por lo menos \$11,500 al año por la labor de pintar estatuas a mano. Si al final del año el total de sus ingresos es menor que \$11,500, la firma le entregará un cheque por la diferencia. Bumles planea emplear a los 45 pintores aunque la disposición del SAG no sea aceptada, pero si dicha condición se acepta, los 45 ganarán por lo menos \$11,500 al año.

Para estimar el efecto de esta propuesta sobre las operaciones de Bumles, Bill supone que en 30 de las 50 semanas del año habrá demanda alta antes de la navidad, y que las otras 20 semanas corresponderán al programa de demanda que aparece en la tabla siguiente.

	LUN.	MAR.	MIÉR.
A	240	48	300
B	160	32	200

Él supone también que será posible elaborar un programa detallado para que cada pintor reciba la misma paga durante un año. A partir de su modelo de PL y las suposiciones de Bill,

11. ¿Cuál sería la ganancia anual total de Bumles sin la disposición del SAG?
12. ¿Su solución para la pregunta 11 satisface la disposición del SAG? ¿Qué efecto tendría la aceptación de la disposición sobre el SAG en la rentabilidad de Bumles (la aumentaría, la reduciría o no tendría efecto alguno)? Muestre usted las operaciones realizadas en su hoja de cálculo para documentar sus respuestas.
13. ¿Cuáles deberán ser los salarios promedio en la semana de demanda baja, para que el salario anual sea de \$11,500? Formule un modelo de PL para que Bumles pueda usarlo en las semanas de demanda baja, a fin de encontrar un plan de producción que satisfaga la disposición del SAG. Presente una justificación para su modelo y optimícelo.
14. Suponga que la disposición del SAG es aceptada. ¿Cuánto ahorraría Bumles cada año aplicando el plan obtenido en la pregunta 13, en comparación con el plan de la pregunta 11, en el cual tendrían que hacerse pagos adicionales a los pintores al final del año?

Preguntas sobre sensibilidad

[Estas preguntas se refieren a los Informes de sensibilidad correspondientes a los modelos creados por usted para responder las preguntas 1 a 10.]

15. En la solución actual de la versión del modelo para antes de navidad, si combinamos la paga regular con la del tiempo extraordinario, cada pintor recibe un pago de $280/semana. Si hubiera otro pintor disponible, ¿qué cantidad semanal máxima le debería pagar Bumles?
16. Suponga que, en el modelo para la temporada anterior a la navidad, la demanda de A el lunes aumentara en 10 unidades. ¿Qué sucedería con el VO?
17. Responda la pregunta 16 con el modelo para la temporada posterior a la navidad.
18. ¿Cuál es la causa de la considerable diferencia que vemos entre las respuestas a las preguntas 16 y 17?
19. Suponga que, en el modelo para antes de navidad, la experiencia reciente de la gerencia requiere un ajuste en el costo de penalización correspondiente a la demanda no satisfecha de A los lunes. El nuevo valor se calcula en $3. ¿Qué pasa ahora con la solución óptima y con el VO?
20. En la pregunta 19, suponga que el nuevo valor se estima de nuevo en $4. ¿Cuál será su efecto sobre la solución óptima y el VO? (Proponga la mejor respuesta que pueda, basándose en el Informe de sensibilidad.)
21. Suponga que en el problema para la temporada anterior a navidad, el precio de venta de A bajara a $15 y el de B a $20. ¿Podría usted señalar una cota para el nuevo VO?

Caso práctico — Biglow Toy Company

A fines de agosto de 1997, Jean Biglow, tesorera de Biglow Toy Company, buscaba la forma de financiar sus operaciones de venta para la siguiente temporada de navidad. Jean planeó acumular el inventario de juguetes de Biglow durante todo el otoño, para venderlos en la temporada navideña de ventas máximas. Pero esto generaría considerable déficit de efectivo en octubre, noviembre y diciembre. Para cubrir esos déficit era necesario encontrar medios de financiamiento a corto plazo. Por otra parte Jean previó que habría un excedente de efectivo en enero y febrero, cuando los centros de ventas minoristas de Biglow pagaran sus facturas de navidad. También pronosticó un pequeño superávit de caja en septiembre, como resultado de las ventas de juguetes realizadas en el verano.

Jean trató de mantener un saldo mínimo en la cuenta de efectivo de Biglow durante todo el año. Para lograrlo, intentó protegerse contra los errores cometidos al calcular tanto la magnitud como las fechas en que se presentarían los futuros flujos de efectivo. El saldo mínimo proyectado se estableció normalmente como un porcentaje fijo del volumen de ventas previsto de cada mes, en dólares. Este procedimiento ya había demostrado su eficacia en el pasado, prácticamente frente a cualquier contingencia.

Salvo por la decisión de cómo financiar la acumulación de inventario en otoño, Jean ya había completado un plan financiero para seis meses cubriendo el periodo de septiembre de 1997 a febrero de 1998. En la tabla siguiente aparecen algunas secciones de ese plan.

Los saldos de cuentas por cobrar que aparecen en la tabla se registran al inicio de cada mes. Así, Jean espera tener $700,000 en cuentas cobrables a principios de septiembre, $500,000 a principios de octubre, y así sucesivamente.

En promedio, Biglow recibe un descuento de 3% de sus proveedores de juguetes si paga sus compras con prontitud. Normalmente, Jean aprovecha esos descuentos siempre que es posible y, por tanto, en los pagos planeados que aparecen en la tabla se ha supuesto que recibirá un descuento promedio de 3% por pronto pago. Sin embargo, si Biglow se retrasa en los pagos, ese descuento se perderá y en realidad pagará más de lo planeado, en la proporción correspondiente.

Las cifras correspondientes a superávit y déficit de efectivo que aparecen en la tabla son cálculos netos de todas las demás operaciones, incluidos los ingresos por ventas cobrados con anticipación, los que se realicen en las fechas previstas y todos los demás pagos y cobranzas incluidos en el plan. Estas cifras también representan valores netos de la disposición ordinaria del saldo de caja mínimo para cada mes. De este modo, Jean espera obtener un superávit de $200,000 en sus operaciones de septiembre, un déficit de $300,000 por sus operaciones de octubre, y así sucesivamente. Cada una de las cifras que aparecen en la tabla como superávit o déficit representa el valor incremental (no acumulativo) de superávit o déficit que se espera en el mes correspondiente.

Como se aprecia en el Anexo 1, Jean dispone de tres fuentes de crédito a corto plazo para satisfacer las necesidades mensuales de efectivo de Biglow. Esas fuentes son:

1. Pignoración de sus saldos de cuentas por cobrar; es decir, factoraje;
2. Aplazamiento del pago de sus compras; y
3. Obtención de un préstamo bancario a seis meses.

Un banco local accedió a prestarle fondos a Biglow al inicio de cualquier mes, tomando en prenda el saldo de sus cuentas por cobrar. El máximo empréstito que Biglow puede obtener de esta fuente es el 75% del saldo pendiente de sus propias cuentas por cobrar al principio de ese mes. La suma que obtenga en préstamo, cualquiera que sea, deberá ser pagada al banco a principios del mes siguiente, agregando el pago de 1.5% de interés sobre el monto efectivo del préstamo.

Los pagos de las compras a sus proveedores pueden aplazarse durante un mes como máximo. Así, hasta $1,000,000 en pagos programados actualmente para noviembre se pueden aplazar hasta diciembre. Cualquier parte, si la hay, que se difiera de esos pagos

Plan financiero a seis meses (todas las cifras expresadas en miles de dólares)

	SEP	OCT	NOV	DIC	ENE	FEB
Saldo de cuentas por cobrar	$700	$500	$700	$1200	$1000	$500
Pagos de compras programados	$800	$900	$1000	$600	$400	$500
Superávit en efectivo de las operaciones	$200	-	-	-	$300	$1500
Déficit en efectivo de las operaciones	-	$300	$600	$900	-	-

planeados, estará disponible para financiar el déficit previsto de las operaciones de noviembre. Sin embargo, la política personal de Jean le prohíbe terminantemente que retrase los pagos más de un mes, a partir del mes de su vencimiento. Por añadidura, el descuento promedio de 3% se pierde para todos los pagos que se efectúen con retraso. Por ejemplo, si Jean aplaza el pago de $1,000,000 previsto para noviembre, entonces el pago de diciembre por esta suma diferida será 1,000,000/.97 = 1,000,000*1.031 = $1,031,000 aproximadamente.

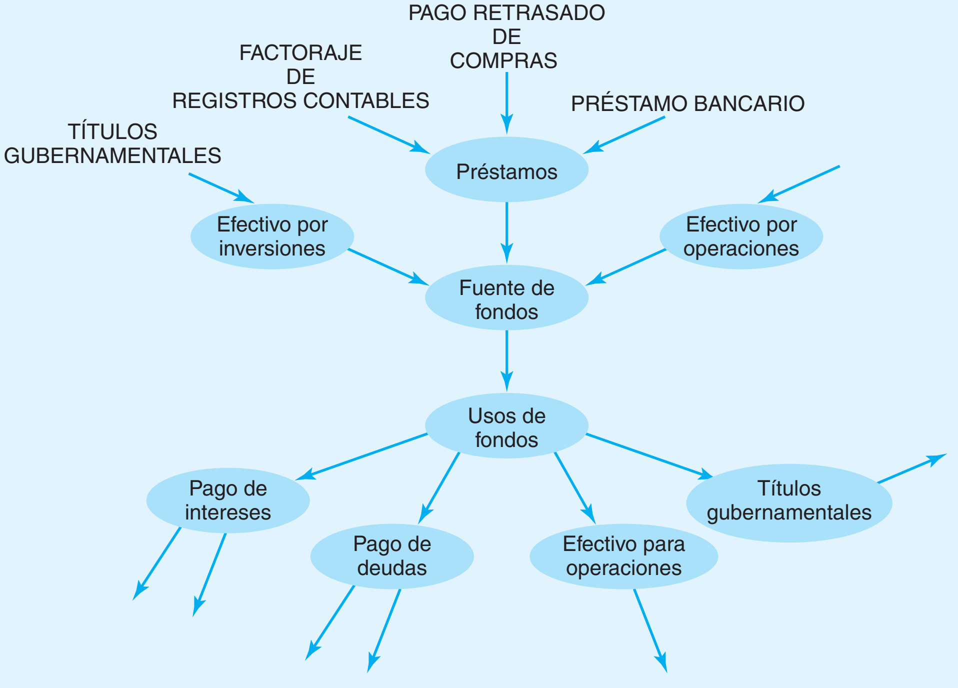
El banco local también está dispuesto a conceder a Biglow un préstamo único por cualquier cantidad, desde un mínimo de $400,000 hasta un máximo de $1,000,000, a seis meses. Si Biglow acepta este préstamo, el monto íntegro del mismo le será entregado a principios de septiembre y deberá saldar la deuda al final de febrero. Además, Biglow pagará al banco un cargo de 1% de interés mensual al final de cada mes. Una vez aceptado el préstamo, no será posible ni aumentar su monto ni abonar parte alguna del mismo antes que finalice el periodo de seis meses. Por tanto, el cargo mensual de 1% de interés se aplicará a toda la cantidad obtenida en préstamo, si la hubiere.

Al final de cada mes, Jean revisará el saldo vigente en la cuenta de caja de Biglow. Todos los fondos excedentes que encuentre por encima del saldo mínimo planeado para el mes siguiente serán invertidos de inmediato en títulos gubernamentales a 30 días. Esos títulos se comprarán al principio del mes siguiente y se venderán al final de ese mes. Al vender esos valores, Biglow recibirá medio punto porcentual de intereses sobre los fondos excedentes, si los hubiera, que realmente haya invertido. No se prevé la presencia de fondos excedentes para el mes de agosto, pero Jean planea seguir aplicando este procedimiento de inversión desde septiembre hasta febrero.

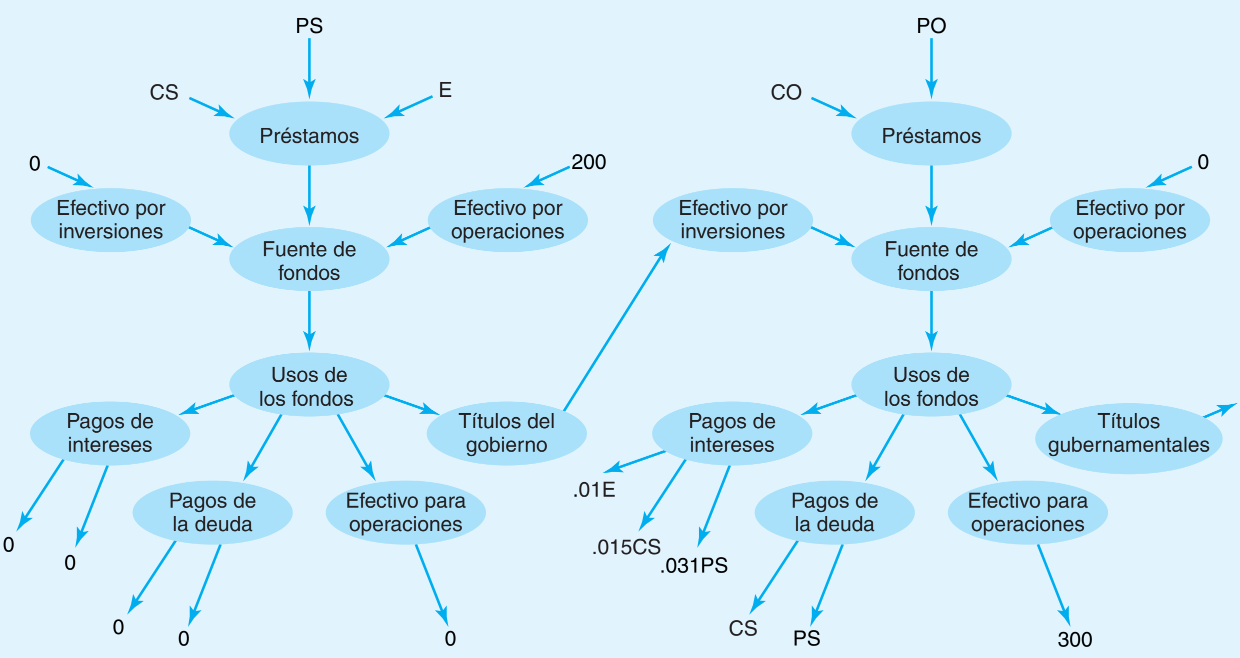
Las fuentes y los usos de los fondos correspondientes a los dos primeros meses se presentan en forma de diagrama en el Anexo 2, donde **CS** es la cantidad obtenida en préstamo pignorando las **C**uentas por cobrar en **S**eptiembre, **CO** es el monto del préstamo obtenido pignorando las **C**uentas por cobrar en **O**ctubre, **PS** es la suma que quedó disponible aplazando los **P**agos de **S**eptiembre, **PO** es la suma que quedó disponible aplazando los **P**agos de **O**ctubre, y **E** es el monto del **E**mpréstito o préstamo (único) a seis meses en septiembre, si lo hubiera.

Jean tiene que decidir en qué forma cubrirá los déficit de operación señalados en la tabla 1, utilizando cualquier combinación de las tres fuentes de crédito a corto plazo. Jean espera mantener por lo menos los saldos mínimos planeados en la cuenta de caja de Biglow al final de cada mes, como una reserva para contingencias, minimizando al mismo tiempo el costo neto en dólares de cualquier financiamiento a seis meses que decida utilizar.

ANEXO 1 Fuentes y usos de fondos para Biglow Toy Company



ANEXO 2 Fuentes y usos de fondos para septiembre y octubre



Referencias

Jean-Yves Blais, Jacques Lamont y Jean-Marc Rousseau, "The HASTUS Vehicle and Manpower Scheduling System at the Société de la Communauté Urbaine de Montréal", en *Interfaces,* 20, núm. 1 (enero-febrero de 1990).

James Evans, "A Microcomputer-Based Decision Support System Scheduling Umpires in the American Baseball League", en *Interfaces,* 18, núm. 6 (noviembre-diciembre de 1988).

David Carlisle, Kenneth Nickerson, Stephen Porbst, Denise Rudolph, Yosef Sheffi y Warren Powell, "A Turnkey Microcomputer-Based Logistics Planning System", en *Interfaces,* 17, núm. 4 (julio-agosto de 1987).

Tsuyoshi Yoshino, Tsuna Sasaki y Toshiharu Hasegawa, "The Traffic-Control System on the Hanshin Expressway", en *Interfaces,* 25, núm. 1 (1995), págs. 94-108.

CAPÍTULO

7

Optimización con enteros

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN

American Airlines usa un programa de enteros para optimizar los itinerarios de sus tripulaciones

American Airlines (AA) emplea a más de 8,300 pilotos y 16,200 asistentes de vuelo para una de las flotas más grandes de Estados Unidos, con más de 510 aviones. El costo total de la tripulación, que incluye salarios, prestaciones y viáticos, rebasa los $1,300 millones al año y este concepto sólo es superado por el costo del combustible. Sin embargo, a diferencia de este último, gran parte del costo de las tripulaciones es controlable. Por tanto, una prioridad del nuevo departamento de recursos de tripulación de AA consiste en desarrollar planes de asignación de tripulaciones que alcancen altos niveles de utilización de las mismas. Para alcanzar esta meta, el departamento de recursos de tripulación ha llegado a depender considerablemente de un programa de enteros.

AA programa sus vuelos una vez cada mes. Se debe asignar una tripulación (pilotos y asistentes) a cada vuelo. Los miembros de esas tripulaciones residen en 12 ciudades diferentes, conocidas como bases de tripulación; por tanto, la asignación de una tripulación a los vuelos más apropiados debe hacerse de tal modo, que el personal sea asignado para trabajar en una secuencia de vuelos que comience y termine en una misma ciudad base. Las secuencias de vuelo se conocen como circuitos y normalmente duran tres días. Cada una de las tripulaciones trabaja en cuatro o cinco circuitos cada mes.

La elaboración de circuitos de tripulación se dificulta debido a un complejo conjunto de reglas de trabajo del sindicato y la Federal Aviation Authority (FAA). Esas reglas varían según el tipo de tripulación (pilotos o asistentes de vuelo), el tamaño de ésta, el tipo de aeronave y el tipo de operación (nacional o internacional). Las reglas de trabajo determinan los periodos de actividad y descanso. Una estricta ley sindical especifica que la máxima duración del día laboral debe ser de entre 14 y 16 horas. En el modelo real, se impone un día laboral más corto en la etapa de planeación, previendo los retrasos que pueden presentarse en las operaciones reales. La FAA impone ciertas reglas para minimizar la fatiga de la tripulación y garantizar la seguridad de los pasajeros.

El costo de los circuitos incluye una compleja fórmula para realizar los pagos, que comprende las horas garantizadas de pago y las horas efectivas de vuelo, a la vez que otros elementos más directos, como los costos de hotel, los viáticos y el transporte terrestre. Por supuesto, la meta es encontrar una asignación de tripulaciones para todos los vuelos del mes siguiente que minimice ese costo total. El modelo se puede usar también en un plan más estratégico, para recomendar si sería conveniente cerrar una base de tripulación determinada o abrir una nueva base.

La optimización de los circuitos de tripulación es un problema combinatorio de enorme complejidad. Ha sido objeto de intensa investigación desde la década de los años 50 porque los pequeños perfeccionamientos se traducen en grandes ahorros en dólares. De hecho, un incremento de 1% en la utilización de la tripulación de AA significa un ahorro anual de $13 millones aproximadamente. AA calcula que el modelo permite economizar cantidades anuales superiores a los $20 millones. El modelo ha tenido tanto éxito que ha sido vendido a otras 11 importantes aerolíneas y a una compañía ferroviaria. (Véase Ranga *et al.*)

7.1 INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN CON ENTEROS

Este capítulo está dedicado a los modelos que podrían ser formulados y resueltos como modelos de programación lineal, si no fuera por la complicación de que algunas o todas sus variables tienen que asumir valores enteros. Por eso son conocidos como modelos de **programación lineal con enteros (PLE)**.[1] La programación lineal con enteros ha llegado a ser una importante área especializada de los modelos en administración. En este capítulo introductorio sólo podremos arañar la superficie, es decir, ilustrar la importancia del tema y presentar uno de los métodos de resolución más útiles.

Para empezar, recordemos de capítulos anteriores que en un modelo de programación lineal se permite que las variables adopten valores fraccionarios, como 6.394, y de acuerdo con el principio según el cual "todo lo que está permitido sucederá", podemos esperar que las respuestas también sean fraccionarias.[2] A pesar de esto, las variables de decisión reales (del mundo real) tienen que ser a menudo números enteros. Por ejemplo, una empresa fabrica bolsas de forraje para ganado vacuno. Una solución que requiera la fabricación de 3,000.472 bolsas no tendría sentido. En esas situaciones, una solución no entera puede adaptarse al requisito de integralidad, redondeándola simplemente o truncando el resultado para aproximarlo al entero más próximo. Este método produce lo que llamamos una **solución redondeada.** El uso de ese tipo de soluciones es aceptable para la administración en los casos en que el redondeo no tenga importancia significativa en la práctica. Por ejemplo, no hay una diferencia significativa, ni para la función objetivo ni para las restricciones, entre el hecho de producir 19,283.64 o 19,283 bolsas de forraje Big Bull para ganado. De hecho, en la recopilación de los datos del modelo ya hubo tal vez suficientes aproximaciones, de modo que la gerencia se sentirá contenta con cualquier cifra de producción próxima al nivel de las 19,000 bolsas. En general, cuanto más grande sean los valores de las variables de decisión de la solución PL, tanto más probable será que una respuesta redondeada en valores enteros resulte aceptable en la práctica.

CUÁNDO SON IMPORTANTES LAS SOLUCIONES ENTERAS

Sin embargo, existen varios modelos importantes donde esta actitud bastante liberal con respecto a los requisitos de que el modelo real arroje números enteros no funciona. La causa de esa complicación puede ser la escala de las variables que estamos considerando. Por ejemplo, si la solución de un modelo de PL formulado para la empresa Boeing recomendara la construcción de 3.6 aviones 747 y 4.8 aviones 777, es probable que la gerencia no se sintiera cómoda frente a la opción de fabricar cuatro 747 y cinco 777 o, a fin de cuentas, cualquier otra combinación redondeada de esta manera. La magnitud de los réditos financieros y los recursos comprometidos en la fabricación de cada unidad de esas aeronaves, impondrían la necesidad de encontrar la mejor *solución entera* posible.

En otro ejemplo veremos que en muchos modelos se usan variables enteras para representar decisiones lógicas. Por ejemplo, expondremos modelos en los cuales nos proponemos que X_7 sea igual a 1 si es conveniente construir un almacén en Kansas City, y que X_7 sea igual a 0 si no debemos construirlo. Supongamos que la solución para una versión de este modelo en PL recomendara un valor no entero (por ejemplo, $X_7 = 0.38$). Como veremos, este valor no ofrece información útil sobre la solución correspondiente al modelo real. Está claro que no podemos construir 0.38 de un almacén. Por supuesto, podríamos seleccionar almacenes de distintos tamaños, pero en este caso se trata de saber si debemos tener un almacén en Kansas City o no. Podría usted adivinar que, en un caso como éste, el redondeo al entero más cercano (0 en este caso) sería un buen método para superar esta dificultad. Desgraciadamente, eso no nos garantiza una solución aceptable (ya no digamos óptima). En realidad, hemos visto que el redondeo puede ser incapaz de producir una solución factible en tales casos.

Hay muchos modelos de administración importantes que podrían ser PL, salvo por el requisito de que algunas de sus variables de decisión tengan valores enteros, en cuyo caso *no es posible* encontrar una solución satisfactoria mediante la optimización directa de PL en Solver, redondeando después los valores óptimos resultantes de las variables de decisión. Los modelos de este tipo tienen que ser resueltos por medio de métodos desarrollados expresamente para la resolución de grandes modelos de programación con enteros.

[1]No todos los problemas de programación con enteros son forzosamente lineales, y gran parte de lo que hemos visto en este capítulo sobre la PLE se aplica a los programas enteros en general. Sin embargo, como en este capítulo sólo tratamos con modelos lineales, usaremos la abreviatura PLE para no tener necesidad de introducir terminología adicional y para minimizar las posibilidades de confusión.

[2]En el capítulo 6 se muestra una excepción a este respecto. Los modelos de transporte con ofertas y demandas enteras producen siempre soluciones óptimas expresadas con valores enteros. Esa notable propiedad es válida en la clase más general de los modelos de red.

La importancia de los modelos de programación lineal con enteros ha sido reconocida desde hace años y se ha dedicado mucho tiempo y esfuerzo a su investigación y optimización. Esos esfuerzos están redituando dividendos, porque se han logrado avances notables en este rubro. Por supuesto, los enormes avances de la tecnología de cómputo han hecho también una aportación crucial a nuestra creciente capacidad para resolver grandes modelos de programación lineal con enteros, cuya optimización habría sido imposible hace un decenio.

PL FRENTE A LA PLE

A pesar de las impresionantes mejoras en nuestra capacidad para resolver modelos de programación con enteros, esta tecnología todavía es muy diferente de las que están a nuestro alcance para resolver modelos donde las variables de decisión no tienen que ser forzosamente enteras. Muchos modelos que pueden resolverse con facilidad como formulaciones de PL resultan irresolubles en la práctica cuando se requiere que las variables de decisión sean valores enteros (es decir, que el tiempo y el costo necesarios para calcular una solución son demasiado grandes). En la práctica, la optimización de modelos de programación con enteros suele tardar diez veces más, y a menudo cientos o miles de veces más, que cuando no intervienen restricciones respecto a que los valores sean enteros.

En las siguientes secciones describiremos primero dos tipos generales de modelos de programación lineal con enteros y usaremos el análisis gráfico para ilustrar la relación entre programación lineal, programación lineal con enteros y el proceso de redondear soluciones de PL para obtener una solución posible para una PLE. Esta aproximación gráfica nos brindará una forma intuitiva de captar la naturaleza del modelo con enteros que estamos estudiando. Después enfocaremos nuestra atención en una variedad especial de modelos con enteros donde las variables enteras están restringidas a los valores binarios 0 o 1. El uso de esas variables "indicadoras" o "booleanas" nos permite *formular* gran variedad de condiciones lógicas que no sería posible expresar de otra manera. Analizaremos esas formulaciones porque dichas condiciones intervienen en buen número de modelos prácticos importantes. A continuación, trataremos el tema de cómo optimiza Solver modelos lineales con enteros, aplicando el método de "ramificación y acotamiento", a fin de que comprenda usted mejor los problemas que implica el empleo de formulaciones enteras para la toma de decisiones. Después nos ocuparemos del tema de la programación lineal con enteros en la práctica, poniendo énfasis en las consideraciones estratégicas y analizando las posibilidades del análisis de sensibilidad.

7.2 TIPOS DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON ENTEROS (PLE)

Programación con enteros es una expresión general para describir los modelos matemáticos de programación que incluyen *condiciones de integralidad* (las condiciones en las cuales se estipula que algunas variables de decisión, o todas, deben tener valores enteros). Como antes dijimos, los modelos de programación lineal con enteros (PLE) son modelos de programación lineal con la característica adicional de que algunas o todas las variables de decisión tienen que adoptar valores enteros. En esta categoría de modelos hay varias clasificaciones.

Un **programa lineal sólo con enteros**, como su nombre lo indica, se trata de un modelo en el cual se requiere que *todas* las variables de decisión tengan valores enteros. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 108x_1 + 92x_2 + 58x_3 \geq 576 \\ & 7x_1 + 18x_2 + 22x_3 \geq 83 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ y } \textit{enteros} \end{aligned} \tag{7.1}$$

es un modelo de ese tipo. Sin las restricciones adicionales de que x_1, x_2, x_3 sean enteros (es decir, las condiciones de integralidad), se trataría de un modelo de PL.

Un modelo donde *solamente algunas* de las variables están restringidas a valores enteros y otras que pueden asumir cualquier número no negativo (es decir, *cualquier valor continuo*) se conoce como **programa lineal con enteros mixtos (PLEM).** Por ejemplo, supongamos que en el modelo anterior sólo x_1 y x_2 tuvieran que ser variables enteras y que x_3 no tuviera esa restricción. En algunos modelos, las variables enteras están restringidas a los valores 0 o 1. Esos modelos se llaman **binarios** o **programas lineales con enteros 0–1.** Estos modelos son particularmente importantes porque las variables 0–1 pueden usarse para representar decisiones sobre dicotomías (decisiones sí/no).[3] Gran variedad de modelos de programación, como ubicación óptima de instalaciones, planeación de la producción y determinación de carteras de inversiones, son modelos de programación lineal con enteros 0–1. Los analizaremos con cierto detalle en la sección 7.4. Como veremos, las variables 0–1 pueden utilizarse en los modelos donde todos los valores deben ser enteros y también en los modelos de PLEM.

Con frecuencia consideraremos el modelo de PL que resulta cuando comenzamos con una PLE y decidimos pasar por alto todas las restricciones de integralidad. A este modelo de PL se le conoce como la **relajación de PL** de una PLE. Por ejemplo, si en la PLE que presentamos en el modelo (7.1) suprimimos la expresión "y *enteros*", la PL resultante será la relajación de PL del programa original con enteros.

7.3 INTERPRETACIONES GRÁFICAS DE MODELOS DE PLE

En el capítulo 4 vimos que es posible extraer conocimientos importantes acerca de la naturaleza de modelos de PL y su resolución, al examinar el análisis gráfico de un problema con dos variables de decisión. Este mismo enfoque resulta útil en el caso de un modelo de PLE. Ahora vamos a dirigir nuestra atención hacia ese tema.

OPTIMIZACIÓN DEL MODELO DE PLE: UNA MODIFICACIÓN DE PROTRAC, INC.

Veamos una versión modificada del modelo PROTRAC E y F expuesto en los capítulos 3 a 5. En particular, considere usted este modelo modificado

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Max} & 18E + 6F & & \\
\text{s.a.} & E + F & \geq 5 & (1) \\
 & 42.8E + 100F & \leq 800 & (2) \\
 & 20E + 6F & \leq 142 & (3) \\
 & 30E + 10F & \geq 135 & (4) \\
 & E - 3F & \leq 0 & (5) \\
 & \multicolumn{2}{l}{E, F \geq 0 \text{ y enteros}} &
\end{array}
\qquad (7.2)
$$

Para una descripción detallada del modelo original, véase el capítulo 3. En suma, E es el número de unidades E-9 y F es el número de F-9 que PROTRAC ha decidido fabricar. La función objetivo son las ganancias como función de la decisión de producción. La restricción (1) refleja la necesidad de cumplir con compromisos previos. Las restricciones (2) y (3) son los límites de tiempo para la producción en los departamentos A y B, respectivamente. La restricción (4) forma parte de un acuerdo sindical y la restricción (5) ha sido impuesta de acuerdo con el criterio de la gerencia sobre la mezcla de productos apropiada. Además de los cambios en los parámetros, la única modificación importante entre (7.2) y el modelo de PL del capítulo 3 es la palabra *enteros.* Como veremos en breve, el impacto de esa sencilla palabra es profundo.

Para resolver este modelo con un método gráfico, recomendamos tres pasos:

1. Encuentre el conjunto factible para la relajación de PL del modelo de PLE.
2. Identifique los puntos correspondientes a valores enteros dentro del conjunto determinado en el paso 1.
3. Entre los puntos determinados en el paso 2, encuentre uno que optimice la función objetivo.

Los dos primeros pasos han sido efectuados por el programa GLP (Graphic Linear Programming) en la figura 7.1. La región sombreada corresponde al conjunto factible para la relajación de PL, y los puntos oscuros, que pueden activarse haciendo clic en la herramienta "I" que aparece debajo del cursor, son los puntos enteros contenidos en ese conjunto. Esta serie de puntos

[3]El uso creativo de variables binarias permite incluir muchas declaraciones condicionales en un modelo de optimización, con lo cual se evita la necesidad de usar la función SI () de Excel. Recuerde que si la función objetivo o las restricciones están relacionadas directa o indirectamente con una función SI (), entonces es posible que Solver no converja hacia una solución óptima.

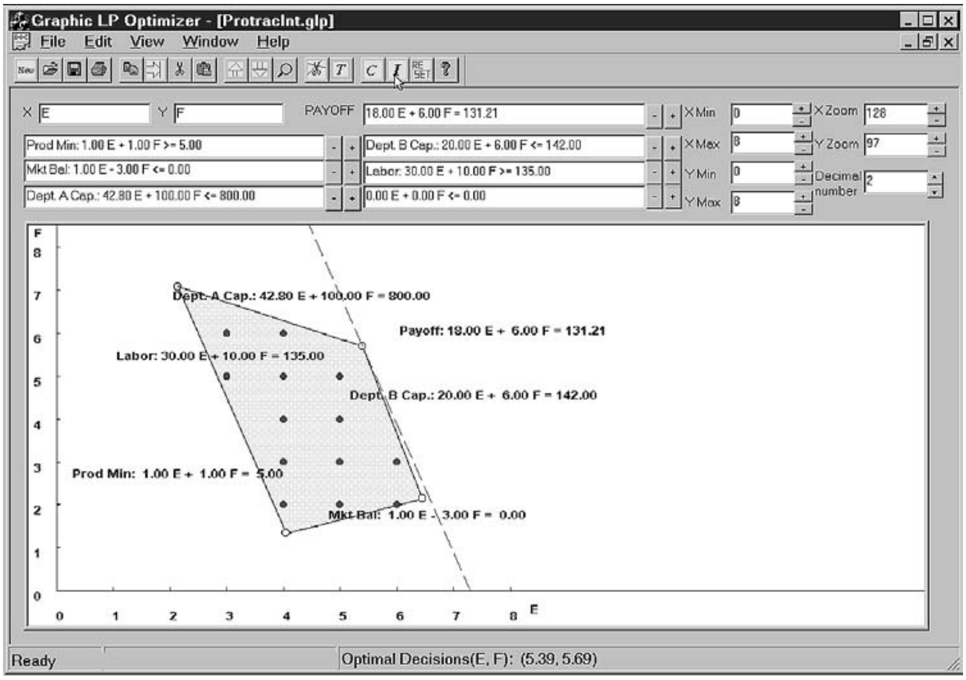


FIGURA 7.1

Conjunto factible para el modelo de PLE revisado de PROTRAC

enteros es el conjunto de soluciones factibles para la PLE. En otras palabras, sólo existen 13 soluciones factibles para el modelo de PLE. Se trata de los puntos (3, 6), (4, 6), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (4, 4), (5, 4), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (4, 2), (5, 2) y (6, 2).

Para optimizar el modelo, debemos determinar ahora cuál de los puntos factibles produce el valor más grande de la función objetivo. Procedemos igual que en un modelo de PL; es decir, desplazando un contorno de la función objetivo en *dirección ascendente* (puesto que se trata de un modelo de Maximización) hasta que ya no sea posible llegar más arriba conservando la intersección con algún punto factible.

El resultado de este proceso se ilustra en la figura 7.2, que presenta la situación cuando se ha hecho clic en la herramienta "Auto Max" que se encuentra debajo del cursor. Vemos que la solución óptima para la PLE es el punto $E = 6$ y $F = 3$. Puesto que la función objetivo es $18E + 6F$, esta solución produce un valor óptimo de la función objetivo de $18(6) + 6(3) = 126$, como muestra dicha figura.

LA RELAJACIÓN DE PL

La figura 7.3 bosqueja la solución y señala varios puntos cercanos. Podemos usar la figura 7.3 para ilustrar algunos hechos importantes acerca de la relajación de PL. Primero observamos que la solución óptima para la relajación de PL se localiza en la intersección de las dos rectas $42.8E + 100F = 800$ y $20E + 6F = 142$, como muestra la figura 7.1. Este resultado se obtiene desplazando lo más posible hacia arriba el contorno de la función objetivo sin que ésta deje de tocar el conjunto factible para la relajación de PL. Puesto que la intersección entre las dos restricciones no se presenta en un punto entero, la solución óptima para la relajación de PL no es factible para la PLE. Como podemos apreciar en la figura 7.1, los valores óptimos de las variables de decisión para la relajación de PL producen como resultado $E^* = 5.39$, $F^* = 5.69$. También se ilustra el **valor óptimo** de la función objetivo, designado como **VO,** que es 131.21 para la relajación de PL.

Al comparar estos dos valores óptimos (126 para la PLE y 131.21 para la relajación de PL), vemos que el VO para la relajación de PL es mayor que para la PLE original. Este hecho constituye un caso especial de un fenómeno que ya habíamos observado en nuestras exposiciones anteriores sobre programación lineal. Usted puede pensar en la creación de una PLE o una PLEM como un procedimiento que comienza con la relajación de PL y al cual se agregan después las restricciones sobre enteros. Sabemos que *en cualquier modelo de optimización, el hecho de agregar restricciones no puede ayudar, pero sí perjudicar el cálculo del valor óptimo de la función objetivo.* Por todas estas razones, podemos hacer los siguientes comentarios:

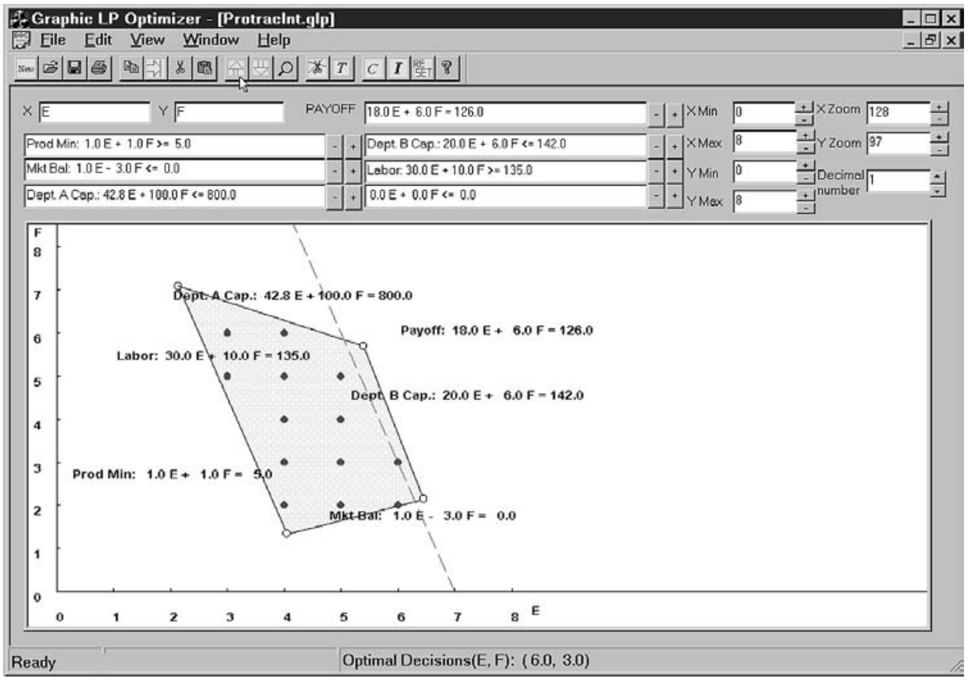


FIGURA 7.2

Solución entera óptima para el modelo PROTRAC revisado

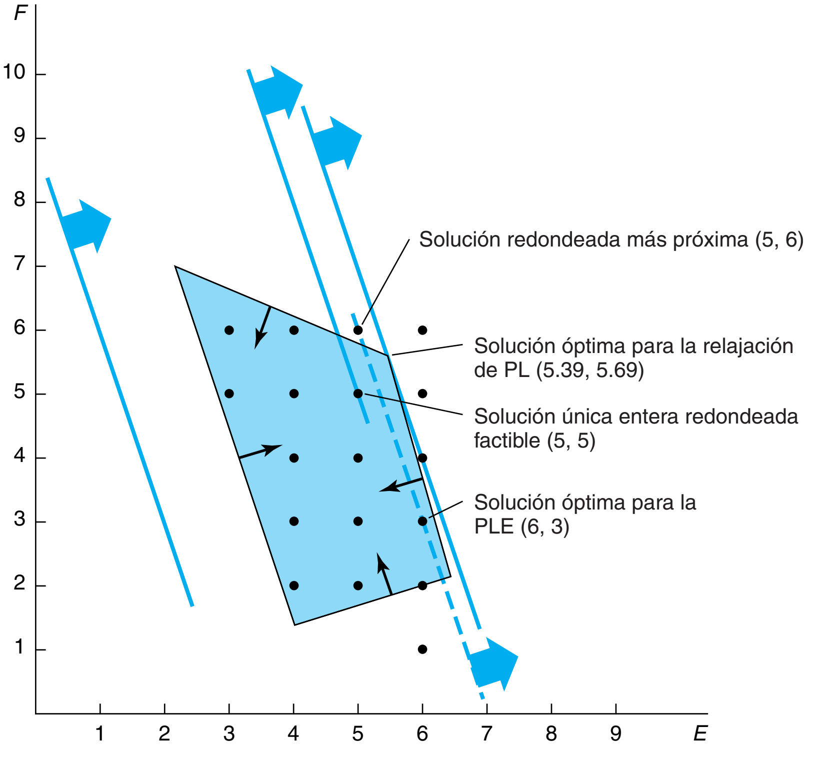


FIGURA 7.3

Solución gráfica para la PLE de PROTRAC

1. En un modelo *Max* el VO de la relajación de PL siempre proporciona una *cota superior* sobre el VO del modelo de PLE original. Agregar la restricción de enteros puede perjudicar o dejar intacto el VO de la PL. En un modelo Max, perjudicar el VO significa hacerlo más pequeño.
2. En un modelo *Min*, el VO de la relajación de PL siempre proporciona una *cota inferior* sobre el VO del modelo de PLE original. Una vez más, agregar la restricción sobre enteros puede perjudicar o dejar intacto el VO de la PL. En un modelo Min, perjudicar el VO significa hacerlo más grande.

SOLUCIONES REDONDEADAS

Hemos observado que la solución óptima para la relajación de PL es $E^* = 5.39$, $F^* = 5.69$. Cada una de estas variables podría redondearse hacia arriba o hacia abajo, por lo cual existen cuatro soluciones redondeadas ([5, 5], [5, 6], [6, 5], [6, 6]) en las proximidades de la solución óptima para la relajación de PL. En general, si se tienen dos variables de decisión, existen cuatro soluciones vecinas redondeadas; con n variables de decisión, podría haber 2^n de esos puntos.

Examinemos ahora con más detalle algunos de los posibles problemas que pueden surgir cuando se usa una solución redondeada. Vamos a referirnos a la figura 7.3. Si resolvemos la relajación de PL y redondeamos cada variable hasta el entero más próximo, obtenemos (5, 6), lo cual no es factible. En este caso, el punto (5, 5) es el único punto factible que se puede obtener por redondeo (5.39, 5.69). Los otros puntos candidatos, (5, 6), (6, 6) y (6, 5), no son factibles.

Este modelo ilustra dos hechos importantes acerca de las soluciones redondeadas:

1. ***Una solución redondeada no tiene que ser forzosamente óptima.*** En este caso, el valor de la función objetivo en la única solución redondeada factible es

$$18(5) + 6(5) = 120$$

Comparemos esto con el valor de 126 para el valor óptimo de la PLE. Vemos así que hay una pérdida proporcional de $6/126$, casi de 5%, cuando se usa esta solución redondeada, en lugar de la solución óptima.

2. ***Una solución redondeada no tiene que estar forzosamente cerca de la solución óptima de la PLE.*** Con frecuencia, los estudiantes tienen intuitivamente la idea de que, aunque es posible que una solución redondeada no sea la óptima, debe estar "cerca" de la solución óptima de la PLE. Si nos referimos de nuevo a la figura 7.3, observamos que la solución redondeada no es uno de los puntos enteros que son vecinos inmediatos de la solución óptima de la PLE. De hecho, sólo cuatro puntos del conjunto factible ([3, 6]), [4, 6], [3, 5] y [4, 5]) están más alejados de la solución óptima que la solución redondeada. Así pues, resulta difícil afirmar que, en este ejemplo, la solución redondeada esté cerca de la solución óptima de la PLE.

En la figura 7.4 presentamos otro modelo de PLE que ilustra un problema adicional, y aún más drástico, asociado a las soluciones redondeadas. En esta figura, el área sombreada es el conjunto factible para la relajación de PL, los puntos resaltados son enteros y el punto que está encerrado en un círculo es la única solución factible para la PLE. La solución óptima para la relajación de la PL está marcada en el vértice del conjunto factible en forma de cuña. Observe que si empezamos con la solución óptima para la PL (aproximadamente [3.3, 4.7]) y a continuación la redondeamos a cualquiera de los cuatro puntos enteros vecinos, obtenemos un punto no factible. En este ejemplo, ese hecho significa que *ninguna forma de redondeo es capaz de producir la factibilidad.*

En resumen, hemos visto que una forma intuitivamente atractiva de abordar la PLE consiste en resolver la relajación de PL del modelo original y, después, redondear la solución a un punto entero vecino. Pero también hemos observado que este procedimiento implica ciertos problemas.

1. Ninguno de los puntos enteros vecinos puede ser factible.
2. Aun si uno o varios de los puntos enteros vecinos son factibles,
   - **a.** Ese punto no necesariamente es una solución óptima de la PLE.
   - **b.** Ese punto ni siquiera tiene que estar cerca de la solución óptima de la PLE.

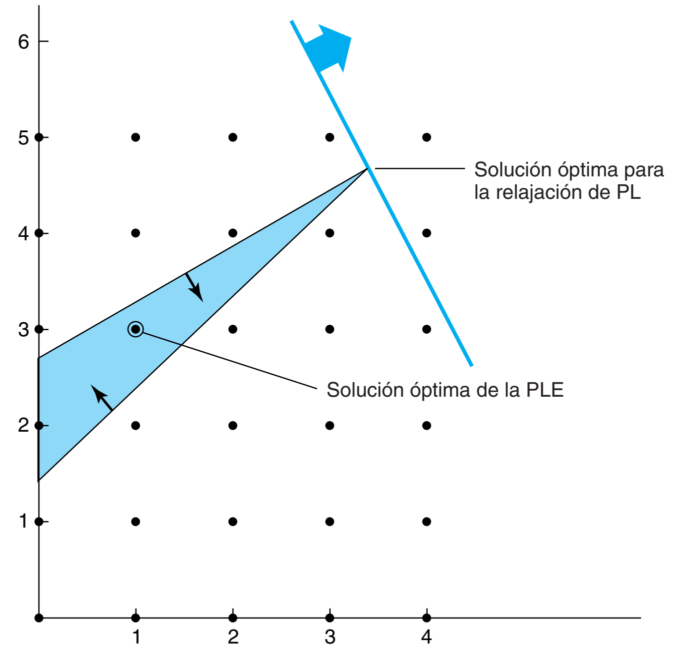


FIGURA 7.4

Todas las soluciones redondeadas no son factibles

ENUMERACIÓN

El método gráfico fue utilizado para ilustrar algunas ideas importantes sobre los modelos de PLE. Sin embargo, como sólo hay 13 puntos factibles en la figura 7.1 para la PLE de PROTRAC, podría usted tener la impresión errónea de que es razonable hacer la lista de todos los puntos factibles, evaluar la función objetivo en cada uno y seleccionar el mejor de todos ellos; es decir, que se puede resolver el modelo por **enumeración exhaustiva.** En este caso sí es posible hacerlo. Sin embargo, igual que en con la PL, la enumeración exhaustiva o completa no es un procedimiento razonable, por desgracia, para la mayoría de los modelos de PLE. Supongamos, por ejemplo, que tenemos una PLE con 100 variables 0–1. En ese caso podría haber hasta 2^{100}, o sea, 1.27×10^{30} puntos factibles. Aun con la supercomputadora más veloz, se requerirían muchas vidas para enumerar todos esos puntos.

Es interesante comparar el método de enumeración para PLE con el método símplex utilizado por Solver para los modelos de PL. Como hemos visto, el método símplex puede considerarse como una forma de visitar las esquinas o vértices del conjunto de restricciones y evaluar la función objetivo en los vértices visitados. También es cierto que puede haber miles de millones de vértices en el conjunto restringido de una PL grande. Sin embargo, lo importante es que *no todos los vértices son visitados.* En realidad, el método símplex es muy eficiente; funciona de tal modo que el valor de la función objetivo va mejorando en cada uno de los vértices sucesivos y, cuando ya no es posible seguir obteniendo mejores valores el procedimiento se detiene, lo cual indica que el programa ha encontrado una solución óptima. Por ahora no existe un método comparable para los modelos de PLE. Hay otros métodos (que analizaremos después) más satisfactorios que la enumeración exhaustiva, pero no son capaces de eliminar grandes cantidades de soluciones alternativas con tanta rapidez y eficiencia como el método símplex en los modelos de PL.

7.4 APLICACIONES DE LAS VARIABLES BINARIAS

Las variables binarias, o 0–1, desempeñan un papel especialmente importante en las aplicaciones de la PLE. Estas variables permiten incluir decisiones “sí o no”, conocidas a veces como decisiones de dicotomía, en un formato de optimización. Dos ejemplos rápidos ilustrarán esta idea:

1. En un modelo para decidir la ubicación de una planta, sea $x_j = 1$ la opción de construir la planta en la localidad j, y $x_j = 0$ la opción de no hacerlo.
2. En un modelo de rutas, sea $x_{ijk} = 1$ el resultado que corresponde a la opción de que el camión k vaya de la ciudad i a la ciudad j, y sea $x_{ijk} = 0$ el correspondiente a la opción de que no recorra esa ruta.

TABLA 7.1 Alternativas de presupuesto del capital de PROTRAC

ALTERNATIVA	CAPITAL REQUERIDO EN EL AÑO POR CADA ALTERNATIVA (MILES $)					
	VALOR PRESENTE DEL RENDIMIENTO NETO (MILES $)	1	2	3	4	5
Ampliar la planta en Bélgica	400	100	50	200	100	0
Ampliar la capacidad para máquinas pequeñas en Estados Unidos	700	300	200	100	100	100
Establecer una nueva planta en Chile	800	100	200	270	200	100
Ampliar la capacidad para máquinas grandes en Estados Unidos	1000	200	100	400	200	200
Capital disponible cada año		500	450	700	400	300

En estos ejemplos podrá observar que el empleo de variables 0–1 nos proporciona una nueva herramienta de formulación. En esta sección veremos algunos ejemplos de la forma en que se usan variables 0–1 para tomar decisiones de dicotomía en diferentes aplicaciones. Veremos también la forma de manipular las variables de esa índole para representar condiciones lógicas de diversos tipos.

PRESUPUESTO DE CAPITAL: UNA DECISIÓN SOBRE EXPANSIÓN

Muchas firmas toman decisiones cada año para planear sus inversiones de capital. En las grandes compañías, las decisiones son a menudo la culminación de un largo proceso que comienza con recomendaciones de los diferentes departamentos y continúa con debates en toda la empresa y en cada una de sus divisiones. No es raro que la selección final esté a cargo de la junta de directores. En compañías más pequeñas el proceso no es tan complejo, pero la decisión sobre el presupuesto de capital sigue siendo parte fundamental de la evaluación anual sobre el futuro de la compañía.

En su forma más sencilla, la decisión en torno al presupuesto de capital consiste en escoger entre n alternativas para maximizar los resultados o réditos, dentro de las restricciones impuestas sobre el monto de capital invertido en cierto tiempo. Como ejemplo específico, supongamos que la junta de directores de PROTRAC observa los datos resumidos en la tabla 7.1. Las sumas monetarias de esta tabla están expresadas en miles de dólares. Los directores deben seleccionar una o más de las alternativas. Si deciden expandir la planta en Bélgica, el valor presente del rendimiento neto para la firma es $400,000. Este proyecto requiere $100,000 de capital en el primer año, $50,000 en el segundo, y así sucesivamente. La junta directiva ha presupuestado con anterioridad hasta $500,000 para todas las inversiones de capital en el año 1, hasta $450,000 en el año 2, y así sucesivamente.

Un modelo de PLE para presupuesto de capital en PROTRAC Este modelo se puede construir como una PLE en la cual todas las variables corresponden al tipo 0–1. Esto se conoce como una PLE 0–1. En particular, sea $x_i = 1$ si el proyecto i va a ser aceptado, y sea $x_i = 0$ si el proyecto i no va a ser aceptado. Así, el modelo es el siguiente

$$\begin{array}{ll}
\text{Max} & \boxed{400x_1 + 700x_2 + 800x_3 + 1000x_4} \\
\text{s.a.} & \boxed{100x_1 + 300x_2 + 100x_3 + 200x_4} \le 500 \\
& 50x_1 + 200x_2 + 200x_3 + 100x_4 \le 450 \\
& 200x_1 + 100x_2 + 270x_3 + 400x_4 \le 700 \\
& 100x_1 + 100x_2 + 200x_3 + 200x_4 \le 400 \\
& 100x_2 + 100x_3 + 200x_4 \le 300 \\
& x_i = 0 \text{ o bien } 1;\ i = 1, \ldots, 4
\end{array}$$

Valor presente derivado de los proyectos aceptados

Capital requerido en el año 1

Capital disponible en el año 1

En este caso, la función objetivo es el valor presente total y cada restricción controla el monto de capital empleado en cada uno de los 5 periodos.

La relajación de PL Explicaremos este modelo resolviendo primero la relajación de PL. La formulación y la solución se ilustran en la figura 7.5. Observe que al trabajar con la relajación

Modelo de presupuesto del capital PROTRAC (miles $)

Inversión alternativa	Ampliar la planta en Bélgica	Ampliar la capacidad para máquinas pequeñas en Estados Unidos	Abrir la nueva planta en Chile	Ampliar la capacidad para máquinas grandes en Estados Unidos			
Símbolo	X1	X2	X3	X4			
Decisión	0.67	0.67	0.33	1.00	VP total		
Rendimiento neto VP	$400	$700	$800	$1000	$ 2,000.00		
Restricciones de capital					Requerim. capital	Capital disponible	Holgura
Requerim. capital, año 1	$100	$300	$100	$200	500.00	<=$500	0
Requerim. capital, año 2	$50	$200	$200	$100	333.33	<=$450	116.67
Requerim. capital, año 3	$200	$100	$270	$400	690.00	<=$700	10
Requerim. capital, año 4	$100	$100	$200	$200	400.00	<=$400	0
Requerim. capital, año 5		$100	$100	$200	300.00	<=$300	0

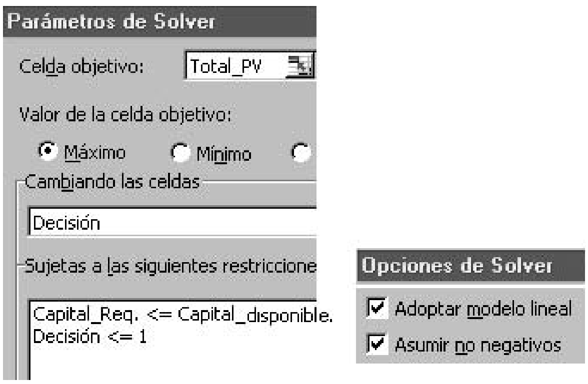


FIGURA 7.5

Relajación de PL del modelo de presupuesto de capital de PROTRAC

de PL para hacerla un modelo de PLE 0-1, pasamos por alto las restricciones $x_i = 0$ o 1. En lugar de eso, añadimos las restricciones $x_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$ además de las restricciones de no negatividad (como muestra la figura 7.5). De este modo, en la relajación, en lugar de $x_i = 0$ o 1, hemos restringido x_i a un intervalo (es decir, $0 \leq x_i \leq 1$). Sería agradable que en la solución óptima, cada x_i adoptara fortuitamente uno u otro extremo de esos valores permisibles (ya sea 0 o 1), porque entonces la PLE original quedaría resuelta. Desgraciadamente, como muestra la figura 7.5, esto sólo sucede con x_4; los valores de x_1, x_2 y x_3 son fraccionarios.[4] Puesto que x_3 debe ser igual a 1 si PROTRAC establece una planta en Chile y 0 si no lo hace, el resultado $x_3 = 0.33$ no tiene sentido. Observamos también que no nos conduce a un buen resultado tratar de encontrar una solución para el modelo de PLE resolviendo la relajación de PL y redondeando después. Las reglas ordinarias de redondeo al entero más próximo (es decir, redondear los números ≤ 0.499 a 0 y los números $\geq$ 0.500 a 1) producen la solución $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Basta dar un vistazo a la hoja de cálculo con esos valores para descubrir que esta solución no es factible porque viola ostensiblemente la primera restricción.

La solución de PLE óptima A fin de obtener la solución de PLE óptima para el modelo de presupuesto de capital PROTRAC debemos usar la opción *programación con enteros* de Solver. La formulación y la solución de la PLE aparecen en la figura 7.6. Observe que las cuatro restricciones por las cuales se requiere que las x_i sean ≤ 1 se han suprimido. En Solver, la restricción "Decisión = binaria", es decir, "C5:F5 = binario", indica que las cuatro variables de decisión son del tipo 0–1.[5]

La solución muestra que la gerencia de PROTRAC debería aceptar las tres primeras alternativas; x_4 ahora es cero, mientras que en la relajación de PL era 1. Observe también que el valor de la función objetivo (VO) es ahora 1,900. Esto representa una reducción de 100 (5%) del valor óptimo de la función objetivo PL. En la práctica, podríamos estar interesados en resolver

[4]Usted puede obtener una solución diferente; el modelo tiene varias soluciones óptimas alternativas.

[5]La designación "binario" o "entero" en el diálogo de Solver sólo se puede aplicar a variables de decisión, es decir, a las "Celdas por cambiar" del propio Solver.

	B	C	D	E	F	G	H	I
2	Modelo de presupuesto del capital PROTRAC (miles $)							
3	Inversión alternativa	Ampliar la planta en Bélgica	Ampliar la capacidad para máquinas pequeñas en Estados Unidos	Abrir la nueva planta en Chile	Ampliar la capacidad para máquinas grandes en Estados Unidos			
4	Símbolo	X1	X2	X3	X4			
5	Decisión	1.00	1.00	1.00	0.00	VP total		
6	Rendimiento neto VP	$400	$700	$800	$1000	$ 1,900.00		
7	Restricciones de capital					Requerim. capital	Capital disponible	Holgura
8	Requerim. capital, año	$100	$300	$100	$200	500.00	<=$500	0
9	Requerim. capital, año	$50	$200	$200	$100	450.00	<=$450	0
10	Requerim. capital, año	$200	$100	$270	$400	570.00	<=$700	130
11	Requerim. capital, año	$100	$100	$200	$200	400.00	<=$400	0
12	Requerim. capital, año 5		$100	$100	$200	200.00	<=$300	100

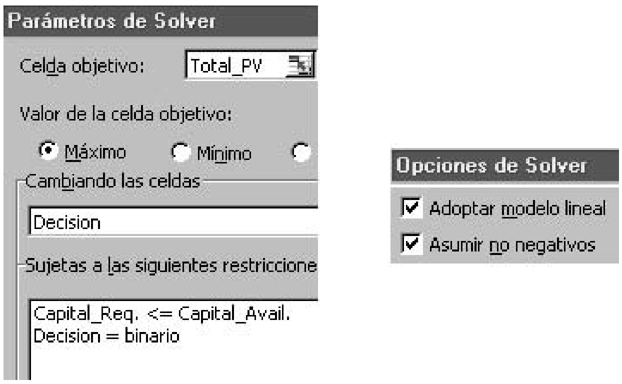


FIGURA 7.6

La PLE para el modelo del presupuesto de capital de PROTRAC

programas de enteros con centenares de variables 0–1. Después de examinar el análisis de este pequeño ejemplo y los problemas asociados al método de la relajación, usted podrá apreciar la importancia aún mayor que adquiere el empleo de los métodos especiales de Solver para resolver el modelo de PLE en otras aplicaciones más grandes y complejas.

CONDICIONES LÓGICAS

Una aplicación importante de las variables 0–1 consiste en imponer restricciones que surgen de condiciones lógicas. Mencionamos a continuación varios ejemplos.

No más de *k* de *n* alternativas Supongamos que $x_i = 0$ o 1, para $i = 1,..., n$. La restricción

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq k$$

implica que podemos seleccionar como máximo k alternativas entre n posibilidades. Es decir, como cada x_i sólo puede ser 0 o 1, la restricción anterior implica que no más de k de ellas puede ser igual a 1. Considerando los datos presentados en la tabla anterior, suponga que PROTRAC ha estimado que no le será posible aceptar más de un proyecto en el extranjero. Por este motivo, la junta directiva quiere suprimir la alternativa que incluye tanto la expansión en Bélgica como la nueva planta en Chile. Añadir la restricción

$$x_1 + x_3 \leq 1$$

al modelo de PLE de la figura 7.6 implica que la solución puede contener como máximo una de las opciones en el extranjero.

Decisiones dependientes Podemos usar variables 0–1 para hacer que una relación dependa de dos o más decisiones. Supongamos, por ejemplo, que la gerencia de PROTRAC no quiere seleccionar la alternativa k, a menos que haya elegido primero la alternativa m. La restricción

$$x_k \leq x_m \tag{7.3}$$

o su equivalente

$$x_k - x_m \leq 0$$

asegura el cumplimiento de esta condición. Observe que si no se ha seleccionado previamente m, entonces $x_m = 0$. En consecuencia, la condición (7.3) hace obligatorio que x_k sea 0 (es decir, que no se selecciona la alternativa k). En forma alternativa, si se selecciona m, $x_m = 1$, entonces (7.3) se convierte en $x_k \leq 1$. Con esto, el programa queda en libertad para seleccionar $x_k = 1$ o bien $x_k = 0$.

Para citar un ejemplo, examine de nuevo la figura 7.4 y suponga que la gerencia de PROTRAC ha considerado que si va a optar por la expansión dentro de Estados Unidos, su posición competitiva la obligará a incrementar en forma definitiva su capacidad en el rubro de las máquinas grandes. Agregando ahora la restricción

$$x_2 \leq x_4$$

para la PLE en la figura 7.6 se garantiza que el modelo no pueda seleccionar la opción "Ampliar la capacidad de máquinas pequeñas" a menos que seleccione también "Ampliar la capacidad de máquinas grandes".

Asimismo, suponga que la junta directiva decidiera: "Ya que vamos a extender nuestra capacidad en el país, tendremos que ampliar ambas líneas". Añadiendo la restricción

$$x_2 = x_4$$

para la PLE en la figura 7.6 se daría cumplimiento a esta condición, pues de ese modo se requeriría que x_4 y x_2 adoptaran los mismos valores.

Restricciones al tamaño del lote Considere al administrador de una cartera de inversiones que debe trabajar bajo las siguientes restricciones: (1) si compra valores j, debe adquirir por lo menos 200 acciones; y (2) no puede comprar más de 1,000 de los valores j. Sea x_j el número de acciones compradas del valor j. La restricción de que si se compra j, tendrán que ser compradas por lo menos 200 acciones, se conoce como una restricción al "tamaño mínimo del lote" o al "tamaño de la partida". Observe que ese tipo de restricción no puede introducirse en un modelo de PL. Las restricciones

$$200 \leq x_j \leq 1000$$

no producen ese efecto porque se exige que x_j siempre sea 200 por lo menos. Deseamos que la condición sea o bien $x_j = 0$ o $200 \leq x_j \leq 1000$. Para lograrlo usaremos una variable 0–1, digamos y_j para el valor j. La variable y_j tiene la siguiente interpretación:

- Si $y_j = 1$, entonces compre el valor j.
- Si $y_j = 0$, no compre el valor j.

Consideremos ahora las dos restricciones

$$x_j \leq 1000y_j \tag{7.4}$$
$$x_j \geq 200y_j \tag{7.5}$$

Vemos que si $y_j = 1$, entonces (7.4) y (7.5) implican que $200 \leq x_j \leq 1{,}000$. Por otra parte, si $y_j = 0$, entonces (7.4) implica que $x_j \geq 0$. En forma similar, (7.5) implica que $x_j \geq 0$. Estas dos desigualdades, tomadas en conjunto, implican que $x_j = 0$. Así, si $y_j = 1$ cuando compramos j, y 0 cuando no lo hacemos, ya hemos impuesto las condiciones apropiadas sobre x_j.

¿Cómo podemos estar seguros de que $y_j = 1$ si compramos el valor j? La desigualdad (7.4) ($x_j \leq 1000y_j$) lo garantiza. Observamos que en esta desigualdad no es posible tener al mismo tiempo $x_j > 0$ y $y_j = 0$. Por consiguiente, si $x_j > 0$, y_j debe ser igual a 1. De esta manera, vemos que las desigualdades (7.4) y (7.5) juntas garantizan la restricción sobre el "tamaño mínimo del lote".

***k* de *m* restricciones** Mischa Gaas, un estudiante de intercambio que viene del Oriente Medio, llegó a la universidad para realizar estudios de posgrado. Su asesor le informó que todas las personas que desean obtener un doctorado en historia deben satisfacer por lo menos dos de los siguientes criterios: "Tendrás que ser soltero, rico o loco". Por desgracia, Mischa era pobre y estaba casado. De hecho, antes de casarse dedicó largos años a buscar una novia que fuera alta, morena, bella y rica. Finalmente, lleno de frustración, dijo en su fuero interno: "Tres virtudes de cuatro no es un mal resultado"; y la mujer que eligió (o la que lo eligió a él) no era rica. Éstos son algunos ejemplos de modelos en los cuales es necesario satisfacer k de m restricciones. En notación general, representemos en la siguiente forma el "superconjunto" de m restricciones

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq b_i, \qquad i = 1, \ldots, m$$

Introduzcamos ahora m nuevas variables del tipo 0-1 y_i y escojamos un número muy grande como valor de U, tan grande que para i, $g_i(x_i,\ldots,x_n) \leq U$ para toda x que satisfaga cualquier conjunto de k desigualdades tomadas de entre las m anteriormente mencionadas. En ese caso, las siguientes $m + 1$ restricciones expresan la condición deseada:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = k$$

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq b_i y_i + (1 - y_i)U, \qquad i = 1, \ldots, m$$

Observe que $\sum_{i=1}^{m} y_i = k$ obliga a k de las y_i variables a tener el valor 1. Esto significa que exactamente k de las desigualdades anteriores son equivalentes a

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq b_i$$

Las demás desigualdades son equivalentes a

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq U$$

y por la suposición de que se ha elegido un número muy grande para U, cada una de esas restricciones es redundante.

7.5 UNA VIÑETA DE PLE: UBICACIÓN DEL ALMACÉN DE STECO, UN MODELO DE CARGO FIJO

Con el fin de conservar su capital, el vendedor mayorista de acero STECO decide arrendar espacio para establecer sus almacenes regionales. Por ahora, cuenta con una lista de tres almacenes candidatos que puede alquilar. El costo mensual por el alquiler del almacén i es F_i. Además, el almacén i puede alojar un máximo de T_i camiones al mes.

Hay cuatro distritos de ventas, y la demanda mensual típica en el distrito j es d_j cargas de camión. El costo promedio de enviar un camión desde el almacén i al distrito j es c_{ij}. STECO desea saber cuáles almacenes debe alquilar y cuántos camiones tendrá que enviar desde cada almacén hasta cada distrito. Observe que STECO no paga el costo de alquiler por un almacén dado a menos que planee despachar por lo menos un camión desde ese lugar. Si envía algún camión a partir de un almacén, tendrá que pagar el alquiler mensual completo por el mismo. Los modelos de tamaño de lote que incluyen este comportamiento del costo son muy comunes y se conocen como *modelos de cargo fijo*. En la figura 7.7 se ilustra una representación de diagrama de flujo del modelo de cargo fijo para STECO.

Los datos correspondientes a este modelo se presentan en la tabla 7.2. En ellos observamos, por ejemplo, que cuesta \$7,750 alquilar el almacén A durante un mes, y que con el material alojado en ese almacén pueden ser cargados y despachados hasta 200 camiones. Además, la demanda mensual de ventas en el distrito 1 es de 100 cargas de camión. Los números que aparecen en la tabla son los costos variables por enviar un camión desde el almacén i al distrito de ventas j (por ejemplo, el costo variable de enviar un camión desde B hasta 3 es \$100).

CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS

Si usted desea resolver este caso con un modelo de programación lineal con enteros mixtos (PLEM), deberá decidir primero qué variables (o ninguna) tratará como enteros y cuáles (o ninguna) va a considerar como variables continuas.

Tal parece que la decisión de alquilar o no un almacén determinado requiere una variable 0–1, ya que el costo de alquiler del almacén i no varía según el nivel de actividad (es decir, según sea el número de camiones que se despacharán a partir de él). Por esta razón, sea

$$y_i = 1 \text{ si alquilamos el almacén } i, \text{ y } y_i = 0 \text{ si no lo alquilamos}$$

A primera vista, también parece apropiado tratar como una variable entera el número de camiones enviados de un almacén a un distrito. Después de todo, los camiones son entidades enteras y no tendría sentido hablar del envío de un tercio de camión de un lugar a otro. Sin embargo, varios factores podrían convencernos también de la conveniencia de considerar el número de camiones como una variable continua.

1. Aquí se trata de un modelo de planeación, no de un modelo de operaciones muy detallado. En la operación real, las demandas en los distritos serán diferentes. La gerencia de STECO

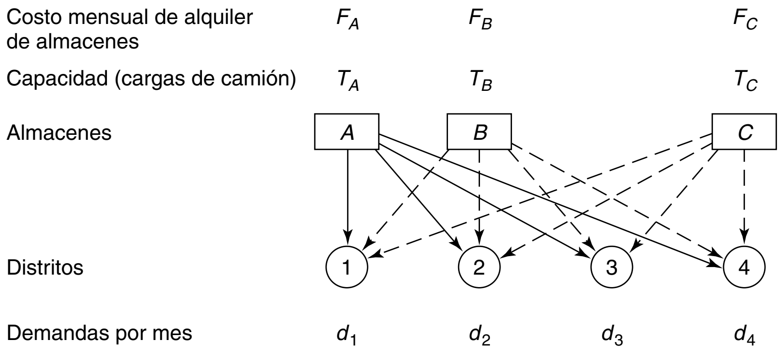


FIGURA 7.7
Modelo de ubicación de almacenes

TABLA 7.2 Datos sobre la ubicación de los almacenes

ALMACÉN	COSTO POR CAMIÓN DISTRITO DE VENTAS ($)				CAPACIDAD MENSUAL (NÚMERO DE CAMIONES)	COSTOS MENSUALES DE ALQUILER ($)
	1	2	3	4		
A	170	40	70	160	200	7750
B	150	195	100	10	250	4000
C	100	240	140	60	300	5500
Demanda mensual (cargas de camión)	100	90	110	60		

tendrá que idear métodos para lidiar con esa incertidumbre. Los camiones asignados a un almacén específico podrían asignarse entre distritos adyacentes sobre una base diaria, según se requiriera, o bien, STECO podría servirse de transportistas comunes para satisfacer la demanda excedente. En cualquier caso, el número de camiones que, según la solución de nuestro modelo matemático de programación, deberían ir desde el almacén i al distrito j es solamente una *aproximación* de lo que en realidad sucederá cualquier día determinado. De esta manera, el procedimiento de considerar esas entidades como variables continuas y redondearlas al entero más próximo con el propósito de determinar cuántos camiones será conveniente asignar a cada almacén, deberá proporcionarnos una respuesta útil y una buena aproximación del costo *promedio* de operación mensual.

2. El hecho de considerar el número de camiones como variables enteras puede hacer que el modelo sea mucho más difícil de resolver. Esto refleja simplemente el hecho general de que cuanto mayor es el número de variables enteras y mayor el número de valores enteros que cada una puede adoptar, tanto más difícil es resolver una PLE.

3. Sin duda alguna, cuesta mucho más alquilar uno de los almacenes que enviar un camión desde un almacén a un distrito de ventas. La magnitud relativa de estos costos implica, una vez más, que es relativamente más importante considerar la decisión de “alquilar o no alquilar” como una variable entera, a diferencia de lo que ocurre en el caso de los camiones. Para ilustrar este punto, observe que cuesta $5,500 al mes alquilar el almacén C y $60 enviar un camión desde el almacén C al distrito de ventas 4. Suponga que hemos formulado un modelo del problema como una PL. Si $y_C = 0.4$ en la solución óptima, el redondeo a 0 produce un cambio de $2,200 en el VO (valor óptimo de la función objetivo), mientras que si $x_{C4} = 57.8$, el redondeo hacia arriba o abajo produce un efecto menor que $60.

En resumen, en este ejemplo encontramos argumentos que sugieren que se obtienen pocas ventajas al tratar el número de camiones como enteros. Así pues, procederemos a formular el modelo de la ubicación de almacenes de STECO como una PLEM y recibiremos una agradable sorpresa.

EL MODELO DE PLEM

Para preparar el modelo de STECO como una PLEM, dejaremos que sea

$$y_i = 1 \text{ si se alquila el almacén } i, \qquad y_i = 0 \text{ si no se alquila;} \qquad i = \text{A, B, C}$$

$$x_{ij} = \text{número de camiones enviados del almacén } i \text{ al distrito } j;$$
$$i = \text{A, B, C}; \qquad j = 1, \ldots, 4$$

Ahora construiremos el modelo, desarrollando cada una de sus partes constitutivas.

Consideremos primero la función objetivo. La expresión

$$170x_{A1} + 40x_{A2} + 70x_{A3} + \cdots + 60x_{C4}$$

es el costo total asociado con los camiones, y

$$7750y_A + 4000y_B + 5500y_C$$

es el costo total de alquiler. Así, la función objetivo para minimizar el costo total es

$$\text{Min } 7750y_A + 4000y_B + 5500y_C + 170x_{A1} + \cdots + 60x_{C4}$$

Veamos ahora las restricciones. Tenemos que considerar tanto la demanda como la capacidad. La siguiente restricción tiene el propósito de garantizar que la demanda se satisfará en el distrito de ventas 1:

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \geq 100$$

Para garantizar que la demanda se satisfaga se requieren cuatro restricciones como ésta (una para cada distrito).

La restricción

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} \leq 200y_A \quad \text{o} \quad x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} - 200y_A \leq 0$$

cumple dos propósitos. Garantiza que la capacidad en el almacén A no sea excedida y nos obliga a alquilar el almacén A si deseamos realizar cualquier envío desde ese lugar. Para verlo con claridad, recordemos que y_i, o en este caso y_A, debe ser igual a 0 o 1. Supongamos primero que $y_A = 1$. Así, la desigualdad anterior se convierte en

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} \leq 200$$

CÁPSULA DE APLICACIÓN ¿En qué puedo servirle? AT&T halaga a los clientes haciéndoles ahorrar dinero con ayuda de un programa de enteros mixtos

AT&T, un importante proveedor de servicios para la industria del telemercadeo, está siempre en busca de nuevas formas de ayudar a sus clientes para que logren ampliar sus operaciones. Uno de los modelos empleados por las compañías que realizan operaciones de telemercadeo en grandes volúmenes (sirviéndose de números 800, libres de cargo, para tomar los pedidos de los clientes) consiste en decidir el número y la ubicación de los lugares donde es más conveniente instalar las oficinas de telemercadeo. En tales condiciones, lo más conveniente para AT&T fue desarrollar un conjunto de programas que le permitieran ayudar a sus clientes en este proceso.

Los investigadores de AT&T pronto descubrieron que, contrariamente a la idea general, la ubicación de las oficinas de telemercadeo no siempre está gobernada principalmente por los costos de los bienes raíces o las comunicaciones. En realidad, con frecuencia las consideraciones políticas o psicológicas desempeñaban el papel principal. Así pues, una oficina podría estar ubicada en la misma ciudad que las oficinas regionales de la empresa o en una localidad donde la alta gerencia haya decidido hacer sentir su presencia, aunque estas decisiones no sean eficientes en términos de costos.

AT&T desarrolló un modelo que analiza los costos de las localidades candidatas más plausibles y permite que los usuarios evalúen las configuraciones de varias de ellas, tomando como base diversos factores, tanto cuantitativos como cualitativos. El modelo, un programa de enteros mixtos similar al modelo de planeación empleado para la ubicación de una planta, se resuelve por medio de un código de ramificación y acotamiento. Esto permite responder cuatro preguntas:

1. ¿Cuántos centros de telemercadeo es conveniente establecer?
2. ¿Dónde deben estar localizados los centros?
3. ¿Qué regiones geográficas deberán ser atendidas por cada centro?
4. ¿Cuántas plazas de atención al público se requieren en cada localidad?

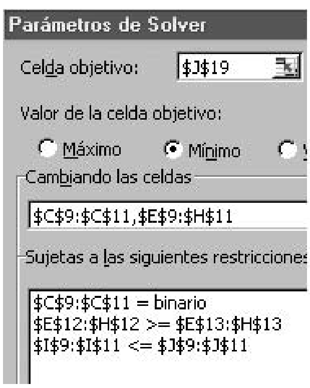
Desarrollado originalmente en una gran computadora central, el modelo fue adaptado para usarse en una PC con más opciones de visualización gráfica e interacción con el usuario. El modelo no solamente provee una solución óptima que minimiza los tres factores de costos de operación (comunicaciones, trabajo y bienes raíces), sino también soluciones alternativas para que el usuario pueda tomar en cuenta otros factores, además del costo. Con este propósito, se ha agregado al modelo un proceso de análisis jerárquico, que se describe en el capítulo 9, con el cual el usuario puede incluir factores cualitativos o subjetivos en el proceso de decisión.

El modelo de AT&T ha acelerado considerablemente el proceso de elegir la ubicación para las oficinas de telemercadeo, ahorrando a los clientes muchas horas de investigación y costos de consultoría (algunos clientes estiman esos ahorros hasta en $240,000). Además, varios clientes han declarado que sus ahorros promedian $1 millón al año gracias a que se establecieron en las ubicaciones señaladas por el modelo, en lugar de las que ellos habían considerado con anterioridad.

Desde el punto de vista de AT&T, este modelo ha demostrado su utilidad para mejorar las relaciones de la firma con el cliente y la venta de sus servicios. Por lo menos 46 clientes de AT&T han tomado decisiones en materia de ubicación con ayuda de dicho modelo, comprometiendo en el proceso $375 millones anuales en servicios de red y $31 millones en compras de nuevo equipo. Como resultado de los negocios generados por el modelo, la participación de AT&T en este mercado ha aumentado de 30 a 40%. (Véase Spencer *et al*.)

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2		**Modelo de ubicación de los almacenes STECO**							
3	Costos unitarios	Costo mensual de alquiler de almacenes	Costo unitario por camión De/A	Distrito 1	Distrito 2	Distrito 3	Distrito 4		Capacidad mensual en número de camiones
4	Almacén A	$7750	A	$170	$40	$70	$160		200
5	Almacén B	$4000	B	$150	$195	$100	$10		250
6	Almacén C	$5500	C	$100	$240	$140	$60		300
8	Decisiones	Sí/No	Número de camiones De/A	Distrito 1	Distrito 2	Distrito 3	Distrito 4	Total de camiones	Capacidad
9	Alquiler almacén A	1	A	0	90	110	0	200	<=200
10	Alquiler almacén B	0	B	0	0	0	0	0	<=0
11	Alquiler almacén C	1	C	100	0	0	60	160	<=300
12			Total	100	90	110	60		
13			Demanda mensual	>=100	>=90	>=110	>=60		
15	Costo total	Costo de alquiler mensual de almacenes	Costo total de camiones De/A	Distrito 1	Distrito 2	Distrito 3	Distrito 4	Costo total de camiones	Costo mensual total
16	Alquiler almacén A	$7,750	A	$0	$3,600	$7,700	$0	$11,300	$19,050
17	Alquiler almacén B	$0	B	$0	$0	$0	$0	$0	$0
18	Alquiler almacén C	$5,500	C	$10,000	$0	$0	$3,600	$13,600	$19,100
19	Total	$13,250	Total	$10,000	$3,600	$7,700	$3,600	$24,900	$38,150

Celda	Fórmula	Cópiese a
J9	= J4*C9	J10:J11
C16	= C9*C4	C17:C18
E16	= E4*E9	E16:H18
J16	= C16+I16	J17:J19



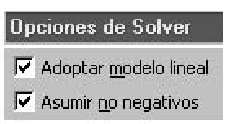


FIGURA 7.8
Modelo de ubicación de almacenes de STECO

es decir, que desde el almacén A no es posible despachar más de 200 camiones en total. Con anterioridad usted vio este mismo tipo de restricción a la capacidad en modelos de transporte. Consideremos ahora el caso en que y_A es 0. Entonces la desigualdad se convierte en

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} \leq 0$$

es decir, no se puede enviar ningún artículo desde el almacén A. Así, esta restricción garantiza que nada podrá ser enviado desde el almacén A, a menos que $y_A = 1$. Observe que cuando $y_A = 1$, el término $7{,}750y_A$ en la función objetivo es igual a 7,750. De esta manera, vemos que no podrá despacharse nada desde el almacén A, a menos que incurramos en el costo de alquiler mensual (cargo fijo) de ese almacén en particular. En el modelo se requieren tres de esas restricciones, una para cada almacén.

El modelo completo en hoja de cálculo y su solución se presentan en la figura 7.8.

Análisis de resultados Un vistazo a los datos de salida nos muestra que los valores óptimos de asignación para todos los camiones son enteros, aun cuando en la formulación decidamos permitir que esas variables sean continuas. ¿Es éste un caso fortuito? La respuesta es no. La razón es la siguiente: comenzamos con un modelo de ubicación de almacenes. Observe que después de haber decidido qué almacén se va a arrendar, el problema de encontrar la asignación óptima para los camiones se transforma en un modelo de PL de transporte. En el capítulo 6 vimos que si la oferta disponible en cada almacén y la demanda correspondiente en cada distrito son valores enteros, entonces la solución óptima para el modelo de transporte estará representada exclusivamente por medio de enteros.

Ya tenemos suficiente información para concluir que la solución óptima para el modelo anterior de ubicación de almacenes con ofertas y demandas enteras, siempre incluirá una asignación de camiones expresada con enteros. Este argumento incluye dos pasos: (1) en la solución óptima se deberá alquilar algún conjunto de almacenes, y (2) todos los conjuntos posibles de almacenes alquilados dan lugar a una asignación de camiones expresada con enteros.

En consecuencia, ahora comprendemos que, en el modelo que nos ocupa, sería ingenuo y costoso imponer la restricción adicional de que las x_{ij} sean valores enteros. El consejo es "nunca pagues por un bien gratuito".

7.6 EL ALGORITMO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO

El procedimiento de **ramificación y acotamiento** que utiliza Solver es en la actualidad el más eficiente de los métodos de uso general para la optimización de un modelo de PLE. La idea, en general, consiste en dividir el conjunto de soluciones factibles para un modelo determinado, en subconjuntos más pequeños que no se traslapen unos con otros. A continuación, se calculan los acotamientos para el valor de la mejor solución en cada subconjunto. Entonces, el procedimiento de ramificación y acotamiento elimina algunos subconjuntos, con lo cual proporciona una *enumeración parcial* (en oposición a una enumeración exhaustiva) de todas las soluciones factibles. En el siguiente ejemplo se ilustra la forma en que Solver utiliza la ramificación y acotamiento para la optimización de una PLE.

UN EJEMPLO DE PLE

Empecemos con un modelo específico que, por simple comodidad, llamaremos (P1):

$$\begin{aligned} &\text{Max } x_1 + 5x_2 \\ &\text{s.a. } 11x_1 + 6x_2 \leq 66 \\ &\quad 5x_1 + 50x_2 \leq 225 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros} \end{aligned} \qquad \textbf{(P1)}$$

En la siguiente exposición, será útil usar el método gráfico que discutimos en la sección 7.3.

Paso 1: Resolución de la relajación de PL El primer paso consiste en resolver la relajación de PL de (P1). Si tenemos suerte, encontraremos de inmediato una solución óptima, pues siempre es válido que si la solución a la relajación de PL satisface la restricción de valores enteros, entonces la solución es óptima. Usaremos ahora la técnica de resolución gráfica para resolver la relajación de PL de (P1) y probaremos nuestra suerte. La figura 7.9 muestra (sombreado) el conjunto factible para la relajación de PL de (P1). Los puntos que aparecen en la región sombreada son los puntos factibles que satisfacen también las condiciones sobre enteros. Observe que existen 27 de esos puntos, incluso los que están sobre los ejes, tales como (0,4) y (4,0), que son factibles. En la figura 7.9 se muestra también el vértice óptimo para la PL. Para encontrar los valores numéricos óptimos de las variables de decisión, se resuelve para el punto de intersección de las dos restricciones activas; es decir, en esta forma:

$$11x_1 + 6x_2 = 66 \qquad \text{y también} \qquad 5x_1 + 50x_2 = 225$$

para x_1 y x_2. Esto produce $x_1^* = 3.75$, $x_2^* = 4.125$. Como estos valores no son enteros, eso indica que *no* hemos resuelto (P1). Sin embargo, sí hemos obtenido información acerca del problema.

1. Recuerde que VO significa el valor óptimo de la función objetivo. Cuando hallamos el VO para la relajación de PL, establecemos un acotamiento superior para el VO de (P1). Esto se conoce como el acotamiento superior U. Así, como la función objetivo es $x_1 + 5x_2$, sabemos que

$$\text{VO para (P1)} \leq 3.75 + 5(4.125) = 24.375 = U$$

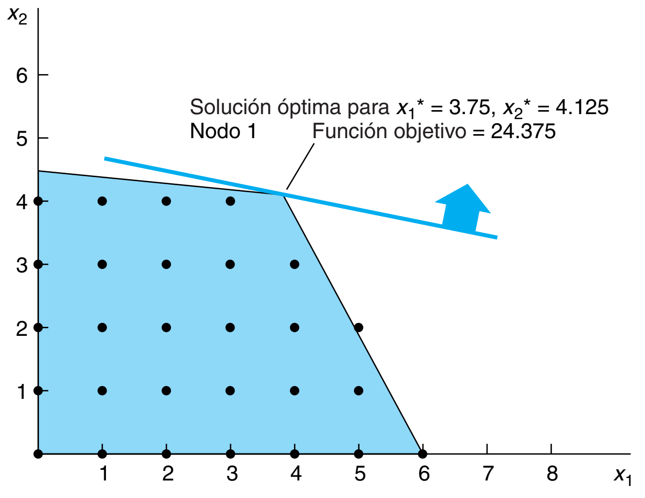


FIGURA 7.9

Relajación de PL de (P1)

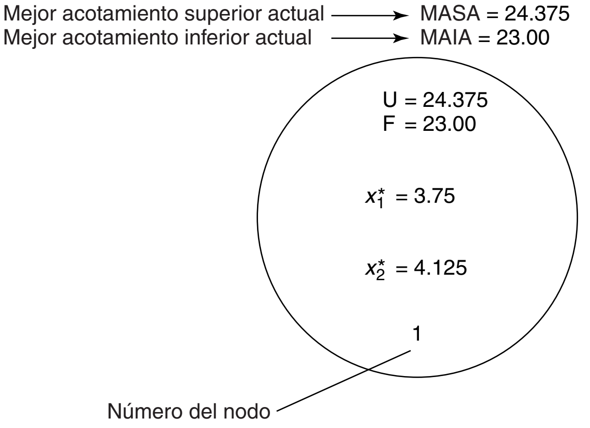


FIGURA 7.10

Nodo correspondiente a (P1)

2. Como usted puede apreciar en la figura 7.9, si tomamos la solución óptima para el modelo relajado y la redondeamos a $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ (truncando la porción fraccionaria), obtenemos una solución factible para (P1). Evaluando ahora la función objetivo en este punto (o en cualquier otro punto *factible),* establecemos un *acotamiento inferior* para el VO de (P1). Llamaremos a este valor F. Por tanto,

$$\text{VO para (P1)} \geq 3 + 5(4) = 23 = F$$

El valor de F (es decir, 23) puede ser o no el VO para (P1). En este momento no lo podemos saber todavía. Por ahora, solamente sabemos que $23 \leq \text{VO} \leq 24.375$. Debemos encontrar si es posible una solución mejor. Para esto usamos la *ramificación.*

La información en torno a una solución de ramificación y acotamiento se resume en forma típica por medio de un diagrama semejante a un árbol. El primer nodo del diagrama aparece en la figura 7.10. Este nodo tendrá una apariencia diferente de todos los demás nodos de nuestro árbol, porque escribimos los valores de nuestro mejor acotamiento superior actual (MASA) en el VO y nuestro mejor acotamiento inferior actual (MAIA) en el VO, encima de este nodo.

Paso 2: Ramificación Comenzamos dividiendo (P1) en dos modelos más pequeños. En este ejemplo, haremos la ramificación sobre x_1. Ésta es una elección arbitraria. Igualmente podríamos haber ramificado sobre x_2. El proceso de ramificación se basa en el hecho de que, en la solución óptima para (P1), o bien $x_1 \leq 3$ o $x_1 \geq 4$. ¿Por qué es válida esta afirmación? Porque no hay valores enteros para x_1 en la región que sea eliminada al imponer como condición que x_1 sea ≤ 3 o que x_1 sea ≥ 4. Los valores de x_1 que se eliminan son $3 < x_1 < 4$. Como x_1 debe ser entero, no hemos eliminado algún punto factible del conjunto factible para (P1). Sin embargo, sí eliminamos puntos (es decir, valores no enteros) del conjunto factible de la relajación de PL de

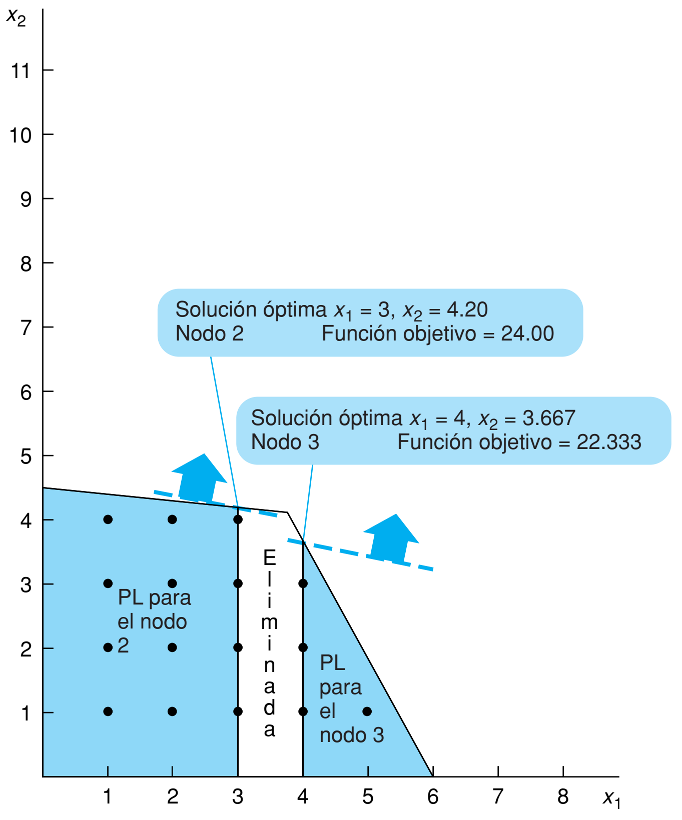


FIGURA 7.11

Modelos (P2) y (P3)

(P1). De hecho, vemos que el valor óptimo de x_1, en la relajación de PL de (P1), no es ni ≤ 3 ni ≥ 4, y por tanto, el punto óptimo actual ha sido eliminado (intencionalmente) por el proceso de ramificación. Este proceso crea uno de sus dos nuevos modelos agregando la restricción $x_1 \leq 3$ a (P1). El otro nuevo modelo se crea al agregar la restricción $x_1 \geq 4$ a (P1). De este modo tenemos

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} & 11x_1 + 6x_2 \leq 66 \\ & 5x_1 + 50x_2 \leq 225 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros} \end{array} \qquad \textbf{(P2)}$$

y también

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} & 11x_1 + 6x_2 \leq 66 \\ & 5x_1 + 50x_2 \leq 225 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros} \end{array} \qquad \textbf{(P3)}$$

Estos dos modelos se ilustran en la figura 7.11, en la cual se revelan dos hechos interesantes:

1. Hemos dividido el conjunto factible (P1) en dos partes y eliminamos en estas consideraciones una región que no contiene puntos correspondientes a enteros. La región eliminada aparece en blanco. Las líneas limítrofes *no* están en la región eliminada.

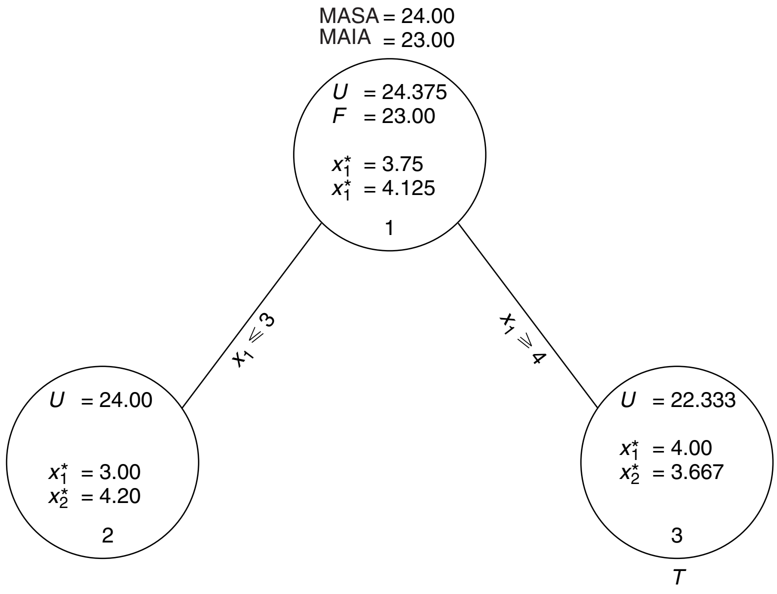


FIGURA 7.12
Árbol con tres nodos que corresponden a (P1), (P2) y (P3)

2. Todas las soluciones *enteras* factibles para (P1) están contenidas ahora en (P2) o bien en (P3). Como las funciones objetivo para (P1), (P2) y (P3) son idénticas, de aquí se deduce que *la solución óptima para (P2), o bien la solución óptima para (P3), debe ser la solución óptima para (P1)*, la PLE original. Así pues, podemos olvidarnos de (P1) y consideraremos únicamente (P2) y (P3).

Creación de un árbol El método de ramificación y acotamiento avanza mediante un proceso que puede ilustrarse con la figura de un árbol. El primer paso de este proceso consiste en resolver las relajaciones de PL para los modelos (P2) y (P3). Las soluciones óptimas se muestran en la figura 7.11. En el modelo (P2) el valor de U es proporcionado por el valor óptimo de la función objetivo para la relajación de PL (en este caso 24.00). Para (P3), obtenemos $U = 22.333$. Ya comentamos que la solución óptima para (P1) está ya sea en (P2) o en (P3); así, el VO para (P1) debe ser $\leq$ la Max de los valores de U aportados por estos dos nodos. Como el nodo 2 produce una U de 24.00 y el nodo 3 arroja una U de 22.333, nuestro mejor acotamiento superior *actual* es 24.00. Así, cambiamos el valor del MASA sobre el nodo 1. Para cambiar el valor del MAIA, tendríamos que haber obtenido un punto que fuera factible en (P1) y que produjera un valor de la función objetivo $>$ 23.00. En vista de que ni el nodo 2 ni el nodo 3 tienen una solución totalmente entera, no hemos obtenido una nueva solución factible. (Aunque en este problema pudimos redondear los nodos 2 y 3 para obtener nuevas soluciones factibles para [P1], en general, la búsqueda de puntos factibles puede ser difícil y, por esa razón, deseamos presentar un procedimiento que no incluye una nueva solución factible en cada nodo.) Así, el valor del MAIA sigue siendo el mismo de antes.

La figura 7.12 incluye la información de (P2) y (P3) en un diagrama de decisiones conocido como *árbol*. Para determinar qué debemos hacer a continuación, consideremos los nodos que se encuentran en la parte inferior de nuestro árbol, en este caso, los nodos 2 y 3. Observamos que el acotamiento superior en el nodo 3 es 22.333, y el valor actual del MAIA es 23.00. De este modo, *ya hemos encontrado una solución mejor de lo que habría sido posible obtener en el conjunto factible para (P3).* Por esa razón *podemos pasar por alto (P3) y concentrar ahora nuestros esfuerzos en (P2).* Para indicar que (P3) ya ha quedado eliminado de nuestra consideración futura, en la figura 7.12 escribimos una T debajo de (P3), lo cual significa que *esa rama específica del árbol ya está terminada.* En general, si después de calcular el valor de U para un nodo, encontramos que $U \leq$ MAIA, entonces ese nodo puede ser eliminado de cualquier consideración futura, por lo cual anotamos una T debajo de dicho nodo para indicar que esa rama del árbol ya está terminada.

Para continuar, consideremos ahora (P2). Todavía no conocemos la solución óptima para (P2), pues aún tenemos un valor no entero para x_2^*. Como (P2) es una PLE, lo resolveremos con el método de ramificación y acotamiento, y para eso tenemos que ramificar de nuevo. La variable x_1 es entera en la solución óptima para (P2). Por tanto, debemos ramificar en x_2, y para ello usamos la restricción $x_2 \leq 4$ o $x_2 \geq 5$. Una vez hecho esto, sustituimos (P2) con los modelos

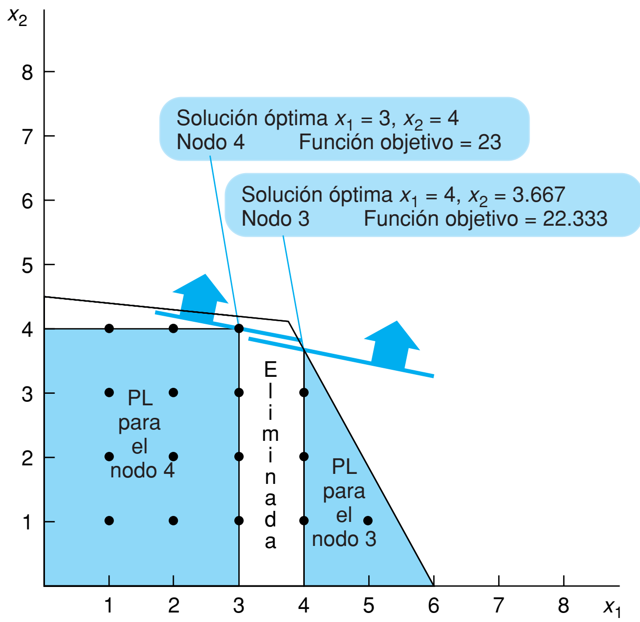


FIGURA 7.13

Modelos (P3), (P4) y (P5)

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 11x_1 + 6x_2 \le 66 \\ & 5x_1 + 50x_2 \le 225 \\ & x_1 \le 3 \\ & x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \text{ y enteros} \end{aligned} \qquad \textbf{(P4)}$$

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 11x_1 + 6x_2 \le 66 \\ & 5x_1 + 50x_2 \le 225 \\ & x_1 \le 3 \\ & x_2 \ge 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \text{ y enteros} \end{aligned} \qquad \textbf{(P5)}$$

Observe que las restricciones aplicables a (P4) son las mismas restricciones para (P1); es decir,

$$\begin{aligned} 11x_1 + 6x_2 &\le 66 \\ 5x_1 + 50x_2 &\le 225 \end{aligned}$$

más la restricción que fue agregada para definir (P2) (o sea, $x_1 \le 3$), más la nueva restricción que se añadió para definir (P4) (es decir, $x_2 \le 4$). Se puede ofrecer una interpretación similar para (P5). El resultado de esta rama se ilustra en la figura 7.13, y el nuevo árbol correspondiente aparece en la figura 7.14.

El árbol final Al comparar las figuras 7.13 y 7.11, es preciso señalar varias características importantes:

1. El modelo (P3) permanece sin cambio alguno (exactamente como estaba en la figura 7.11).
2. Un conjunto adicional de puntos no enteros, entre los cuales figura la solución óptima correspondiente a la relajación de PL de (P2), ha sido eliminado de nuestra consideración futura. Toda el área recientemente eliminada que se encontraba en el conjunto factible de la relajación de PL de (P1) aparece en blanco.

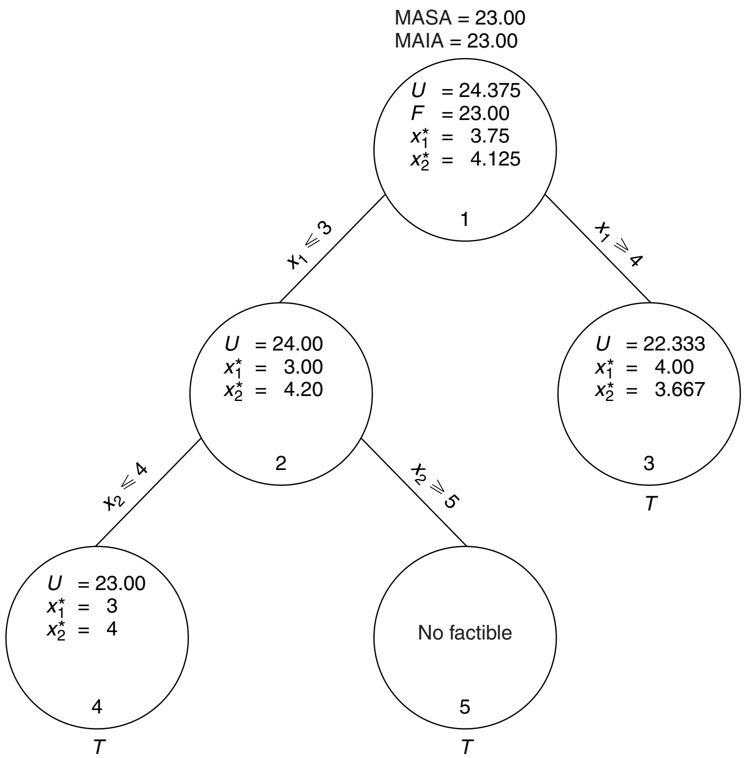


FIGURA 7.14

El árbol terminado

3. El conjunto restringido para la relajación de PL de (P5) está vacío. No hay puntos que satisfagan las restricciones $5x_1 + 50x_2 \leq 225$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 5$. Esto significa también que (P5) no tiene solución factible, de modo que ahora nos podemos olvidar de (P5). Esto se indica colocando en la figura 7.14 una T debajo del nodo 5, con lo cual termina otra rama del árbol. Ahora vemos que hay dos posibles causas de terminación. Un nodo termina cuando

1. Su U es $\leq$ MAIA o
2. Representa un modelo que no es factible.

En estas condiciones, tenemos que concentrarnos únicamente en (P4) y al resolver la relajación PL de ese modelo, como muestra la figura 7.13, descubrimos que la solución óptima para la relajación de (P4), es decir ($x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$) contiene únicamente enteros. Esto significa que ($x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$) es la solución óptima para (P4). Por esta razón, (P4) es otro nodo terminal de nuestro árbol y hemos escrito una T debajo de ese nodo en la figura 7.14. Con esto, tenemos una ilustración de la tercera causa de terminación. En resumen, decimos que un nodo está terminado cuando

1. Su U es $\leq$ MAIA,
2. Representa un modelo que no es factible, o
3. La relajación de PL proporciona una solución para el modelo que está expresada con números enteros y tiene su representación en ese nodo.

Refiriéndonos de nuevo a la figura 7.14, vemos que el valor del MASA ha cambiado respecto al que tenía en la figura 7.12. La rama correspondiente al nodo 2 produjo un modelo no factible (nodo 5) y un modelo (nodo 4) con una U de 23.00. De esta manera, el mejor acotamiento superior actual (MASA) se ha reducido de 24.00 a 23.00. En el nodo 4 encontramos también una solución formada únicamente por enteros. Por consiguiente, este punto representa una solución factible para (P1). Produce un valor de 23.00 para la función objetivo. Como nuestro mejor acotamiento inferior actual es 23.00, no modificamos el MAIA.

En general, *cuando todos los nodos han quedado terminados, el método de ramificación y acotamiento se considera completo.* La solución óptima para el modelo original (P1) es la solución que estableció el MAIA. En este caso, el MAIA es 23.00 y ($x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$) es la solución óptima para (P1). Al llegar a la terminación, como vemos en la figura 7.14, siempre será válida la igualdad MAIA = MASA.

PLEM

El procedimiento de ramificación y acotamiento antes descrito se puede modificar fácilmente para trabajar con una PLEM. Considere una pequeña modificación de la PLE analizada anteriormente. En particular, suponga que el modelo es

$$\begin{aligned} &\text{Max } x_1 + 5x_2 \\ &\text{s.a.} \quad 11x_1 + 6x_2 \leq 66 \\ &\qquad 5x_1 + 50x_2 \leq 225 \\ &x_1 \geq 0 \text{ y enteros, } x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El único cambio con respecto al modelo anterior es que x_2 ya no tiene que ser entero (es decir, x_2 puede ser cualquier número no negativo). Para resolver este modelo, empezamos igual que antes con la relajación de PL de la figura 7.9. Como x_1^* no es entero (adquiere el valor de 3.75), obtenemos el valor inicial de F redondeando x_1^* a 3. Se permite que el valor de x_2^* siga siendo fraccionario en 4.125. En esta forma, obtenemos $F = 3 + 5(4.125) = 23.625$. Igual que antes, MASA = 24.375, pero ahora MAIA = 23.625. Ahora ramificamos, igual que antes, en x_1 introduciendo las restricciones $x_1 \leq 3$ o $x_1 \geq 4$. Esto produce la figura 7.11. La siguiente información se puede leer en dicha figura:

1. El nodo 2 produce una U de 24.00 y el nodo 3 produce una U de 22.333; así, el MAIA se convierte en 24.00.
2. La solución óptima para el nodo 2 tiene un valor entero para x_1; por tanto, ésta es una solución factible para (P1). De aquí se desprende que
   a. Obtuvimos un mejor acotamiento inferior actual de 24.00.
   b. El nodo 2 puede considerarse terminado.
3. En el nodo 3, $U \leq$ MAIA; por tanto, el nodo 3 puede darse por terminado.

Puesto que ambos nodos han sido terminados, la solución óptima es la que produjo el MAIA. Así, $x_1^* = 3.00$ y $x_2^* = 4.20$ es la solución óptima.

RESUMEN DE RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO

Resumimos la aplicación de ramificación y acotamiento de Solver para la PLE. La adaptación para la PLEM debe ser obvia. En los párrafos siguientes, la expresión "resolver un nodo" significa "usar el método símplex de Solver para optimizar la relajación de PL de la PLE que corresponde a ese nodo". Un "nodo resuelto" es aquel para el cual se ha realizado la operación anterior. De lo contrario, el nodo está "sin resolver".

1. Resuelva la formulación original de PLE. El VO correspondiente a la relajación es el valor de U. Si la solución óptima incluye enteros solamente, es óptima para la PLE. De lo contrario, encuentre usted un punto factible para la PLE y designe como F el VO en este punto. Haga que el mejor acotamiento superior actual (MASA) sea igual a U y que el mejor acotamiento inferior actual (MAIA) sea igual a F.
2. Comience con cualquier nodo resuelto que no haya quedado terminado. A partir de ese nodo (el progenitor), *ramifique* para crear dos nuevos nodos sin resolver (los sucesores), con la propiedad de que la solución óptima para uno de los modelos de PLE sucesores será la solución óptima para el modelo de PLE progenitor. La ramificación se puede lograr tomando cualquier componente fraccionaria, digamos x_i^*, de la solución óptima para la relajación del progenitor. Sea $[x_i^*]$ el truncamiento de x_i^* dejando únicamente su parte entera. Así pues, $[x_i^*] + 1$ es el siguiente entero mayor que x_i^*. Un sucesor será el modelo progenitor al cual se ha agregado la restricción $x_i \leq [x_i^*]$. El otro sucesor se forma añadiendo al modelo del progenitor $x_i \geq [x_i^*] + 1$ al modelo del progenitor. A continuación, elija usted otro nodo que ya esté resuelto y repita el procedimiento o vaya al paso 3.
3. Comience con cualquier nodo aún no resuelto y trate de resolverlo. El VO para la relajación es el valor de U en el nodo. Esta rama termina si la relajación de PL no es factible o si $U \leq$ MAIA, o bien, si la solución óptima es totalmente entera. Si la solución óptima está formada sólo por enteros, evalúe la función objetivo en este punto; llame F a este valor. Compare el MAIA con F. Si $F >$ MAIA, sea MAIA $= F$. Si la rama no está terminada, repita el paso 3 o vaya al paso 2. Si el nodo está terminado, vaya al paso 4.
4. Si todos los nodos ya se encuentran terminados, entonces la solución óptima para la PLE original es la solución constituida totalmente por enteros que produjo como resultado nuestro valor MAIA.

De acuerdo con el resumen anterior, la PLE original se descompone en una serie de modelos de PL, cada uno de los cuales presenta restricciones adicionales para las variables de decisión y es optimizada como un elemento del algoritmo de ramificación y acotamiento. Por esta razón, el método de ramificación y acotamiento empleado por Solver utiliza *numerosas* optimizaciones de formulaciones de PL para resolver un programa con enteros. A causa de esto, Solver tarda generalmente mucho más tiempo en resolver los modelos de PLE que los de PL.

La operación del procedimiento de ramificación y acotamiento puede ser observada durante la optimización de un modelo de PLE por Solver, como se aprecia en la figura 7.15. Solver muestra el avance de la frecuencia de ramificación, exhibiendo un recuento de las iteraciones de "Rama" que indica el número de optimizaciones de PL realizadas hasta el momento, durante el procedimiento de ramificación y acotamiento. La "Solución de prueba" es el recuento del número de puntos en vértice visitados durante la optimización símplex actual de la PL, y "Celda ajustada" es el valor de la celda de la función objetivo durante la optimización de PL actual. En el ejemplo de la figura 7.15 se han optimizado hasta el momento 1,421 PL relajadas; Solver está evaluando el undécimo punto en vértice de la PL número 1,422 y el valor de la función objetivo de esa PL es actualmente $39,366.

En virtud de que para algunas PLE el número de ramas, y por consiguiente el número de PL a resolver, puede llegar a ser muy grande, en el cuadro de diálogo Opciones de Solver ilustrado en la figura 7.16 se ha incluido una opción de Tolerancia (que sólo es pertinente para los modelos de PE). El valor de tolerancia predeterminado de 5% significa que el procedimiento de ramificación y acotamiento continuará únicamente hasta que la razón (MASA − MAIA)/MAIA sea menor que o igual a 5%. Puesto que estos acotamientos incluyen el VO de la solución óptima correspondiente a la PLE, esto garantiza que la solución MAIA se encuentre dentro de 5% del valor óptimo. Un valor de tolerancia más alto acelera la operación de Solver, con el riesgo de que la solución obtenida esté más alejada del verdadero óptimo de la PLE. Si la tolerancia se establece en 0%, se obliga a Solver a encontrar el verdadero óptimo de la PLE, con el costo potencial de un tiempo de resolución mucho más largo en virtud de que, con el procedimiento de ramificación y acotamiento, será necesario resolver modelos de PL relajados adicionales.

A pesar de que el procedimiento de ramificación y acotamiento de Solver no tiene suficiente capacidad para modelos sumamente grandes, el método de ramificación y acotamiento se puede interrumpir antes de que todos los nodos hayan sido terminados. El nodo que haya producido el MAIA proveerá una *solución aproximada* para la PLE original. En este caso, el MAIA será menor que el valor MASA, y la diferencia MASA − MAIA indica el grado de aproximación alcanzado.

Para terminar, hagamos un comentario sobre la aplicación de la técnica de ramificación y acotamiento a las PLE especiales con variables 0–1. En este caso, suponga que estamos ramificando sobre la variable 0–1 y_1. Entonces un sucesor tendrá $y_1 = 0$. El otro tendrá $y_1 = 1$.

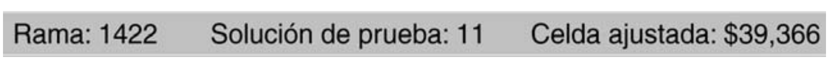


FIGURA 7.15
Mensajes de Solver durante la optimización de PE

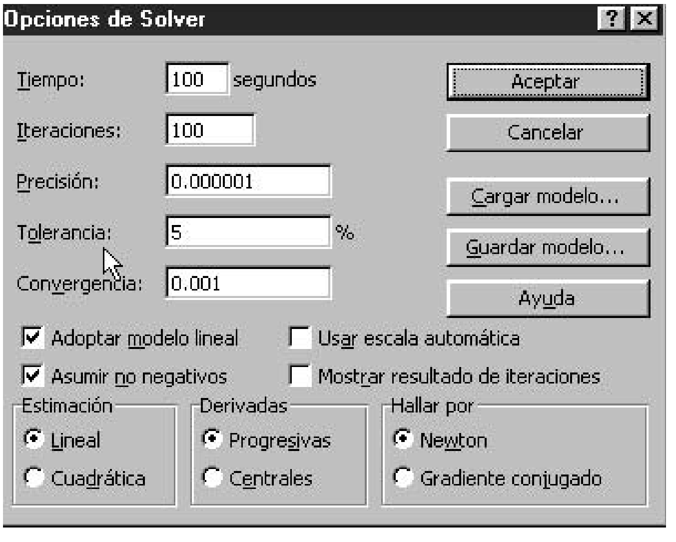


FIGURA 7.16
Las opciones de Solver para PLE

En el caso de una PLE con variables 0–1, ha tenido un considerable éxito otro tipo de procedimiento de ramificación y acotamiento, conocido a veces como *enumeración parcial.* Para las PLE de tipo general, se han aplicado también otros métodos de optimización. Entre éstas figuran *métodos de cortes del plano* y de *relajación Lagrangiana.* Como dijimos al principio de este capítulo, nuestra exposición introductoria abarca solamente la técnica de PLE utilizada por Solver, la cual apenas logra rozar la superficie de este complejo tema.

SENSIBILIDAD

Como hemos visto, el método de ramificación y acotamiento empleado por Solver requiere, en general, mucho más tiempo para la resolución de los modelos de PLE que para los de PL. Desgraciadamente, también es cierto que la solución de una PLE contiene mucho menos información que la solución de una PL. Tal como se aprecia en la figura 7.17, en la cual se solicitó el Informe de sensibilidad al finalizar la optimización de una PLE, *la solución de un PLE no contiene información de sensibilidad.* No se produce información alguna acerca de la sensibilidad del VO (es decir, el valor óptimo de la función objetivo) frente a los cambios en el LD de una restricción o un cambio en el valor de un coeficiente de la función objetivo. En otras palabras, *una solución de PLE no incluye información equivalente al precio sombra, el costo reducido y los datos de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo de una PL.* Esto no quiere decir que los cambios en el LD o en un coeficiente de la función objetivo no afecten la solución de una PLE. En realidad la afectan y las soluciones a los modelos de PLE pueden ser extremadamente sensibles a los cambios introducidos en los valores de los parámetros.

El siguiente ejemplo de presupuesto de capital es un tanto irreal, pero para nuestros propósitos ilustrativos nos permitirá mostrar estos puntos:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 10x_1 + 100x_2 + 1000x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 29x_1 + 30x_2 + 31x_3 \le b_1 \\ & x_1, x_2, x_3 \text{ son 0 o 1} \end{aligned}$$

El modelo se resuelve fácilmente por simple observación. La tabla 7.3 muestra la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo (VO) para diversos valores del parámetro b_1 del LD. Con estos datos podemos ver que algún cambio de una unidad en el lado derecho de la restricción (digamos, de 29 a 30) hace que el VO aumente según un factor de 10 (de 10 a 100). Por supuesto, si usted se percatara de semejante oportunidad, se sentiría ansioso de realizar dicho cambio.

Desgraciadamente, cuando una PLE se resuelve por medio de Solver no se obtiene esa información sobre sensibilidad. Esa herramienta sólo nos proporciona la solución óptima y el VO. La información de sensibilidad, como la que mostramos antes, puede determinarse únicamente optimizando repetidas veces el modelo de PLE, introduciendo nuevos valores para los parámetros y tabulando a mano los resultados. Cuando el modelo tiene varias restricciones, el uso de este método para generar datos útiles de sensibilidad acerca de una PLE puede requerir un gran número de formulaciones alternativas en Solver. Esta actividad puede resultar costosa y su realización requiere mucho tiempo.

FIGURA 7.17
Solver no provee informes de sensibilidad para modelos de PLE

TABLA 7.3 Datos de sensibilidad de una PLE

	SOLUCIÓN ÓPTIMA			
b_1	x_1	x_2	x_3	VO
29	1	0	0	10
30	0	1	0	100
31	0	0	1	1000

ALGORITMOS HEURÍSTICOS

Por la importancia de sus aplicaciones, la programación con enteros es una área de investigación activa en la actualidad. Gran parte de esta investigación se realiza en el rubro de los algoritmos heurísticos. Estos últimos son algoritmos diseñados para producir de manera eficiente "buenas" soluciones, aunque no necesariamente las óptimas.

> Desde el punto de vista del administrador, un procedimiento heurístico puede ser tan aceptable como, y tal vez incluso preferible a, un algoritmo de PLE "más exacto" que produzca una solución óptima. Así pues, las consideraciones predominantes deberán ser el volumen de conocimientos y orientaciones que el modelo sea capaz de proporcionar y el precio al cual se obtendrán éstos.

7.7 NOTAS SOBRE LA APLICACIÓN DE MODELOS DE OPTIMIZACIÓN CON ENTEROS

Las soluciones con enteros son una condición importante y, de hecho, esencial para la aplicación de los modelos de optimización a muchos modelos importantes en el mundo real. Los adelantos recientes en la investigación y la tecnología de cómputo han hecho posible lograr auténticos progresos en modelos en los cuales intervienen variables que deben ser consideradas como enteros. En las Cápsulas de aplicación de este capítulo aparecen dos ejemplos. A continuación presentamos otros más.

KELLY-SPRINGFIELD

La Kelly-Springfield Tire Company tiene un sistema basado en un modelo para coordinar el pronóstico de ventas, el control de inventarios, la planeación de la producción y las decisiones de distribución. Un eslabón crucial de este sistema es el modelo de planeación de la producción. Un factor fundamental de dicho modelo es el efecto del tiempo de preparación del equipo. En la fabricación de cada línea de neumáticos es necesario preparar la máquina, instalando en ella un elemento del equipo (conocido como troquel) específico para dicha línea. Se requiere una cantidad fija de tiempo (y, por ende, un costo fijo) para retirar un troquel de la máquina e insertar otro. En otras palabras, existe un costo fijo de cambio o preparación para pasar de la producción de una línea de neumáticos a otra, no importa cuántos neumáticos decida producir cuando la máquina ya está preparada. La decisión de realizar los preparativos (es decir, producir una línea particular en un periodo de producción dado) o no realizarlos, se considera como una variable 0–1 en la PLEM empleada en la resolución de este modelo. Al sistema integrado total (incluido el sistema de planeación de la producción) se le acreditan resultados impresionantes. Se calcula que este sistema ha permitido ahorros de $500,000 al año. Después de aplicar un sistema mejorado, el inventario unitario promedio disminuyó 19%, el servicio al cliente mejoró, la productividad subió y el resultado fue un ahorro adicional de $7.9 millones al año.

FLYING TIGER LINE

Otra aplicación interesante se refiere al uso de la programación de enteros por parte de la Flying Tiger Line (una aerolínea dedicada exclusivamente al transporte de carga, cuyo único dueño es hoy Federal Express) para abordar dos cuestiones estratégicas: el diseño de su red de servicio y la selección y despliegue de sus aviones. La magnitud de la PLEM utilizada para abordar este modelo y el costo de la resolución del mismo le parecen enormes a quien ha usado principalmente modelos en el salón de clases. En un modelo de este tipo para 33 ciudades, ocho ejes (localidades donde se puede realizar el intercambio de carga) y diez tipos de avión, se han incluido 843 restricciones, 3,807 variables continuas y 156 variables enteras (selector de aviones). En la presentación de esta aplicación no figuran ahorros explícitos de costos. Sin embargo, es obvio que la gerencia se siente satisfecha con el proyecto, en virtud del carácter de actualización continua que esta investigación le imparte.

HUNT-WESSON FOODS

La tercera aplicación que presentaremos es un importante estudio del sistema de distribución que aplica Hunt-Wesson Foods, Inc. El modelo tiene el propósito de seleccionar las mejores ubicaciones para instalar centros regionales de distribución y determinar qué zonas de clientela deberán ser atendidas por cada centro de distribución, además de saber cuál de las plantas tendrá que proveer a los distintos centros de distribución. El modelo es una PLEM con dos tipos de variables enteras:

$y_k = 1$ si la localidad k se usa como centro de distribución, y $y_k = 0$ si no se usa

$y_{kl} = 1$ si el distrito de clientela l es atendido por el almacén ubicado en la localidad k, y $y_{kl} = 0$ si no es así

Las cantidades de materiales enviados son variables continuas.

El modelo incluye 17 tipos de productos, 14 plantas, 45 localidades donde pueden instalarse centros de distribución y 121 zonas de clientela. El modelo de PLEM empleado para resolverlo tiene 11,854 restricciones, 727 variables enteras 0–1 y 23,513 variables continuas. Se construyó un algoritmo especial para resolver el modelo. En el artículo en el cual describieron el modelo, los autores declararon que por medio de este estudio sería posible obtener ahorros anuales de costos calculados en cifras hasta de siete dígitos.

Los tres estudios citados aquí tienen varias características en común:

1. En todos ellos se abordó un modelo que tenía gran importancia estratégica para una empresa.
2. Todos ellos hicieron una aportación importante para manejar con éxito el modelo.
3. Cada uno de ellos incluyó una PLEM de gran escala.
4. En cada aplicación se requería una construcción ingeniosa de modelos o algoritmos especiales.
5. Cada proyecto requería un importante compromiso de fondos y talento administrativo.

Los ejemplos nos muestran que un buen modelo puede permitir a la gerencia alcanzar un nivel de análisis y desempeño que en otras condiciones sería imposible, pero el desarrollo de esa clase de modelos es caro y a menudo requiere que la gerencia realice un esfuerzo largo y sostenido. En todos los ejemplos, los autores (de los artículos) hicieron énfasis en una estrecha relación de trabajo entre los analistas (constructores de modelos) y la gerencia. En el caso de Kelly-Springfield, el modelo actual ha evolucionado durante un periodo de 15 años, con dos grandes esfuerzos. Así pues, vemos que el uso de modelos para abordar problemas administrativos importantes puede implicar un serio compromiso con un proceso prolongado. Los pequeños modelos tácticos pueden dominarse con éxito por medio de un tratamiento rápido “prefabricado”. Sin embargo, los modelos estratégicos fundamentales rara vez resultan ser tan dúctiles.

7.8 RESUMEN

En la introducción se explicó que la programación lineal de enteros (PLE) es una área importante y en desarrollo de la optimización con restricciones. La sección 7.2 identificó modelos formados únicamente por enteros (PLE) y modelos de enteros mixtos (PLEM) como los dos tipos principales de programas lineales de enteros. En los modelos de PLEM, sólo algunas de las variables de decisión están restringidas a valores enteros. Además se habló sobre la importancia de los modelos en los cuales intervienen variables enteras restringidas a adoptar los valores 0 o 1. Por último, definimos la relajación de PL. En la sección 7.3 se utilizó un método gráfico para resolver una PLE con dos variables de decisión. Este enfoque se aplicó después para la investigación de las relaciones conceptuales entre una PLE y su respectiva relajación de PL. Pudimos observar que:

1. En un modelo *Max*, el VO de la relajación de PL siempre proporciona un *acotamiento superior* en el VO de la PLE original.
2. En un modelo *Min*, el VO de la relajación de PL siempre proporciona un *acotamiento inferior* en el VO de la PLE original.

En la sección 7.3 examinamos también las *soluciones redondeadas.* Éstas incluyen cualquier redondeo de la solución óptima correspondiente a la relajación de PL. Por tanto, hay muchas soluciones redondeadas. Para n variables que tengan respuestas fraccionarias, existen 2^n soluciones redondeadas posibles. Por ejemplo, en el modelo de Flying Tiger podría haber $2^{156} = 9.1344 \times 10^{46}$ soluciones redondeadas. Si sólo 50 de esas variables tuvieran respuestas fraccionarias en la PL relajada, todavía tendríamos 1.1259×10^{15} (más de mil billones) de soluciones por investigar para encontrar la mejor solución redondeada factible. Como vimos en la sección 7.1, hay algunas aplicaciones en las que cualquier solución redondeada puede ser un sustituto aceptable de la verdadera solución de la PLE. En otros casos, ninguna solución redondeada resulta aceptable. En la sección 7.3 vimos que, en general:

3. Es posible que ninguna solución redondeada se aproxime a la óptima de la PLE, o bien
4. Puede ser que ninguna solución redondeada sea factible (es decir, que ninguna logre satisfacer las restricciones de la relajación de PL).

En la sección 7.4 consideramos el uso de variables 0–1 en diferentes aplicaciones. En particular, vimos con cierto detalle modelos adecuados para un modelo de presupuesto de capital y un modelo de ubicación de almacenes. La sección 7.5 presentó una aplicación basada en el hecho de que ciertas PL siempre tienen soluciones que incluyen exclusivamente enteros. La sección 7.6 explicó el método de ramificación y acotamiento utilizado para resolver los modelos de PLE. Se aplicó la aproximación gráfica para demostrar que la ramificación consiste en dividir el conjunto factible para un modelo en subconjuntos disjuntos (sin traslape). En el acotamiento se emplea el valor óptimo de la relajación de PL para eliminar submodelos de nuestra consideración. La sección 7.6 se refirió a dos temas importantes sobre el uso de las PLE en el mundo real. En primer lugar, señalamos la importancia de las estrategias de poda del árbol de Solver para aplicar el método de ramificación y acotamiento. En segundo lugar, vimos que los datos sobre sensibilidad no se producen como resultado natural de la resolución de una PLE. Además, se puso de manifiesto que las PLE pueden ser incongruentes y erráticas en su sensibilidad a los cambios del valor de los parámetros. Estos dos hechos se combinan para demostrar la necesidad de utilizar múltiples rondas de optimización usando diferentes parámetros para tabular en forma manual la información de sensibilidad en el ámbito de la PLE. Este procedimiento es con frecuencia un aspecto importante en la resolución de un modelo real por medio de un modelo de PLE. En la sección 7.7 describimos varias aplicaciones importantes de la programación con enteros.

Términos clave

Enumeración exhaustiva. Resolución de una PLE haciendo una lista de todos los puntos factibles, evaluando la función objetivo en cada uno de ellos y seleccionando la mejor solución.

Programación lineal con enteros (PLE). Modelo que satisface todas las condiciones de un programa lineal, salvo por el requisito de que algunas o todas las variables deben ser enteras.

Programación lineal con enteros binarios (0–1). Programación lineal con enteros en la cual se requiere que todas las variables de decisión sean 0 o 1.

Programación lineal con enteros mixtos (PLEM). Programación lineal con enteros en la cual se requiere que sólo algunas variables sean enteras.

Programación lineal sólo con enteros. Programación lineal con enteros en la cual se requiere que todas las variables de decisión sean números enteros.

Ramificación y acotamiento. Técnica de resolución utilizada en las PLE, que se basa en dividir el modelo original en partes mutuamente excluyentes, después de lo cual se usa el VO de las relajaciones de la PL para obtener los acotamientos.

Relajación de PL. Modelo de PL que se obtiene a partir de una PLE, pasando por alto las restricciones de integralidad.

Solución redondeada. Solución factible para una PLE que se encuentra resolviendo primero la relajación de la PL y redondeando después cada una de las variables enteras, ya sea hacia arriba o hacia abajo.

Valor óptimo (VO). Forma abreviada para referirse al valor óptimo de la función objetivo.

Ejercicios de repaso

Verdadero-Falso

1. **V F** El redondeo de soluciones de PL para satisfacer los requisitos del mundo real sobre las variables de decisión enteras es una práctica común.
2. **V F** En general, no es más difícil resolver una PE que una PL.
3. **V F** La variable binaria de una PE puede usarse para representar decisiones de dicotomía.
4. **V F** En un modelo *Max*, el VO de la relajación de PL siempre proporciona un *acotamiento inferior* en el VO de la PLE o de la PLEM original.
5. **V F** El primer paso para obtener la solución redondeada de una PLEM consiste en resolver su relajación de PL.
6. **V F** La resolución de una PLE por enumeración exhaustiva requiere la evaluación de la función objetivo en todos los vértices del conjunto factible de la relajación de PL.
7. **V F** En la relajación de PL del modelo de PLE para presupuestos de capital, hay tantas restricciones como periodos.
8. **V F** En una PLE con n variables de decisión binarias, cada una de las cuales indica que una alternativa fue seleccionada (o que no lo fue), se puede imponer la condición de que no se debe seleccionar más de k alternativas, con la restricción $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq k$.

9. **V F** En el modelo para determinar la ubicación de los almacenes de STECO, el número óptimo de camiones que deberán despacharse desde cada almacén hasta cada planta resultó ser un entero porque, después de seleccionar los almacenes, el modelo en cuestión es un modelo de transporte con ofertas y demandas enteras.
10. **V F** Suponga usted que x_1 y x_2 son variables binarias, donde $x_i = 1$ se interpreta como la sugerencia de que se construya una planta en la localidad *i*. La condición "solamente se puede construir una planta en la localidad 2 si la planta de la localidad 1 se construye también", ha sido captada en la restricción $x_1 \leq x_2$.
11. **V F** Considere un modelo de transporte con ofertas y demandas enteras en el cual, además, se imponen condiciones de integralidad a las x_{ij}. Puesto que lo anterior convierte el modelo en un programa de enteros, para su resolución será necesario especificar que las celdas que van a cambiar en Solver deberán tener valores enteros.

Opción múltiple

12. En una PLE
    - **a.** pasando por alto las restricciones sobre enteros, todas las funciones de restricción son lineales
    - **b.** todas las variables de decisión deben ser enteros
    - **c.** todas las variables de decisión deben ser no negativas
    - **d.** tanto a como b
13. En una PLEM
    - **a.** la función objetivo es lineal
    - **b.** todas las variables de decisión deben ser enteros
    - **c.** para algunos coeficientes existe la restricción de que sean enteros, pero para otros no
    - **d.** todo lo anterior
14. La relajación de PL de una PLE
    - **a.** permite una función objetivo no lineal
    - **b.** pasa por alto las restricciones de que las variables de decisión sean enteras
    - **c.** relaja cualquier restricción de no negatividad para las variables de decisión
    - **d.** todo lo anterior
15. Una solución redondeada para una PLE *Max* puede no ser factible porque
    - **a.** viola las restricciones sobre integralidad
    - **b.** viola cualquier restricción de no negatividad
    - **c.** su VO es más pequeño que el VO de la relajación de PL
    - **d.** nada de lo anterior
16. Si x_k y x_m son variables 0–1 (el valor 1 significa seleccionada) para los proyectos *k* y *m*, respectivamente, la restricción $x_k + x_m \leq 0$ implica que
    - **a.** *k* no puede ser seleccionada a menos que *m* también lo sea
    - **b.** *k* debe ser seleccionada si *m* es seleccionada
    - **c.** *m* no puede ser seleccionada a menos que *k* también lo sea
    - **d.** nada de lo anterior
17. Supongamos que un producto puede ser fabricado, ya sea en cantidad nula o en tamaños de lote $\geq L$, y sea *x* la cantidad producida de dicho producto. Las dos restricciones siguientes son apropiadas:
    - **a.** $x + Uy \leq 0; x - Ly \geq 0$
    - **b.** $x - Uy \geq 0; x - Ly \geq 0$
    - **c.** $x - Uy \leq 0; x - Ly \geq 0$
    - **d.** $x - Uy \leq 0; x - Ly \leq 0$

    donde *U* es un número arbitrariamente grande y *y* es una variable 0–1.
18. Al resolver una PLE *M*ax siempre es posible encontrar una acotación inferior para el VO del modelo original en la siguiente forma:
    - **a.** resolviendo la relajación de PL de la PLE y usando el VO de la PL
    - **b.** encontrando una solución factible de la PLE, por cualquiera de los medios posibles y evaluando la función objetivo
    - **c.** resolviendo la relajación de PL y redondeando después las fracciones < 0.5 hacia abajo, las fracciones ≥ 0.5 hacia arriba y evaluando la función objetivo en este punto
    - **d.** nada de lo anterior
19. En el método de ramificación y acotamiento aplicado a una PLE *Max*, un nodo está terminado cuando
    - **a.** su $U <$ MAIA
    - **b.** la relajación de PL no es factible
    - **c.** la relajación de PL proporciona una solución para el modelo de enteros representado por ese nodo
    - **d.** cualquiera de las afirmaciones anteriores
20. La solución de computadora para una PLEM
    - **a.** no contiene información sobre sensibilidad
    - **b.** contiene información de sensibilidad solamente sobre las variables no enteras
    - **c.** contiene información de sensibilidad sólo para el lado derecho de las desigualdades
    - **d.** sólo contiene información de sensibilidad sobre la función objetivo

Preguntas que implican un mayor reto: las siguientes diez preguntas están basadas en el siguiente modelo:

Una empresa tiene diez centros de distribución a los que es preciso abastecer de cierto producto. Las demandas (todas positivas) en esos centros son $d_1, d_2,..., d_{10}$, y tienen que ser satisfechas en forma *exacta* (es decir, al centro de distribución *i* se le deben proveer d_i unidades). La firma tiene que satisfacer estas demandas haciendo que un proveedor entregue los productos directamente en cada centro de distribución. El proveedor cobra \$50 por cada unidad que entrega, independientemente de la ubicación del centro atendido. El proveedor cobraría sólo \$35 por unidad para cualquier localidad si ésta ordenara por lo menos *D* unidades. Dado que cada una de las $d_j < D$, la firma no puede aprovechar el descuento. La compañía está considerando ahora la posibilidad de alquilar por $K > 0$ dólares un almacén ubicado en una localidad central, para usarlo como depósito intermediario. Éste podría ordenar cualquier cantidad de producto para distribuirlo a cualquier número de centros de venta. Se ha convenido que el depósito pagaría lo mismo que dichos centros (\$50 por unidad si se ordenan $< D$ unidades; \$35 por unidad siempre que el pedido total sea por *D* unidades como mínimo).

El costo del envío de una unidad desde el almacén hasta el centro de venta *i* es $C_i > 0$, $i = 1, 2,... 10$. Suponga que $D < \sum_{i=1}^{n} d_i$. La gerencia desea saber

1. ¿Si debe alquilar o no ese almacén?

2. En caso afirmativo, ¿qué centros de venta deberán ser atendidos por el almacén y cuáles serán atendidos directamente por el proveedor?

Al formular un modelo para responder estas preguntas, sea

x_i = cantidad enviada directamente del proveedor a la localidad i

y_i = cantidad enviada del almacén a la localidad i

z = cantidad enviada del proveedor al almacén

Un conjunto de restricciones apropiado para este modelo es

$$x_i + y_i = d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 10$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i \leq z$$

$$z \geq tD$$

$$z \leq t\sum_{i=1}^{10} d_i$$

$$x_i, y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 10); \quad z \geq 0; \quad t = 0 \text{ o bien } 1$$

21. La función objetivo correcta es
   - **a.** Min $\sum_{i=1}^{10} 50x_i + \sum_{i-1}^{10} C_i y_i$
   - **b.** Min $\sum_{i=1}^{10} 50x_i + \sum_{i=1}^{10} (C_i + 35)y_i + tK$
   - **c.** Min $\sum_{i=1}^{10} 50x_i + 35z + \sum_{i=1}^{10} C_i y_i + tK$
   - **d.** Min $\sum_{i=1}^{10} (50x_i + C_i y_i) + 35D$
   - **e.** ninguna de las anteriores

22. Para el modelo tal como ha sido expuesto, nunca habrá una solución óptima en la cual el depósito pida una cantidad positiva menor que D unidades.
   - **a.** V
   - **b.** F

23. La gerencia deberá alquilar el almacén si
   - **a.** el valor óptimo de D es positivo
   - **b.** el valor óptimo de t es positivo
   - **c.** el valor óptimo de z es positivo
   - **d.** todo lo anterior
   - **e.** tanto b como c

24. Considere una localidad k en la cual $35 + C_k > 50$. Dado que el costo marginal del envío directo desde el proveedor hasta k es menor que el costo marginal del envío a través del almacén, no existirá ninguna solución óptima en la cual este centro de venta (el k-ésimo) reciba productos tanto del almacén como directamente del proveedor.
   - **a.** V
   - **b.** F

25. Siempre existirá una solución óptima en la cual ningún centro de venta recibirá productos tanto del proveedor (en forma directa) como del almacén.
   - **a.** V
   - **b.** F

26. Supongamos que $35 + C_i = 50$, $i = 1, \ldots, 10$. Entonces $t^* = 0$ en cualquier solución óptima.
   - **a.** V
   - **b.** F

27. Este modelo puede tener una solución óptima en la cual la cantidad total solicitada al proveedor sea mayor que $\sum_{i=1}^{10} d_i$.
   - **a.** V
   - **b.** F

28. Si el valor óptimo $z^* = \sum_{i=1}^{10} d_i$, entonces seguramente la solución óptima será $x_i^* = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, 10)$, $y_i^* = d_i$, $(i = 1, 2, \ldots, 10)$, y $t^* = 1$.
   - **a.** V
   - **b.** F

29. Este modelo nos brindará la posibilidad de obtener un inventario residual en el almacén una vez que todas las demandas hayan sido satisfechas.
   - **a.** V
   - **b.** F

30. Suponga que cada $C_i \geq 15$.
   - **a.** Entonces la solución óptima para el modelo es evidentemente $x_i^* = d_i$, $(i = 1, 2, \ldots, 10)$, $y_i^* = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, 10)$, y $z^* = t^* = 0$.
   - **b.** Para algunos valores de los parámetros d_i la solución puede ser diferente y, por tanto, lo más prudente es optimizar el modelo con Solver.

Respuestas

1. V
2. F
3. V
4. F
5. V
6. F
7. F
8. V
9. V
10. F
11. F
12. d
13. a
14. b
15. d
16. d
17. c
18. b
19. d
20. a
21. c
22. a
23. e
24. b
25. b
26. a
27. a
28. a
29. a
30. a

Problemas

7-1. Una firma elabora dos productos, A y C. La capacidad de la línea A es de siete unidades diarias. Cada unidad de C requiere cuatro horas de tiempo para el secado, y se dispone en total de 22 horas de secado al día. Además, cada unidad de A requiere dos horas para el pulido, y cada unidad de C requiere tres horas de pulido. Se dispone en total de 19 horas de pulido cada día. Cada unidad de A produce una ganancia de \$1, mientras que cada unidad de C produce una ganancia de \$3. La firma desea establecer un programa de producción diaria para maximizar las ganancias. A y C sólo pueden producirse en cantidades enteras.

(a) Formule este modelo como una PLE.

(b) Con el GLP, encuentre la solución óptima para la relajación de PL.

(c) Con el GLP encuentre la solución óptima para la PLE.

(d) Encuentre una solución entera, redondeando a su parte entera cada uno de los valores de la respuesta a la parte (b). ¿Es factible esta solución?

(e) ¿Cuántas ganancias podría perder la firma si pusiera en práctica esta última solución redondeada?

7-2. Considere ahora la siguiente PLE:

$$\begin{aligned} &Max \quad x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.a.} \quad 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ &\qquad\;\; 3x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros} \end{aligned}$$

(a) Usando el GLP, encuentre la solución óptima para la relajación de PL.

(b) ¿Cuántos puntos factibles hay?

(c) Con el GLP, encuentre la solución óptima para la PLE.

(d) Encuentre una solución entera factible redondeando la respuesta para la parte (a). ¿Es óptima la solución redondeada?

7-3. Considere una minimización de la PLE. ¿El valor óptimo para la relajación de PL proporciona un acotamiento superior o inferior para el valor óptimo de la PLE? Explique su respuesta.

7-4. Considere una minimización de la PLE. ¿El valor de la función objetivo en una solución redondeada factible proporciona un acotamiento superior o inferior para el valor óptimo de la PLE? Explique su respuesta.

7-5. Considere una maximización de la PLE. ¿El valor óptimo de la relajación de PL de este modelo provee un acotamiento superior o inferior para el valor óptimo de la PLE? Explique su respuesta.

7-6. Considere una maximización de la PLE. ¿El valor de la función objetivo en una solución redondeada factible proporciona un acotamiento superior o inferior para el valor óptimo de la PLE? Explique su respuesta.

7-7. *Problema de inversión.* Una especialista administradora de carteras de inversiones acaba de recibir \$100,000 para invertir. Tendrá que escoger sus inversiones, las cuales figuran en una lista de 20 acciones. Sabe que el rendimiento neto de la inversión de un dólar en la acción i es r_i. De este modo, si invierte x_i dólares en la acción i, tendrá finalmente $(1 + r_i)x_i$ dólares. Para mantener una cartera equilibrada, la administradora adopta estas dos reglas prácticas:

1. No invertirá más de \$20,000 en una sola acción.
2. *Si* invierte en una acción, dicha inversión tendrá que ser de \$5,000 por lo menos.

La administradora desea maximizar sus rendimientos operando bajo estas reglas prácticas. Formule usted este modelo como una PLEM. Defina cuidadosamente sus variables de decisión.

•• **7-8.** *Programa de trabajo para una aerolínea.* Alpha Airline no desea programar más de un vuelo desde Chicago a cada una de las siguientes ciudades: Columbus, Denver, Los Ángeles y Nueva York. Las horas de partida disponibles son 8, 10, y 12 de la mañana. Alpha paga alquiler por los aviones, al costo de \$5,000 hasta las 10 a.m. inclusive, y de \$3,000 después de las 10 a.m., y está en condiciones de alquilar dos aviones como máximo en cada hora de partida. Además, si un vuelo parte de Nueva York a una hora determinada, será necesario que parta también un vuelo hacia Los Ángeles a la misma hora. La aportación esperada en las ganancias por cada vuelo, antes de considerar los costos del alquiler, se presenta en la siguiente tabla. Formule y resuelva un modelo para un programa que permita maximizar las ganancias. Defina con cuidado sus variables de decisión.

	HORARIO		
	8	10	12
Columbus	10	6	6
Denver	9	10	9
Los Ángeles	14	11	10
Nueva York	18	15	10

•• **7-9.** Un *problema de puesta en marcha.* Un modelo que una compañía de servicio eléctrico requiere para sus operaciones diarias consiste en una guía para decidir qué generadores debe poner en marcha en cada ocasión. El servicio en cuestión cuenta con tres generadores con las características que aparecen en la tabla siguiente. El día está dividido en dos periodos y en el primero de ellos se necesitan 2,900 megavatios. En el segundo periodo se requieren 3,900 megavatios. Un generador puesto en marcha en el primer periodo puede usarse en el segundo sin incurrir en un costo adicional de puesta en marcha. Todos los generadores principales (por ejemplo, A, B y C) se apagan al final de cada día. Formule y resuelva este modelo como una PLEM. Defina con cuidado sus variables de decisión.

GENERADOR	COSTO FIJO DE ARRANQUE ($)	COSTO POR PERIODO POR MEGAVATIO USADO ($)	CAPACIDAD MÁXIMA EN CADA PERIODO (MW)
A	3000	5	2100
B	2000	4	1800
C	1000	7	3000

••**7-10.** *Planificación de la producción.* Cierta línea de producción fabrica dos productos. Los datos pertinentes aparecen más abajo, en la tabla 7.4. El tiempo total disponible (para la producción y la puesta en marcha) cada semana es de 80 horas. La firma no tiene inventario de producto alguno al principio de la semana 1, y no se permite que lo tenga al final de la semana 4. El costo de conservar una unidad de inventario de una semana a la siguiente es de $4 para cada producto. Una unidad de demanda no satisfecha cuesta $10 por el producto A y $15 por el producto B. Los datos sobre la demanda aparecen en la tabla 7.5. La línea se cierra para realizar operaciones de limpieza cada fin de semana. Por tanto, si un producto es fabricado en una semana, tendrá que pagarse el costo correspondiente al tiempo de arranque del equipo. Sólo un tipo de producto puede fabricarse durante la semana. No puede haber producción durante el tiempo en el cual se pone en marcha la línea. Formule y resuelva este modelo de planeación de 4 semanas como una PLEM. Nuestro objetivo es maximizar las ganancias en el periodo de 4 semanas.

TABLA 7.4 Datos sobre los productos

	PRODUCTO	
	A	B
Tiempo de arranque	5 horas	10 horas
Tiempo de producción por unidad	0.5 horas	0.75 horas
Costo de arranque	$200	$400
Costo de producción por unidad	$10	$15
Precio de venta	$20	$30

TABLA 7.5 Datos sobre la demanda

	SEMANA			
PRODUCTO	1	2	3	4
A	80	100	75	80
B	15	20	50	30

••**7-11.** La junta de directores de una gran empresa manufacturera está estudiando la serie de inversiones que aparece en la siguiente tabla. Sea R_i el rendimiento total de la inversión i y C_i el costo que corresponde a la inversión i. Los dirigentes desean maximizar el rendimiento total y no invertir más de M dólares. Formule el modelo como una PLE. Defina sus variables de decisión y escriba simbólicamente la ecuación.

INVERSIÓN	CONDICIÓN
1	Ninguna
2	Sólo si 1
3	Sólo si 2
4	Forzosamente si 1 *y* 2
5	No si 1 *o* 2
6	No si 2 *y* 3
7	Sólo si 2 y 3 *no*

•• **7-12.** Una compañía distribuidora desea minimizar el costo de transportar los bienes desde sus almacenes A, B y C hasta los centros de venta al menudeo 1, 2 y 3. Los costos del transporte de una unidad desde el almacén hasta el minorista aparecen en la siguiente tabla.

	MINORISTA		
ALMACÉN	1	2	3
A	15	32	21
B	9	7	6
C	11	18	5
Demanda	200	150	175

Los costos fijos de operación de cada almacén son $5,000 para A, $750 para B y $600 para C, y por lo menos dos de ellos deben estar abiertos a la vez. Podemos suponer que los almacenes tienen una capacidad de almacenamiento ilimitada. Formule y resuelva una PLE para decidir qué almacenes deberán abrirse y la cantidad de bienes que conviene enviar desde cada almacén a cada minorista.

•• **7-13.** Use un planteamiento gráfico y el algoritmo de ramificación y acotamiento para resolver la PLE presentada en el problema 7-1. Ramifique primero en A, luego presente cada nuevo modelo obtenido en el proceso junto con su solución, y exprese el análisis en un diagrama de decisiones.

•• **7-14.** Utilice un planteamiento gráfico y el algoritmo de ramificación y acotamiento para resolver la PLE que presentamos en el problema 7-2. Ramifique primero en x_1. Para cada nuevo modelo, declare qué restricción tendría que agregar a los modelos para crear uno nuevo; por ejemplo, expréselo en términos como "Agregar la restricción $x_1 \geq 2$ al modelo 1". Ilustre su análisis mediante un diagrama de decisiones como los que aparecen en el texto.

•• **7-15.** Considere la siguiente formulación del problema 7-1:

$$\begin{aligned}
\text{Max } & A + 3C \\
\text{s.a. } & A \leq 7 \\
& 4C \leq 22 \\
& 2A + 3C \leq 19 \\
& A \geq 0 \text{ y entero}, \quad C \geq 0 \text{ y entero}
\end{aligned}$$

Trace la gráfica del valor objetivo óptimo como función del LD de la segunda restricción, a medida que el valor del LD fluctúa entre 0 y 24. Utilice el GLP para crear los datos correspondientes a esta gráfica.

•• **7-16.** Considere la PLE presentada en el problema 7.2. Trace la gráfica del valor objetivo óptimo en función del LD de la restricción

$$3x_1 + x_2 \leq \text{RHS} \qquad \text{para } 0 \leq \text{LD} \leq 24$$

Use el GLP para crear los datos correspondientes a esta gráfica.

7-17. Considere la siguiente PLE:

$$\begin{aligned}
\text{Min. } & 4x_1 + 5x_2 \\
\text{s.a. } & 3x_1 + 6x_2 \geq 18 \\
& 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\
& 8x_1 + 2x_2 \geq 16 \\
& 7x_1 + 6x_2 \leq 42 \\
& x_1 \geq 0 \text{ y entero}, \quad x_2 \geq 0 \text{ y entero}
\end{aligned}$$

(a) Use el GLP para encontrar la solución óptima correspondiente a la relajación de PL.

(b) Haga una lista de todos los puntos factibles.
(c) Utilice el GLP para encontrar la solución óptima que corresponde a la PLE.
(d) Use el GLP para encontrar una solución redondeada factible.
(e) ¿Es (d) una solución óptima?
(f) ¿A cuánto asciende el costo de poner en práctica la solución redondeada señalada más arriba, en comparación con el uso de la solución óptima?

••7-18. *Cómo equilibrar la línea de producción.* En un trabajo fabril es necesario realizar cinco operaciones, A, B, C, D y E, cada una de las cuales se puede llevar a cabo ya sea en la máquina 1 o en la máquina 2. El tiempo que se requiere para cada operación en cada una de las máquinas mencionadas se presenta en la siguiente tabla.
Formule y resuelva una PLE para asignar los trabajos a las máquinas, de modo que si T1 es el tiempo total en el que se ocupa la máquina 1 y T2 dicho tiempo en la máquina 2, entonces Max (T1, T2) se minimiza.

	A	B	C	D	E
Máquina 1	5	9	2	3	4
Máquina 2	3	4	7	5	4

••7-19. Considere el modelo de STECO para determinar la ubicación de almacenes que se presenta en la figura 7.8. Dadas las decisiones óptimas para alquilar los almacenes A, B y C, describa el modelo de transporte que se resuelve con las asignaciones óptimas de los camiones.

••7-20. *Ubicación de una estación de bomberos*. El consejo ciudadano llegó a la conclusión de que, para atender a la ciudad, es necesario instalar estaciones de bomberos, ya sea en las ubicaciones A, B y C, en las ubicaciones A, C y D o en las ubicaciones B, C y D. El costo de la instalación de una estación de bomberos (en millones de $) en la ubicación A es de $1.5, en B es de $2.3, en C es de $1.8 y en D es de $2.1. Formule y resuelva una PLE que ayude al consejo ciudadano a decidir qué estaciones de bomberos deberá establecer para atender a la ciudad al costo mínimo.

••7-21. *Expansión de la capacidad.* Una compañía de servicio eléctrico está planeando ampliar su capacidad de generación durante los próximos cinco años. Su capacidad actual es de 800 megavatios (MW), pero de acuerdo con sus propios pronósticos de demanda, va a requerir la capacidad adicional que muestra la siguiente tabla.

AÑO	CAPACIDAD MÍNIMA (MW)
1	880
2	960
3	1050
4	1160
5	1280

La compañía de servicio eléctrico podrá aumentar su capacidad de generación con la instalación de unidades generadoras de 10, 50 o 100 MW. El costo de instalación de un generador depende de su tamaño y del año en el cual entre en servicio. Examine la tabla siguiente.

CAPACIDAD DEL GENERADOR (MW)	AÑO				
	1	2	3	4	5
10	300	250	208	173	145
50	670	558	465	387	322
100	950	791	659	549	458

Una vez que un generador entra en servicio, su capacidad está disponible para satisfacer la demanda en los años subsiguientes. Formule y resuelva una PLE que minimice el costo de poner en servicio generadores, satisfaciendo al mismo tiempo los requisitos de capacidad mínima.
SUGERENCIA: sean x_t, y_t y z_t las cantidades respectivas de generadores de 10, 50 y 100 MW puestos en servicio en el año t, y sea c_t la capacidad total en el año t cuando esos generadores hayan entrado en servicio.

••• 7-22. Norco Home Cosmetics Sales acaba de llegar a una región de seis condados en el sur de Utah. El mapa que presentamos a continuación muestra la ubicación de los condados y sus poblaciones, P_i. Norco ha planeado asignar dos vendedores a esta región. La compañía asigna dos condados a cada vendedor, un condado base y un condado adyacente. Se considera que los condados son adyacentes si tienen un *lado* en común; una esquina en común *no* es suficiente.

Por ejemplo, en el mapa siguiente, los condados 1 y 2 son adyacentes, mientras que el 1 y el 5 no lo son. El objetivo de Norco es maximizar la población total de los condados asignados. Una solución factible es

P_t 1	P_2 2	P_3 3
P_4 4	P_5 5	P_6 6

para establecer que 4 será un condado base, teniendo a 1 como condado adyacente asignado, y para determinar también que 3 sea un condado base, con 2 como el condado adyacente asignado. El valor de la función objetivo que corresponde a esta solución es $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.
Defina

$$B_j = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si el condado } j \text{ se usa como base} \\ 0 \text{ si no es así} \end{array} \right\} \; j = 1, \ldots, 6$$

$$A_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si el condado } i \text{ se usa como condado adyacente de la base } j \\ 0 \text{ si no es así} \end{array} \right\} \; \begin{array}{l} j = 1, \ldots, 6; \\ i \text{ adyacente a } j \end{array}$$

En estas condiciones, las variables son B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, A_{21}, A_{41}, A_{12}, A_{52}, A_{32}, A_{23}, A_{63} y así sucesivamente.

(a) En el modelo no se debe producir una contabilidad doble (es decir, un mismo condado no deberá ser usado como base y como adyacente asignado). Escriba usted una restricción para asegurarse de que no se realizará una doble contabilidad en el caso del condado 1.

(b) Escriba una restricción que exprese lo siguiente: "si un vendedor es asignado al condado 2 como base, entonces será indispensable asignar también un vendedor a un condado adyacente apropiado".

(c) Escriba una restricción que exprese "si cualquiera de los dos condados adyacentes a 1 es programado (como adyacente a 1), entonces 1 deberá usarse como condado base".

(d) Este modelo se puede escribir con 12 restricciones de desigualdad y 1 restricción de igualdad. Verdadero o Falso.

(e) Este modelo se puede escribir con 7 restricciones de igualdad y 6 restricciones de desigualdad. Verdadero o Falso.

•••7-23. Tome como referencia la descripción que precede al ejercicio 21 en la sección de Ejercicios de repaso. Además de las condiciones descritas en ese lugar, suponga que se ha asignado un costo fijo de $R > 0$ dólares a cada uno de los envíos que realiza el proveedor. Esto significa, por ejemplo, que el proveedor realiza envíos directos a las localidades 3, 5 y 8, por lo cual en los envíos al almacén se incurre en un costo adicional de $4R$ dólares.

Formule este modelo como una PLEM, empleando la notación que hemos presentado con anterioridad y toda la notación adicional que se requiera.

Caso práctico — Asignación de representantes de ventas

Una de las principales tesis que hemos suscrito en este texto es que usted, el administrador, desempeña el papel de intermediario entre el mundo real y el modelo. Usted es la persona que debe decidir si las suposiciones elegidas son apropiadas y si la solución producida por el modelo tiene sentido en el contexto del modelo real.

Sally Erickson es la directora de ventas de Lady Lynn Cosmetics en el Oeste Medio de Estados Unidos. Lady Lynn es una compañía en rápida expansión que vende cosméticos por medio de mujeres representantes. Ellas establecen contacto con la mayoría de sus clientas por medio de fiestas que organizan en domicilios particulares. En estas fiestas, las representantes hacen demostraciones de los productos y aceptan pedidos. Las invitadas tienen la oportunidad de recibir muestras gratis de algunos productos y hacen sus pedidos para comprar otros.

Sally está en medio del proceso para asignar representantes para los siete condados del este de Iowa que aparecen ilustrados en el anexo 1. En realidad, en este momento sólo dispone de dos representantes capacitadas para ese propósito. La política de Lady Lynn consiste en asignar una representante tanto para un condado base como para un condado adyacente. La práctica real está basada en un modelo heurístico que asigna las representantes en forma secuencial. El condado que tiene mayor población es seleccionado como base para la primera representante, y el condado adyacente con mayor población también es asignado a esa persona. Después, el condado no asignado que tenga mayor población será asignado como el siguiente condado base, y así sucesivamente. Presentamos a continuación la población de los condados.

1.	Buchanan	16,000
2.	Delaware	15,000
3.	Dubuque	98,000
4.	Linn	109,000

5. Jones 4,000
6. Jackson 6,000
7. Clinton 100,000

Con este plan, la primera representante sería asignada al condado Linn como base. Como vemos en el mapa, Buchanan, Delaware y Jones son los condados adyacentes. Como Buchanan es, de esos tres condados, el que tiene mayor población, sería el condado adyacente asignado. La segunda representante tendría su base en Clinton, quedando Jackson como el condado adyacente asignado. Sally comprende que la meta es maximizar la población total asignada a las representantes. Le preocupa que, en virtud de que el condado Dubuque es casi tan grande como Clinton, la solución propuesta pueda no ser la óptima y, después de un momento de reflexión, se percata de que en efecto no lo es: la pareja Dubuque y Delaware supera a la de Clinton y Jackson. Ella decide abandonar el enfoque heurístico tradicional y analizar el modelo como una PE. Aunque este modelo es bastante simple, Sally considera que si logra crearlo en forma exitosa podrá introducir después las modificaciones adecuadas para asignar las 60 representantes de la compañía en el Oeste Medio a bastante más de 300 condados. Al formular el modelo, ella establece que

Y_i = 1 si el condado i es una base, $i = 1, 2, ..., 7$
= 0 si no lo es

X_{ij} = 1 si el condado adyacente j es asignado al condado base, $i = 1, 2, ..., 7$; $j = 1, 2, ..., 7$
= 0 si no lo es

El modelo simbólico aparece a continuación. Sally desarrolló una versión del mismo en hoja de cálculo y utilizó Solver para optimizar el modelo.

$$\begin{aligned}
\text{Max}\quad & 16Y_1 + 15Y_2 + 98Y_3 + 109Y_4 + 4Y_5 + 6Y_6 + 100Y_7 + \\
& 15X_{21} + 109X_{41} + \\
& 16X_{12} + 98X_{32} + 109X_{42} + 4X_{52} + \\
& 15X_{23} + 4X_{53} + 6X_{63} + \\
& 16X_{14} + 15X_{24} + 4X_{54} + \\
& 15X_{25} + 98X_{35} + 109X_{45} + 6X_{65} + 100X_{75} + \\
& 4X_{56} + 98X_{36} + 100X_{76} + \\
& 4X_{57} + 6X_{67}
\end{aligned}$$

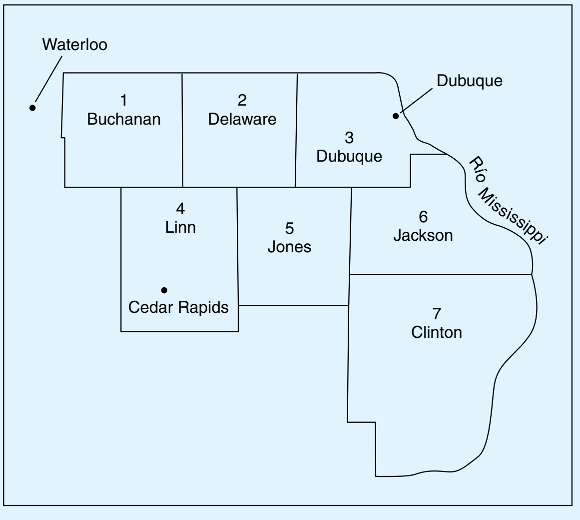
$$\begin{aligned}
\text{s.a.}\quad & X_{21} + X_{41} = Y_1 \\
& X_{12} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = Y_2 \\
& X_{23} + X_{53} + X_{63} = Y_3 \\
& X_{14} + X_{24} + X_{54} = Y_4 \\
& X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{65} + X_{75} = Y_5 \\
& X_{56} + X_{36} + X_{76} = Y_6 \\
& X_{57} + X_{67} = Y_7 \\
& Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7 = 2
\end{aligned}$$

Su solución demostró que Y_4 y $Y_1 = 1$; de este modo, los condados de Linn y Buchanan fueron seleccionados como los condados base. También se obtuvo 250 como el valor óptimo de la función objetivo, lo cual implica que 250,000 personas podrán ser atendidas por las dos representantes. Después de haber observado estos resultados, Sally se siente contenta de haber descubierto que la solución sugerida por el enfoque heurístico ordinario era incorrecta, antes de poner en práctica esa solución. Le sorprende un poco que en la solución óptima no aparezcan los condados de Dubuque o Clinton, pero siente la seguridad de que Solver le ha proporcionado la solución óptima para su modelo, por lo cual está decidida a ponerla en práctica.

Preguntas

1. Resulta obvio que la solución de Sally es errónea. Mediante una inspección de los datos, encuentre una solución óptima correcta. ¿Cuántas soluciones óptimas alternativas hay?
2. ¿Cuál es la falla del modelo de Sally? Escriba usted las restricciones adicionales necesarias para obtener una formulación correcta.
3. Desarrolle en una hoja de cálculo una versión del modelo reformulado y optimícelo con Solver a fin de determinar la solución óptima.

ANEXO 1 Siete condados del este de Iowa



Caso práctico Suscripción de bonos municipales[1]

El mercado de bonos municipales es inclemente y agresivo, lo cual significa que un suscriptor exitoso debe estar siempre a la vanguardia en términos de licitaciones competitivas. Los mercados de bonos cambian con frecuencia de una hora a la siguiente. Un suscriptor activo puede licitar sobre varias emisiones cada día, disponiendo de apenas 15 o 20 minutos para preparar cada propuesta. Al presentar este caso tenemos dos objetivos: (1) que usted se familiarice con parte de la mecánica de un mercado financiero importante; y (2) que logre desarrollar un modelo de PE que sea importante en el mundo real. En realidad, una variante de este modelo es utilizada por varios bancos y banqueros de inversiones. En la práctica, se preparan de ordinario licitaciones para modelos en los que están incluidos hasta 100 vencimientos y 35 tasas de interés sobre cupones.

Escenario básico

Cada año se ofrecen en venta al público valores bursátiles de deuda, exentos de impuestos, por valor de varios miles de millones de dólares. Por lo general, esto se realiza a través de un suscriptor que actúa como corredor de bolsa entre el emisor de los valores y el público. La emisión de los valores al suscriptor suele realizarse con un procedimiento de licitación competitiva. El emisor notifica con anticipación a los posibles suscriptores sobre la venta propuesta y solicita licitaciones que cumplan con las restricciones estipuladas por él mismo. Al preparar una venta propuesta, el emisor divide la suma total que desea recaudar (por ejemplo $10,000) en bonos a los cuales asigna diferentes vencimientos. Por ejemplo, para recaudar $10,000, el emisor podría ofrecer un bono a un año con valor nominal de $2,000, un bono a dos años con valor nominal de $3,000 y un bono a tres años con valor nominal de $5,000. En su vencimiento, el valor nominal de esos bonos será pagado al comprador. Así, en este ejemplo, los emisores tendrían que pagar a los compradores $2,000 al final del año 1, por concepto de capital, y así sucesivamente. La licitación que presenta un suscriptor (al emisor) está formada por tres componentes:

1. Un acuerdo en el que se accede a pagar al emisor el valor nominal de todos los bonos en la fecha de emisión ($10,000 en nuestro ejemplo).
2. Una bonificación pagada al emisor en la fecha de emisión (después veremos algo más acerca de esto).
3. Una tasa de interés anual para cada uno de los bonos que hayan sido incluidos en la propuesta. Estas tasas son conocidas como tasas de cupón y determinan el monto de intereses que el emisor tendrá que pagar a los compradores cada año. Supongamos que, en nuestro ejemplo, el suscriptor ha propuesto las siguientes tasas de cupón.

FECHA DE VENCIMIENTO	TASA (%)
1 año	3
2 años	4
3 años	5

Así, los intereses que serán pagados por el emisor pueden calcularse en la siguiente forma:

$$\text{Año 1} = 2000(.03) + 3000(.04) + 5000(.05) = 430$$
$$\text{Año 2} = 3000(.04) + 5000(.05) = 370$$
$$\text{Año 3} = 5000(.05) = 250$$

[1] Este caso fue formulado inicialmente por el profesor R. Kipp Martin, de la Graduate School of Business (Escuela de administración para graduados) de la Universidad de Chicago.

Históricamente, el costo de interés neto (CIN) es el criterio que emplean con mayor frecuencia los emisores para evaluar licitaciones. El CIN equivale a la suma de los pagos de intereses en el curso de los años por concepto de todos los vencimientos, menos cualquier bonificación ofrecida por el suscriptor. La licitación ganadora será aquella que produzca el CIN más pequeño. El valor del dinero en el tiempo se pasa por alto cuando se trata de calcular el CIN. Aun cuando es cierto que la licitación que produce el menor CIN puede no ser la mejor para el emisor cuando se toman en cuenta los valores presentes, esto carece de importancia para el suscriptor, porque la licitación se evalúa en función del CIN.

La ganancia del suscriptor es la diferencia entre lo que el comprador le paga y lo que él (el suscriptor) paga al emisor. Es decir,

$$\text{Ganancia} = (\text{precio total de venta al público}) - (\text{valor nominal total} + \text{bonificación})$$

Así pues, al preparar una licitación, el suscriptor debe

1. Determinar los montos (de interés) de cupón que el emisor pagará en cada vencimiento, y
2. Estimar, para cada vencimiento, el precio de venta (es decir, el precio de venta del suscriptor al público) de los bonos correspondientes a cada tasa de cupón. (El precio de venta de los bonos no necesariamente tiene que ser igual al valor nominal de los mismos.)

El suscriptor persigue dos objetivos antagónicos. Las tasas de cupón más altas implican que los bonos tienen un precio de venta más elevado para el público y, por consiguiente, que el suscriptor recibirá más dinero, el cual puede usarse ya sea como bonificaciones o como ganancias. Así, las tasas de cupón deben establecerse en un monto suficientemente grande para que, si la licitación es aceptada, el suscriptor obtenga una ganancia razonable. Sin embargo, las tasas de cupón más altas influyen en los intereses que el emisor tendrá que pagar (las tasas de cupón más altas implican más intereses) y también en las bonificaciones que el suscriptor puede ofrecer al emisor. Estos pros y contras de las bonificaciones y los intereses pueden significar que las tasas de cupón más bajas reducirán el costo para el emisor y, en consecuencia, aumentarán las probabilidades de que gane la licitación.

El enfoque que hemos adoptado consiste en incorporar la ganancia del suscriptor como una restricción, minimizando después el CIN (el costo para el emisor) a fin de maximizar las probabilidades de ganar la licitación.

Datos para un escenario específico

La ciudad de Dogpatch se dispone a emitir bonos municipales para recaudar fondos destinados al mejoramiento de la ciudad. Las propuestas selladas serán recibidas hasta las 5:00 p.m. del 7 de febrero de 1998, con la intención de reunir $5,000,000 en bonos fechados el 1 de marzo de 1998. La licitación representará un ofrecimiento del suscriptor que consiste en lo siguiente: (1) pagar $5,000,000 a Dogpatch, (2) pagar una bonificación adicional (especificada) a Dogpatch y (3) incluir un programa de intereses que Dogpatch pagará a los tenedores de bonos. Los intereses son pagaderos el 1 de marzo de 1999, y anualmente a partir de esa fecha. Los bonos vencen (es decir, Dogpatch deberá pagar el valor nominal, sin opción de pago previo) el 1 de marzo en cada uno de los años de vencimiento indicados en la tabla 1 y según los montos que

TABLA 1 Montos nominales de los bonos

AÑO (VENCIMIENTO)	MONTO (MILES $)
2000	250
2001	425
2002	1025
2003	1050
2004	1100
2005	1150

TABLA 2 Estimación del precio de venta (miles $)

VALOR NOMINAL	250	425	1025	1050	1100	1150
Porcentaje	2000	2001	2002	2003	2004	2005
3	245	418	1015	1040	1080	1130
3¼	248	422	1016	1042	1084	1135
3½	250	423	1017	1044	1085	1140
3¾	251	424	1025	1046	1090	1150
4	253	430	1029	1050	1095	1155
4¼	255	435	1035	1055	1096	1160
4½	256	437	1037	1060	1105	1165
4¾	257	440	1038	1062	1110	1170
5	258	441	1040	1065	1115	1175

constan en ella. Es decir, la tabla 1 señala las obligaciones de Dogpatch (en términos de capital) con los tenedores de bonos.

Los bonos serán otorgados al licitador sobre la base del CIN mínimo. Ninguna propuesta será considerada con una tasa de interés mayor que 5% o menor que 3% anual. Los licitadores deberán especificar las tasas de interés en múltiplos de un cuarto de uno por ciento anual. No se considerarán más que tres tasas de interés diferentes (una tasa repetida no se contará como una tasa diferente). Deberá aplicarse la misma tasa a todos los bonos que tengan el mismo vencimiento.

La estimación de los precios de venta de bonos con distintos vencimientos en función de las tasas de cupón es un proceso complicado que depende de los mercados disponibles y de varios parámetros. Para los propósitos de este ejemplo, consideremos solamente los datos de la tabla 2. Observe que el suscriptor puede vender bonos al público a un precio mayor o menor que el valor nominal.

Ejemplo (una licitación de muestra)

Supongamos que un suscriptor ha establecido las tasas de cupón para cada vencimiento que aparecen en la tabla 3. Con estas tasas de cupón, los bonos se venderían al público (vea las estimaciones en la tabla 2) por $5,050,000. Supongamos que la dispersión o requisito de ganancias del suscriptor sea de $8 por $1,000 de valor nominal de los bonos. Para una emisión de $5,000,000 será de $40,000. Así, la bonificación pagada por el suscriptor a Dogpatch por esta licitación es

$$\begin{aligned}\text{bonificación} &= \$5{,}050{,}000 - \$5{,}000{,}000 - \$40{,}000\\ &= \$10{,}000\end{aligned}$$

Preguntas

1. Calcule el CIN de Dogpatch para el ejemplo anterior.
2. Suponga que, como en el caso de la tabla 2, el suscriptor pudiera escoger entre vender un bono 2000 a 4 1/4% por $255,000 o un bono 2000 a 4 1/2% por $256,000. Solamente en lo que se refiere al objetivo de minimizar el CIN (pasando por alto otras posibles restricciones), ¿qué oferta preferiría hacer el suscriptor? Suponga que en ambos casos la ganancia del suscriptor fuera exactamente la misma.
3. En la tabla 2, considere que el vencimiento 2000 sea de 5%. Suponga que usted, como inversionista, pueda tener la seguridad de que el 1 de marzo de 1999 recibirá 5% de interés sobre el dinero invertido. ¿Qué tasa anual de interés compuesto recibiría si hubiera pagado $258,000 por el bono 2000 y aprovechara la oportunidad de inversión anteriormente mencionada, utilizando para ello su primer cobro de intereses?
4. Formule un modelo simbólico de optimización restringida para resolver el modelo del suscriptor. En esa formulación deberá minimizar el CIN de la licitación del suscriptor, cumpliendo con la condición de que éste reciba un margen de $8 por cada $1,000 de monto nominal, con el debido cumplimiento de las demás restricciones citadas. Defina con mucha claridad y concisión cualquier notación que emplee, e indique el propósito de cada restricción en su formulación.
5. Desarrolle un modelo de optimización restringida utilizando una hoja de cálculo y optimícelo después por medio de Solver.
6. Las solicitudes de licitaciones incluyen frecuentemente restricciones adicionales. Suponga que una de esas restricciones consiste en que las tasas de cupón deben ser no decrecientes con el vencimiento. Agregue la(s) restricción(es) necesaria(s) al modelo simbólico para que se cumpla esta condición. No necesita resolverlo con Solver.
7. Suponga a continuación que la diferencia máxima permitida entre las tasas de cupón más alta y más baja es 1%. Agregue la(s) restricción(es) necesaria(s) al modelo simbólico para asegurarse de que se cumpla esta condición. No es necesario que resuelva el modelo con Solver.
8. Tome como referencia su propia formulación para la pregunta 4. Si los bonos (independientemente del vencimiento y el valor del cupón) no pudieran venderse a un precio superior al valor nominal, ¿tendría su formulación una solución factible? ¿Por qué sí o por qué no?
9. Suponga que su formulación para la pregunta 4 tuviera una solución factible. ¿Es posible que por el hecho de haber agregado la(s) restricción(es) de la pregunta 6 o la(s) de la pregunta 7 (o todas en conjunto) la formulación deje de ser factible?

Un pequeño consejo: un riesgo en que se incurre al formular erróneamente un modelo de programación entera de grandes dimensiones e intentar optimizarlo después, es que se puede desperdiciar mucho tiempo de computadora (por supuesto, esto puede ocurrir con cualquier modelo grande). La solución de usted para la pregunta 5 anterior, empleando un modelo correctamente formulado, no debe tardar más de unos cuantos minutos en una PC tipo Pentium.

TABLA 3 Ejemplos de tasas de cupón

VENCIMIENTO	TASA DE CUPÓN (%)	INTERÉS TOTAL (MILES $)
2000	3	15.00
2001	4½	57.375
2002	4¾	194.75
2003	4½	236.25
2004	4½	297.00
2005	4½	362.25

Caso práctico Conciliación de flujo de efectivo

En algunas aplicaciones es necesario generar una serie de flujos de efectivo sobre un horizonte de planeación. Por ejemplo, en una demanda por lesiones personales, el demandante puede recibir una indemnización para sufragar sus futuros gastos médicos o compensar sus salarios perdidos, o por ambos conceptos. Con frecuencia, las partes en litigio convienen en el pago de una suma global inicial que sea "de valor equivalente" a los flujos de efectivo a través del tiempo. ¿Qué es una suma global equivalente? El demandante, en su afán por maximizar la magnitud del pago, argumenta que se requiere una suma global considerable porque los intereses futuros serán bajos. En cambio, el demandado replica que las tasas de interés serán altas y, por tanto, que se requiere una suma global más reducida.

Una posible solución consiste en comprar una cartera de bonos calculando que el rendimiento de los mismos satisfaga el flujo de efectivo requerido. Los bonos ofrecen un pago anual garantizado (determinado por la tasa de cupón) y su valor nominal al vencimiento. De ese modo se puede saber con claridad cuánto aportará cada uno de los bonos para completar el flujo de efectivo deseado. El precio actual de los bonos también es un dato conocido, de manera que el "modelo de pago global" se convierte así en un modelo en el cual el objetivo es encontrar la cartera de bonos de menor costo que satisfaga el flujo de efectivo previamente calculado.

Es razonable concebir muchos modelos de planeación de fondos de pensiones como modelos de conciliación de flujo de efectivo. En este modelo, una empresa o un sindicato tiene la obligación de satisfacer los requerimientos de efectivo de un fondo de pensiones sobre un horizonte de planeación determinado. La meta es comprar al mínimo costo una cartera de bajo riesgo que genere un flujo de ingresos equivalente a los requisitos de flujo de efectivo del plan de pensiones.

Considere el siguiente modelo de flujo de efectivo que, aunque pequeño, se apega a la realidad en sus conceptos. Los requisitos de efectivo (en millones) para los próximos cinco años aparecen en la tabla 1.

El comité de inversiones está considerando cinco tipos de inversión de bajo riesgo: un fondo del mercado de dinero asegurado que paga una tasa anual de 5%, y los cuatro tipos de bonos AAA descritos en la tabla 2.

Suponga que todas las transacciones de efectivo relacionadas con las inversiones debieran realizarse el 1 de enero de cada año. La tabla 3 muestra los flujos de efectivo correspondientes a cada bono.

Considere usted que, en el año de vencimiento del bono, el rendimiento es igual a la suma del cupón más el valor nominal de dicho bono. Observe también que el bono 3 en realidad es un bono de cupón cero; es decir, que no paga intereses antes de la fecha de vencimiento.

TABLA 1 Requisitos de efectivo

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004
Requisito de efectivo	10	11	12	14	15

TABLA 2 (Valores en millones $)

BONO	COSTO ACTUAL	CUPÓN (ANUAL)	AÑOS PARA VENCIMIENTO	VALOR NOMINAL
1	.97	.04	1	1.00
2	.947	.05	2	1.00
3	.79	.00	3	1.00
4	.829	.03	4	1.00

TABLA 3 (Valores en millones $)

BONO	2000	2001	2002	2003	2004
1	−.970	1.040			
2	−.947	.050	1.050		
3	−.790	.000	.000	1.000	
4	−.829	.030	.030	.030	1.030

En la mayoría de los modelos formulados para el balance de flujos de efectivo se contempla también la oportunidad de obtener préstamos. En este modelo, suponga que los administradores del fondo de pensiones pueden solicitar en préstamo todo el efectivo que deseen, a una tasa anual de 13%. Solamente se conceden préstamos a un año; es decir, un préstamo otorgado en el año 2000 deberá pagarse en 2001. Sin embargo, se puede obtener de inmediato otro préstamo a un año.

En el mundo real, los flujos de efectivo (tanto de ingresos como de egresos) se producen en diferentes fechas durante el año. En el modelo se supone que:

A. Todos los flujos de ingresos (réditos de los bonos, dinero invertido en el fondo de mercado de dinero y los intereses que estos fondos reditúan, fondos obtenidos en préstamo durante el año considerado, y la suma global original) estarán disponibles el 1 de enero por la mañana.
B. Todos los flujos de egresos de efectivo (el efectivo requerido por el fondo de pensiones, el pago de deudas e intereses del año anterior, los depósitos en la cuenta del mercado de dinero) deberán efectuarse el 1 de enero por la tarde.

Estas suposiciones permiten mantener una relación apropiada entre los distintos flujos de efectivo. Por ejemplo:

A. En el año 2000, el flujo de egresos de efectivo que requiere el fondo de pensiones, además de cualquier compra de bonos o depósito de dinero en la cuenta del mercado de dinero, deberá provenir del pago de la suma global original o de fondos obtenidos en préstamo en el año 2000.
B. La deuda y los intereses generados por los préstamos contraídos en el año 2000 podrán ser pagados solicitando fondos en préstamo en el 2001.

Preguntas

1. Trace la gráfica de la curva de rendimiento para los cuatro bonos descritos en la tabla 2. Para lograrlo tendrá que determinar primero la tasa de interés capaz de hacer que el valor presente de los flujos de efectivo generados por cada bono sea igual a cero. Para lograrlo puede usar una calculadora financiera o la función IRR() de Excel. Trace ahora la gráfica de la tasa de interés como una función del vencimiento del bono, para cada uno de los cuatro bonos.
2. Comente acerca de la forma general de la función cuya gráfica trazó en la pregunta 1. ¿Qué le sugiere a usted esta forma en relación con las preferencias y expectativas de los prestamistas? ¿Y con las de los deudores? ¿Es forzoso que la curva de rendimiento tenga siempre esta forma? ¿Qué preferencias

y expectativas de los prestamistas y deudores podrían hacer que la curva adoptara otra forma?

3. Suponga que la meta de usted fuera minimizar el pago de la suma global original. Formule una PLEM para resolver este modelo. Suponga que solamente será posible comprar un número entero de bonos y que esas compras deberán realizarse en enero de 2000. En el modelo formal, defina usted las variables de decisión en la siguiente forma:

   L = suma global inicial requerida
   B_i = suma obtenida en préstamo durante el año i
   M_i = suma invertida en el fondo del mercado de dinero durante el año i
   X_i = número de bonos tipo i comprados en el 2000
   C_i = efectivo no utilizado durante el año i

   Suponga ahora que no será posible obtener fondos en préstamo en 2004 durante el quinto año. Ahora tendrá usted que incluir en su formulación una restricción de balance, señalando que las fuentes de fondos deberán producir cada año un valor equivalente al uso de dichos fondos.
4. En el mundo real, los datos de la tabla 1 serían estimaciones de requerimientos futuros, pues éstos en general no se conocen con certeza. ¿Qué otras suposiciones significativas se establecieron al crear este modelo?
5. ¿Existirá siempre una respuesta factible para los modelos generales, como el que formulamos en la pregunta 3? Es decir, examine el comportamiento del modelo de la pregunta 3 bajo cualquier conjunto de demandas de efectivo y tasas de rendimiento. ¿Tiene que existir siempre una solución factible? Explique su respuesta.
6. Utilice Solver para optimizar el modelo que formuló usted en la pregunta 3.
7. Resuelva el modelo aplicando el siguiente procedimiento heurístico:
   (a) Resuelva el modelo de la pregunta 3 como una PL.
   (b) Redondee el número de bonos al entero siguiente mayor.
   (c) Fije las variables enteras en los niveles señalados en (b) y optimice el modelo como una PL.
8. Calcule el valor de la razón siguiente:

   VO de la pregunta 7(c)/VO de la pregunta 6

   ¿Espera usted que esta razón sea mayor o menor que 1? ¿Por qué? ¿Qué sugiere el valor de esta razón acerca de la resolución de modelos reales (es decir, mucho mayores) equivalentes del flujo de efectivo?
9. ¿Qué interpretación da usted a los precios sombra producidos por la solución de PL en la pregunta 7(a)?
10. Haga un comentario acerca del siguiente enunciado: “El medio adecuado para minimizar la suma global inicial consiste en comprar únicamente el bono que produzca la tasa de rendimiento más elevada”.
11. Comente el siguiente enunciado: “Si la tasa de rendimiento sobre el fondo del mercado de dinero es mayor que la tasa de rendimiento de todos los bonos, entonces existe una solución óptima en la cual el fondo del mercado de dinero es la única inversión utilizada”.

Referencias

Ranga Anbil, Eric Gelman, Bruce Patty y Rajan Tanga, “Recent Advances in Crew-Pairing Optimization at American Airlines”, en *Interfaces*, 21, núm. 1 (1991), págs. 62-74.

Thomas Spencer III, Anthony Brigandi, Dennis Dargon y Michael Sheehan, “AT&T’s Telemarketing Site Selection System Offers Customer Support”, en *Interfaces*, 20, núm. 1 (enero-febrero de 1990).

CAPÍTULO

8

Optimización no lineal

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN

Administración de activos y pasivos en Pacific Financial Asset Management Company

La determinación de cuáles inversiones son convenientes depende de la situación particular del inversionista. Una persona que está a punto de jubilarse aceptaría menos riesgo que una muchacha que empieza a apartar dinero para jubilarse dentro de 40 años. Otra diferencia es que los inversionistas que deben pagar impuestos sobre sus ganancias deben considerarse como un caso diferente de los inversionistas institucionales, como las compañías de seguros o los fondos de pensiones, los cuales suelen estar libres de impuestos. La ponderación de los riesgos y recompensas de diferentes estrategias de inversión depende de las circunstancias de cada individuo.

Para construir un modelo de cartera de inversiones más personalizado, Pacific Financial Asset Management Company (PFAMC) desarrolló un nuevo modelo que amplió el modelo financiero tradicional para activos de Markowitz y Sharpe, a fin de incluir tanto activos como pasivos. La cuestión crítica consiste en equilibrar los riesgos y recompensas de las decisiones estratégicas de inversión de acuerdo con los movimientos de los pasivos proyectados. El modelo desarrollado por PFAMC es un sistema de optimización no lineal. El propósito del sistema que integra activos y pasivos es la preservación de la riqueza de la firma, medida por el valor de mercado de los activos menos el valor presente de los pasivos. El modelo se ha utilizado en una computadora personal para que pueda ser interactivo con el inversionista y, de esa manera, se adapte a las circunstancias y a las preferencias de riesgo de cada individuo. Por ejemplo, los grandes inversionistas institucionales tienen que decidir cuánto dinero habrán de invertir en cada una de las siguientes categorías generales de activos: acciones, bonos, bienes raíces, etc. Ésta es la decisión más importante que deberá tomar en su planeación estratégica.

Aun cuando este nuevo enfoque requiere más información, sus recomendaciones están más adaptadas a las necesidades y circunstancias del inversionista. Tanto PFAMC como sus clientes se han mostrado muy complacidos con los resultados. (Véase Mulvey.)

8.1 INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS DE OPTIMIZACIÓN NO LINEALES

Las funciones o relaciones matemáticas que intervienen en muchos problemas empresariales y económicos no son totalmente lineales. De hecho, tal vez podemos decir que los problemas del mundo real que encajan en el estricto molde de la linealidad son la excepción y no la regla. Pongamos un ejemplo sencillo.

En un modelo lineal, suele suponerse que el precio es una constante dada, digamos p, y las ventas es la cantidad por venderse es una variable x supuestamente independiente del precio. Por consiguiente, el ingreso se expresa como px, y decimos que es proporcional al precio. Sin embargo, el precio puede ser en realidad una variable, y la cantidad vendida (la demanda) puede ser dependiente del precio. Esta dependencia se expresa como ventas $= f(p)$, donde f es una función específica (no constante) de p. Así, el ingreso estaría representado por

$$\text{ingreso} = \text{precio} \times \text{ventas} = p \times f(p)$$

que es no lineal en la variable p. En este caso, un modelo para encontrar el nivel de precios que maximice los ingresos sería un modelo no lineal.

En general, algunas razones importantes (y no necesariamente distintivas) de la no linealidad son: (1) relaciones no proporcionales (en el ejemplo anterior, el ingreso no es proporcional al precio, ya que, según la forma específica de $f(p)$, el precio puede aumentar y el ingreso disminuye); (2) relaciones no aditivas (por ejemplo, cuando se unen dos sustancias químicas, el volumen resultante no es necesariamente la suma de los volúmenes de las dos sustancias); y (3) las eficiencias o ineficiencias de escala (por ejemplo, cuando demasiados trabajadores tratan de sembrar en la misma huerta, empiezan a estorbarse entre sí y el rendimiento por trabajador disminuye, en lugar de mantenerse constante)[1]. En suma, cualquier número de relaciones físicas, estructurales, ideológicas, económicas y lógicas puede dar lugar a la aparición de las características de no linealidad en un modelo.

Conviene repetir desde un principio que, aunque los fenómenos no lineales son comunes, la optimización de modelos no lineales es mucho más difícil que la de modelos lineales. Por ejemplo, a diferencia de la PL, no puede usted suponer que el procedimiento de optimización no lineal de Solver logrará encontrar siempre la solución óptima para todos los modelos no lineales. Agregue a esta dificultad el hecho de que, en muchos contextos, los modelos lineales proporcionan *buenas aproximaciones* a los modelos no lineales, y entenderá por qué son tan populares los modelos lineales, como la PL.

Como sabemos, un modelo no es el mundo real, sino una representación abstracta de la realidad. Lo importante para quien formula el modelo es saber cuándo una versión linealizada puede proporcionar una representación *adecuada* del mundo no lineal. La respuesta a esa pregunta de criterio se obtiene con la experimentación y con mucha experiencia, y aun así, sólo de un modo imperfecto y a menudo sin consenso. En este capítulo queremos estudiar las situaciones en las que se considera necesario el uso de modelos de programación no lineal. Nuestro objetivo es llegar a entender cuáles son los instrumentos y conceptos que se requieren para manejar modelos de programación no lineal y, como se hará evidente más adelante, para una comprensión completa del tema hacen falta ciertos conocimientos de cálculo.

Esta parte del capítulo está organizada en la forma siguiente. La sección 8.2 revisa los hechos concernientes a la optimización *no restringida* en diversas variables de decisión. Ofrecemos después una introducción descriptiva y geométrica a la optimización no lineal con restricciones. La sección 8.3 trata de la formulación y solución de PNL (programación no lineal) usando Solver. A continuación definiremos someramente el concepto de los programas cóncavos y convexos, y presentaremos una exposición cualitativa del tipo de problemas no lineales que es posible resolver rutinariamente. Luego, en la sección 8.7, nos ocuparemos de un tipo particular de PNL conocido como modelos *cuadráticos*. Estos modelos tienen amplias aplicaciones en la toma de decisiones financieras; y en las secciones 8.10 y 8.11 presentamos dos ejemplos de modelos cuadráticos para optimización de cartera. En la sección 8.12 nos ocuparemos de la teoría de inventarios, otra aplicación popular de la PNL. Desarrollaremos el modelo clásico de cantidad económica del pedido (CEP) y luego lo ampliaremos con dos ejemplos. En la sección 8.14 concluiremos con algunas notas sobre la aplicación práctica de la PNL.

[1]Observe que esta situación con economías de escala negativas conduce a una relación no proporcional entre el rendimiento total y el número de trabajadores.

8.2 OPTIMIZACIÓN NO RESTRINGIDA CON DOS O MÁS VARIABLES DE DECISIÓN

Consideremos primero el caso con dos variables de decisión, x_1 y x_2. Así, consideramos una función $f(x_1, x_2)$. Para el caso de dos variables de decisión (es decir, dos variables independientes) se usan las derivadas parciales del cálculo para describir óptimos locales o globales. Usaremos la notación f_{x_i} para la primera derivada parcial, $f_{x_i x_i}$ para la segunda derivada parcial y así sucesivamente. Cualquier punto (por ejemplo, los valores de x_1 y x_2) en el que todas las primeras derivadas parciales se anulen se conoce como **punto estacionario.** Tenemos la siguiente *condición necesaria* para la optimalidad.

> En un punto máximo o mínimo local, ambas derivadas parciales deben ser iguales a cero (esto es, $f_{x_1} = f_{x_2} = 0$). Es decir, un punto máximo local o un punto mínimo local siempre es un punto estacionario.

Sin embargo, no todos los puntos estacionarios proporcionan máximos y mínimos. Podemos aplicar lo que se conoce como la condición suficiente de segundo orden (lo cual implica que intervienen las segundas derivadas) para la optimalidad, que es algo más complicada que la condición necesaria. Así, como en el caso de las funciones de una sola variable, se puede aplicar una prueba de primer orden (primera derivada) y de segundo orden (donde intervienen segundas derivadas) para localizar óptimos locales sin restricciones para funciones con más de una variable. Estas pruebas se conocen como **condiciones de optimalidad de primer orden** y **condiciones de optimalidad de segundo orden**. Tome nota de que las condiciones de primer orden son necesarias, mientras que las condiciones de segundo orden son suficientes. Observe también que las condiciones de segundo orden incluyen a las de primer orden (es decir, las condiciones de segundo orden suponen que x_1^*, x_2^* es un punto estacionario).

En ausencia de algunas propiedades adicionales de la función, como la convexidad o la concavidad, un punto óptimo local (a diferencia de uno global) es lo más que podemos aspirar a encontrar en términos generales. La prueba de la primera derivada (la condición necesaria) afirma que los óptimos locales están incluidos entre los puntos estacionarios de la función. La prueba de la segunda derivada (la condición suficiente) nos permite distinguir entre máximos y mínimos locales, y también los puntos que no son ni lo uno ni lo otro.

Para una función diferenciable de n variables, cada punto óptimo local es un punto estacionario. Si se desea garantizar que un punto estacionario es un punto máximo local, por ejemplo, es necesario aplicar condiciones de suficiencia de segundo orden. Si bien es cierto que estos dos tipos de condiciones de optimalidad tienen interés teórico, su *relevancia práctica* es limitada para muchos problemas no lineales con más de dos variables. Las razones de esto son:

1. Hacer que las primeras derivadas parciales sean iguales a cero produce un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. A menos que este sistema sea lineal (es decir, que la función original fuera cuadrática), no será fácil encontrar soluciones. Tal vez sea imposible lograrlo a mano.
2. Las condiciones de suficiencia de segundo orden son muy complicadas, pues requieren la evaluación de determinantes de algunos elementos de la matriz de segundas derivadas parciales. De hecho, aun en el caso de una o dos variables de decisión, si la función f es suficientemente complicada, puede no ser posible resolver a mano las condiciones de optimalidad y, por consiguiente, este método no resulta factible en términos generales.

Por estas razones se han desarrollado paquetes de *software* especializados para optimización, como Solver, que permiten encontrar óptimos locales de funciones no lineales de n variables (donde n es cualquier entero ≥ 1). Con frecuencia, esos paquetes se basan en el comportamiento ascendente (o descendente).[2] Es decir, para un problema de maximización, se elige un punto inicial, esto es, un conjunto de valores para las n variables de decisión, y luego se determina una dirección ascendente mediante la aproximación numérica de la primera derivada de la función objetivo en ese punto inicial. Intuitivamente, para la optimización no restringida, el método avanza desde el punto inicial siguiendo una línea en dirección ascendente, hasta el punto

[2] El método ascendente que utiliza Solver para optimizar modelos no lineales es totalmente distinto del método símplex que emplea para optimizar modelos PL.

más alto al cual se pueda llegar sobre esa recta. Entonces se define una nueva dirección ascendente y continúa el procedimiento. El método termina cuando las primeras derivadas parciales aproximadas se acercan lo suficiente a cero. El punto así obtenido siempre será un "pico local". La búsqueda de otros máximos locales se realiza iniciando de nuevo el paquete de optimización para que comience en un punto diferente.

La descripción anterior revela el principal papel de las condiciones necesarias de primer orden en los optimizadores no lineales. Se aplican en forma indirecta, por cuanto sirven como un *criterio de terminación* para los métodos de cómputo de dirección ascendente empleados en la búsqueda de óptimos locales. Las condiciones de suficiencia de segundo orden, para el problema general de n variables, tienen un interés principalmente teórico y rebasan el carácter introductorio de este capítulo.

En la conclusión de esta sección mencionamos el otro resultado importante cuando se maximiza una *función cóncava.* Para este tipo de función, cualquier punto estacionario es un punto máximo global (para una función convexa, cualquier punto estacionario es un punto mínimo global). Mientras en el caso general una solución optimizada podría ser un punto máximo o un punto mínimo local, o ninguno de los dos, en el caso cóncavo tenemos la seguridad de que cualquier solución será un punto máximo global. Este hecho es importante al optimizar modelos cuadráticos no lineales, un tema que veremos en la sección 8.8.

8.3 OPTIMIZACIÓN NO LINEAL CON RESTRICCIONES: UNA INTRODUCCIÓN DESCRIPTIVA Y GEOMÉTRICA

Hasta este punto, la optimización no lineal se ha enfocado en la optimización *no restringida.* Más comúnmente, en un ambiente de toma de decisiones orientado a la administración, nos interesa optimizar una función objetivo sujeta a restricciones. Estas restricciones adoptan la forma de igualdades y/o desigualdades matemáticas, como en el caso de la programación lineal, salvo que ahora no se supone condición alguna de linealidad. Así, el *modelo general de programación matemática* puede escribirse en términos simbólicos como se indica a continuación.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & & \text{(función objetivo)} \\
\text{s.a. } g_1(x_1, \ldots, x_n) = b_1 & & \\
\quad g_2(x_1, \ldots, x_n) = b_2 & & \\
\quad \vdots & & (m \text{ restricciones de igualdad}) \\
\quad g_m(x_1, \ldots, x_n) = b_m & & \\
\quad h_1(x_1, \ldots, x_n) \le r_1 & & \\
\quad h_2(x_1, \ldots, x_n) \le r_2 & & \\
\quad \vdots & & (k \text{ restricciones de desigualdad}) \\
\quad h_k(x_1, \ldots, x_n) \le r_k & &
\end{array}
$$

ANÁLISIS GRÁFICO

Igual que con la PL, podemos usar la geometría de dos dimensiones para captar mejor este problema. Por ejemplo, usemos el análisis gráfico para resolver este problema específico:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & x_1 - x_2 \\
\text{s.a.} & -x_1^2 + x_2 \ge 1 \\
 & x_1 + x_2 \le 3 \\
 & -x_1 + x_2 \le 2 \\
 & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

Observe que todo en este modelo es lineal, excepto la primera restricción. Se dice que un modelo no es lineal cuando por lo menos una de las funciones de restricción o la función objetivo, o ambas, es no lineal. Por tanto, es apropiado decir que el modelo anterior es una **programación no lineal (PNL)**.

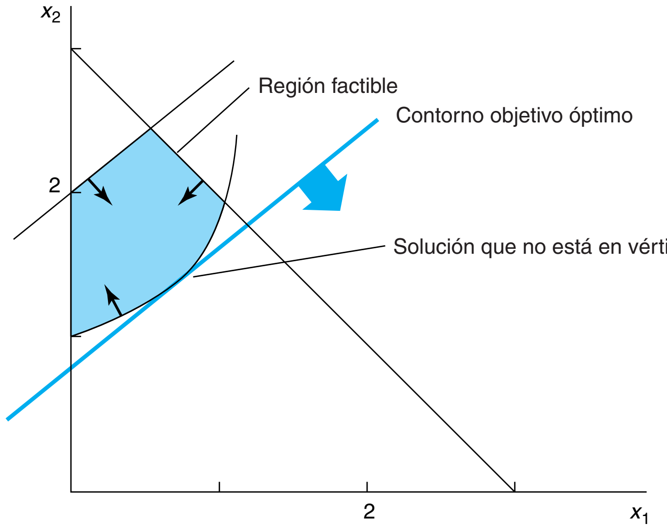


FIGURA 8.1
Solución gráfica para el modelo no lineal

La región factible A fin de usar el método gráfico para resolver este problema, procederemos como lo hicimos en la programación lineal. Trazaremos primero el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente *todas* las restricciones. Igual que en el caso de la PL, esta serie de puntos se llama el *conjunto restringido* o la *región factible*. Este conjunto representa las decisiones permisibles. Para encontrar una decisión permitida que maximice la función objetivo, buscamos el *contorno* “más ascendente” (o sea, el de mayor valor) que todavía toque algún punto del conjunto restringido. Ese punto de contacto será una solución óptima (que con frecuencia se llama simplemente *solución*) del problema. La figura 8.1 muestra la solución gráfica del problema antes presentado.

En la figura 8.1 se puede ver que la restricción no lineal presenta curvatura en el límite del conjunto restringido. El conjunto factible ya no es un poliedro (es decir, una figura de caras planas, definida por desigualdades lineales) como en el caso de la PL, y la solución óptima no se encuentra en un vértice. Recuerde que en el caso de la PL, el análisis gráfico nos permitió identificar las restricciones activas en un vértice óptimo, y la *solución exacta* se obtuvo después resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. En general, este método no funciona para el caso no lineal. Como se aprecia en la figura 8.1, sólo existe una restricción activa.

Óptimos que no están en vértice Otro ejemplo de PNL aparece en la figura 8.2, que muestra un modelo *hipotético* de maximización restringida con desigualdad no lineal. En esta figura, todas las restricciones son lineales y, por tanto, su conjunto es un poliedro. Sin embargo, la función objetivo es no lineal y, una vez más, vemos que la solución no se presenta en un vértice. De hecho, la solución para algunas funciones objetivo no lineales puede no estar ni siquiera en el límite de la región factible. Por supuesto, *podría* aparecer una solución en un vértice, pero lo importante es que esto no representa una propiedad garantizada, como en el modelo lineal.

Este hecho tiene implicaciones algorítmicas importantes. Significa que, en el caso no lineal, no podemos usar un método de “búsqueda en vértices”, como el método símplex usado por Solver para encontrar una solución en los modelos de PL. Con esta restricción se complica enormemente el procedimiento de resolución. En las tres próximas secciones trataremos el tema de los procedimientos de resolución.

COMPARACIONES ENTRE LA PL Y LA PNL

Hay varios paralelismos de interés entre la PL y la PNL. Por ejemplo, los cuatro enunciados siguientes son válidos *con cualquier tipo de modelo.*

1. Incrementar (disminuir) el LD de una restricción $\leq$ ($\geq$) suaviza la restricción. Esto no puede contraer el conjunto restringido, pero puede expandirlo.

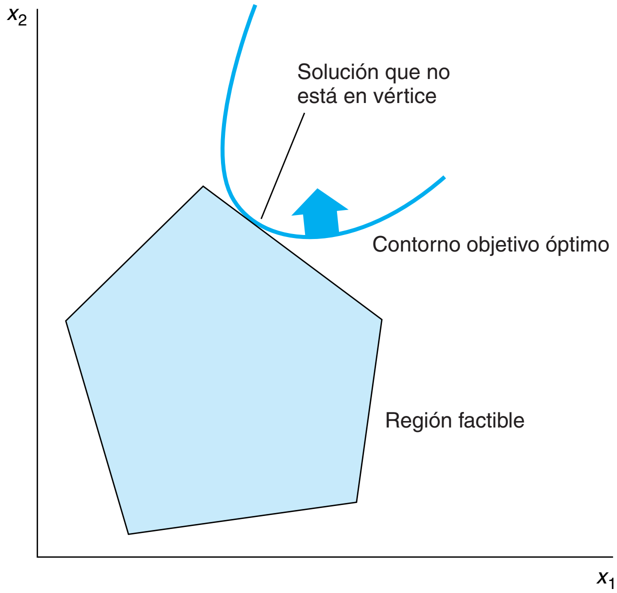


FIGURA 8.2

Solución que no está en vértice de una PNL

2. Aumentar (reducir) el LD de una restricción $\geq$ ($\leq$) intensifica la restricción. Esto no puede expandir el conjunto restringido, pero sí puede contraerlo.
3. Suavizar una restricción no puede perjudicar el valor objetivo óptimo, pero sí puede beneficiarlo.
4. Intensificar una restricción no puede beneficiar al valor objetivo óptimo, pero puede perjudicarlo.

Otro concepto común de la PL y la PNL es el concepto de los cambios que se producen en el valor de la función objetivo (VO) cuando cambia el lado derecho, manteniendo fijos todos los demás datos. En la exposición de la programación lineal definimos (véase el capítulo 5) el *precio sombra* en una restricción específica como *la razón de cambio del VO cuando el LD de esa restricción aumenta,* manteniendo iguales todos los demás datos. En el contexto de PNL, esta razón de cambio se conoce a menudo como el **multiplicador de Lagrange** para distinguirlo del precio sombra, pero el significado es el mismo.

El multiplicador de Lagrange Sin embargo, hay una propiedad importante del precio sombra asociado a una PL que los multiplicadores de Lagrange no comparten generalmente en el contexto de PNL. Recuerde que en la PL, el precio sombra es una constante para una gama de valores del LD del interés. Se puede mostrar fácilmente que, en el contexto de PNL, esta propiedad no es válida en forma general. A manera de ejemplo, considere la sencilla PNL siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x^2 \\ \text{s.a.} \quad & x \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Para maximizar x^2, queremos que x sea lo más grande posible. Así, la solución óptima es $x^* = b$, y el valor óptimo de la función objetivo, VO, es $(x^*)^2 = b^2$. De esta manera podemos ver que el VO es una función de b. Es decir,

$$\text{VO}(b) = b^2$$

Por nuestros conocimientos de cálculo elemental, sabemos que la tasa de cambio de esta función cuando b aumenta es la derivada de VO(b), es decir, $2b$. En otras palabras, el multiplicador de Lagrange *no* es constante para toda una gama de valores del LD, b. En realidad, varía continuamente junto con b, tal como cabría esperarse.[3]

[3]Podemos decir brevemente que este ejemplo sirve también para ilustrar que el valor óptimo de un problema de maximización de PNL puede mostrar rendimientos marginales crecientes. Esto nunca puede pasar en PL (es decir, el VO de un modelo de maximización PL siempre es cóncavo y, por tanto, muestra rendimientos marginales no crecientes).

Soluciones locales versus soluciones globales Otra diferencia importante entre la PL y la PNL se refiere a la confrontación entre las *soluciones globales* y las *locales.* En una PL, siempre es válido que no puede existir una solución local que no sea también global. Esto no suele ser válido con los problemas de programación no lineal en general. En otras palabras, esos problemas pueden tener soluciones tanto locales como globales. Esto se ilustra con el modelo hipotético de maximización de la figura 8.3. Allí el punto identificado como "Max local" se conoce como *máximo restringido local* porque el valor de la función objetivo en ese punto no es menor que en los puntos factibles vecinos.

El punto identificado como "Max global" se conoce como *máximo restringido global* porque el valor de la función objetivo en este punto no es menor que en *todos los demás* puntos factibles. Como en el caso de la optimización no restringida, ciertas condiciones de convexidad y concavidad deben satisfacerse para garantizar que un óptimo restringido local también sea global. Estas propiedades serán definidas en la sección 8.6. Si no se presentan esas propiedades, generalmente *no* es posible saber si una solución dada es un máximo local o global.

PNL CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD

Muchos problemas no lineales en administración y economía tienen la siguiente forma:

$$\textbf{Maximizar (o minimizar) } f(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\text{s.a. } g_i(x_1, \ldots, x_n) = b_i,\ i = 1, \ldots, m (m < n)$$

Es decir, la meta consiste en maximizar o minimizar una función objetivo de n variables, sujeta a un conjunto de $m(m < n)$ restricciones de *igualdad.* Veamos tres ejemplos.

Ejemplo 1 Un fabricante tiene la posibilidad de elaborar un producto en cualquiera de las dos máquinas. Suponga que x_1 es la cantidad fabricada en la máquina 1 y x_2 la cantidad fabricada en la máquina 2. Sea

$$a_1x_1 + b_1x_1^2 = \text{costo de producción en la máquina 1}$$
$$a_2x_2 + b_2x_2^2 = \text{costo de producción en la máquina 2}$$

Encuentre los valores de x_1 y x_2 con los cuales se minimiza el costo total, respetando el requisito de que la producción total alcance cierto valor específico, por ejemplo R. La formulación de este problema es

$$\text{Min } a_1x_1 + b_1 x_1^2 + a_2x_2 + b_2x_2^2$$
$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 = R$$

Ejemplo 2 Supongamos que p_1, p_2 y p_3 son los precios de tres bienes y sea B el presupuesto disponible (es decir, B es una constante específica). Sean s_1, s_2 y s_3 constantes previamente determinadas y representemos con $x_1^{s_1} + x_2^{s_2} + x_3^{s_3}$ la "utilidad derivada" de consumir x_1 uni-

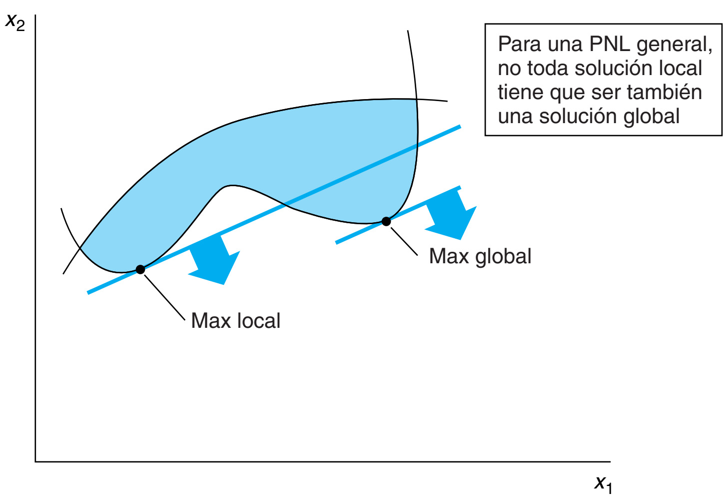


FIGURA 8.3
Soluciones locales y globales

dades del bien 1, x_2 unidades del bien 2 y x_3 unidades del bien 3. Encuentre la mezcla de consumo que maximice la utilidad, respetando la restricción presupuestaria. La formulación de este problema es

$$\text{Max } x_1^{s_1} + x_2^{s_2} + x_3^{s_3}$$
$$\text{s.a. } p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = B$$

Ejemplo 3 Considere el siguiente problema

$$\text{Max } x_1 - x_2$$
$$\text{s.a. } -x_1^2 + x_2 = 1$$

El análisis geométrico se ilustra en la figura 8.4. Dicho análisis muestra que, en la solución óptima, el contorno de la función objetivo es tangente a la restricción de igualdad. Sugiere también que la solución óptima es aproximadamente $x_1^* = 0.5$ y $x_2^* = 1.25$. Esto se confirma con la versión de este modelo en la hoja de cálculo ilustrada en la figura 8.5, la cual proporciona la solución óptima.

8.4 USO DE SOLVER PARA MODELOS DE PNL (PROGRAMACIÓN NO LINEAL)

En nuestro estudio de la programación lineal vimos que es muy natural construir modelos lineales con restricciones de desigualdad también lineales y optimizarlos con Solver. Esta herramienta nos permite asimismo introducir y optimizar con facilidad un modelo que puede contener

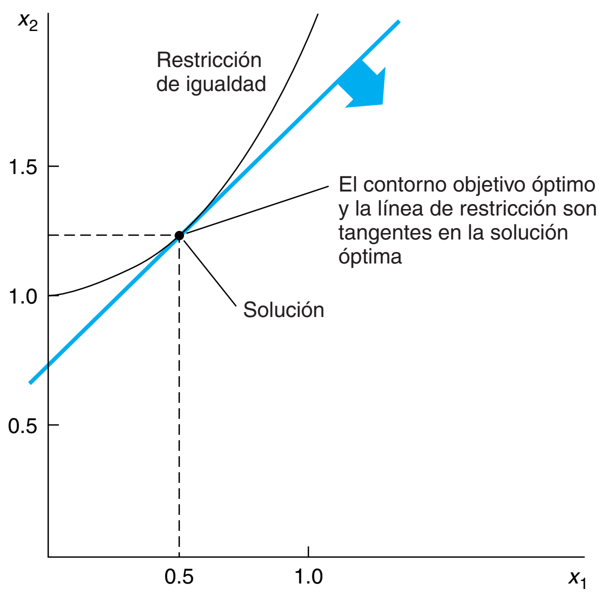


FIGURA 8.4
Solución gráfica del ejemplo 3

	A	B	C	D	E	F	G
1		Ejemplo 3	X1	X2	Rédito		
2		Decisiones:	0.50001	1.25001	-0.75		
3		Restricción:	-0.25001	1.25001	1	=1	
4							

	A	B	C	D	E	F	G
1		Ejemplo 3	X1	X2	Rédito		
2		Decisiones:	0.500007	1.250	=C2-D2		
3		Restricción:	=-C2*C2	=D2	=SUMA(C3:D3)	1	
4							

FIGURA 8.5
Solución de Solver para el ejemplo 3

funciones objetivo no lineales o restricciones no lineales, o ambas. Sin embargo, recuerde que Solver utiliza métodos de solución totalmente diferentes para las formulaciones PL y PNL. Para la optimización de PL, Solver usa el método símplex a fin de desplazarse de uno a otro vértice dentro de la región factible. Para la optimización de PNL, Solver usa un método ascendente basado en un procedimiento de "búsqueda de gradiente". En resumen, los pasos del procedimiento son los siguientes: primero, el procedimiento encuentra una solución factible; es decir, un conjunto de valores de la variable de decisión que satisfagan las restricciones. Después, a partir de ese punto inicial, se calcula la dirección que permite mejorar más rápidamente el VO. El movimiento, por medio de cambios en los valores de las variables de decisión, se sigue realizando en esa dirección hasta encontrar la frontera de una restricción o hasta que el VO ya no pueda mejorar más. A continuación se calcula una nueva dirección a partir de ese punto y se repite el proceso. Esto prosigue hasta que ya no es posible lograr mejoría alguna en cualquier dirección, con lo cual termina el procedimiento.

Como se indica en el apéndice sobre Solver, no es indispensable tener una función objetivo; si no se plantea ninguna, Solver tratará de identificar una solución factible. Así pues, Solver puede usarse tanto para probar la factibilidad del conjunto restringido como para resolver sistemas de ecuaciones lineales o no lineales. Tampoco es necesario incluir restricción alguna, ya que Solver puede usarse para la optimización no restringida de modelos de PNL.[4]

Como lo advertimos en el caso de la optimización de PL, Solver puede incurrir en errores de análisis numérico porque la precisión de la aritmética de computadora es finita. Esto constituye un problema sobre todo en la optimización de modelos altamente no lineales que incluyen números dentro de una amplia gama de valores. Si los números más pequeños y más grandes de su modelo difieren en más de siete órdenes de magnitud aproximadamente, entonces el procedimiento de resolución de Solver puede conducir a estos errores. Si marca el cuadro de opciones de Solver "Usar escala automática", podrá evitar esos errores en muchos casos. Sin embargo, esa opción *no* garantiza que será suprimido este problema en todos los casos. Para evitar este problema desde el principio, es mejor modificar manualmente la escala de los números que son muy grandes o muy pequeños. Vea el apéndice sobre Solver para más explicaciones y ejemplos del cambio de escala.

8.5 EJEMPLO DE MODELOS NO LINEALES CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD

Para ilustrar los conceptos de PNL, en el resto de esta sección presentaremos varios ejemplos más. Éstos incluyen el caso más general de restricciones de desigualdad.

Gastos óptimos de mercadotecnia El presupuesto diario promedio para la publicidad de un restaurante es de \$100, y se asigna en su totalidad a anuncios en los periódicos y comerciales por la radio. Suponga que

x_1 = número promedio de dólares diarios gastados en anuncios en los periódicos
x_2 = número promedio de dólares diarios gastados en comerciales de radio

En términos de estas cantidades, el costo anual total que paga el restaurante por su departamento de publicidad se ha estimado en

$$\text{costo} = C(x_1, x_2) = 20{,}000 - 440x_1 - 300x_2 + 20x_1^2 + 12x_2^2 + x_1x_2$$

Encuentre la asignación de presupuesto que minimice este costo anual total.

El modelo que vamos a resolver es

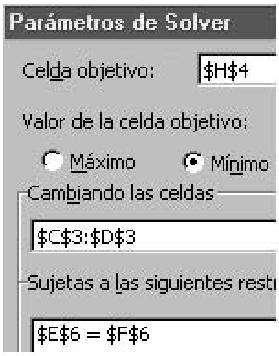
$$\text{Min } 20{,}000 - 440x_1 - 300x_2 + 20x_1^2 + 12x_2^2 + x_1x_2$$
$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 = 100 \text{ y } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

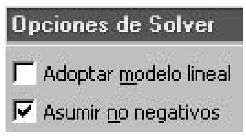
La versión de este modelo optimizada por Solver se presenta en la figura 8.6, junto con su informe de sensibilidad. El multiplicador de Lagrange indica que la rapidez de incremento ini-

[4]La optimización no restringida sólo tiene sentido en el caso de modelos no lineales.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Ejemplo de gastos de mercadotecnia						
2			AnunciosPrensa	AnunciosRadio	(AnunciosPrensa)^2	(AnunciosRadio)^2	AnunciosPrensa*AnunciosRadio	
3		Decisiones:	$ 39.355	$ 60.645	1548.8	3677.8	2386.7	Costo anual
4		20,000	-440	-300	20	12	1	$ 61,987.10
5					Total diario	Presupuesto		
6		Gastos	$ 39.355	$ 60.645	$100.00	=100		
7								

Celda	Fórmula
H4	= B4+SUMAPRODUCTO(C3:G3,C4:G4)
E6	= SUMA(C6:D6)





Microsoft Excel 8.0a Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Final	Gradiente reducido
$C$3	Decisiones: AnunciosPrensa	$ 39.355	0.00
$D$3	Decisiones: AnunciosRadio	$ 60.645	0.00

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Final	Multiplicador de Lagrange
$E$6	Gastos Total diario	$100.00	1,194.8

FIGURA 8.6

Gastos óptimos de mercadotecnia

cial del costo anual total del departamento de publicidad sería de $1,195 aproximadamente por cada dólar adicional de presupuesto gastado en anuncios.

INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE Y LOS GRADIENTES REDUCIDOS

Los multiplicadores de Lagrange tienen una interpretación económica interesante e importante. Como antes dijimos, estos multiplicadores en PNL tienen casi la misma interpretación que los precios sombra en la PL. En otras palabras, en el punto óptimo, el valor del multiplicador de Lagrange es la *tasa de cambio* instantánea del VO, el valor óptimo de la función objetivo, cuando el i-ésimo LD, b_i, aumenta, permaneciendo iguales todos los demás datos. Otra forma de expresar este concepto en términos de economía, es que el i-ésimo multiplicador de Lagrange refleja el valor marginal del i-ésimo recurso. Por consiguiente, sus unidades son

$$\frac{\text{unidades de la función objetivo}}{\text{unidades del LD de la restricción } i}$$

Recuerde el ejemplo 1, en el cual un fabricante deseaba minimizar el costo total de un producto, es decir, el objetivo estaba expresado en dólares, bajo la restricción de que la producción total, digamos en toneladas, de dos productos debía ser igual a R. Así pues, las unidades del multiplicador de Lagrange para esta restricción son dólares por tonelada, y el valor de la misma es el costo marginal instantáneo de producción correspondiente a la R-ésima unidad.

Sin embargo, en nuestras exposiciones anteriores vimos que los números correspondientes a la sensibilidad tienen un significado un poco más restringido que en el Informe de sensibilidad de PNL. Para modelos de PNL, el multiplicador de Lagrange de una restricción es la tasa de cambio *inicial* (es decir, instantánea) en el valor óptimo de la función objetivo, cuando el LD de la restricción aumenta. Igual que los precios sombra en la PL, un multiplicador de Lagrange positivo indicaría que al aumentar el LD se "beneficiaría" inicialmente el valor de la función objetivo en un modelo Max, e inicialmente se "perjudicaría" el valor de la función objetivo en un modelo Min. Un multiplicador de Lagrange negativo indicaría que al aumentar el LD se "perjudicaría" inicialmente el valor de la función objetivo en un modelo Max, y se "beneficiaría" inicialmente el valor de la función objetivo en un modelo Min. *Beneficiar* significa un aumento en el objetivo si es un modelo Max, y una disminución en el objetivo si es un modelo Min. En forma similar, *perjudicar* significa una disminución en el objetivo de un modelo Max y un aumento del objetivo en un modelo Min. Sin embargo, a diferencia de lo que aprendimos en el caso de la programación lineal, no es posible decir sobre qué rango de aumento o disminución del LD es válido dicho multiplicador de Lagrange. De hecho, en el caso más ordinario, el propio multiplicador de Lagrange cambia en cuanto se modifica el LD, por lo cual el incremento y el decremento permisibles son cero. Sin embargo, esto no les impide utilizar el multiplicador de Lagrange para *estimar* qué pasaría con el valor óptimo si cambiara el LD.

En forma similar, los valores de gradiente reducido incluidos en el Informe de sensibilidad de PNL de Solver tienen una interpretación análoga a la de los valores de costo reducido del Informe de sensibilidad de PL que estudiamos en el capítulo 5. El **gradiente reducido** de una variable está relacionado con las restricciones que imponen un límite o acotamiento superior o inferior para las variables de decisión. Un gradiente reducido negativo para una variable de decisión indica que *aumentar* la variable "perjudicará" inicialmente el valor de la función objetivo en un modelo Max, mientras que un gradiente reducido positivo para una variable indica que *aumentar* dicha variable "perjudicará" inicialmente el valor de la función objetivo en un modelo Min. Si una variable de decisión está en su acotamiento superior, el gradiente reducido deberá ser no negativo para que la solución sea óptima en un modelo Max; por lo contrario, disminuir la variable mejoraría el valor de la función objetivo. Si una variable de decisión está en su acotamiento inferior, el gradiente reducido no sería positivo en un modelo Max; y, por lo contrario, aumentar la variable mejoraría la función objetivo. (Las conclusiones opuestas son aplicables a los modelos Min.) Si una variable de decisión está entre sus acotamientos superior e inferior, el gradiente reducido deberá ser cero para que la solución sea óptima, como sucede con el modelo de la figura 8.6.

Nueva revisión de Astro y Cosmo Cuando planteamos el problema de Astro y Cosmo en el capítulo 3, se suponía que la ganancia unitaria por televisor era constante con todas las combinaciones de producción factibles. Supongamos que en realidad solamente es factible vender más televisores si se reduce el precio de venta; esto significa que las curvas de demanda de los productos de la compañía tienen pendiente descendente. Supongamos también que, para los valores pertinentes de producción diaria, A y C, esas curvas de demanda sean cuantificadas usando las siguientes ecuaciones:

$$PA = .01A^2 - 1.9A + 314$$
$$PC = -.14C + 243$$

donde

$$A = \text{producción diaria de Astro}$$
$$PA = \text{precio de venta de Astro}$$
$$C = \text{producción diaria de Cosmo}$$
$$PC = \text{precio de venta de Cosmo}$$

En la expresión anterior, PA es el precio que la compañía debe asignar a las unidades Astro para vender toda su producción de ese modelo. Una interpretación similar se aplica a PC y a Cosmo. En consecuencia, la ganancia unitaria depende ahora de la producción total. Si el costo unitario variable de cada Astro es de \$210 y el costo unitario variable de un Cosmo es de \$230, entonces la ganancia total es

$$\text{ganancia} = (PA - 210)A + (PC - 230)C$$

lo cual nos presenta una función objetivo no lineal. La PNL completa aparece a continuación. Observe que contiene dos restricciones de igualdad que definen el precio de venta de cada producto en términos de su producción. Una de esas restricciones es no lineal. Siendo *PA* función de *A* y *PC* función de *C*, la función objetivo tampoco es lineal.

$$\begin{array}{lllll}
\text{Max} & (PA - 210)A + (PC - 230)C & & & \\
\text{s.a.} & PA & = .01A^2 - 1.9A + 314 & & \text{(precio de venta de Astro)} \\
 & PC & = -.14C + 243 & & \text{(precio de venta de Cosmo)} \\
 & A & \leq 70 & & \text{(capacidad de la línea Astro)} \\
 & C & \leq 50 & & \text{(capacidad de la línea Cosmo)} \\
 & A + 2C & \leq 120 & & \text{(horas de trabajo en el departamento A)} \\
 & A + C & \leq 90 & & \text{(horas de trabajo en el departamento B)} \\
 & A, PA, C, PC \geq 0 & & &
\end{array}$$

La figura 8.7 muestra cómo aparecería este modelo para ser resuelto con Solver. La figura 8.8 presenta el Informe de sensibilidad para los modelos Astro y Cosmo. La restricción sobre las horas de trabajo en el departamento A es activa. El multiplicador de Lagrange (es decir, el precio sombra) sobre esa restricción indica que, inicialmente, el VO aumenta a razón de casi \$0.86 por unidad de horas laborales adicionales en el departamento A. Si tuviéramos 10 horas disponibles adicionales en el departamento A, podríamos estimar que la función objetivo aumentaría en 10×0.858, o sea \$8.58. Sin embargo, esa estimación sería muy inexacta, porque en realidad el hecho de aumentar el LD en 10 y volver a optimizar el modelo produce un nuevo valor de la función objetivo de \$2,061.51 (no ilustrado), es decir, un incremento de sólo \$5.24. Esto ilustra el hecho antes mencionado de que en modelos de PNL, los multiplicadores de Lagrange reflejan únicamente la tasa *inicial* de mejoramiento del VO, y esta tasa puede cambiar en forma notable cuando el LD se modifica. Esto es válido aun cuando el cambio del LD sea pequeño. La información inicial, o marginal, puede ser útil, pero lo primordial es tener cuidado al extrapolar esa información.

Hemos aprendido que si existe una solución óptima en programación lineal, algún vértice de la región factible tiene que ser óptimo. La figura 8.9 muestra que para el modelo no lineal de Astro y Cosmo, la solución óptima no se presenta en un vértice de la región factible, aunque esté localizada en la frontera de la misma. En realidad, para curvas de demanda diferentes, es posible que la solución óptima no esté ni siquiera en la frontera de la región factible.

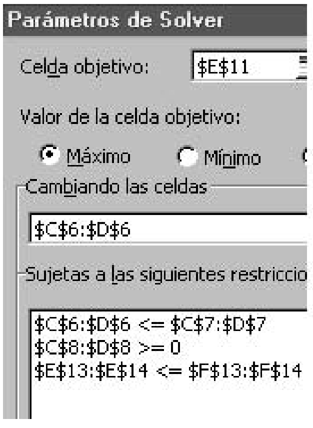
OPTIMALIDAD EN LA PNL

En modelos de PL nos hemos acostumbrado a mirar la solución producida por Solver y confiar en que ésta es en realidad la solución óptima. La vida no es tan sencilla con la PNL. Solver puede detenerse en una solución que no es óptima, o puede hacerlo en una solución óptima que es de carácter local, no una solución óptima global. Usted debe tener presentes esas posibilidades y estar preparado para tomar la decisión apropiada. Estas ideas se aclararán con el siguiente ejemplo.

Modelo de Gulf Coast Oil En el capítulo 3 presentamos un ejemplo en donde se planteó un problema de mezcla que puede formularse como una programación lineal. Sin embargo, algunos problemas de mezcla requieren el uso de formulaciones no lineales. Consideremos el caso de Gulf Coast Oil, empresa que mezcla gasolina a partir de tres componentes: mezcla nacional, mezcla extranjera y un aditivo de octanos que se utiliza solamente en la gasolina premium. La mezcla extranjera es, a su vez, la mezcla de dos fuentes. La mezcla extranjera se transporta cada mes a Gulf Coast Oil en un solo compartimiento de almacenaje de 8 millones de galones, a bordo de un gran buque cisterna. En virtud de que el petróleo comprado en ambas fuentes pierde su identidad individual cuando se "combina" en el compartimiento de almacenaje del buque cisterna, decimos que se trata de un *modelo de agrupamiento.* Como veremos, por este proceso de "combinación" se introducen características no lineales en el modelo. El valor del octanaje, el costo por galón y la información sobre la disponibilidad de cada componente se presentan en la tabla 8.1

	A	B	C	D	E	F
1		Modelo de Astro y Cosmo				
2		Demanda	Astro	Cosmo		
3		Término cuadrático	0.01	0	Coefs. demanda	
4		Término lineal	-1.9	-0.14		
5		Constante	314	243		
6		Producción	39.40	40.30		
7		Límite de prod.	<=70	<=50		
8		Precio	$254.67	$237.36		
9		Costo unitario	$210.00	$230.00		
10		Marg. cont	$44.67	$7.36	Total	
11		Ganancia	$1,759.74	$296.53	$2,056	
12		Restricciones			Total	Disponible
13		Horas depto. A	1	2	120	<=120
14		Horas depto. B	1	1	79.70	<=90
15						

Celda	Fórmula	Cópiese a
C8	= C3*C6^2+C4*C6+C5	D8
C11	= C6*C10	D11
E13	= SUMAPRODUCTO($C$6:$D$6,C13:D13)	E14



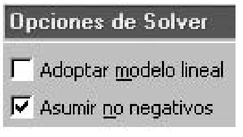


FIGURA 8.7

Solución de Solver para los modelos Astro y Cosmo

Microsoft Excel 8.0, Informe de sensibilidad

Celdas ajustables

Celda	Nombre	Valor Final	Gradiente reducido
$C$6	Producción Astro	39.40	0.00
$D$6	Producción Cosmo	40.30	0.00

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Final	Multiplicador de Lagrange
$E$13	Horas depto. A Total	120	0.858
$E$14	Horas depto. B Total	79.70	0.00
$C$8	Precio Astro	$254.67	0.00
$D$8	Precio Cosmo	$237.36	0.00

FIGURA 8.8

Informe de sensibilidad para los modelos Astro y Cosmo

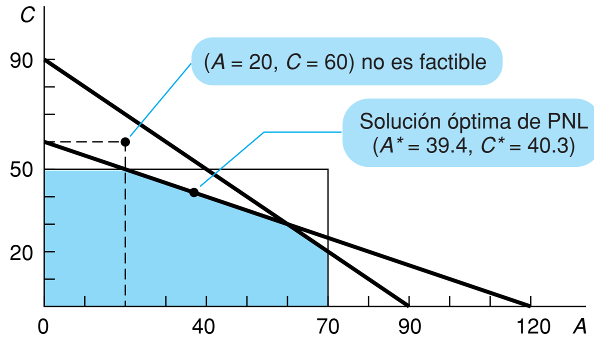


FIGURA 8.9

Región factible para Astro y Cosmo

TABLA 8.1 Características de los componentes

COMPONENTE	NÚM. OCTANOS	COSTO POR GALÓN	DISPONIBILIDAD (MILES GAL/MES)
Mezcla nacional	85	$ 0.65	10,000
Mezcla extranjera			
Fuente 1	93	$ 0.80	*
Fuente 2	97	$ 0.90	*
Aditivo premium	900	$30	50

*Debido a la forma en que Gulf Coast Oil obtiene combustible de las fuentes 1 y 2, no es posible producir más de 8 millones de galones/mes de ambas fuentes.

TABLA 8.2 Características del producto

	OCTANAJE MÍNIMO NÚM.	PRECIO DE VENTA POR GALÓN
Regular sin plomo	87	$1.18
Grado medio sin plomo	89	$1.25
Premium sin plomo	94	$1.40

El problema que debe resolver Gulf Coast Oil consiste en decidir cuántos galones de gasolina regular sin plomo, grado medio sin plomo y premium sin plomo tendrá que mezclar cada mes, considerando que está obligada a cumplir contratos de abastecimiento mínimo de 100,000 galones de cada uno de esos tipos de combustible. Cada gasolina está sujeta a un requisito de octanaje mínimo. El octanaje de una mezcla es el promedio ponderado de los octanajes de sus componentes, empleando como ponderaciones la fracción de cada componente contenida en la mezcla. En la tabla 8.2 se presentan los datos referentes a octanajes mínimos y precios de venta (al mayoreo).

Las siguientes variables de decisión se usan en la formulación:

R = miles de galones producidos de gasolina regular sin plomo
M = miles de galones producidos de gasolina grado medio sin plomo
P = miles de galones producidos de gasolina premium sin plomo
D = miles de galones comprados de mezcla nacional
A = miles de galones comprados de aditivo premium
RD = miles de galones de mezcla nacional en la gasolina regular sin plomo

RF = miles de galones de mezcla extranjera en la gasolina regular sin plomo
MD = miles de galones de mezcla nacional en la gasolina grado medio sin plomo
MF = miles de galones de mezcla extranjera en la gasolina grado medio sin plomo
PD = miles de galones de mezcla nacional en la gasolina premium sin plomo
PF = miles de galones de mezcla extranjera en la gasolina premium sin plomo

Para tomar en cuenta la naturaleza combinada del modelo, se requieren tres variables de decisión adicionales:

$S1$ = miles de galones comprados del suministro extranjero 1
$S2$ = miles de galones comprados del suministro extranjero 2
OCT = octanaje de la mezcla extranjera combinada

El octanaje es un promedio ponderado del número de octanos correspondientes a los dos suministros extranjeros, determinado por la siguiente ecuación no lineal:

$$OCT = \frac{93S1 + 97S2}{S1 + S2}$$

El truco de multiplicar ambos miembros por el denominador para obtener una ecuación lineal ya no funciona.

$$OCT(S1 + S2) = 93S1 + 97S2$$

Esta expresión es no lineal porque OCT es ahora una variable y, por tanto, el miembro izquierdo contiene un producto de variables.

El modelo simbólico aparece a continuación (en miles de galones). Observe que las restricciones referentes al octanaje mínimo también son no lineales. Considere asimismo que las verdaderas variables de decisión son RD, RF, MD, MF, PD, PF, A, $S1$ y $S2$. Todas las demás variables pueden interpretarse como variables intermedias.

Max $1.18R + 1.25M + 1.40P - .65D - .8S1 - .9S2 - 30A$

s.a. $R =$	$RD + RF$	(composición de la gasolina regular sin plomo)
$M =$	$MD + MF$	(composición de la gasolina grado medio sin plomo)
$P =$	$PD + PF + A$	(composición de la gasolina premium sin plomo)
$D =$	$RD + MD + PD$	(total de la mezcla nacional utilizada)
$RF + MF + PF =$	$S1 + S2$	(el uso debe ser igual al suministro de la mezcla extranjera)

Las cuatro restricciones siguientes constituyen los aspectos no lineales del modelo.

$85RD + OCT^*RF \geq$	$87R$	(octanaje mínimo para la gasolina regular sin plomo)
$85MD + OCT^*MF \geq$	$89M$	(octanaje mínimo para la gasolina grado medio sin plomo)
$85PD + OCT^*PF + 900A \geq$	$94P$	(octanaje mínimo para la gasolina premium sin plomo)
$OCT(S1 + S2) =$	$93S1 + 97S2$	(restricción de combinación para suministros extranjeros)
$S1 + S2 \leq$	8,000	(capacidad del buque cisterna para suministros extranjeros)
$D \leq$	10,000	(límite del suministro para la mezcla nacional)
$A \leq$	50	(límite del suministro para el aditivo premium)
R, M, y P cada $\geq$	100	(entregas mínimas contratadas)

Todas las variables son no negativas

El modelo de hoja de cálculo con ejemplos de valores de decisión aparece en la figura 8.10. Las nueve celdas de decisión son F2:F3, C6:E7 y E8; es decir, el monto de las compras extranjeras, el monto de las compras nacionales y extranjeras en cada una de las tres gasolinas, y la cantidad de aditivo utilizado, respectivamente. Observe que la combinación del petróleo extranjero comprado no permite hacer asignaciones específicas de galones del suministro 1 o del suministro 2 a cualquiera de los tres tipos de gasolina, sino sólo la asignación de la mezcla extranjera incluida en la combinación. Además, el aditivo se usa solamente en la gasolina premium. Por estas razones aparecen sombreadas las celdas de la porción media de la hoja de cálculo.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**Modelo de Gulf Coast Oil**			Compras extranjeras			Octanaje	Costo unitario
2				Suministro extranjero 1		1.0		93	$0.80
3				Suministro extranjero 2		2.0		97	$0.90
4		Gasolina vendida	Regular	Grado medio	Premium	3.0	=Compra extranjera combinada		
5		Precio por galón	$1.18	$1.25	$1.40	Total	Capacidad	Octanaje	Costo unitario
6		Gal. mezcla extranjera	1.0	1.0	1.0	3	<=8000	95.67	$0.87
7		Gal. Nacional	0.0	0.0	0.0	0	<=10,000	85	$0.65
8		Gal. aditivo prem.			0	0	<=50	900	$30.00
9		Total de galones vendidos	1.0	1.0	1.0	3			
10		Ventas mínimas	>=100	>=100	>=100				
11		Octanaje de gasolina vendida	95.67	95.67	95.67				
12		Octanaje mínimo	>=87	>=89	>=94	Total			
13		Ganancia por gasolina	$1.18	$1.25	$1.40	$3.83			
14		Costo de mezcla extranjera	$0.87	$0.87	$0.87	$2.60			
15		Costo nacional	$0.00	$0.00	$0.00	$0.00			
16		Costo aditivo prem.			$0.00	$0.00			
17		Costo total	$0.87	$0.87	$0.87	$2.60			
18		Ganancia	$0.31	$0.38	$0.53	$1.23			
19									

Celda	Fórmula	Cópiese a
H6	= ($F$2*H2+$F$3*H3)/($F$4+1E-30)	I6
C11	= SUMAPRODUCTO (C6:C8,$H$6:$H$8)/(C9+1E-30)	D11:E11
C13	= C9*C5	D13:E13
C14	= C6*$I6	C14:E15, E16
F6	= SUMA(C6:E6)	F7:F9, F13:F18

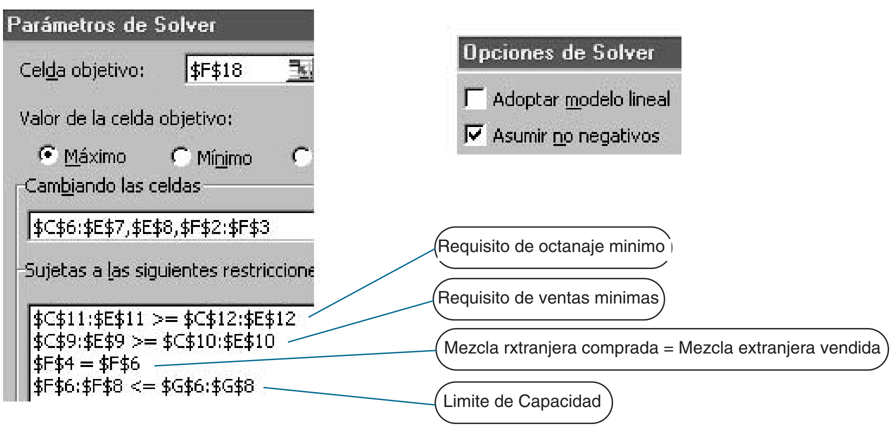


FIGURA 8.10

Modelo de Gulf Coast Oil

TIP: ***Recuerde que durante la optimización de la PNL, Solver determina una dirección, da un paso "ascendente o descendente" en esa dirección y luego evalúa las restricciones (para la factibilidad) y las condiciones del primer orden para ese nuevo punto (a fin de elegir una nueva dirección o terminar). Como el "paso" se da antes de volver a evaluar las restricciones, es posible que Solver "exceda un paso", violando así una o varias restricciones. Normalmente, Solver detecta que este nuevo punto no es factible y lo corrige, por ejemplo, retrocediendo y dando un paso más pequeño. Sin embargo, si el punto no factible provoca un mensaje de error de Excel, entonces Solver tiene que cancelar la optimización antes de haber determinado que el punto no era factible y debía retroceder. A veces se requieren algunos trucos para evitar este problema durante la optimización con Solver. Una solución consiste en escoger puntos de partida que estén muy alejados de las regiones donde Solver pueda excederse y llegar a puntos causantes de error. Otro truco consiste en modificar con creatividad las fórmulas de las celdas para que no se produzcan errores de Excel, pero sin alterar sustancialmente la lógica del modelo. Por ejemplo, en el modelo de Gulf Coast Oil, la fórmula original contenida en la celda E11 para calcular el octanaje de la gasolina premium es:***

=SUMAPRODUCTO(E6:E8, $H$6:$H$8)/E9

Durante la optimización, Solver puede excederse y forzar el valor de la gasolina premium vendido, en la celda E9, para que temporalmente sea cero. Esto disparará un error "#DIV/0!" en la celda E11, y detendrá el algoritmo PNL antes de que Solver determine que la restricción sobre la cantidad mínima de gasolina premium se ha violado en las celdas E9:E10. El truco de agregar una constante muy pequeña al divisor en la fórmula de la celda E11, como se ilustra abajo, evita el error y permite que Solver continúe su optimización en la PNL.

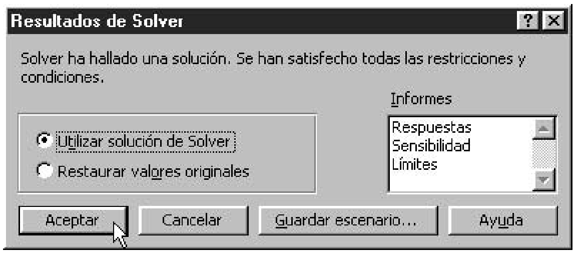
=SUMAPRODUCTO(E6:E8, $H$6:$H$8)/(E9+1E-30)

Las dos primeras restricciones incluidas en el cuadro de diálogo correspondiente a los parámetros de Solver se refieren, respectivamente, a los requisitos mínimos sobre el número de octanos y la cantidad de la gasolina producida. Con la tercera restricción se establece la necesidad de que la cantidad total de la mezcla extranjera vendida, contenida en los tres tipos de gasolina, sea igual al volumen total de la mezcla extranjera comprada, y la última restricción impone un límite o acotamiento, de tal manera que los componentes de la gasolina siempre tendrán que ser menores que las capacidades disponibles. Si bien es cierto que los valores de las nueve variables de decisión que aparecen en la figura 8.10 no son factibles, Solver encontrará un punto de partida inicial adecuado, basándose en ellas, para aplicar su algoritmo PNL.

La solución encontrada por Solver aparece en la figura 8.11. Observe que al detenerse, Solver informa que ha "convergido a la solución".[5] Este mensaje podría sugerir que se ha encontrado un punto óptimo; en realidad no ha sido así. Solver tendría que informar que "todas las condiciones de optimalidad se han satisfecho", en su mensaje final, para que esa sugerencia fuera verdad; es decir, que las condiciones de primer orden para el punto óptimo han sido satisfechas.[6]

[5]Los resultados que obtenga pueden variar, según su punto de partida, la versión de Excel que utilice y el tipo de CPU de su computadora.

[6]Consulte el apéndice de Solver para conocer todos los detalles sobre los mensajes de terminación que se presentan con esta herramienta.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		**Modelo de Gulf Coast Oil**			Compras extranjeras			Octanaje	Costo unitario	
2					Suministro extranjero 1	5,983.3		93	$0.80	
3					Suministro extranjero 2	2,016.7		97	$0.90	
4		Gasolina vendida	Regular	Grado medio	Premium	8,000.0	=Compra extranjera combinada			
5		Precio por galón	$1.18	$1.25	$1.40	Total	Capacidad	Octanaje	Costo unitario	
6		Gal. mezcla extranjera	48.1	7,852.0	99.9	8,000	<=8000	94.01	$0.83	
7		Gal. Nacional	168.7	9,831.2	0.1	10,000	<=10,000	85	$0.65	
8		Gal. aditivo prem.			0	0	<=50	900	$30.00	
9		Total de galones vendidos	216.8	17,683.2	100.0	18,000				
10		Ventas mínimas	>=100	>=100	>=100					
11		Octanaje de gasolina vendida	87.00	89.00	94.00					
12		Octanaje mínimo	>=87	>=89	>=94	Total				
13		Ganancia por gasolina	$255.84	$22,103.99	$140.00	$22,499.82				
14		Costo de mezcla extranjera	$39.72	$6,479.51	$82.44	$6,601.67				
15		Costo nacional	$109.64	$6,390.30	$0.06	$6,500.00				
16		Costo aditivo prem.			$0.00	$0.00				
17		Costo total	$149.36	$12,869.81	$82.50	$13,101.67				
18		Ganancia	$106.46	$9,234.18	$57.50	$9,398.15				
19										

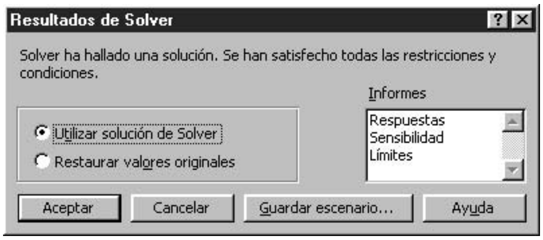
FIGURA 8.11

Primera solución de Solver para el modelo de Gulf Coast Oil

El mensaje de terminación significa que, en realidad, Solver ha detenido su búsqueda porque la tasa de cambio del VO cayó por debajo del valor de convergencia de Solver (que describiremos con mayor detalle en seguida) durante cinco iteraciones; es decir, que la rapidez de mejoría del VO era demasiado baja para proseguir con el método de búsqueda del gradiente. Por el hecho de que, en el caso de la PNL, Solver siempre comienza desde el conjunto inicial de decisiones dado, si éste es factible, puede usted reiniciar Solver a fin de forzarlo a empezar la optimización otra vez para ver si consigue mejorar su propia solución. Iniciar Solver por segunda vez y hacer clic en el botón Resolver hará que todo esto suceda, produciendo los resultados de la figura 8.12 después de hacer sólo un pequeño cambio adicional en las decisiones. Ahora Solver muestra el mensaje de terminación deseado, es decir, "...Todas las restricciones y las condiciones de optimalidad han sido satisfechas", lo cual significa que se han cumplido las condiciones necesarias de primer orden para el punto óptimo. Y además la solución de Solver parece razonable. Sin embargo, sería prudente ensayar con diferentes suposiciones iniciales, porque esta solución puede ser un punto óptimo local y no un punto óptimo global.

USO DE UNA SUPOSICIÓN INICIAL

Cuando Solver optimiza una PNL, requiere una suposición inicial de cuál es la solución óptima probable. Como ya dijimos, no es necesario que esa suposición inicial sea factible (Solver corregirá esa anomalía), pero servirá como punto de partida para el método de PNL. En virtud de la forma de las restricciones no lineales, este modelo de Gulf Coast Oil se conoce como un *modelo no cóncavo.* Como veremos en la siguiente sección, el punto de partida para el método puede ser muy importante en ese tipo de modelos, y pueden requerirse varios puntos de partida diferentes para encontrar una "buena" solución. La suposición de que todas las decisiones tienen valor cero es frecuentemente una elección muy mala como punto inicial para modelos no cóncavos. Es mucho mejor la suposición de un punto inicial próximo a la solución óptima global del modelo. Por supuesto, esta situación tiene algo de "círculo vicioso": es necesario conocer la solución óptima del modelo para proponer una buena suposición inicial con miras a encontrar la solución óptima. Sin embargo, se trata de una consecuencia poco afortunada de los modelos de PNL. En especial con modelos no cóncavos, no hay garantía alguna de que la solución proporcionada por Solver sea verdaderamente la óptima global. De hecho, después de dos intentos de optimizar el modelo anterior de Gulf Coast Oil, Solver terminó por convergir hacia el punto



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**Modelo de Gulf Coast Oil**			Compras extranjeras			Octanaje	Costo unitario
2				Suministro extranjero 1		5,983.4		93	$0.80
3				Suministro extranjero 2		2,016.6		97	$0.90
4		Gasolina vendida	Regular	Grado medio	Premium	8,000.0	=Compra extranjera combinada		
5		Precio por galón	$1.18	$1.25	$1.40	Total	Capacidad	Octanaje	Costo unitario
6		Gal. mezcla extranjera	48.1	7,852.0	99.9	8,000	<=8000	94.01	$0.83
7		Gal. Nacional	168.6	9,831.3	0.1	10,000	<=10,000	85	$0.65
8		Gal. aditivo prem.			0	0	<=50	900	$30.00
9		Total de galones vendidos	216.7	17,683.3	100.0	18,000			
10		Ventas mínimas	>=100	>=100	>=100				
11		Octanaje de gasolina vendida	87.00	89.00	94.00				
12		Octanaje mínimo	>=87	>=89	>=94	Total			
13		Ganancia por gasolina	$255.71	$22,104.12	$140.00	$22,499.83			
14		Costo de mezcla extranjera	$39.70	$6,479.52	$82.44	$6,601.66			
15		Costo nacional	$109.58	$6,390.36	$0.06	$6,500.00			
16		Costo aditivo prem.			$0.00	$0.00			
17		Costo total	$149.29	$12,869.87	$82.50	$13,101.66			
18		Ganancia	$106.42	$9,234.25	$57.50	$9,398.17			
19									

FIGURA 8.12

Solución óptima de Solver para el modelo de Gulf Coast Oil

óptimo local que aparece en la figura 8.12, y no en el punto óptimo global. Se cree que el óptimo global para este modelo es el que aparece en la figura 8.13, en la cual se muestra también el Informe de sensibilidad.

Debemos poner de relieve que la solución presentada en la figura 8.13 solamente "se cree" que es óptima, pero en realidad no hay ninguna prueba capaz de garantizar que esta solución sea el punto óptimo global para el modelo de Gulf Coast Oil. Se encontró optimizando en repetidas ocasiones el modelo, utilizando cada vez un conjunto diferente de valores de decisión iniciales. Como veremos, existe una clase de PNL "accesible", que es conocida como programación *cóncava* o *convexa*, en la cual no tenemos que preocuparnos por el punto de partida. Para este tipo de modelos, el método de búsqueda de gradiente de Solver encuentra la solución óptima global deseada sin importar en dónde comience el procedimiento.

Un ejercicio útil consiste en interpretar la información de sensibilidad de la figura 8.13. Por ejemplo, forzar la compra de determinado número de galones del suministro extranjero 1 reduciría las ganancias a una tasa inicial de $.02 por galón, e imponer el uso del aditivo en la gasolina premium perjudicaría dichas ganancias a razón de $4.42 por galón, en forma inicial (valores de gradiente reducido). Además, la expansión de la capacidad de los buques cisterna ayudaría inicialmente a las ganancias a razón de $.59 por galón, mientras que incrementar el requisito de octanaje para la gasolina premium perjudicaría inicialmente las ganancias a razón de $145.20 por punto de octano (valores del multiplicador de Lagrange).

Antes de dar por terminado el estudio de este modelo, vale la pena mencionar que algunas de las opciones de Solver para PNL, tal como lo muestra la figura 8.14, deberán ser investigadas experimentalmente, sobre todo cuando se intenta la optimización de modelos no cóncavos o altamente no lineales. El valor de convergencia se usa para terminar la búsqueda de Solver cuando el VO mejora a un ritmo demasiado lento. Si el mejoramiento es inferior o igual al valor predeterminado de .001 durante cinco iteraciones, Solver se detiene y nos presenta el mensaje de terminación que aparece en la figura 8.11. Ajustar una convergencia menor que su valor predeterminado obliga a Solver a continuar aplicando el método de optimización aunque la tasa de cambio del VO sea pequeña.

Al elegir la opción Estimaciones en "Cuadrática" se fuerza a Solver a aproximar sus estimaciones de las ecuaciones variables en su búsqueda unidimensional mediante una función cuadrática (parabólica) en lugar de una lineal (tangente). Además, al seleccionar "Central" en lugar de "Hacia delante" para el cálculo de derivadas parciales del VO y las restricciones, se obliga a Solver a producir una aproximación más precisa, estimando cada derivada direccional por medio de dos puntos adyacentes a cada punto de solución iterativa, en lugar de sólo uno. Ambos cambios mejoran los estimados numéricos de las funciones de Solver para modelos no lineales, pero al costo de mayores tiempos de cómputo para encontrar la solución, a causa de los cálculos adicionales que requiere cada iteración.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**Modelo de Gulf Coast Oil**			Compras extranjeras			Octanaje	Costo unitario
2					Suministro extranjero 1	0.0		93	$0.80
3					Suministro extranjero 2	8,000.0		97	$0.90
4		Gasolina vendida	Regular	Grado medio	Premium	8,000.0	=Compra extranjera combinada		
5		Precio por galón	$1.18	$1.25	$1.40	Total	Capacidad	Octanaje	Costo unitario
6		Gal. mezcla extranjera	16.7	4,353.3	3,630.0	8,000	<=8000	97.00	$0.90
7		Gal. Nacional	83.3	8,706.7	1,210.0	10,000	<=10,000	85	$0.65
8		Gal. aditivo prem.			0	0	<=50	900	$30.00
9		Total de galones vendidos	100.0	13,060.0	4,840.0	18,000			
10		Ventas mínimas	>=100	>=100	>=100				
11		Octanaje de gasolina vendida	87.00	89.00	94.00				
12		Octanaje mínimo	>=87	>=89	>=94	Total			
13		Ganancia por gasolina	$118.00	$16,325.00	$6,776.00	$23,219.00			
14		Costo de mezcla extranjera	$15.00	$3,918.00	$3,267.00	$7,200.00			
15		Costo nacional	$54.17	$5,659.33	$786.50	$6,500.00			
16		Costo aditivo prem.			$0.00	$0.00			
17		Costo total	$69.17	$9,577.33	$4,053.50	$13,700.00			
18		Ganancia	$48.83	$6,747.67	$2,722.50	$9,519.00			
19									

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido
$C$6	Gal. mezcla extranjera Regular	16.67	0.0
$D$6	Gal. mezcla extranjera Grado medio	4,353.3	0.0
$E$6	Gal. mezcla extranjera Premium	3,630.0	0.0
$C$7	Gal. Nacional Regular	83.33	0.0
$D$7	Gal. Nacional Grado medio	8,706.7	0.0
$E$7	Gal. Nacional Premium	1,210.0	0.0
$E$8	Gal. aditivo prem. Premium	0.00	-4.42
$F$2	Suministro extranjero 1 Compras extranjeras	0.0	-0.02
$F$3	Suministro extranjero 2 Compras extranjeras	8,000.0	0.0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Multiplicador de Lagrange
$C$11	Octanaje de gasolina vendida Regular	87.00	-3.00
$D$11	Octanaje de gasolina vendida Grado medio	89.00	-391.80
$E$11	Octanaje de gasolina vendida Premium	94.00	-145.20
$C$9	Total de galones vendidos Regular	100.0	-0.01
$D$9	Total de galones vendidos Grado medio	13,060.0	0.0
$E$9	Total de galones vendidos Premium	4,840.0	0.0
$F$4	Premium Compras extranjeras	8,000.0	0.0
$F$6	Gal. mezcla extranjera Total	8,000	0.59
$F$7	Gal. Nacional Total	10,000	0.48
$F$8	Gal. aditivo prem. Total	0	0.0

FIGURA 8.13

Solución óptima para el modelo de Gulf Coast Oil

Finalmente, al seleccionar la opción Búsqueda conjugada, se usa menos memoria durante la optimización, pero se requiere un mayor número de cálculos de Solver para alcanzar un nivel de precisión determinado. Sin embargo, sobre todo cuando se trata de modelos no lineales grandes, las menores demandas de memoria de acceso aleatorio que impone esta opción pueden acelerar en general la resolución de Solver, al reducir las necesidades de administración de la memoria.

8.6 POSIBILIDAD DE RESOLUCIÓN DE LOS MODELOS DE PNL

Los métodos para resolver problemas generales de PNL son notablemente diferentes del método símplex que utiliza Solver con la PL. En PL vimos que para un problema que tiene una solución óptima, siempre podíamos asegurarnos de que efectivamente hubiera por lo menos una solución óptima en vértice. Ésta es una característica de los modelos PL que reviste importancia

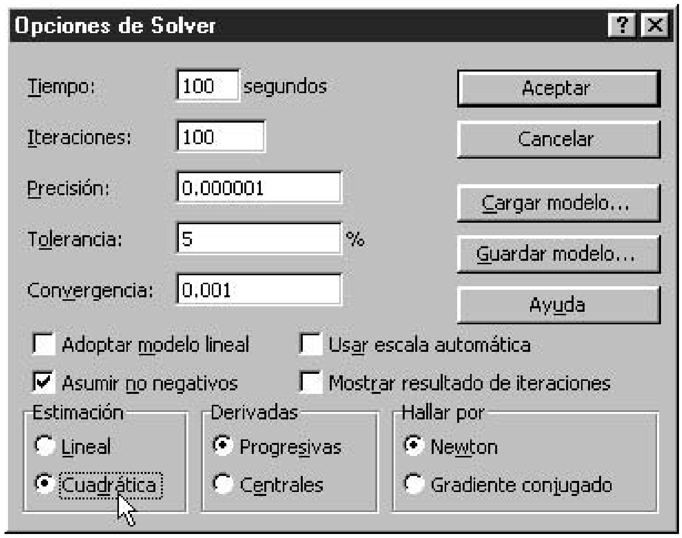


FIGURA 8.14

Cuadro de diálogo de opciones de Solver

crítica, porque los vértices de la región factible pueden definirse mediante ecuaciones lineales, de tal modo que una simple operación algebraica permite que Solver pase de un vértice a otro vértice adyacente cualquiera, en el cual la función objetivo mejora o conserva el mismo valor. Con esta técnica, el método símplex de Solver constituye un camino a prueba de errores para tratar problemas de PL. Ninguno de estos comentarios se aplica al problema general de PNL.

Además, no existe un solo método de optimización preferible para optimizar la PNL. Con facilidad podríamos encontrar 10 o 15 métodos de optimización de PNL, cuyo desarrollo aparece en la bibliografía. Sin embargo, en la actualidad tres tipos de procedimientos parecen ser los más útiles para resolver programas no lineales en general: GRG (gradiente reducido generalizado), PLS (programación lineal sucesiva) y PCS (programación cuadrática sucesiva). Solver utiliza un método de PNL del tipo GRG. Pero la programación no lineal es un tema muy vasto y en la bibliografía se identifican muchos tipos especiales interesantes de modelos de PNL. De hecho, muchos de los métodos de resolución que aparecen en esa literatura han sido diseñados para resolver tipos especiales de modelos de PNL. Por ejemplo, algunos métodos fueron diseñados exclusivamente para modelos de programación cuadráticos, los cuales veremos en la siguiente sección, y otros para modelos que son "principalmente" lineales, en los cuales los términos no lineales donde aparece la función objetivo o restricciones se introducen en formas especiales.

En lugar de presentarle a usted un compendio de múltiples métodos para resolver modelos de PNL, presentaremos una breve descripción de unos cuantos tipos importantes de programas no lineales que es frecuente encontrar en aplicaciones prácticas. Es decir, podemos dividir esta clase muy general de modelos en casos más especiales, definidos por el carácter de la función objetivo y las funciones de restricción, después de lo cual veremos con cuánta facilidad podemos resolver esos casos especiales. De hecho, los temas importantes, desde el punto de vista de la administración, son: saber qué tipo de PNL estamos manejando y cuáles son las probabilidades de encontrar una solución. Veremos que esas perspectivas dependen en alto grado del tipo de modelo no lineal que intentemos analizar.

Iniciaremos este estudio con la observación de que los modelos no lineales se dividen en dos clases: (1) los que podemos resolver y (2) los que podemos tratar de resolver. Los modelos que podemos resolver se ajustan de ordinario a ciertas cualidades de estructura y dimensiones. La jerarquía creciente de la dificultad de cómputo se muestra en la figura 8.15. En esta figura, los números romanos progresivos reflejan la creciente dificultad de cómputo. Consideremos ahora esas diversas clases de programas no lineales con un poco más de detalle.

PROGRAMAS NO LINEALES QUE PODEMOS RESOLVER: PROGRAMAS CÓNCAVOS Y CONVEXOS

Para definir estos problemas es necesario introducir un nuevo término técnico, un **conjunto convexo de puntos.** Hablando en términos aproximados, se trata de un conjunto de puntos que no tiene "huecos" o "indentaciones". En términos más formales, un conjunto convexo es cualquier conjunto en el cual se cumple la siguiente propiedad:

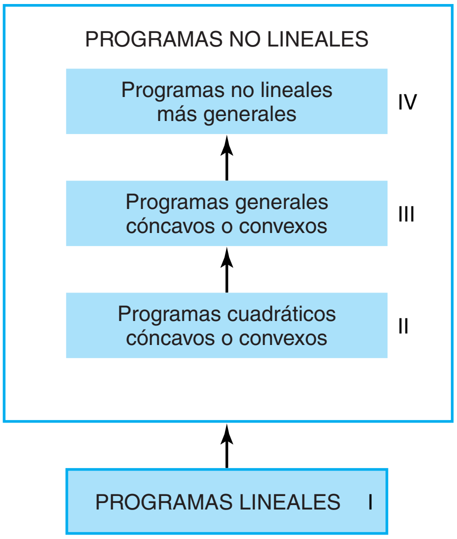


FIGURA 8.15

Una creciente dificultad de cómputo

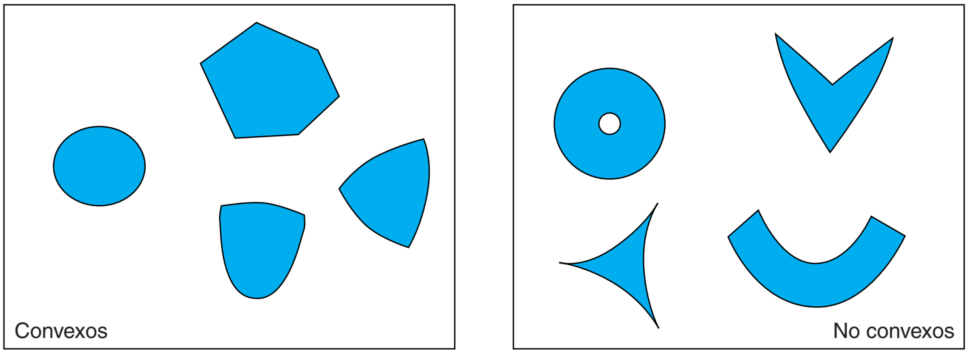


FIGURA 8.16

Conjuntos de puntos convexos y no convexos

Considere todos los pares posibles de puntos en el conjunto y el segmento de recta que conecta a cualquiera de esos pares. Todos los segmentos de recta de ese tipo deben estar contenidos totalmente dentro del conjunto.

La figura 8.16 muestra conjuntos bidimensionales de puntos que no satisfacen esta propiedad, y en consecuencia *no* son conjuntos convexos, y también otros conjuntos que sí son convexos. El polígono que aparece en la primera de estas dos figuras puede recordarnos los conjuntos de restricciones que suelen presentarse en los problemas de PL. Esto es muy lógico en virtud de que cualquier conjunto de restricciones representa un conjunto convexo para una programación lineal. *Las programaciones no lineales que podemos aspirar razonablemente a resolver deben tener también conjuntos de restricciones convexos.*

Funciones cóncavas y convexas La siguiente pregunta es: ¿Qué tipos de programas no lineales tienen conjuntos de restricciones convexos? Es útil poder usar los conceptos de funciones cóncavas y convexas al responder esta pregunta. Si la función tiene dos variables independientes, una *función cóncava* tiene la forma de un tazón boca abajo. En general, por definición, una función cóncava tiene la propiedad de que el segmento de recta que conecta dos puntos cualesquiera de la gráfica de la función nunca entra al espacio ubicado por arriba de la gráfica. Si siempre se encuentra debajo de la gráfica, entonces se dice que la función es *estrictamente cóncava*. Asimismo, si la función tiene dos variables, una *función convexa* tiene forma de tazón. En general, por definición, una función convexa tiene la propiedad de que el segmento de recta que conecta dos puntos cualesquiera de la gráfica de la función nunca entra en el espacio ubicado debajo de la gráfica (si siempre se mantiene estrictamente por encima de la gráfica, entonces la función es *estrictamente convexa*). La misma idea es válida para las funciones que tie-

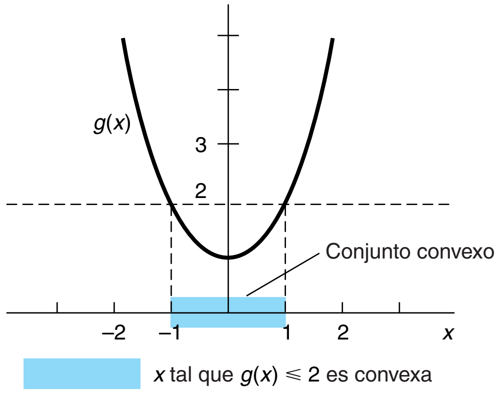


FIGURA 8.17

Conjuntos de restricciones $g(x) \leq 2$ y $g(x) \geq 2$

nen una sola variable, o más de dos variables. Es preciso señalar que una función lineal se considera a la vez cóncava y convexa (los segmentos de recta antes mencionados siempre están dentro de la gráfica).

Supongamos que ahora tenemos una programación no lineal que sólo incluye restricciones de desigualdad.

> Si la función de restricción asociada con cada restricción del tipo $\leq$ es convexa y la función de restricción asociada con cada restricción del tipo $\geq$ es cóncava, el conjunto de restricciones será un conjunto convexo.

Estos hechos se ilustran en la figura 8.17, la cual muestra una función convexa g con una sola variable, dada por $g(x) = x^2 + 1$. Usted podrá observar que el conjunto de x valores para el cual $g(x) \leq 2$ es convexo (es decir, éste es el conjunto $-1 \leq x \leq 1$), mientras que el conjunto de x valores para el cual $g(x) \geq 2$ no es convexo (es decir, es el conjunto $x \leq -1$, $x \geq 1$). El conjunto de nuestro ejemplo no es convexo porque es posible encontrar dos puntos contenidos en el mismo (digamos, $x = +2$ y $x = -2$), tales que la recta que los conecta pasa por puntos (por ejemplo, el punto $x = 0$) que no pertenecen al conjunto.

Así, vemos que en este ejemplo la función $g(x)$ es convexa y el conjunto definido por la desigualdad $g(x) \leq 2$ es convexa, mientras que el conjunto definido por la desigualdad $g(x) \geq 2$ no es convexo. En forma similar se podría demostrar que si la función $g(x)$ es cóncava, entonces el conjunto definido por la desigualdad $g(x) \geq 2$ es convexo, mientras que el conjunto definido por la desigualdad $g(x) \leq 2$ no es convexo (esto guarda relación con el hecho de que el negativo de una función cóncava es convexo y viceversa). Gracias a esto, disponemos de un método de prueba con el cual podemos verificar que algunos modelos de PNL tienen un conjunto de restricciones convexo. Por supuesto que esta prueba no nos permitirá determinar si el conjunto de restricciones de un modelo de PNL *cualquiera* es convexo o no. En particular, en el caso de modelos que tienen una o varias restricciones de *igualdad no lineales,* es sumamente difícil determinar si el conjunto restringido es convexo o no. En lo que se refiere a la exposición de esta subsección, vale la pena señalar que el término *cóncavo* se aplica solamente a funciones, mientras que el término *convexo* puede aplicarse tanto a una función como a un conjunto de puntos, según el contexto.

Ahora que usted conoce el significado de conjunto convexo, será fácil, por lo menos formalmente, definir un programa cóncavo o convexo.

> - Un **programa cóncavo** es un modelo Max con una función objetivo cóncava y un conjunto de restricciones convexo.
> - Un **programa convexo** es un modelo Min con una función objetivo convexa y un conjunto de restricciones convexo.

El razonamiento que justifica esta caracterización guarda relación con el hecho de que en el contexto de la maximización, como en el cálculo elemental con una variable, las funciones objetivo cóncavas pueden manejarse muy cómodamente en términos de las propiedades matemáticas asociadas a la forma geométrica de un tazón invertido. El manejo de las funciones objetivo convexas (en forma de tazón) resulta cómodo en el contexto de la minimización. Por último, la convexidad del conjunto de restricciones dota al modelo de otras propiedades matemáticas atractivas, que pueden aprovecharse tanto en el terreno teórico como en el del cómputo. Una característica muy importante de los modelos de programación cóncavos (o convexos) es que para ese tipo de problemas, *cualquier punto óptimo restringido local es también un óptimo restringido global.* Este hecho tiene consecuencias obvias para las aplicaciones no lineales de Solver.

Procedimientos de resolución La figura 8.15 indica que los programas no lineales más sencillos son programas cuadráticos cóncavos o convexos. Por definición, estos modelos de PNL tienen restricciones lineales (de igualdad o desigualdad). La función objetivo debe ser cuadrática y cóncava si se trata de un modelo Max, y cuadrática y convexa si es un modelo Min. Resulta que una variante del método símplex puede usarse para resolver estos modelos y, en la práctica, resulta razonablemente eficiente. No es poco frecuente la resolución de problemas cuadráticos que incluyen cientos de restricciones y varios miles de variables. Como veremos en la próxima sección, los modelos financieros como los que se utilizan en el análisis de carteras de valores son a menudo programas cuadráticos, por lo cual esta clase de modelos tiene aplicaciones especialmente importantes.

En la figura 8.15, el siguiente nivel de dificultad incluye programas generales (no cuadráticos) cóncavos o convexos. Existen muchos enfoques matemáticos con sus correspondientes algoritmos para resolver esos modelos. Por ejemplo, suponga que el problema a resolver sea un modelo Max. A semejanza del algoritmo empleado por Solver, muchos procedimientos de PNL funcionan en la siguiente forma:

1. Encuentre un punto factible inicial “dentro” del conjunto de restricciones (no sobre el límite o frontera).
2. Encuentre una dirección ascendente (o descendente si se trata de modelos Min) y muévase a lo largo de esta recta hasta que alcance un máximo (o mínimo) sobre la línea o llegue a algún acotamiento o frontera del conjunto de restricciones.
3. Cambie la dirección del movimiento para seguir ascendiendo (o descendiendo) sin salir de la región factible.
4. Termine el algoritmo cuando encuentre un punto que satisfaga las condiciones de optimalidad necesarias.

En este tipo de algoritmos, como ocurre con la mayoría de los que se aplican a programas no lineales que no son cuadráticos, se usa en buena medida el cálculo avanzado, por lo cual no es posible que lo estudiemos con mucho detalle en esta exposición. Baste decir que *para programas generales cóncavos o convexos, a diferencia de los programas lineales, el número de variables no lineales (es decir, las que intervienen en el problema en forma no lineal) parece ser más importante que el número de restricciones, como indicador de la dificultad del problema.*

PROGRAMAS NO LINEALES QUE INTENTAREMOS RESOLVER

Finalmente, en la figura 8.15 consideraremos el nivel más alto de dificultad que se presenta en programas generales no lineales. Con frecuencia estos modelos se designan como *altamente no lineales,* lo cual suele significar que las propiedades de convexidad y concavidad anteriormente expuestas están ausentes. Para tratar esos modelos de PNL, es muy común utilizar el mismo sistema optimizador, como Solver, que se utilizaría normalmente para problemas generales cóncavos y convexos. Sin embargo, los resultados son diferentes. Cualquier optimizador de PNL suele terminar en un punto donde se satisfacen las condiciones de optimalidad necesarias (es decir, de primer orden). Si se trata de un programa cóncavo o convexo, tenemos la garantía de que ese punto será un óptimo global (de hecho, si la función objetivo es *estrictamente* cóncava o *estrictamente* convexa, tendremos la seguridad de que ese punto será un óptimo global *único*). Pero esto no es necesariamente cierto para programas generales no lineales, como se aprecia en el problema con una variable ilustrado en la figura 8.18. La función objetivo f, que debe ser maximizada, no es cóncava o convexa. La solución al problema se expresa como x^*, pero la herramienta de optimización puede terminar en cualesquiera de los puntos x_1, x_2, x_3 o x^* (porque todos ellos satisfarán las condiciones necesarias). Hasta el presente, nadie ha sido lo bastante inteligente como para inventar algoritmos que garanticen una inmunidad completa frente a esta posibilidad.

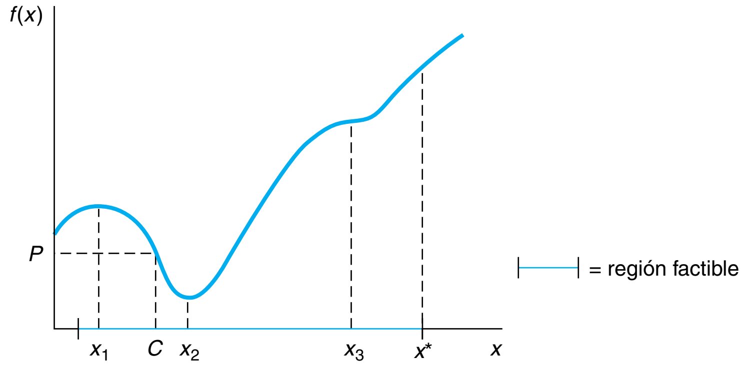


FIGURA 8.18

Modelo Max restringido no cóncavo

En la práctica, esta dificultad suele superarse iniciando el optimizador en varios puntos iniciales diferentes, tal como lo hicimos con el modelo de Gulf Coast Oil. Por ejemplo, si la suposición inicial es un poco mayor que x_3 en la figura 8.18, cualquier método de optimización razonable podría convergir en x^*. Si x_1 hubiera sido obtenido también con otra suposición inicial, ahora sería rechazado porque, aunque no supiéramos con certeza que x^* es un punto óptimo, veríamos que el valor objetivo en x_1 es más bajo que en x^*.

Aun cuando el procedimiento de comenzar el proceso en diferentes puntos no garantiza que se encontrará el óptimo global, tiene una excelente justificación práctica. Si la optimización de Solver del modelo de PNL puede producir una solución *mejor* que la que actualmente se está utilizando, entonces estará justificado el empleo de tal modelo. Esto concuerda con el criterio general de que, en la práctica, nada es tan puro como una solución verdaderamente óptima. *Como hemos dicho, la meta cuando se trabaja con modelos es ayudar siempre en la búsqueda de mejores decisiones. Las consideraciones generales a este respecto son el costo de ese mejoramiento (el costo de construir el modelo y obtener la solución) frente al beneficio producido por la solución.*

Para terminar, veamos un aspecto práctico adicional. ¿Cómo podemos saber si una programación no lineal con muchas variables es cóncava, convexa o ninguna de las dos cosas? En otras palabras, ¿cómo sabremos si la función objetivo y las restricciones tienen la forma matemática apropiada? Existen varias respuestas posibles para esta pregunta:

1. A veces podemos aplicar pruebas matemáticas a las funciones del modelo para determinar si son cóncavas, convexas o de ninguno de esos tipos.

2. A veces se recurre a la intuición en economía para afirmar que un fenómeno determinado refleja rendimientos marginales decrecientes o costos marginales crecientes y, por tanto, que la función asociada es cóncava o convexa.

3. En muchas situaciones reales no se intenta siquiera responder la pregunta. Simplemente se trata de resolver el modelo y después se investiga la utilidad práctica del punto terminal (la presunta "solución" generada por Solver). Como antes dijimos, para un modelo que se supone o se sabe que es no convexo o no cóncavo, frecuentemente se reinicia Solver desde muchos puntos iniciales diferentes, para explorar la posibilidad de obtener un punto terminal más satisfactorio.

Finalmente, ahora contamos con los conceptos necesarios para explicar por qué le hemos aconsejado que se abstenga de usar ciertas funciones de Excel que suelen producir un comportamiento extremadamente no lineal. Ejemplos de esas funciones son SI(), ABS(), MIN() y MAX(). Resulta claro que, en la mayoría de los casos, esas funciones invalidan el uso de un modelo PL porque destruyen sus características lineales. Sin embargo, también causan problemas con los modelos PNL. Éstas y otras funciones similares pueden provocar ya sea "fallas" o discontinuidades en la función objetivo, o bien restringir algunos de los valores de las variables de decisión. Una falla se presenta cuando la "pendiente", es decir, el conjunto de primeras derivadas parciales del valor de una función que cambia uniformemente, presenta cambios abruptos con cierto(s) valor(es) de umbral de la(s) variable(s) de decisión porque, por ejemplo, una declaración SI() dispara una relación diferente. En forma similar, se produce una discontinuidad cuando el(los) valor(es) de umbral dispara(n) una relación totalmente diferente, haciendo que toda la función objetivo o la función de restricción asuman un nuevo conjunto de valores. A pesar de que no sea discontinua para la función misma, una falla ocasiona una discontinuidad en las derivadas parciales de la función utilizada por Solver para determinar la dirección que habrá de seguir en su procedimiento de ascenso/descenso. El resultado es, a menudo, la falta de convergencia cuando Solver oscila en torno al punto donde se presenta la discontinuidad en la función o su derivada, provocando finalmente que Solver desista del intento y se detenga, mostrando alguno de sus mensajes de terminación sin haber encontrado un punto óptimo. Observe que este problema se agrega a las dificultades que suele ocasionar la falta de concavidad o convexidad en la formulación fundamental de PNL, lo cual puede conducir a la convergencia hacia un óptimo local, en lugar del óptimo global.

8.7 INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA (PC)

Como dijimos en la sección anterior, un modelo de programación cuadrática tiene la importante propiedad de concavidad (convexidad) que evita las dificultades de optimización inherentes de los modelos de PNL más generalizados. De hecho, la programación cuadrática (PC), como la programación lineal con enteros, es prima hermana de la programación lineal y posee muchas de sus propiedades deseables. Compare lo siguiente:

- ***Programación lineal.*** Maximiza o minimiza el valor de la función objetivo *lineal* bajo un conjunto de restricciones lineales de igualdad o desigualdad, así como las posibles condiciones de no negatividad de los valores que pueden asumir las variables de decisión.
- ***Programación cuadrática.*** Maximiza o minimiza el valor de una función objetivo *cuadrática* bajo un conjunto de restricciones lineales de igualdad y desigualdad, así como las posibles condiciones de no negatividad de los valores que asumen las variables de decisión.

Obviamente, la única diferencia entre estos dos modelos es la forma funcional de la función objetivo.

Funciones cuadráticas Tenemos conocimientos acerca de las funciones lineales. Éstos son algunos ejemplos de funciones cuadráticas:

$$9x_1^2 + 4x_1 + 7$$
$$3x_1^2 - 4x_1x_2 + 15x_2^2 + 20x_1 - 13x_2 - 14$$

Estas funciones son una suma de términos que incluye variables al cuadro (por ejemplo, $3x_1^2$), productos cruzados (por ejemplo, $4x_1x_2$), funciones lineales (por ejemplo, $20x_1$) y constantes (por ejemplo, 14). En general, una función cuadrática con N variables puede escribirse en la forma

$$\sum_{i=1}^{N} A_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} B_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{N} C_i x_i + D$$

Observe que cuando todos los coeficientes A_i y B_{ij} son cero, la función es lineal. En consecuencia, una función lineal es un caso especial de función cuadrática.

Por supuesto, cuando se pasa de una función objetivo lineal a otra cuadrática se requiere un algoritmo de PNL para resolver el modelo. Este cambio implica también que mucho de lo que hemos aprendido acerca de los modelos de programación lineal ya no es aplicable. El siguiente ejemplo ilustra algunas de las diferencias entre los modelos de programación cuadrática y los modelos de programación lineal. El ejemplo simbólico de la PC es

$$\begin{array}{lrl}
\text{Min} & (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 & \\
\text{s.a.} & x_1 & \le 7 \\
 & x_2 & \le 5 \\
 & x_1 + 2x_2 & \le 12 \\
 & x_1 + x_2 & \le 9 \\
 & x_1, x_2 & \ge 0
\end{array}$$

Representación geométrica En la figura 8.19 aparece una representación geométrica de este modelo. Por supuesto, el conjunto de restricciones es el mismo que para un modelo de PL, de manera que no es necesario explicarlo de nuevo. Para comprobar que la función objetivo es un

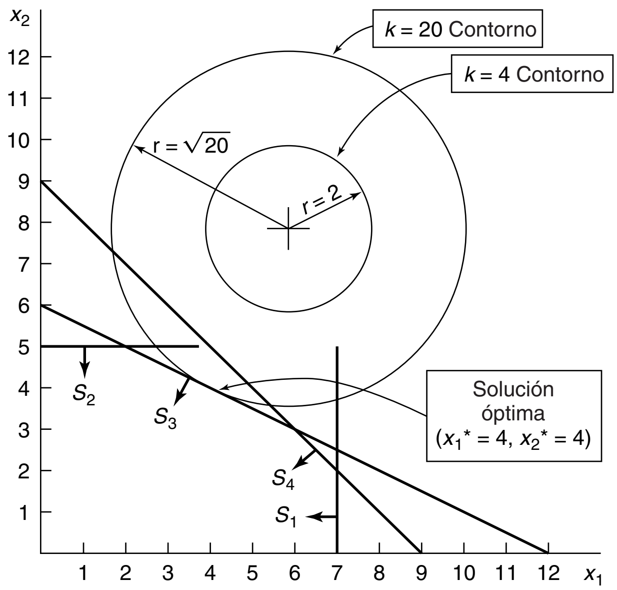


FIGURA 8.19

Solución gráfica del ejemplo de PC

caso especial de nuestra función cuadrática precedente, podemos rescribirla en la forma $x_1^2 - 12x_1 + 36 + x_2^2 - 16x_2 + 64$. Es posible que usted reconozca también la siguiente expresión

$$(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 = k$$

como la ecuación de un círculo cuyo radio es $\sqrt{k}$ y su centro está en el punto (6, 8). Así, tal como lo muestra la figura 8.19, los contornos de la función objetivo son círculos concéntricos en torno al punto (6, 8). En vista de que estos contornos aumentan de valor a medida que crece el radio k, y como quiera que el modelo anterior es un modelo de minimización, la solución óptima de la figura 8.19 se presenta en el punto (4, 4). Este último se puede describir aproximadamente como el punto donde el contorno "toca por primera vez" el conjunto factible. En este ejemplo, ese "toque" es un punto de tangencia, aunque en otros casos puede presentarse una solución en un vértice, igual que en los modelos de PL. El valor de la función objetivo en el punto de solución óptima (4, 4) es $(4 - 6)^2 + (4 - 8)^2 = 20$.

Comparación con la PL Este ejemplo indica claramente que, a diferencia de la programación lineal:

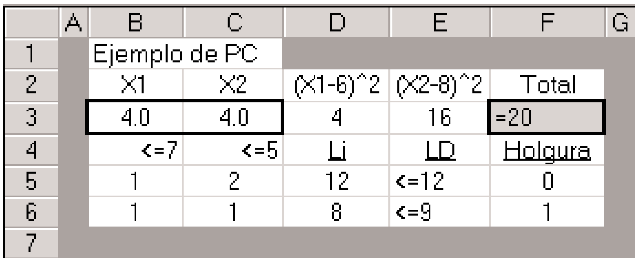
1. Igual que los modelos de PNL en general, no forzosamente tiene que existir una solución óptima en vértice. Por consiguiente, un método como el símplex de Solver, que busca el mejor vértice, no puede usarse para resolver este modelo.

2. Como consecuencia directa del punto anterior, es posible que el número de variables positivas en la solución óptima sea mayor que el de las restricciones obligatorias. Como vimos en el caso de los modelos de PNL más generales, lo que dificulta su resolución es que la solución óptima no se presenta necesariamente en un punto extremo de la región factible. En este ejemplo, tal solución se encuentra en el borde de la región factible, pero también es posible que se presente en el interior de la misma. En cualquier caso, existe un número infinito de soluciones posibles (a diferencia de la PE, que tiene un número grande, pero finito, de ellas).

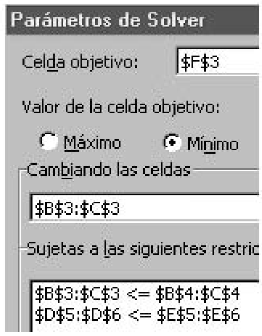
8.8 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PC CON SOLVER

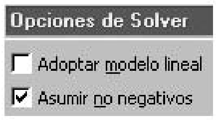
Existen dos métodos para optimizar modelos de PC del mundo real: uno consiste en usar un optimizador de programación no lineal, como Solver, y el otro en emplear un optimizador de programación cuadrática escrito especialmente para tal efecto.[7] Enfocaremos nuestra atención en el uso de Solver de Excel.

[7]La versión de Solver comercialmente disponible, Solver Premium Edition, cuenta con un optimizador de PNL y un optimizador cuadrático especializado.



	A	B	C	D	E	F	G
1		Ejemplo de PC					
2		X1	X2	(X1-6)^2	(X2-8)^2	Total	
3		4.0	4.0	4	16	=20	
4		<=7	<=5	Li	LD	Holgura	
5		1	2	12	<=12	0	
6		1	1	8	<=9	1	
7							





Microsoft Excel 8.0a Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Final	Gradiente reducido
$B$3	X1	4.0	0.0
$C$3	X2	4.0	0.0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Final	Multiplicador de Lagrange
$D$5	Li	12	-4.0
$D$6	Li	8	0.0

FIGURA 8.20

Solución Solver del ejemplo de PC

La figura 8.20 muestra el modelo, el cuadro de diálogo de Parámetros de Solver, la solución óptima y el Informe de sensibilidad para el ejemplo anterior. En la siguiente sección, la columna del Informe de sensibilidad correspondiente al multiplicador de Lagrange se interpreta mediante un análisis geométrico. Por ahora, en relación con el Informe de sensibilidad de la figura 8.20, simplemente replantearemos las siguientes definiciones mencionadas con anterioridad:

- Considere el número que corresponde a la i-ésima restricción en la columna del multiplicador de Lagrange. Igual que en el caso de la PL, esto representa la tasa de cambio del VO a medida que aumenta el i-ésimo LD, manteniéndose todos los demás datos sin cambio alguno.
- A falta de restricciones directas de cota superior o inferior, la columna Gradiente reducido se aplica a una variable no negativa cuyo valor óptimo sea cero. Para esa variable, el gradiente reducido es la rapidez con la cual el valor objetivo resulta “perjudicado” a medida que se obliga a la variable a asumir valores positivos en una solución óptima.

8.9 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE PC

Empleando el mismo enfoque que aplicamos a los modelos de PNL, consideremos ahora en detalle lo que ocurre con la solución óptima y con el valor óptimo de la función objetivo de PC cuando cambia el LD de la tercera restricción, es decir, la restricción obligatoria. Nos referiremos al valor del LD de la tercera restricción como R. En el modelo que nos ocupa, R = 12. El análisis es de tipo geométrico y está vinculado a la figura 8.21. Por comodidad en la exposición, sean

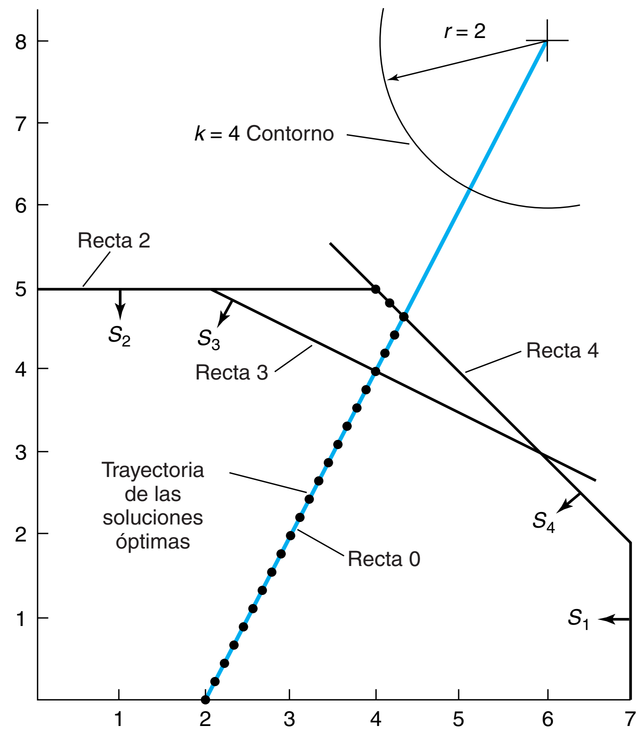


FIGURA 8.21

La trayectoria de la solución cuando *R* varía

la recta 2 igual a la línea	x_2	$= 5$
la recta 3 igual a la línea	$x_1 + 2x_2$	$= 12$
la recta 4 igual a la línea	$x_1 + x_2$	$= 9$

En la figura 8.21 podemos identificar todas estas rectas.

CÓMO IDENTIFICAR LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

En primer lugar, observamos que cuando R disminuye, la tercera restricción se desplaza hacia el suroeste, en dirección paralela a la recta 3. Asimismo, cuando R aumenta, la tercera restricción se mueve hacia el noreste, paralelamente a la recta 3. En geometría aprendimos que cualquier tangente a un círculo es perpendicular a una línea que une el punto de tangencia con el centro. Por consiguiente, cuando R aumenta o disminuye (dentro de ciertos límites), la solución óptima para el modelo se encuentra en la línea que une los puntos ($x_1 = 4$, $x_2 = 4$) y ($x_1 = 6$, $x_2 = 8$). La ecuación de esta recta es $2x_1 - x_2 = 4$, y aparece en la figura 8.21 como la recta 0.

En la figura 8.21 vemos ahora que cuando R disminuye, la solución óptima se desplaza bajando por la recta 0 hasta llegar al eje (debido a la restricción de no negatividad de x_2). En este punto, $x_1 = 2$ y $x_2 = 0$ y, por consiguiente, $x_1 + 2x_2 = 2$. En forma similar, cuando R aumenta, la solución óptima se mueve ascendiendo por la recta 0 hasta que R asume un valor tal que la tercera restricción pase por la intersección de la recta 4 y la recta 0. Este valor se determina resolviendo las ecuaciones $x_1 + x_2 = 9$ y $2x_1 - x_2 = 4$ para x_1 y x_2 a fin de obtener el punto ($x_1 = 4\frac{1}{3}$, $x_2 = 4\frac{2}{3}$). Sustituyendo estos valores en la ecuación $x_1 + 2x_2 = R$, resulta $R = 13\frac{2}{3}$.

Cuando R asume valores mayores que $13\ \frac{2}{3}$, la solución óptima se mueve a lo largo de la recta 4 hasta que R asume un valor tal que la tercera restricción pase por la intersección de la recta 2 y la recta 4. Esta intersección se presenta en el punto ($x_1 = 4$, $x_2 = 5$), y como $x_1 + 2x_2 = R$, la tercera restricción cruza este punto cuando $R = 14$. A medida que R se vuelve mayor que 14, la tercera restricción resulta redundante y la solución óptima permanece en el punto ($x_1 = 4$, $x_2 = 5$). Ahora ya hemos identificado la trayectoria de las soluciones óptimas para todos los valores posibles de $R \geq 2$. Si deseamos encontrar la solución óptima para un valor específico de R, bastará con que resolvamos las dos ecuaciones lineales simultáneas apropiadas.

EL VALOR ÓPTIMO (VO) DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Una vez que haya encontrado la solución óptima, por ejemplo (x_1^*, x_2^*), podrá hallar el valor óptimo de la función objetivo (VO) evaluando la expresión $(x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2 = \text{VO}$. Ahora deseamos desarrollar una expresión para el VO en función de R. Vamos a identificar esta función por medio de la notación VO(R). En particular, concentraremos nuestra atención en los valores de R comprendidos entre 2 y 13⅔; es decir, los valores de R para los cuales la solución óptima se encuentra sobre la recta 0.

Cuando sabemos que la solución óptima está en la recta 0, la podremos localizar precisamente en la intersección de las siguientes rectas

$$
\begin{array}{ll}
2x_1 - x_2 = 4 & \text{recta 0} \\
x_1 + 2x_2 = R & \text{tercera restricción}
\end{array}
$$

Resolviendo para x_1 y x_2 en términos de R obtenemos

$$x_1 + 2(2x_1 - 4) = R$$

o bien

$$x_1^* \frac{R + 8}{5} \text{ y también } x_2^* = 2\left(\frac{R + 8}{5}\right) - 4 = \frac{2R - 4}{5}$$

Observe que cuando $R = 12$, $x_1^* = 4$ y también $x_2^* = 4$ que es igual a nuestro resultado original. Considerando que la función objetivo es $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2$ su valor en (x_1^*, x_2^*) será

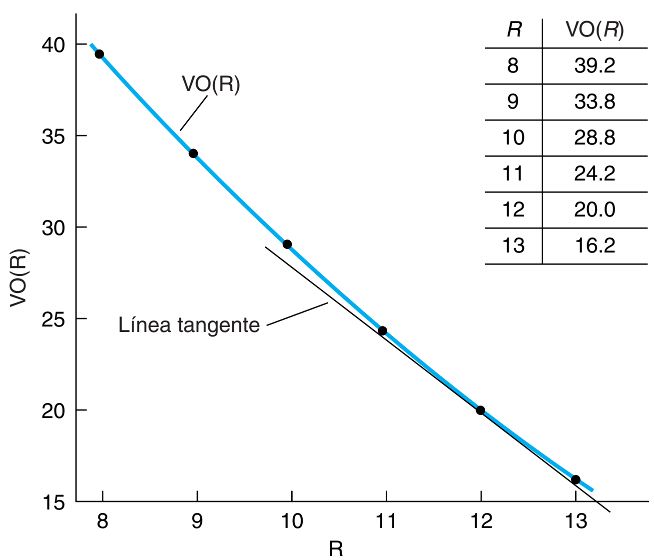
$$\left(\frac{R+8}{5} - 6\right)^2 + \left(\frac{2R-4}{5} - 8\right)^2$$

o bien

$$\text{VO (R)} = \frac{R^2 - 44R + 484}{5}$$

La función VO(R), en el rango $8 \leq R \leq 13⅔$, aparece graficada en la figura 8.22. Observe que la función VO es cuadrática en este rango. Observe también que cuando $R = 12$, el valor de la función objetivo es 20, el mismo valor producido por Solver en la figura 8.20.

Recuerde que la función del multiplicador de Lagrange sobre la tercera restricción es la tasa de cambio del VO a medida que aumenta el LD de la tercera restricción (es decir, R). En términos



R	VO(R)
8	39.2
9	33.8
10	28.8
11	24.2
12	20.0
13	16.2

FIGURA 8.22

VO(R) *versus* R

geométricos, la tasa de cambio dentro de la función VO(R) en algún punto, digamos $R = \hat{R}$, es la pendiente de la tangente a la gráfica de la función en el punto ($\hat{R}$, VO($\hat{R}$)). En el lenguaje del cálculo, la tasa de cambio en $\hat{R}$ es la primera derivada de VO(R) evaluada en ($\hat{R}$). Esto se simboliza como VO' ($\hat{R}$). La figura 8.22 muestra la tangente a la gráfica en el punto (R = 12, VO = 20). Para deducir la pendiente, podemos tomar la primera derivada para encontrar VO'(R) = $\frac{2R - 44}{5}$ y así VO'(12) = -4.

Ya hemos observado que, como la tasa de cambio es -4, el multiplicador de Lagrange en este modelo debe ser -4. Este resultado es exactamente el mismo que vemos en el Informe de sensibilidad correspondiente a este modelo en la figura 8.20.

Observe que en la figura 8.22, la pendiente de la tangente es *diferente* para cada valor de R. Así, al comparar la PC con la PL, encontramos la siguiente diferencia importante:

- En general, para un modelo de PC no hay incrementos y decrementos permisibles en el LD de una restricción para la cual el multiplicador de Lagrange (es decir, el precio sombra) permanezca invariable. Por supuesto, ya antes habíamos visto que esto era válido para *algunos* modelos de PNL. Sin embargo, siempre es válido para un modelo de PC.

Veamos ahora qué pasa cuando cambiamos el coeficiente de un término en la función objetivo.

1. Si modificamos el coeficiente de alguna variable x_j, reubicamos el centro de los círculos concéntricos. Por ejemplo, en la función objetivo anterior, cambiemos el coeficiente de x_1 del valor -12 al -18, para obtener el nuevo objetivo

$$x_1^2 - 18x_1 + 36 + x_2^2 - 16x_2 + 64$$

Esto puede rescribirse como

$$(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 8)^2 - 45$$

lo cual nos muestra que el centro de los círculos concéntricos se ha reubicado desde el punto ($x_1 = 6$, $x_2 = 8$) hasta el punto ($x_1 = 9$, $x_2 = 8$). Esta reubicación produce también una nueva solución óptima.

2. Si cambiamos un coeficiente en alguno de los términos x_j^2 de la función objetivo anterior, la forma de los contornos cambiará de circular a elíptica.

En lugar de detenernos en los detalles de esta geometría más complicada, debemos considerar evidente el hecho de que, a diferencia de la PL:

- En general, para un modelo de PC, no es posible asignar a un coeficiente de la función objetivo un rango de valores tal que la solución óptima no cambie.

Con esto completamos la exposición general de la programación cuadrática. En la siguiente sección nos ocuparemos de una importante aplicación específica.

8.10 SELECCIÓN DE UNA CARTERA DE INVERSIONES

La selección de una cartera es un modelo fundamental en las finanzas modernas. En realidad, el análisis de carteras tiene tantos aspectos que podría llenar todo un libro y, de hecho, se han escrito varios volúmenes acerca de este tema. Nuestra exposición será solamente una breve mirada a esta fascinante aplicación práctica.

EL MODELO DE CARTERA

El modelo del **análisis de cartera** puede expresarse en la siguiente forma: un inversionista tiene P dólares para invertir en un conjunto de n acciones y desea saber cuánto le conviene invertir en cada acción. La serie de valores que elija se conoce como la cartera del inversionista. El inversionista tiene objetivos antagónicos: desea una cartera que le brinde al mismo tiempo un jugoso rendimiento esperado y que implique poco riesgo. Estas metas son antagónicas porque, en el mundo real, lo más frecuente es que las carteras con un gran rendimiento esperado impliquen también un elevado riesgo.

CÁPSULA DE APLICACIÓN Estructuración de carteras en Prudential Securities

En los últimos años, pocos mercados financieros han experimentado un crecimiento tan acelerado y con tantas innovaciones como el mercado hipotecario secundario. Este crecimiento ha sido alentado por agencias federales creadas para facilitar la adquisición de viviendas incrementando el flujo de fondos disponibles para préstamos hipotecarios. Entre estas agencias figuran la Asociación Hipotecaria del Gobierno Nacional (GNMA, por sus siglas en inglés), la Asociación Hipotecaria Nacional Federal (FNMA) y la Asociación Federal de Hipotecas para Préstamos de Vivienda (FHLMC). Todas ellas compran préstamos hipotecarios de los emisores de la hipoteca original y luego los combinan para crear valores con respaldo hipotecario (VRH).

Estos valores y los de emisores privados se negocian en los mercados de capital, junto con otros valores de renta fija, como los pagarés y bonos de la Tesorería y sus equivalentes corporativos. La emisión de estos VRH rebasó el billón de dólares en fecha reciente y las operaciones del mercado secundario ya exceden los $5,000 millones a la semana. Este mercado hipotecario secundario ya es comparable, en magnitud, con el mercado de bonos corporativos y tiene un considerable potencial de crecimiento, considerando que sólo 40% de la deuda hipotecaria ha sido convertida en valores.

En los últimos años, Prudential logró edificar un departamento de VRH de primera calidad. Por la complejidad de ese tipo de valores, los instrumentos ordinarios para la valuación de renta fija resultan inadecuados para los VRH. Prudential ha empleado diversos modelos cuantitativos, de PL y de PNL inclusive, que le permiten valuar con rapidez y precisión estos complicados VRH para negociar con ellos.

Prudential usa también estos instrumentos con el fin de establecer la protección adecuada para los VRH incluidos en su inventario y como ayuda para estructurar las carteras de los clientes y permitir que éstos alcancen objetivos concretos (por ejemplo, maximizar el rendimiento esperado, minimizar el riesgo de la inversión) manteniéndose siempre dentro de las restricciones especificadas. Las restricciones típicas incluyen los porcentajes mínimo y máximo de la cartera que será permisible invertir en cualquier valor determinado, la duración de la vigencia de los VRH y la suma total que habrá de ser invertida. Los modelos son utilizados cientos de veces cada día por negociantes, vendedores y clientes. El impacto de los modelos es tal, que Prudential ha atendido desde un sitio que ni siquiera figuraba entre los 10 principales emisores de esas obligaciones hipotecarias con seguridad colateral, hasta llegar a figurar sistemáticamente entre los tres más importantes. (Véase Ben-Dov *et al*.)

Presentamos en seguida un ejemplo de lo que entendemos por *rendimiento*. Supongamos que una inversión de D_i dólares fue colocada en el activo i, así que al cabo de cierto periodo especificado esos D_i dólares aumentan a $1.3D_i$. En este caso diríamos que el *rendimiento* en ese periodo es de $(1.3D_i - D_i)/D_i = 0.3$. El concepto del riesgo es más sutil y más difícil de explicar. Para los propósitos de nuestra exposición, supondremos que *el riesgo se mide por medio de la variación (varianza) del rendimiento producido por la cartera.* En realidad, este concepto es congruente con la forma en que la mayoría de los analistas de carteras acostumbra medir el riesgo.

Ahora bien, puesto que el propósito del administrador de carteras consiste en reducir el riesgo y elevar el rendimiento esperado, una forma de plantear este modelo consiste en minimizar la varianza del rendimiento (es decir, minimizar el riesgo) dentro de un determinado límite o acotamiento inferior para el rendimiento esperado. También puede haber restricciones de políticas sobre la proporción de la cartera que podrá destinarse a ciertas acciones en particular.

CÓMO FORMULAR EL MODELO DE UNA CARTERA DE INVERSIONES

Este modelo resulta ser un modelo de programación cuadrática. En su formulación, podemos considerar que x_i es la proporción de la cartera que está invertida en la acción i. Por ejemplo, si tuviéramos P dólares para invertir en un modelo con dos acciones y si la solución óptima fuera $x_1 = 0.7$ y $x_2 = 0.3$, invertiríamos en total $0.7P$ dólares en la acción 1 y los $0.3P$ dólares restantes los invertiríamos en la acción 2.

Escribamos ahora el modelo general para un modelo con dos activos. Usaremos la siguiente notación:

σ_1^2 = varianza de los rendimientos anuales de la acción i, $i = 1, 2$

σ_{12} = covarianza de los rendimientos anuales de las acciones 1 y 2

R_i = rendimiento anual esperado de la acción i, $i = 1, 2$

b = límite inferior del rendimiento anual esperado de la cartera

S_i = límite superior de la inversión en la acción i, $i = 1, 2$

Para nuestros propósitos actuales, aceptaremos simplemente las siguientes definiciones:

1. La ***varianza*** *de los rendimientos anuales de la acción i* es un número que describe la "variabilidad" de esos rendimientos de un año al siguiente. Definiremos esto con más precisión en la próxima sección.
2. La ***covarianza*** *de los rendimientos anuales de las acciones 1 y 2* es un número que describe la magnitud en la cual suben o bajan conjuntamente los rendimientos de las dos acciones. También este concepto será examinado con mayor precisión en la siguiente sección.

3. El *rendimiento esperado de la cartera* se define como el número $x_1R_1 + x_2R_2$.
4. La *varianza del rendimiento de la cartera* se define como el número $\sigma_1^2 x_1^2 + 2\sigma_{12}x_1x_2 + \sigma_2^2 x_2^2$.
5. La ***desviación estándar*** del rendimiento de la cartera se define como la raíz cuadrada de la varianza.

De estas definiciones se desprende que, para el ejemplo de las dos acciones, el modelo de cartera adopta la forma

Min $\sigma_1^2 x_1^2 + 2\sigma_{12}x_1x_2 + \sigma_2^2 x_2^2$		(varianza del rendimiento)
s.a. $x_1 + x_2$	$= 1$	(todos los fondos deben ser invertidos)
$x_1R_1 + x_2R_2$	$\geq b$	(límite inferior del rendimiento esperado de la cartera)
x_1	$\leq S_1$	(límites superiores de las inversiones en acciones individuales)
x_2	$\leq S_2$	
x_1, x_2	≥ 0	(la no negatividad implica que las "ventas de faltantes" de una acción no están permitidas)

Para presentar un ejemplo numérico específico, sea

$$\sigma_1^2 = 0.09 \qquad R_1 = 0.06 \qquad S_1 = 0.75 \qquad b = 0.03$$
$$\sigma_2^2 = 0.06 \qquad R_2 = 0.02 \qquad S_2 = 0.9 \qquad \sigma_{12} = 0.02$$

El conjunto factible correspondiente a este modelo aparece ilustrado en la figura 8.23, en la cual, por simple comodidad, hemos multiplicado por 100 tanto la función objetivo como ambos miembros de la restricción referente al rendimiento esperado. En virtud de la restricción de igualdad ($x_1 + x_2 = 1$), el conjunto factible es el segmento grueso de recta que conecta los puntos (0.25, 0.75) y (0.75, 0.25). Todos los contornos de la función objetivo son elipses con su respectivo centro ubicado en el origen y su eje menor sobre una recta que forma un ángulo de 26.55° con respecto al eje x_1. Los contornos 2 y 4.54 aparecen en la figura 8.23.

Observe que, a medida que el valor del contorno va acrecentándose, la forma general de la elipse se mantiene invariable, pero sus dimensiones son mayores. Este modelo ha sido formulado para seleccionar el valor más pequeño del contorno, de tal manera que la elipse apenas toque el conjunto factible. Como podemos apreciar en la figura 8.23, el contorno 4.54 toca el conjunto factible en el punto ($x_1^* = 0.36$, $x_2^* = 0.64$), el cual representa la solución óptima.

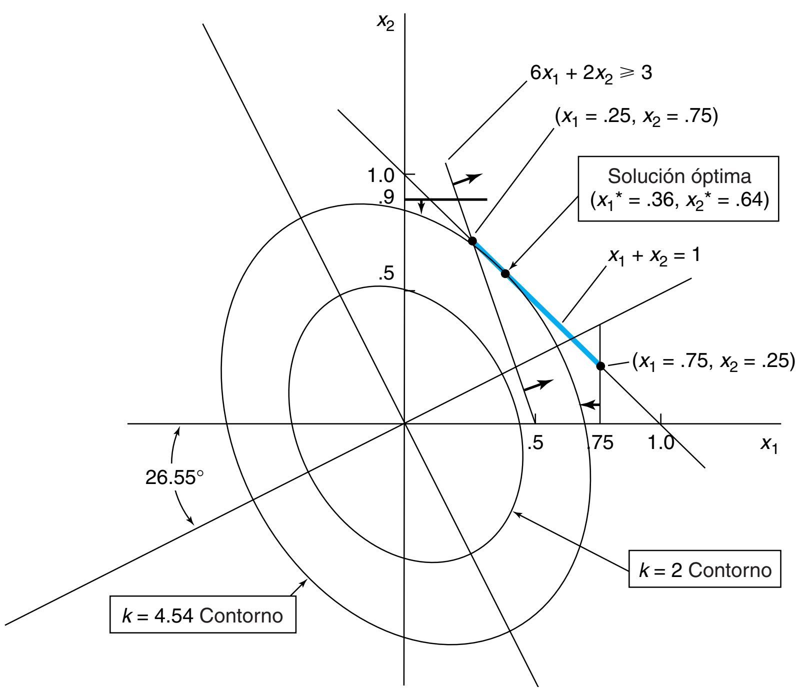


FIGURA 8.23

Solución gráfica para el modelo de selección de cartera

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Modelo de cartera	Acción 1	Acción 2	Total		
3		Decisión: % en acciones	36.36%	63.64%	100%		
4		Requerimientos	<=75%	<=90%	=100%		
5		Rendimiento esperado de cartera	6%	2%	3.455%	>=3%	
6		Medidas de riesgo	Acción 1	Acción 2	Covarianza		
7		Varianza/covarianza de la acción	0.09	0.06	0.02	Total	
8		Varianza/covarianza de cartera	0.0119	0.0243	0.0093	0.04545	
9							

Celda	Fórmula	Cópiese a
E5	= SUMAPRODUCTO(C3:D3,C5:D5)	—
C8	= C7*C3^2	D8
E8	= 2*E7*C3*D3	—

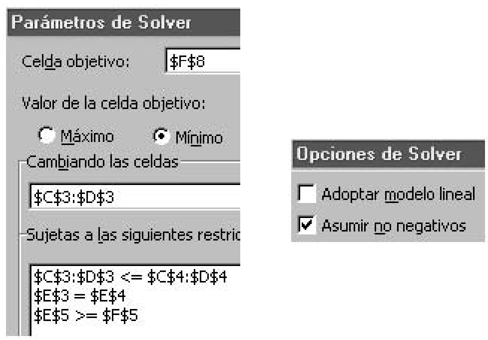


FIGURA 8.24

Solución de Solver para el modelo de selección de cartera

No es importante que usted conozca el procedimiento empleado para construir estos contornos. Después de todo, los modelos de cartera reales son optimizados mediante computadora, no con métodos gráficos. Sin embargo, la representación geométrica es útil para entender el modelo y para interpretar las propiedades de la solución.

La solución de Solver para el ejemplo anterior se ilustra en la figura 8.24. Observe que sólo la restricción sobre los fondos de inversión es obligatoria. Por supuesto, esto se aprecia en la representación geométrica de la figura 8.23. En el LI de la restricción sobre el rendimiento mínimo podemos ver que el rendimiento esperado de esta cartera es 3.455%. Al comparar los valores óptimos de x_1^* y x_2^* vemos que la cartera óptima contiene una mayor proporción del valor cuyo rendimiento anual esperado es el más bajo (es decir, el valor 2). La razón de esto es que la varianza del valor 2 es más baja que la del valor 1. La mezcla óptima es la que permite minimizar la varianza de la cartera, garantizando que el rendimiento esperado de ésta sea por lo menos 3%.

Observe que también pudimos haber empleado Solver para resolver este modelo, con miras a maximizar el rendimiento de la cartera, bajo la restricción de que la varianza de ésta no debe exceder un límite superior determinado. En virtud de que esta formulación impone la relación cuadrática del modelo como una restricción, y no como la función objetivo, no se trata estrictamente de un modelo cuadrático. Sin embargo, esta formulación no implica dificultad alguna con el uso del procedimiento de búsqueda de gradiente generalizado de Solver, y muchos constructores de modelos prefieren esta última formulación para la optimización de sus carteras de inversiones.

8.11 UN EJEMPLO DE CARTERA DE INVERSIONES CON DATOS

En esta sección usaremos un ejemplo con tres activos. A diferencia del ejemplo anterior, donde todos los parámetros eran conocidos, los datos se usarán en este caso para estimar los parámetros del modelo. Después el modelo será optimizado con Solver y analizaremos la solución.

FORMULACIÓN DEL MODELO

En esta sección designaremos inicialmente los tres activos financieros como *x, y* y *z*. Sea

X = fracción del activo x en la cartera
Y = fracción del activo y en la cartera
Z = fracción del activo z en la cartera

Usaremos la terminología "activo i" para referirnos al activo x o al activo y o al activo z. En las secciones anteriores presentamos el modelo de cartera como si los parámetros que describen la distribución de los rendimientos futuros fueran conocidos; es decir, supusimos que los rendimientos esperados, las varianzas y las covarianzas eran datos conocidos. En el mundo real, esos parámetros tienen que ser estimados a partir de datos históricos. En general, si se dispone de datos sobre n periodos (años), para cada activo i habrá un rendimiento histórico real R_i^t asociado a cada periodo t, donde t fluctuará entre 1 y n. En otras palabras, cada activo tendrá n rendimientos históricos. El rendimiento periódico esperado del activo i se calcula mediante $R_i = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_i^t$, que es el promedio de los rendimientos históricos de ese activo. Los rendimientos históricos periódicos 1 R_i^t se utilizan también para estimar las varianzas y covarianzas. Las fórmulas apropiadas son:[8]

estimación de la varianza del rendimiento para el activo i $= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(R_i^t - \bar{R}_i)^2$

estimación de la covarianza de los rendimientos para los activos i y j=

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(R_i^t - \bar{R}_i)(R_j^t - \bar{R}_j)$$

Tal como hicimos con anterioridad, definiremos también

b = límite inferior del rendimiento esperado de la cartera
S_i = límite superior de la fracción del activo i que puede estar en la cartera

En función de los parámetros, la formulación de esta programación cuadrática para el modelo de tres activos es

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & \sigma_x^2X^2 + \sigma_y^2Y^2 + \sigma_z^2Z^2 + 2\sigma_{xy}XY + 2\sigma_{xz}XZ + 2\sigma_{yz}YZ & \\ \text{s.a.} & \left.\begin{array}{ll} R_xX + R_yY + R_zZ & \geq b \\ X + Y + Z & = 1 \\ X & \leq S_x \\ \quad Y & \leq S_y \\ \qquad Z & \leq S_z \\ X, Y, Z & \geq 0 \end{array}\right\} & \text{La región factible es la misma que en PL} \end{array}$$

La función objetivo es la varianza del rendimiento de la cartera y, como dijimos en la sección anterior, se suele interpretar como la medida del riesgo para dicha cartera. (El razonamiento que justifica la definición de riesgo, así como la derivación de la función objetivo, pertenecen al dominio de la estadística y van más allá del alcance de este libro.) La primera restricción indica el límite inferior del rendimiento esperado de la cartera. La segunda restricción indica que las fracciones de la inversión deberán sumar uno, y las restricciones restantes corresponden a los límites superiores.

Cuando en una cartera se permite la inclusión de más de tres activos, el rendimiento esperado se define como $\sum_{i=1}^{n} X_iR_i$. R_i Igual que antes, R_i es el rendimiento esperado del activo i, mientras

[8] Los lectores que tienen conocimientos de estadística notarán que en estas fórmulas de estimaciones no se toman en cuenta los grados de libertad perdidos. Usamos estas fórmulas porque son congruentes con la función COVAR() de Excel, a pesar del ligero sesgo que introducen en las estimaciones.

TABLA 8.3 Rendimientos históricos de acciones

AÑO	AT&T	GM	USS
1	30.0%	22.5%	14.9%
2	10.3%	29.0%	26.0%
3	21.6%	21.6%	41.9%
4	−4.6%	−27.2%	−7.8%
5	−7.1%	14.4%	16.9%
6	5.6%	10.7%	−3.5%
7	3.8%	32.1%	13.3%
8	8.9%	30.5%	73.2%
9	9.0%	19.5%	2.1%
10	8.3%	39.0%	13.1%
11	3.5%	−7.2%	0.6%
12	17.6%	71.5%	90.8%

que X_i es la fracción del activo i en la cartera. En este caso general de N activos, la varianza del rendimiento de la cartera se define como[9]

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

SOLUCIÓN EN LA HOJA DE CÁLCULO

Una vez que las estimaciones numéricas son sustituidas por los parámetros, este modelo de programación cuadrática se puede optimizar con Solver. Para poner un ejemplo específico, consideremos tres acciones y sus rendimientos históricos para 12 años. Las tres acciones elegidas son AT&T, General Motors y USX-U.S. Steel. Los rendimientos históricos de esas acciones aparecen en la tabla 8.3, en la cual el rendimiento en el año n está definido por

$$\frac{(\text{precio de cierre}, n) - (\text{precio de cierre}, n-1) + (\text{dividendos}, n)}{(\text{precio de cierre}, n-1)}$$

donde los precios de cierre y los dividendos se expresan en dólares por acción.[10]

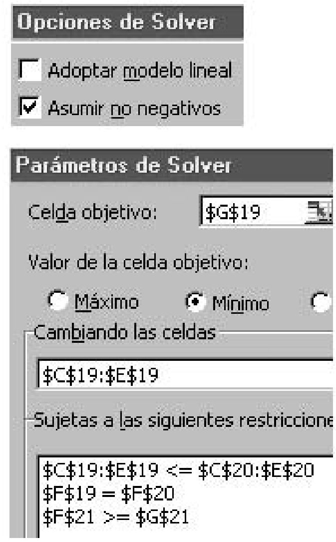
Supongamos ahora que usted desea minimizar la varianza del rendimiento de la cartera, bajo un rendimiento esperado de 15% y la restricción de que no se podrá colocar más de 75% de la cartera en ninguna acción individual. El modelo en hoja de cálculo, la solución de Solver y el Informe de sensibilidad aparecen en la figura 8.25.

Observe que si se permitieran "ventas de faltantes" de una acción, sería posible suprimir las restricciones de no negatividad. La solución para el modelo anterior especifica una cartera de aproximadamente 53% en AT&T, 35.64% en GM y 11.35% en U.S. Steel. El rendimiento anual esperado es exactamente 15%. El valor objetivo óptimo indica que la varianza del rendimiento anual es de casi 0.0205, lo cual significa que la desviación estándar es $\sqrt{.0205} = 14.33\%$. Si usted hubiera creído en la validez de este modelo y hubiera supuesto también (además de la validez del modelo) que los rendimientos de la cartera están normalmente distribuidos con una media de 15% y una desviación estándar de 14.33%, entonces, de acuerdo con la teoría estadística, habría podido esperar en forma razonable que esa cartera produjera rendimientos de entre -13.7% y + 43.7% aproximadamente, en los años subsiguientes. De hecho, los rendimientos de los tres activos durante los tres años siguientes aparecen en la tabla 8.4. Por consiguiente, usando

[9]En la notación de matriz, la varianza del rendimiento de la cartera se escribe X^TYX, donde X es un vector de columna $(X_1, \ldots, X_N)$ y Y indica la matriz simétrica de covarianza cuyo (i, j)ésimo elemento es σ_{ij} (y donde $= \sigma_{ii} = \sigma_i^2$). Si X es un vector de fila, entonces el rendimiento de la cartera estará expresado por XYX^T

[10]Observe que la siguiente consecuencia extraída de esta definición de promedio resulta insatisfactoria. Suponga que no hay dividendos, que en el año 1 la acción sube de 1.0 a 1.5 (con un rendimiento de 0.5) y en el año 2 la acción pasa de 1.5 a 1 (con un rendimiento de −0.33). El rendimiento promedio en los dos años es 0.17/2. ¿Está usted de acuerdo? Esto demuestra que la estimación de rendimientos esperados (y covarianzas) puede ser un asunto delicado. Debemos insistir en que este ejemplo es en realidad sumamente elemental.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Modelo de cartera		AT&T	GM	USS	Año	
2			30.0%	22.5%	14.9%	1	
3			10.3%	29.0%	26.0%	2	
4			21.6%	21.6%	41.9%	3	
5			-4.6%	-27.2%	-7.8%	4	
6			-7.1%	14.4%	16.9%	5	
7			5.6%	10.7%	-3.5%	6	
8			3.8%	32.1%	13.3%	7	
9			8.9%	30.5%	73.2%	8	
10			9.0%	19.5%	2.1%	9	
11			8.3%	39.0%	13.1%	10	
12			3.5%	-7.2%	0.6%	11	
13			17.6%	71.5%	90.8%	12	
14		Rendimiento promedio	8.91%	21.37%	23.46%		
15		Matriz de covarianza	AT&T	GM	USS		
16		AT&T	0.0099	0.0114	0.0120		
17		GM	0.0114	0.0535	0.0508		
18		USS	0.0120	0.0508	0.0864	Total	Varianza de la cartera
19		Decisión: % de acciones	53.01%	35.64%	11.35%	100%	0.0205
20		Requerimientos	<=75%	<=75%	<=75%	=100%	
21		Rendimiento esperado	4.72%	7.62%	2.66%	15.0%	>=15%
22							



Celda	Fórmula	Cópiese a
C14	= PROMEDIO(C2:C13)	D14:E14
C16	= COVAR(C2:C13,$C$2:$C$13)	D16:E16
C17	= COVAR(C2:C13,$D$2:$D$13)	D17:E17
C18	= COVAR(C2:C13,$E$2:$E$13)	D18:E18
G19	= SUMAPRODUCTO(MMULT(C19:E19,C16:E18),C19:E19)	—
C21	= C19*C14	D21:E21

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Final	Gradiente reducido
$C$19	Decisión: % de acciones AT&T	53.01%	0
$D$19	Decisión: % de acciones GM	35.64%	0
$E$19	Decisión: % de acciones USS	11.35%	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Final	Multiplicador de Lagrange
$F$21	Rendimiento esperado Total	15%	0.3244
$F$19	Decisión: % de acciones Total	100%	-0.0076

FIGURA 8.25

Solución de Solver para el ejemplo de cartera con datos

las fracciones óptimas del modelo, los rendimientos reales de la cartera habrían sido los que aparecen en la tabla 8.4.

Para concluir esta sección, observamos que el multiplicador lagrangiano indica que un incremento de 1% en el rendimiento esperado (un incremento de 0.01 en la celda G21) conduciría a un *incremento aproximado* de 0.00324 en la varianza. Por tanto, la nueva varianza sería de unos 0.0238 con la desviación estándar igual a $\sqrt{.0238} = 15.4\%$. Estas cifras son aproximaciones, ya que en una programación cuadrática las pendientes del VO(b) son instantáneas (a diferencia de la PL, en la cual son constantes en ciertos intervalos). En la siguiente sección analizaremos esto en términos de un programa cuadrático general. En el caso del modelo de cartera, esto se refleja en la forma general del VO(b) según se aprecia en la figura 8.26. (Como podrá usted observar, esta gráfica muestra que cuando la restricción sobre el rendimiento esperado se endurece o se vuelve más estricta —es decir, cuando b aumenta—, el VO resulta cada vez más y más *perjudicado*.)

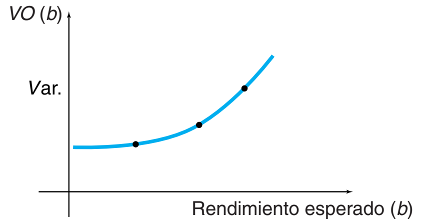


FIGURA 8.26
La frontera eficiente

TABLA 8.4 Rendimientos reales de las acciones

ACCIÓN	AÑO 1	AÑO 2	AÑO 3
AT&T	10.3%	3.9%	3.0%
GM	51.2%	−5.0%	−20.0%
USS	64.7%	32.2%	−26.6%
Rendimiento de la cartera	31.1%	3.9%	−8.6%

En la terminología de las finanzas, esta gráfica se conoce como la **frontera eficiente,** y sus propiedades se estudian en los cursos de finanzas. Para nuestros propósitos, nos limitaremos a comentar que se trata de una función cuadrática convexa fragmentaria. Para encontrar cualquier punto de la gráfica de esta función, basta seleccionar un valor del LD de la restricción que establezca un límite inferior para el rendimiento esperado, b, y volver a optimizar el modelo con Solver.

8.12 CONTROL DE INVENTARIOS

Los **inventarios** se definen como *bienes ociosos almacenados,* en espera de ser utilizados. Hay muchos tipos de inventarios; por ejemplo, inventarios de materias primas, inventarios de materiales en proceso, inventarios de productos terminados, inventarios de efectivo y hasta inventarios de individuos. Se pueden mantener inventarios por muchas razones. Algunos distribuidores tienen inventarios para poder atender de inmediato los pedidos de sus clientes. En otras condiciones, en muchos casos el cliente preferiría hacer el pedido a un competidor. Sin embargo, ésta es solamente una de las razones por las cuales se mantienen inventarios. De hecho, pueden existir por cualquiera de las siguientes razones:

1. Los inventarios suavizan la brecha del tiempo que separa la oferta de la demanda. Por ejemplo, el maíz se cosecha solamente en septiembre y octubre, pero la demanda de los usuarios es constante durante todo el año. Por tanto, la cosecha debe ser almacenada en inventario para usarla posteriormente.
2. La posibilidad de mantener un inventario contribuye a menudo a reducir los costos de producción, porque es más económico producir algunos artículos en grandes partidas aun cuando no existan pedidos inmediatos para esos bienes.
3. Los inventarios son un medio para almacenar trabajo. Por ejemplo, la disponibilidad de mano de obra para la producción puede llegar a constituir una restricción obligatoria en algún periodo posterior, pero representar una holgura en los periodos anteriores. La posibilidad de producir excedentes en esos periodos previos y mantener existencias del producto en inventario, libera mano de obra que puede emplearse para otros menesteres en los periodos posteriores.
4. Finalmente, el inventario es un recurso para ofrecer servicio rápido a la clientela en el momento en que ésta necesite esos productos, y en realidad los clientes están dispuestos a pagar por esta comodidad.

En general, hay tres tipos de costos asociados a la actividad de inventarios: *costos de existencias, costos de pedidos* y *costos de faltantes.* Podemos explicar mejor estos costos de inventario con un ejemplo. Entre otros productos que ofrece a la venta, STECO tiene existencias de un cable para red (CR) especializado, de fibra óptica, que se usa para conectar computadoras personales con una red de área local de alta velocidad.

Costos de mantenimiento STECO tiene actualmente 3,000 CR entre sus existencias. Cada CR le cuesta \$8. Así, STECO tiene ahora $(8) \times (3{,}000) = \$24{,}000$ reservados en el inventario de este artículo. Supongamos que STECO deseara reducir este inventario a sólo 1,000 unidades. En ese caso, en lugar de $24,000, la inversión se reduciría a $8,000. Entonces podría invertir parte de los $16,000 así liberados. En otras palabras, por el hecho de mantener ese inventario, STECO está renunciando a la oportunidad de hacer otras inversiones. Esto, que se conoce como el **costo de oportunidad**, es quizá el factor más importante del costo de mantenimiento del inventario. La magnitud de dicho costo está estrechamente relacionada con la tasa de interés. También hay otros costos de mantenimiento de inventarios, como indemnización por objetos estropeados, mermas o robos, seguros, almacenaje y requisitos especiales de manejo. *Cuanto más abundante sea el inventario, tanto mayores serán los costos de mantenimiento de sus existencias*

Costos de los pedidos Cada vez que STECO hace un pedido para reabastecer sus inventarios, incurre en un costo del pedido. *Este costo es independiente de la cantidad del pedido.* Está relacionado con la cantidad de tiempo empleada en preparar documentación y llevar la contabilidad correspondientes a la presentación del pedido, y es una función directa del costo del personal involucrado.

Costos de faltantes Un **faltante** significa que la empresa se ha quedado sin inventario. En la mayoría de las aplicaciones técnicas, el término *faltante* se refiere a un fenómeno más específico, consistente en que los pedidos llegan después de que el inventario se ha agotado. En el contexto de un modelo, existen dos formas de considerar esos pedidos. Una de ellas consiste en guardar los pedidos y atenderlos más tarde, cuando el inventario haya sido reabastecido. Esto se llama **acumulación.** El estudio de los inventarios incluye modelos para lidiar con la posibilidad de faltantes y, en esos casos, algunos de esos modelos suponen la presencia de la acumulación; otros no la suponen. En cualquiera de los dos casos existe un costo por concepto de faltantes. En ese costo se podrían incluir las ganancias perdidas por no realizar la venta (cuando no hay mercancía acumulada) o por retrasos en la entrega (en caso de acumulación), y también descuentos por varios factores más intangibles, como el costo que implicaría la posible pérdida de clientes, el menoscabo de la buena voluntad y el descrédito que un mal expediente de servicio trae consigo. Cuando se presentan faltantes y no hay mercancía acumulada, empleamos generalmente el término **costo de penalización,** que corresponde al costo unitario de la demanda no satisfecha. En el caso de faltantes con acumulación, hablamos de **costo de acumulación,** el cual se refiere al costo unitario correspondiente a la demanda existente de los bienes que forman dicha acumulación.

Para una compañía como STECO, que tiene cientos de miles de dólares reservados en su inventario, debe haber una forma correcta y una forma errónea de administrar la función de inventario. Los principales pros y contras resultan claros: por una parte, es bueno tener inventario disponible para asegurarse de que será posible atender los pedidos de los clientes (es decir, para evitar los *costos por faltantes*). Por la otra, el mantenimiento de inventarios implica un *costo de mantenimiento de existencias.* Este costo puede reducirse si se piden cantidades pequeñas con mayor frecuencia, pero ese enfoque implica mayores *costos de pedido.* Estos tres factores de costo deberán equilibrarse entre sí.

Una vez respondida la pregunta fundamental de qué artículos conviene pedir, las preguntas subsiguientes son las mismas para todos los sistemas de control de inventarios. Por cada tipo de artículo que se mantenga en inventario, alguien deberá responder las dos preguntas clave sobre este particular: (1) ¿*cuándo* se deberá hacer un pedido para reabastecer sus existencias? y (2) ¿cuál tendrá que ser la **cantidad ordenada,** o *cuánto* será conveniente ordenar? Multitud de factores se combinan para hacer que este problema resulte difícil. Algunas de las consideraciones más importantes son:

1. El grado en el cual se conoce cuál será la demanda futura
2. El costo de los faltantes y la política de la administración (aceptar o no la acumulación)
3. Los costos de los pedidos y el mantenimiento de inventarios
4. La posibilidad de largos *tiempos de entrega* (el periodo que transcurre desde que se hace el pedido hasta que el material llega a su destino)
5. La posibilidad de planes de compra con descuento por cantidad

VENTAS AL MAYOREO DE STECO: LA POLÍTICA ACTUAL

La demanda mensual de los CR para el año anterior aparece en la tabla 8.5. El término **demanda** significa "pedidos recibidos". No coincide necesariamente con las *ventas.* Por ejemplo, en enero del año pasado hubo demanda para 5,300 artículos. Si había en el inventario *por lo menos* 5,300 de esos artículos, entonces las ventas fueron iguales que la demanda (es decir, las ventas fueron 5,300). Si había en el inventario menos de 5,300 artículos, digamos sólo 5,000, entonces las ventas fueron de 5,000, una cantidad menor que la demanda de 5,300, y por consiguiente hubo faltantes.

TABLA 8.5 Demanda mensual de CR

MES	DEMANDA (UNIDADES)
Enero	5300
Febrero	5100
Marzo	4800
Abril	4700
Mayo	5000
Junio	5200
Julio	5300
Agosto	4900
Septiembre	4800
Octubre	5000
Noviembre	4800
Diciembre	5100
Demanda anual total	60,000
Demanda mensual promedio	5000

Por un periodo de varios años, la demanda se ha mantenido a un ritmo uniforme de unos 5,000 CR al mes. Con base en este dato, el año pasado la política de STECO consistió en agregar 5,000 CR a su inventario cada mes. Como se espera que la demanda se mantenga más o menos al mismo nivel en el futuro, esta política se ha conservado hasta hoy. Sin embargo, considerando estos datos, ¿cree usted que sea en verdad una buena política?

Una forma de tratar de responder esta pregunta consistiría en averiguar a *cuánto* ascendería el costo de la política de ordenar 5,000 CR cada mes, utilizando un modelo simplificado y suponiendo, por ejemplo, que

1. Los embarques siempre llegan el primer día del mes.
2. La demanda es conocida y se presenta a un ritmo constante de 5,000 unidades cada mes.
3. Toda la demanda será satisfecha sin acumulación. En otras palabras, no se permiten faltantes.

Con estas suposiciones, podemos trazar una gráfica del inventario disponible en cualquier momento, como lo muestra la figura 8.27. Observe cómo salta el inventario en el equivalente de 5,000 unidades al principio de cada mes, cuando llega cada embarque, y cómo disminuye continuamente al ritmo constante de 5,000 unidades al mes (la tasa mensual constante de la demanda). Observe también que el embarque de reabastecimiento que envía el productor llega en el momento preciso en que el inventario disponible llega a cero. Así, no se producen faltantes. Considerando las suposiciones 1, 2 y 3, el costo de operación del sistema ilustrado en la figura 8.27 depende solamente de *cuántas existencias nuevas incluye el pedido* y de los *costos de mantenimiento y pedidos.* Veamos cómo surge el costo de operación. En primer lugar, observe que la política de ordenar 5,000 CR cada mes, combinada con una demanda constante de 5,000 al mes, produce un inventario promedio de 2,500 CR, como se aprecia en la figura 8.27.

En la figura 8.28 vemos el efecto de ordenar 10,000 CR cada dos meses. Suponiendo que la demanda permanezca constante en 5,000 mensuales, el inventario promedio se duplica, pero el número anual de pedidos de reabastecimiento se reduce a la mitad. En consecuencia, la política de aumentar la cantidad de pedidos incrementa los costos de mantenimiento debido a que el inventario promedio es más abundante, y disminuye el costo anual por concepto de pedidos porque de este modo se requieren menos operaciones de reabastecimiento.

Para responder las dos preguntas anteriores, usaremos un modelo sencillo conocido como el **modelo de la cantidad económica de pedidos (CEP).** En este modelo se intenta equilibrar el costo de colocación de los pedidos con el costo de mantenimiento del inventario.

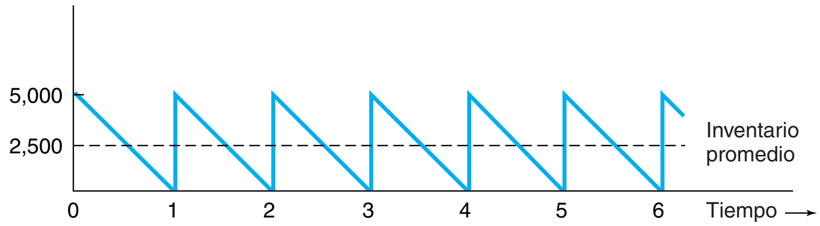


FIGURA 8.27

Inventario disponible, cantidad del pedido: 5,000

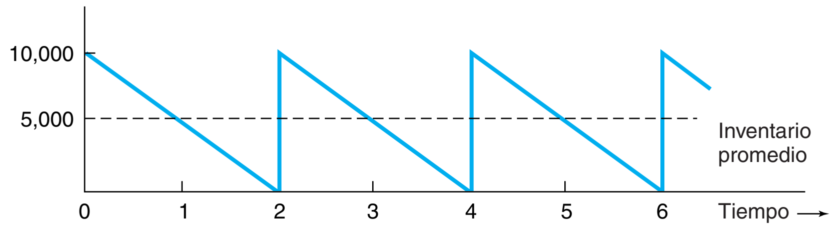


FIGURA 8.28

Inventario disponible, cantidad del pedido: 10,000

DESARROLLO DEL MODELO CEP

En su forma más sencilla, el modelo CEP supone que

1. No se permiten faltantes. Es decir, cada nuevo pedido llega (en su totalidad) en cuanto el nivel del inventario llega a cero.
2. Hay una tasa de demanda constante.
3. Los costos relevantes son los costos del pedido y los costos de mantenimiento de existencias.

El propósito del modelo CEP consiste en encontrar la **cantidad óptima del pedido,** definida como aquella cantidad que, considerando las tres suposiciones anteriores, *minimiza el costo anual total por concepto de pedidos de CR y su mantenimiento en inventario.* Está basado en

1. ***Costo del pedido*** $=$ $\mathbf{C_O}$. Cada vez que se coloca un pedido, el departamento de compras debe contactar al proveedor para determinar el precio actual y la fecha de entrega, llenar el formulario de pedido y enviarlo por correo electrónico, asentar el pedido en el sistema de control del inventario y abrir los registros de recepción y mantenimiento de existencias. Cuando llega el pedido, quien lo recibe debe llenar los registros de recepción y mantenimiento de existencias y actualizar la base de datos sobre el estado de los pedidos. Todo esto cuesta dinero. STECO estima que el costo de colocar un pedido de CR, *independientemente del número de unidades solicitadas*, es de \$25. Esto incluye dos tercios de una hora de trabajo de oficina, a razón de \$18 por hora, un tercio de una hora de tiempo del asistente del agente de compras, a \$24 por hora, más \$5 por concepto de costos de materiales, teléfono y otras telecomunicaciones.

2. ***Costo de mantenimiento del inventario*** $=$ $\mathbf{C_h}$. Cada dólar que se invierte en inventario podría utilizarse en cualquier otra actividad de STECO. Por ejemplo, podría colocarse en un banco o invertirse en pagarés de la Tesorería y ganar intereses para la compañía. Cuando un dólar se reserva al inventario, STECO pierde la oportunidad de invertirlo en otra parte. La oportunidad perdida se conoce como *costo de oportunidad*. De ordinario, el costo de oportunidad representa gran parte del costo de mantenimiento de los inventarios. Además, existen gastos generales, como alquiler, servicios públicos y seguro, que deben asignarse a los artículos que forman el inventario.

El costo de mantenimiento de los inventarios se expresa típicamente como el costo de conservar una unidad durante un año y se calcula como un porcentaje del costo del artículo. STECO estima que el costo de conservar un CR en inventario durante un año es 24% de su precio de compra. La cifra de 24% puede subdividirse en un costo de oportunidad de 20% más un costo variable por artículo de 4%. Como cada CR cuesta \$8, el costo de mantenimiento de cada artículo en el inventario durante un año es

$$C_h = 0.24 \times \$8.00 = \$1.92$$

El costo anual de mantenimiento de existencias y de pedidos El primer paso para calcular la cantidad óptima de pedido (es decir, la que minimiza el costo) consiste en obtener una expresión para el *costo anual de mantenimiento de existencias y de pedidos* (CAMEP) en función de la cantidad del pedido. Esto incluye dos partes: el costo anual de pedidos y el costo anual de mantenimiento de existencias.

$$\text{costo anual de pedidos} = C_O \times (\text{número de pedidos al año}) \qquad \textbf{(8.1)}$$

Si la cantidad pedida es 5,000 unidades, STECO colocará 12 pedidos al año, ya que el modelo supone una demanda total de 60,000, y 60,000/5,000 = 12. La fórmula general es

$$N = \frac{D}{Q} \qquad \textbf{(8.2)}$$

donde N = número de pedidos al año

D = demanda anual

Q = cantidad pedida

Por tanto, en general

$$\text{costo anual de los pedidos} = C_O N = C_O \left(\frac{D}{Q}\right) \qquad \textbf{(8.3)}$$

Para calcular el costo anual de mantenimiento de existencias, STECO usa dos datos: (1) El costo anual de dicho mantenimiento es igual a C_h multiplicado por el inventario promedio, y (2) el inventario promedio es igual a la mitad del inventario máximo cuando la demanda se presenta a una tasa constante. En virtud de que la cantidad del pedido también es la cantidad máxima del inventario disponible (véanse las figuras 8.27 y 8.28), de aquí se desprende que

$$\text{costo anual de mantenimiento de existencias} = C_h \left(\frac{Q}{2}\right) \qquad \textbf{(8.4)}$$

Si sumamos las expresiones (8.3) y (8.4), veremos que las suposiciones del modelo CEP producen la siguiente expresión para los costos anuales de los pedidos y del mantenimiento de existencias en función de la cantidad pedida Q:

$$\text{CAMEP}(Q) = C_O \left(\frac{D}{Q}\right) + C_h \left(\frac{Q}{2}\right) \qquad \textbf{(8.5)}$$

Como la demanda se presenta a un ritmo igual a D unidades al año, sabemos que esas Q unidades se agotarán en el curso de Q/D años, que es precisamente cuando el nivel del inventario descenderá al valor cero. Por ejemplo, cuando $Q = 5000$ y $D = 60{,}000$, el pedido de 5,000 unidades se agota en 5,000/60,000 = 1/12 año = 1 mes, como ya lo habíamos visto (figura 8.27). Para los CR, los valores pertinentes de C_O, D y C_h pueden insertarse en la expresión (8.5) para obtener:

$$\text{CAMEP}(Q) = \$25 \left(\frac{60{,}000}{Q}\right) + \$1.92 \left(\frac{Q}{2}\right) = \left(\frac{1{,}500{,}000}{Q}\right) + 0.96Q \qquad \textbf{(8.6)}$$

Cuando $Q = 5000$ vemos que

$$\text{CAMEP}(5000) = \$300 + \$4800 = \$5100$$

Sin embargo ahora, usando la expresión (8.6), podemos trazar el gráfico del costo anual de mantenimiento y pedidos de los CR en función de la cantidad de pedido Q, como se ilustra en la figura 8.29. Allí se aprecia claramente que la cantidad de pedido óptima (la que minimiza el costo CAMEP[Q]) es de poco más de 1,000 artículos.

La figura 8.30 presenta la versión del modelo de inventario STECO en hoja de cálculo. El modelo es no lineal a causa de la Q que aparece en el denominador de la fórmula del costo de pedidos. Las fórmulas de costo de las celdas C16:C17 son las de los costos de pedidos y mantenimiento, expresadas anteriormente. Debido a que no es una función de Q, el costo de compra (= precio de compra × demanda anual) es constante y resulta innecesario para el cálculo de la Q óptima. Se ha incluido aquí para presentar completo el total de costos anuales. Se ha incluido la restricción de que se realice cuando menos un pedido al año, para evitar que Solver ensaye con el (absurdo) valor candidato $Q = 0$, pues eso produciría un error "#DIV/0!" en la fórmula del costo de pedidos, lo cual interrumpiría la optimización de Solver. Se muestra entonces la solución óptima, que confirma la representación gráfica de la figura 8.29.

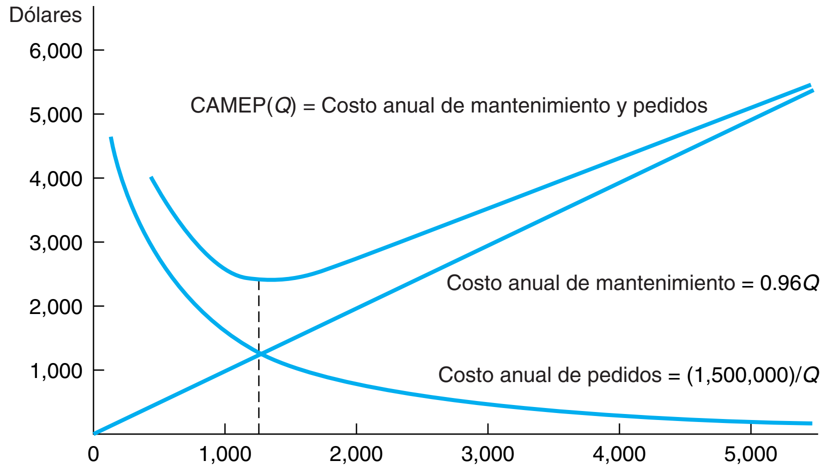
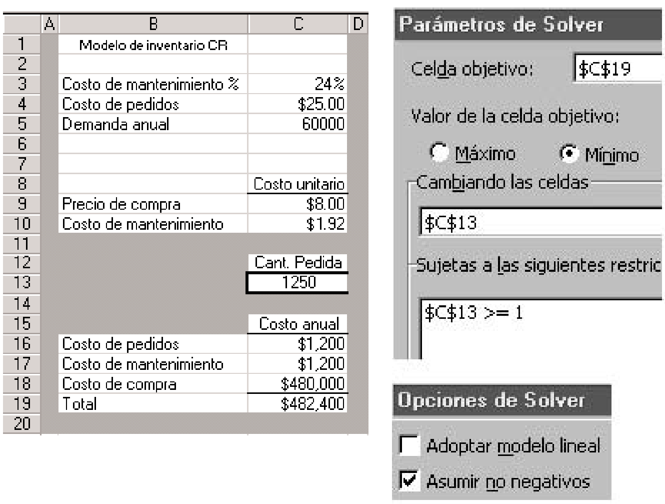


FIGURA 8.29

Costos anuales de mantenimiento de existencias y de pedidos de STECO en función de la cantidad del pedido



Celda	Fórmula
C10	= C3*C9
C16	= C4*C5/C13
C17	= C10*C13/2
C18	= C9*C5

FIGURA 8.30

Modelo de CEP de STECO

LA FÓRMULA CEP: Q^*

Obviamente sería útil contar con una expresión para Q^*, la cantidad de pedido óptima. (El asterisco indica el valor de Q que constituye la solución óptima del modelo.) Esta forma es tan sencilla que podemos obtener una fórmula para calcular su valor en función de los parámetros del problema, usando el cálculo para minimizar la función CAMEP(Q) presentada en (8.5). Una consecuencia de este enfoque es que, en el punto óptimo, el costo anual de mantenimiento de existencias es igual al costo anual de pedidos[11]

[11]La afirmación de que la cantidad que minimiza el costo se presenta en el punto donde son iguales los dos términos, el costo anual de mantenimiento de existencias y el costo anual de pedidos, es válida para estas funciones, pero no es válida en general.

$$C_h = \left(\frac{Q^*}{2}\right) = C_O\left(\frac{D}{Q^*}\right) \tag{8.7}$$

o

$$(Q^*)^2 = \frac{2C_OD}{C_h} \tag{8.8}$$

o

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_OD}{C_h}} \tag{8.9}$$

En algunos casos puede ser conveniente estimar C_h suponiendo que representa cierto porcentaje (llamémosle i) del precio de compra (P); es decir, que $C_h = iP$. En esas condiciones, la ecuación 8.9 puede escribirse así

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_OD}{iP}} \tag{8.10}$$

En nuestro ejemplo, P, el precio de compra de los CR, es \$8, mientras que i, la fracción de P que se utiliza para calcular C_h, es 0.24.

La cantidad Q^* se conoce a menudo como la **cantidad económica de pedido** (CEP) y conviene señalar que se expresa en términos de los parámetros de entrada C_O, C_h y D. Si sustituimos los valores de los CR para D, C_O y C_h en (8.9), la cantidad de pedido óptima que corresponde a los CR es:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 60{,}000 \ \times 25}{1.92}} = 1250$$

Introduciendo este valor en la expresión correspondiente al costo anual de mantenimiento de existencias y de pedidos para los CR (ecuación [8.6]), obtenemos

$$\text{CAMEP}(Q^*) = \text{CAMEP}(1250) = \frac{(1{,}500{,}000)}{1250} + (0.96)(1250)$$

$$= \$1200 + \$1200 = \$2400$$

Estos valores son los mismos que Solver encontró en la figura 8.30.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

La posibilidad de que sea menester utilizar una política CEP óptima en el futuro depende del grado de realismo de las suposiciones. Después de todo el modelo CEP, como cualquier otro, es una idealización. No es más que una representación selectiva de la realidad: una abstracción y una aproximación. En este caso, tal como sucede con todos los modelos, la principal interrogante es: "¿Qué tan sensibles son los resultados del modelo a las suposiciones y a los datos?"

Puesto que el modelo es bastante realista, parece razonable suponer que los costos de inventario obtenidos dentro del modelo serán estimaciones bastante acertadas de los costos que STECO pagará en realidad. Por consiguiente, el uso de una política que sea óptima en el modelo (ordenar en cantidades de 1,250) parece preferible a la política tradicional de pedir 5,000 unidades. Sin embargo, a STECO le interesaría saber cuál es la sensibilidad que muestran ante los datos la cantidad de pedido óptima y, más importante aún, el costo anual óptimo. Después de todo, cada uno de los parámetros C_O y C_h es en sí mismo una estimación. Si STECO se equivoca al estimar estos parámetros, ¿qué efecto tendrá ese error sobre la diferencia entre los valores calculados para Q^* y CAMEP* y los valores verdaderos de Q^* y CAMEP*? Si los resultados son bastante sensibles a los valores de las estimaciones, no se sabrá claramente si la política óptima sugerida por el modelo tendrá que ser implantada en realidad por STECO.

Por consiguiente, consideremos ahora cómo pueden variar los resultados de la CEP cuando introducimos cambios en nuestros costos estimados del mantenimiento de existencias y de los pedidos. Recordemos la suposición de STECO de que C_h = \$1.92 y C_O = \$25. Estudiaremos cuatro casos en los cuales los parámetros verdaderos son diferentes de los valores seleccionados por STECO. Esos "valores verdaderos" aparecen en las dos primeras columnas de la tabla 8.6.

En el caso (i) STECO estimó en forma excesiva ambos parámetros de costo en 10% aproximadamente cada uno. Si hubiera estimado correctamente los parámetros, habría ordenado 1,267 unidades del artículo, incurriendo en un costo anual de \$2,179 por mantenimiento de exis-

TABLA 8.6 Sensibilidad a $C_h + C_O$

(1) PARÁMETROS VERDADEROS		(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
C_h	C_O	Q óptima	Costo mínimo ($)	Decisión de STECO*	Costo de STECO ($)	Pérdida (%)
(i) 1.72	23	1267	2179	$Q = 1250$	2179	0
(ii) 1.72	27	1372	2361	$Q = 1250$	2371	0.42
(iii) 2.12	23	1141	2419	$Q = 1250$	2429	0.41
(iv) 2.12	27	1236	2621	$Q = 1250$	2621	0

*Basada en C_h = $1.92, C_O = $25.

tencias y pedidos. En virtud de los errores de STECO en la estimación de parámetros, se ordenan 1,250 unidades. Para averiguar qué costos tendrá realmente STECO, la ecuación del CAMEP deberá evaluarse usando los valores verdaderos de sus parámetros (C_h = $1.72 y C_O = $23 en el caso [i]) y el valor de Q deberá ser determinado por las estimaciones de STECO (1,250). Presentamos a continuación el cálculo correspondiente:

$$\text{CAMEP}(Q) = C_O\left(\frac{D}{Q}\right) + C_h\left(\frac{Q}{2}\right)$$

$$= 23\left(\frac{60{,}000}{1250}\right) + \$1.72\left(\frac{1250}{2}\right)$$

$$= \$2179$$

Este número aparece como el costo de STECO en la columna (5). Así pues, vemos que si STECO estima en forma demasiado baja los dos parámetros de costo, como se muestra aquí, eso no tendrá efecto alguno sobre el costo anual de mantenimiento de existencias y de pedidos (redondeado al dólar más próximo). Con los otros tres casos se demuestra que el efecto producido sobre el costo anual de mantenimiento de existencias y de pedidos por cualquier combinación de errores de 10% en las estimaciones de C_O y C_h es insignificante.

Nuestro análisis sugiere que, en el caso de STECO, el modelo CEP es insensible a variaciones, en las estimaciones de costo, hasta de 10% aproximadamente. En realidad, ésta es una propiedad que comparten todos los modelos CEP en general.

8.13 EJEMPLOS DE MODELOS DE INVENTARIO

El modelo de inventario utilizado por STECO en el ejemplo anterior es el "clásico" modelo CEP para minimizar el costo anual de mantenimiento de existencias y de pedidos. Sin embargo, en la práctica existen muchas variantes de esta fórmula CEP clásica, y cada una de ellas requiere una nueva formulación de las relaciones de inventario y que se calcule otra vez el valor de la CEP. Presentamos dos ejemplos a manera de ilustración.

DESCUENTOS POR CANTIDAD Y EL VALOR ÓPTIMO GENERAL DE STECO

Aun cuando fue incluido en la hoja de cálculo de la figura 8.30, antes no hubo necesidad de tomar en cuenta el costo de compra del producto, pues el costo por artículo para STECO se consideraba como una constante independiente de Q. Sin embargo, el proveedor de CR de STECO le ofrecerá un **descuento por cantidad** como incentivo para incrementar sus compras. El proveedor ha accedido a otorgar un descuento de $0.10 por cada CR comprado si STECO hace pedidos por partidas de 5,000 unidades como mínimo. Por supuesto, las cantidades de tipo más elevado reducirán también el número de pedidos requeridos y, por consiguiente, el costo anual de pedidos. Como ya dijimos (compare las figuras 8.27 y 8.28), un pedido por una gran cantidad conduce a un nivel de inventario promedio más alto y, por ende, a mayores costos de mantenimiento de existencias. No resulta obvio si el descuento será benéfico para STECO en términos generales.

Procedamos igual que antes; es decir, vamos a desarrollar una curva de costo anual y después encontraremos la cantidad de pedido que la minimice. El costo total anual de STECO (CTA[Q]) es la suma del costo anual de mantenimiento y de pedidos (CAMEP[Q]) y el costo de compra anual (CCA), es decir,

$$\text{CTA}(Q) = \text{CAMEP}(Q) + \text{CCA}$$

Por la ecuación (8.5) y el hecho de que $C_h = iP$,

$$\text{CAMEP}(Q) = C_O\left(\frac{D}{Q}\right) + iP\left(\frac{Q}{2}\right)$$

Observe que como C_h depende del precio de compra unitario P, la expresión para el CAMEP también incluye a P. El costo de compra anual es simplemente el precio de compra unitario multiplicado por la demanda anual. Así,

$$\text{CCA} = PD$$

De donde se desprende que

$$\text{CTA}(Q) = C_O\,(Q) + iP\left(\frac{Q}{2}\right) + PD$$

Para conocer el efecto del descuento, evalúe esta función con dos precios diferentes, el precio regular de \$8.00 por unidad y el precio de descuento potencial de \$7.90 por unidad.

Ecuación del precio regular:

$$\text{CTA}(Q) = \frac{25 \times 60{,}000}{Q} + (0.24)(8.00)\left(\frac{Q}{2}\right) + (8.00)(60{,}000)$$

Ecuación del precio con descuento:

$$\text{CTA}(Q)\,\frac{25 \times 60{,}000}{Q} + (0.24)(7.90)\left(\frac{Q}{2}\right) + (7.90)(60{,}000)$$

La forma general de estas curvas se ilustra en la figura 8.31. Aquí tenemos varias cosas que observar.

1. La curva de descuento está debajo de la curva de costo regular. Esto se debe a que cada término del precio regular CTA(Q) es igual o mayor que el término correspondiente en el precio con descuento CTA(Q).
2. El valor de Q, digamos Q_D^*, que minimiza el precio con descuento CTA(Q) es mayor que el valor Q, digamos Q_R^*, que minimiza el precio regular = CTA(Q). Esto es válido porque, usando la ecuación (8.10),

$$Q_D^* = \sqrt{\frac{2 \times 25 \times 60{,}000}{(0.24) \times (7.90)}} > \sqrt{\frac{2 \times 25 \times 60{,}000}{(0.24) \times (8.00)}} = Q_R^*$$

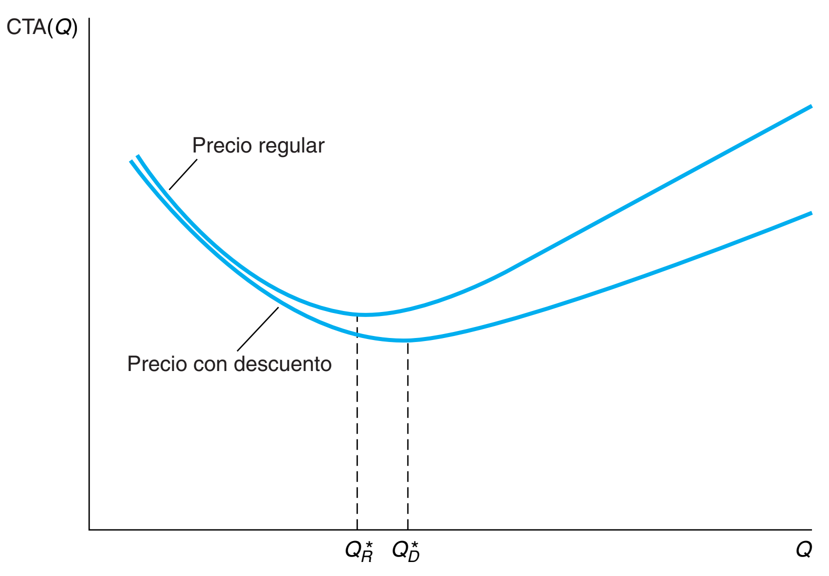


FIGURA 8.31

Costo total anual para precios regulares y con descuento

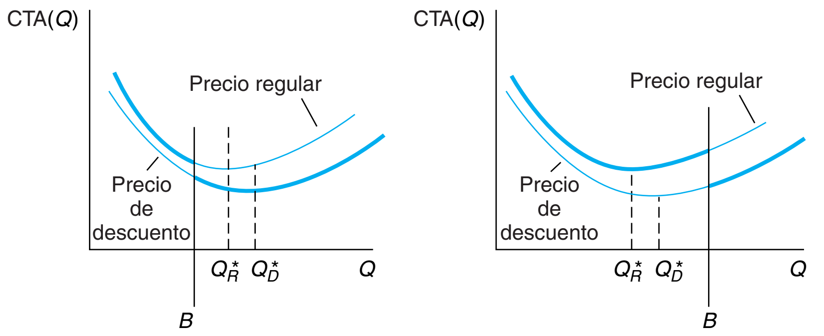


FIGURA 8.32

Efecto del tamaño de pedido mínimo, *B*, sobre la cantidad del pedido

Como es obvio, a STECO le agradaría minimizar su costo total anual, CTA (Q). Si STECO pudiera conseguir el precio de descuento, independientemente de la cantidad del pedido, pediría por supuesto Q_D^*. Sin embargo, suponga que el precio de descuento se presenta solamente cuando STECO pide por lo menos B artículos a la vez. Podrían presentarse dos situaciones que aparecen ilustradas en la figura 8.32.

Las porciones de las curvas de estas figuras marcadas con una línea más gruesa indican la función de costo real que enfrenta STECO. En ellas se ilustra que es preciso usar la curva del precio regular cuando las cantidades del pedido son B o menos, y que la curva del precio de descuento se puede usar cuando las cantidades del pedido son mayores que B.

Observamos que si $B \leq Q_D^*$, STECO logrará el mínimo costo si pide Q_D^*. Sin embargo, si $B > Q_R^*$, entonces la decisión óptima en general no es obvia en forma inmediata. Lo mejor que puede hacer STECO con la curva del precio regular es pedir Q_R^*. En el caso de la curva del precio de descuento, lo mejor que puede hacer STECO es pedir B. (STECO no puede hacer pedidos por una cantidad menor que B y obtener el precio de descuento, pero al pedir una cantidad mayor que B aumentará el CTA.) Para determinar cuál de estos casos es el óptimo, STECO tiene que calcular el CTA(Q) en esos dos puntos y comparar ambos resultados. Así pues, la regla general es

$$\text{Si B} \leq Q_D^*, \quad \text{pida} \quad Q_D^*.$$

$$\text{Si B} > Q_D^*, \text{ pida} \quad \begin{cases} Q_R^* \text{ si el precio regular} \leq \text{precio de descuento} \\ \quad \text{CTA } (Q_R^*) \quad \leq \text{CTA } (B) \\ B \text{ si no es así} \end{cases}$$

Para aplicar esta regla, STECO deberá pedir por lo menos 5,000 artículos a fin de recibir el descuento. Así, $B = 5{,}000$.

La figura 8.33 presenta la versión del modelo de inventario en hoja de cálculo con descuentos por cantidad. A diferencia del enfoque empleado anteriormente, el modelo en hoja de cálculo ha sido formulado para mostrar el costo anual como un Costo Anual sin descuento en las celdas C16:C19 menos un ajuste de costo para representar el descuento por cantidad, si lo hubiera. Es decir, si se recibe el descuento, se hace un ajuste a los costos anuales afectados, el Costo de Mantenimiento de Existencias y el Costo de Compra, para reflejar el monto de los descuentos. Estos costos son incorporados al Costo Neto Total, en las celdas E16:E19. Este enfoque permite considerar el descuento como una variable de decisión binaria (entera) en la celda D13. La fórmula contenida en E13 es = D7*D13. Así, si D13 es ajustada por Solver a 0 (sin descuento), la restricción se convierte en Cantidad del Pedido ≥ 0. De lo contrario, si D13 es ajustada por Solver a 1 (descuento concedido), entonces los ajustes a los costos son diferentes de cero y la restricción se convierte en Cantidad del Pedido $\geq 5{,}000$.

Solver optimiza de esta forma una programación no lineal con enteros mixtos (PNLEM) para evaluar las dos funciones CEP, una con descuento y otra sin él. Si el modelo se amplía para abarcar múltiples descuentos (es decir, varios umbrales de descuento por cantidad, cada uno de éstos asociado a un “ajuste” del monto total de costos) se requiere la adición directa de otras variables binarias, restricciones apropiadas para reflejar las cantidades mínimas y algunas modificaciones a las fórmulas del ajuste por descuento.

	A	B	C	D	E	F
1		Modelo de inventario CR				
2			Sin descuento	Con descuento		
3		Costo de mantenimiento %	24%	24%		
4		Costo de pedidos	$25.00	$25.00		
5		Demanda anual	60000	60000		
6		Monto del descuento		$0.10		
7		Tamaño de pedido mínimo		5000		
8			Costo unitario	Ajuste por descuento	Costo unitario neto	
9		Precio de compra	$8.00	-$0.10	$7.90	
10		Costo de mantenimiento	$1.92	-$0.024	$1.896	
11						
12			Cant. Pedida	Descuento	Cantidad de pedido mínimo	
13			5000	1	>=5000	
14						
15			Costo anual	Ajuste por descuento	Costo neto	
16		Costo de pedido	$300		$300	
17		Costo de mantenimiento	$4,800	-$60	$4,740	
18		Costo de compra	$480,000	-$6,000	$474,000	
19		Costo total	$485,100	-$6,060	$479,040	
20						

	A	B	C	D	E	F
8			Costo unitario	Ajuste por descuento	Costo unitario neto	
9		Precio de compra	8	=-D6	=SUMA(C9:D9)	
10		Costo de mantenimiento	=C3*C9	=D3*D9	=SUMA(C10:D10)	
11						
12			Cant. Pedida	Descuento	Cantidad de pedido mínimo	
13			5000	1	=D7*D13	
14						
15			Costo anual	Ajuste por descuento	Costo neto	
16		Costo de pedido	=C4*C5/C13		=SUMA(C16:D16)	
17		Costo de mantenimiento	=C10*C13/2	=D13*D10*C13/2	=SUMA(C17:D17)	
18		Costo de compra	=C9*C5	=D13*D9*D5	=SUMA(C18:D18)	
19		Costo total	=SUMA(C16:C18)	=SUMA(D16:D18)	=SUMA(E16:E18)	
20						

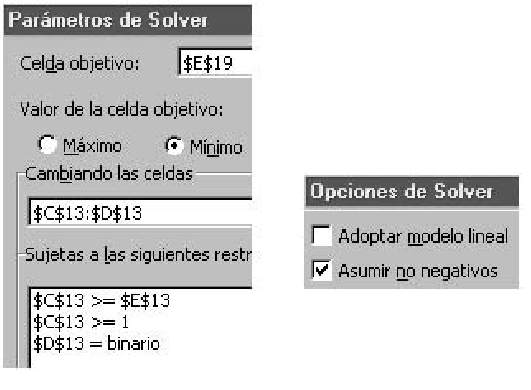


FIGURA 8.33

Modelo CEP de STECO con descuentos por cantidad

Para el caso de STECO, la figura 8.33 indica que la compañía debería pedir 5,000 artículos para aprovechar el descuento por cantidad. Con esta decisión ahorra

$$\$482,400 - \$479,040 = \$3360$$

al año en comparación con la siguiente mejor decisión (pedir Q_R^*). Resulta claro que los descuentos por cantidad pueden tener un papel importante en la determinación de una política de inventario óptima.

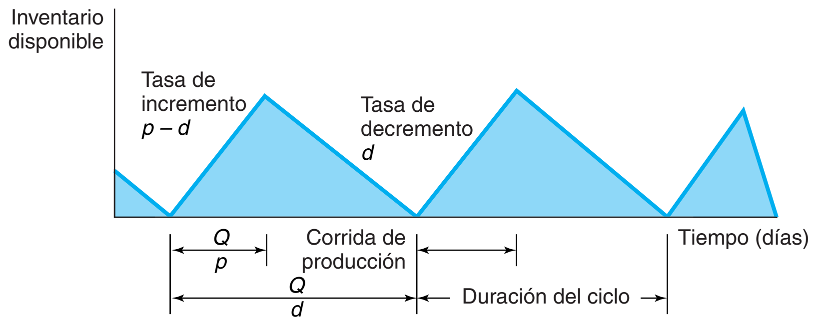


FIGURA 8.34

Inventario disponible para el modelo del tamaño del lote de producción

TAMAÑO DEL LOTE DE PRODUCCIÓN: MODELO DE TRATAMIENTO TÉRMICO DE STECO

Aunque STECO es principalmente mayorista, también tiene cierta capacidad de producción. En particular, posee una amplia y moderna instalación para la fabricación de "forro" para cable de fibra por tratamiento térmico, que utiliza para producir diversos artículos especializados de cable que conserva en su inventario. La instalación de tratamiento térmico tiene dos características importantes: hay un considerable costo de puesta en marcha asociado a la fabricación de cada producto de cable, pero, una vez que el ajuste inicial se ha realizado, la producción se desarrolla a un ritmo uniforme conocido.

El costo de ajuste inicial, análogo al costo de pedidos en el modelo CEP, se origina por la necesidad de cambiar los moldes de fibra plástica y la temperatura de operación en la instalación de tratamiento térmico, para hacerlas concordar con la especificación de normas para la elaboración de cables. Además, cada cable debe tener conectores en sus extremos y someterse a pruebas de su capacidad para transmitir la luz. Así pues, la cantidad pedida de cables para red no llega del departamento de producción a inventario en una sola operación. Más bien, llega por partes en un lapso de varios días. Con este cambio se requiere una modificación de la fórmula CEP, aun cuando se mantengan las suposiciones de una tasa de demanda constante y de un costo de mantenimiento de existencias en el inventario igual a C_h multiplicado por el inventario promedio.

En general, es más conveniente trabajar con este modelo en términos de producción y tasas de demanda diaria. Por lo tanto, considere un producto en el cual

d = número de unidades solicitadas cada día

p = número de unidades producidas cada día durante una corrida de producción

C_O = costo de ajuste inicial que es independiente de la cantidad producida

c_h = costo *diario* de mantener las existencias del inventario (observe el cambio de notación que pone de relieve el costo diario de mantenimiento de existencias)

Es obvio que p debe ser mayor que d para que el modelo sea interesante. (Si $p < d$, la demanda es mayor que la capacidad de producción de STECO, y el mantenimiento del inventario es el menor de sus problemas.) En la figura 8.34 presentamos una gráfica que ilustra cuál sería el aspecto general del inventario disponible si STECO decidiera realizar su producción en lotes de Q artículos cada uno.

Esta gráfica tiene varios aspectos que es necesario tomar en cuenta para calcular el mantenimiento promedio, el ajuste inicial y el costo diarios.

1. Durante una corrida de producción, los artículos se agregan al inventario a razón de p unidades diarias y son removidas del mismo a razón de d por día. El efecto neto es un incremento a razón de $p - d$ unidades diarias.
2. En otros momentos, los artículos son retirados del inventario a razón de d artículos diarios.
3. Puesto que en una partida se producen Q artículos a razón de p artículos diarios, la duración de cada partida de producción es Q/p días.
4. Como en cada partida se producen Q artículos y d es la tasa de demanda diaria, cada **duración del ciclo** —es decir, el intervalo entre el inicio del arribo de los artículos para reabastecimiento— es de Q/d días de duración.

Los datos 1 y 3 pueden usarse para encontrar la cantidad máxima de inventario disponible (véase la figura 8.34).

$$\text{inventario máximo} = (p - d)\frac{Q}{p}$$

Como el inventario promedio es igual a la mitad del inventario máximo, de aquí se desprende que

$$\text{inventario promedio} = \frac{1}{2}(p - d)\frac{Q}{p}$$

Reordenando los términos de la expresión anterior, obtenemos

$$\text{inventario promedio} = \; = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

$$\text{costo diario de mantenimiento} = c_h\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

En forma similar, como hay una operación de preparación o ajuste inicial en cada ciclo, y un ciclo dura Q/d días,

$$\text{preparación o ajuste inicial por día} = \frac{C_O}{Q/d} = C_O\frac{d}{Q}$$

De este modo, el costo diario de mantenimiento de existencias y ajuste inicial, expresado como DMA(Q), se define con la expresión

$$DMA(Q) = C_o\frac{d}{Q} + c_h\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

Si piensa usted en $c_h\,(1 - d/p)$ como una constante, esta expresión adopta la misma forma dada por (8.5), la expresión correspondiente al costo anual de mantenimiento de existencias y pedidos en el modelo CEP.

De esto se desprende que el valor de Q que minimiza el DMA(Q) estará representado por la ecuación CEP (8.9) con C_h debidamente modificado. Así, para el **modelo del tamaño del lote de producción**,

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_o d}{c_h\left(1 - \frac{d}{p}\right)}} \qquad \textbf{(8.11)}$$

(El resultado podría obtenerse también mediante el cálculo.) Sustituyendo Q^* por Q en la expresión del DMA(Q) y simplificando, tenemos una expresión para el costo mínimo diario de mantenimiento de existencias y de ajuste inicial:

$$DMA(Q^*) = \sqrt{2C_O d c_h\left(1 - \frac{d}{p}\right)}$$

Observe que esta expresión no depende de Q; sólo es válida cuando el tamaño del lote es igual al valor de la expresión correspondiente en la ecuación (8.11).

Para aplicar este análisis a cualquier producto en particular, STECO debe estimar los diversos parámetros para ese producto y después evaluar (8.11) para obtener Q^*. Así, una vez que han sido estimados los parámetros, la tarea de encontrar Q^* se reduce a la evaluación de las fórmulas.

A fin de ilustrar este modelo, supongamos que la demanda de este producto promedia 200 CR al día. Cuesta \$100 el ajuste inicial para los forros, el tratamiento térmico y la prueba de los cables fabricados, después de lo cual éstos pueden ser producidos a razón de 400 CR diarios. STECO estima el costo diario de mantenimiento de existencias como (\$1)(0.24)/240 = \$0.001, donde \$1 es el costo de producción del CR y 0.24 es la tasa de interés anual aplicada por STECO para todos los productos. La cifra de 240 es el número estimado de días laborables en el año. El tamaño óptimo del lote de producción para este artículo es, por tanto,

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 200 \times 100}{0.001\left(1 - \frac{200}{400}\right)}} = 8944$$

y el costo diario mínimo de mantenimiento de existencias y ajuste inicial es

$$\sqrt{2 \times 200 \times 100 \times 0.001 \left(1 - \frac{200}{400}\right)} = \$4.47$$

Una corrida de producción de este tamaño rinde una provisión de CR suficientemente grande para satisfacer la demanda durante

$$\frac{8944}{200} = 44.72 \text{ días}$$

En forma alternativa, se puede usar Solver para realizar la optimización que, en otras condiciones, requeriría la aplicación del cálculo para determinar las fórmulas, como lo vimos con anterioridad, y que puede no ser aplicable si algunas de las suposiciones son alteradas. El modelo de PNL en hoja de cálculo para el problema del tamaño del lote de producción se ilustra en la figura 8.35. En la práctica, STECO podría ajustar esta cantidad para tomar en cuenta el hecho de que también otros productos utilizan la instalación para el tratamiento térmico de cables. Además, STECO tal vez realizaría un análisis de sensibilidad de este modelo, muy similar al realizado con el modelo CEP en la sección 8.12.

	A	B	C	D
1		Modelo de producción e inventario		
2		Días laborables al año	240	
3		Costo anual de mantenimiento %	24%	
4		Costo de ajuste inicial para producción	$100	
5		Demanda anual	48000	
6		Demanda diaria	200	
7		Tasa de producción/día	400	
8			Costo unitario	
9		Costo variable de producción	$1.00	
10		Costo diario de mantenimiento	$0.001	
11				
12		Tamaño del lote de producción	8944	
13			Costo diario	
14		Costo de pedidos	$2.24	
15		Costo de mantenimiento de existencia	$2.2361	
16		Costo de producción	$400.00	
17		Total	$404.47	
18				

	A	B	C	D
8			Costo unitario	
9		Costo variable de producción	1	
10		Costo diario de mantenimiento	=C3*C9/C2	
11				
12		Tamaño del lote de producción	8944.28	
13			Costo diario	
14		Costo de pedidos	=C4*C6/C12	
15		Costo de mantenimiento de existencias	=C10*C12/2*(1-C6/C7)	
16		Costo de producción	=C9*C7	
17		Total	=SUMA(C14:C16)	
18				

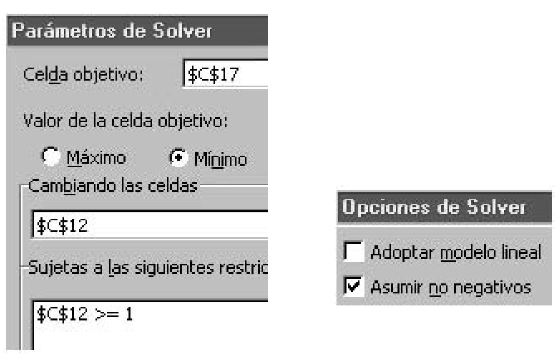


FIGURA 8.35

Modelo del tamaño del lote de producción para STECO

En otras variantes de este modelo o del modelo CEP se podrían agregar existencias de seguridad, por la posibilidad de que la demanda se adelantara a la producción en las primeras fases de una corrida de fabricación. En una variante más se podría incorporar el concepto de inventario acumulado, en el cual los costos de penalización por no disponer de inventario se comparan con los ahorros obtenidos gracias a la disminución de los niveles promedio de inventario.

8.14 NOTAS SOBRE LA APLICACIÓN DE LA PNL

La práctica de la optimización no lineal es, en algunos aspectos, de carácter más artístico que la práctica de la PL. En sus aspectos principales, casi todos los optimizadores de PL son similares, ya que constituyen variantes del método símplex.[12] Aun cuando no sería difícil encontrar hasta 10 o 15 procedimientos muy diferentes para resolver modelos de PNL, Solver usa solamente uno de ellos. Para encontrar el mejor método para un modelo dado, e incluso para entender las diferencias entre varios enfoques, tendrá usted que ser un experto matemático, por lo menos a este respecto. Otra cuestión delicada en la práctica de la PNL es que, desde el punto de vista matemático, existen muchos tipos diferentes de modelos no lineales con distintas propiedades teóricas (mientras que sólo hay un tipo de PL). A esto se añade la necesidad de lidiar con el problema de las soluciones locales *versus* las globales para el modelo. Tendrá usted que tener suficientes conocimientos de la estructura matemática del modelo para formarse siquiera una idea sobre la calidad de la solución (por ejemplo, local *versus* global) producida por Solver, y a menudo tendrá que experimentar un poco para encontrar soluciones mejoradas

Aun cuando la mayoría de los optimizadores de PNL, como Solver, calculan los multiplicadores de Lagrange (es decir, los precios sombra) y los gradientes reducidos junto con la solución, generalmente no se dispone de un análisis adicional de sensibilidad. Por tanto, desde el punto de vista de la administración, la salida de un modelo de PNL contiene menos información que la salida de uno que sea PL.

Si bien es cierto que la PNL se aplica a un amplio espectro de modelos, es probable que sus aplicaciones más comunes se presenten en situaciones donde el modelo tiene una estructura especial, como la PC. Por ejemplo, puede haber restricciones lineales con una función objetivo no lineal, y así sucesivamente. En esos casos, existe una esperanza de resolver modelos de una escala razonablemente grande.

¿Qué entendemos por "gran escala" en la PNL? Una vez más, este concepto está definido en forma mucho menos clara que en el caso de la PL. Con un programa cuadrático cóncavo o convexo, podemos concebir varios miles de restricciones y variables. Este poder proviene del hecho de que, cuando se trata de un modelo de ese tipo, se emplea a menudo una variante del método símplex.[13] Sin embargo, para modelos no lineales más generales, sin una estructura especial que pudiera aprovecharse, podríamos considerar que un modelo con más de 500 variables resultaría grande, incluso para una computadora con la capacidad de una estación de trabajo.[14]

Las tres últimas secciones del capítulo estuvieron dedicadas a aplicaciones de la PNL en la optimización de carteras de valores en el ramo de las finanzas, y al modelo básico CEP (cantidad económica del pedido) y sus diversas modificaciones, en administración de inventarios. Este último ejemplo, con modificaciones del modelo básico CEP, demostró que la cantidad óptima del pedido debe modificarse en presencia de un descuento por cantidad, y para el caso en que no se piden artículos de una fuente exterior, sino que se producen en forma interna.

Estos dos tipos de ejemplos de PNL, presentados en las secciones 8.10 a 8.13, satisfacen los requisitos de concavidad y convexidad que hacen tan atractiva la aplicación de modelos de PNL. En consecuencia, la PNL tiene amplias aplicaciones en finanzas y también en administración de inventarios. Es probable que otras aplicaciones de la PNL estén agrupadas en rubros tales como ingeniería de diseño, estimación estadística no lineal, distribución de productos, aplicaciones físicas como la perforación de pozos petroleros y, finalmente, la programación y utilización óptima de equipo cuando los costos de las operaciones no son lineales.

[12] En los últimos años se han desarrollado nuevos métodos para la optimización de PL, basados en aproximaciones diferentes del procedimiento símplex clásico que utiliza Solver. Los indicios y resultados preliminares sugieren que esos nuevos métodos sólo son más eficientes con modelos de PL muy grandes, en los que intervienen miles de variables.

[13] Por ejemplo, una versión comercial mejorada de Solver de Excel, llamada Premium Edition Solver, optimiza modelos de PNL más grandes (hasta con 400 variables de decisión) e incluye un optimizador especial para modelos de PC, lo cual permite hasta 800 variables de decisión.

[14] Las limitaciones de Solver de Excel, en el caso de los modelos de PNL, establecen un máximo de 200 variables de decisión y no más de 100 restricciones, pasando por alto cualesquiera restricciones simples de límite o acotamiento inferior o superior para las variables de decisión.

Términos clave

Acumulación de atrasos. Recurso que consiste en entregar los bienes a los clientes algún tiempo después de haberse recibido el pedido, en lugar de hacerlo inmediatamente después de la recepción de éste.

Análisis de cartera de inversiones. Modelo para minimizar la varianza del rendimiento, sometido al requisito de obtener cierto rendimiento esperado.

Cantidad de pedido óptima. Cantidad que minimiza el costo anual total de colocar pedidos y mantener existencias de un artículo en particular.

Cantidad del pedido. Parte del sistema de control de inventarios. Es el número de artículos solicitados cuando se coloca un pedido.

Cantidad económica de pedido. Cantidad de pedido óptima calculada con el modelo CEP.

Condiciones de optimalidad de primer orden. Condiciones necesarias para la existencia de un punto óptimo; todas las derivadas parciales deben tener un valor igual a cero.

Condiciones de optimalidad de segundo orden. Condiciones suficientes para la existencia de un punto óptimo.

Conjunto de puntos convexo. Conjunto de puntos para el cual el segmento de recta que conecta entre sí a cualquier pareja de puntos debe estar contenido totalmente dentro del conjunto.

Costo de acumulación de atrasos. Uno de los parámetros de costo en el modelo ampliado CEP para incluir dicha acumulación. El costo de retener un artículo durante un periodo específico.

Costo de faltantes. Se expresa en función del costo de penalización o el costo de acumulación de atrasos.

Costo de mantenimiento de existencias. Costo que implica la conservación de existencias en el inventario; incluye los costos de oportunidad más los costos directos, como mermas, seguros y obsolescencia.

Costo de mantenimiento en inventario. Uno de los parámetros de costo del modelo CEP. Costo de mantener un artículo en inventario durante un periodo específico.

Costo de oportunidad. Si opta por una acción (digamos, A) implica que no es posible desarrollar otra acción (digamos, B), entonces el rendimiento neto asociado a la acción B es un costo de oportunidad por realizar la acción A.

Costo de pedidos. Uno de los parámetros de costo del modelo CEP. Es el costo marginal de la colocación de un pedido.

Costo de penalización. Pérdida que se registra en un modelo sin acumulación de atrasos cuando no es posible satisfacer la demanda; se expresa generalmente como un costo unitario de demanda no satisfecha.

Covarianza. Una medida estadística del grado en el cual están correlacionadas varias cantidades aleatorias.

Demanda. Número de artículos solicitados. A causa de los faltantes, esta cifra puede ser diferente del número de artículos vendidos.

Descuento por cantidad. Plan de compra en el cual el vendedor ofrece un precio especial al comprador si éste compra una cantidad específica o más.

Desviación estándar. La raíz cuadrada de la varianza.

Duración del ciclo. Intervalo que transcurre entre la llegada de dos pedidos consecutivos.

Faltantes. Fenómeno que se presenta cuando no hay suficiente inventario disponible para satisfacer la demanda.

Frontera eficiente. La función VO de un PC para análisis de cartera.

Gradiente reducido. Asociado a una variable de decisión, es la tasa de cambio inicial del valor óptimo de la función objetivo cuando dicha variable se aparta de cualquier acotamiento o límite superior o inferior obligatorio para su valor. Si una variable de decisión no negativa llega a cero después de la optimización, el gradiente reducido es la tasa a la cual resulta perjudicado el valor de la función objetivo cuando la variable es obligada a apartarse de su valor cero. Se conoce como *costo reducido* en los modelos de PL (véase el capítulo 5).

Inventario. Cantidad de bienes, dinero o individuos reunidos en previsión de futuras necesidades.

Modelo de la cantidad económica de pedido (CEP). Modelo para control de inventarios con tasa de demanda constante, en el cual los costos relevantes son los de pedidos y mantenimiento de existencias, y tal vez los de la atención de la demanda por acumulación de atrasos.

Modelo del tamaño del lote de producción. Modificación del modelo CEP que permite incluir una tasa finita de recepción de materiales.

Multiplicador de Lagrange. Asociado a una restricción, es la tasa de cambio del valor óptimo de la función objetivo cuando el LD de dicha restricción aumenta. En los modelos de PL se le llama *precio sombra* (véase el capítulo 5).

Programa cóncavo. Modelo Max con una función objetivo cóncava y un conjunto de restricciones convexo.

Programa convexo. Modelo Min con una función objetivo convexa y un conjunto de restricciones convexo.

Programación no lineal (PNL). Un modelo de programación matemática en el cual por lo menos una de las funciones de restricción o la función objetivo, o ambas, son no lineales.

Programas cuadráticos (PC). Modelos no lineales que maximizan o minimizan el valor de una función objetivo cuadrática sometida a restricciones lineales y, posiblemente, a condiciones de no negatividad.

Punto estacionario. Punto en el cual se anulan todas las derivadas parciales.

Varianza. Una medida estadística del riesgo.

Ejercicios de repaso: Modelos no lineales

Verdadero -Falso

1. **V F** La economía de escala es una relación no lineal.
2. **V F** Un problema de aplicación donde interviene una relación no lineal no puede reflejarse en un modelo como el de la PL.
3. **V F** Si existen las condiciones para que se presente un máximo local, éste se presentará.
4. **V F** Si se presenta un mínimo local, las condiciones necesarias para dicho mínimo estarán presentes.
5. **V F** Si un mínimo local es también un mínimo global, representa el único punto donde se cumplen las condiciones suficientes para un mínimo local.
6. **V F** Una línea recta no es ni una función cóncava ni una convexa.
7. **V F** En un modelo de PNL o en uno de PL, volver más estricta una restricción no puede ser útil, pero sí perjudicial.
8. **V F** En un modelo Max, un multiplicador de Lagrange se interpreta igual que el precio sombra incluido por Solver en la salida correspondiente a modelos PL, pero en general no es constante en todo el intervalo del LD.
9. **V F** Un modelo de programación cuadrática siempre es un tipo especial de modelo de programación cóncavo.
10. **V F** Una PNL es siempre un modelo de programación cóncavo o convexo.
11. **V F** El conjunto de restricciones que se define con las siguientes desigualdades es convexo.
    $9x + 4y \leq 36$
    $4x + 12y \leq 20$
12. **V F** En la práctica, para encontrar un máximo local de una función con diversas variables debemos encontrar primero todos los puntos estacionarios. Después se aplican pruebas de segundo orden a dichos puntos.
13. **V F** Aun cuando los programas no lineales son más difíciles que los PL, es verdad que se puede aplicar en ellos la técnica de búsqueda en los vértices para encontrar una solución óptima.
14. **V F** Una de las dificultades de la PNL consiste en distinguir entre las soluciones locales y las globales.

Opción múltiple

(En las siguientes preguntas, f'(x) y f''(x) indican la primera y la segunda derivada de una función de una sola variable, x, y x^* es un punto estacionario.)

15. Suponga que f es una función de una sola variable. La condición $f''(x^*) > 0$
    a. es una condición necesaria para un mínimo local
    b. es una condición suficiente para un mínimo local
    c. es una condición suficiente para un máximo local
    d. nada de lo anterior
16. Suponga que f es una función de una sola variable. La condición $f'(x^*) = 0$ es
    a. una condición necesaria para que x^* sea un máximo local
    b. una condición necesaria para que x^* sea un mínimo local
    c. una condición necesaria para que x^* sea un mínimo global
    d. todo lo anterior
17. En modelos no lineales se necesita el cálculo diferencial
    a. para evitar soluciones múltiples (locales)
    b. para expresar condiciones de optimalidad
    c. tanto por la razón **a** como por la **b**
    d. por ninguna de las razones **a** o **b**

18. Un punto x^* con la propiedad de que $f'(x^*) = 0$ y $f''(x^*) > 0$ (donde f es una función de una sola variable) satisface las condiciones suficientes para que x^* sea
  - **a.** un máximo local
  - **b.** un mínimo local
  - **c.** ni **a** ni **b**
19. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera acerca de una función cóncava?
  - **a.** Se puede tratar de encontrar un máximo global utilizando un optimizador ascendente, como Solver.
  - **b.** Cualquier máximo local es al mismo tiempo un máximo global.
  - **c.** Tanto la afirmación **a** como la **b** anteriores
20. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
  - **a.** Para una PNL de tipo general, las condiciones de optimalidad se usan directamente en la resolución de problemas de PNL. Es decir, existen optimizadores para resolver directamente estas condiciones, como Solver, lo cual produce una solución de PNL.
  - **b.** Para un modelo de PNL general, las condiciones de optimalidad se usan indirectamente en la resolución de problemas de PNL. Es decir, existen optimizadores, como Solver, para atacar directamente la PNL, utilizando un enfoque ascendente, por ejemplo. Las condiciones de optimalidad proporcionan un criterio de terminación para esos algoritmos.
  - **c.** Las condiciones de optimalidad tienen solamente interés teórico.
21. Para modelos de programación cóncavos
  - **a.** las condiciones de segundo orden son más útiles
  - **b.** un óptimo local es también un óptimo global
  - **c.** tanto el conjunto restringido como la función objetivo deben ser cóncavos
22. Convexidad
  - **a.** es una descripción aplicable tanto a conjuntos de puntos como a funciones
  - **b.** es una propiedad matemática importante que se emplea para garantizar que las soluciones locales también sean globales
  - **c.** es útil tanto en la optimización restringida como en la no restringida
  - **d.** todo lo anterior
23. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones *no* es verdadera, en general, acerca de un multiplicador de Lagrange?
  - **a.** Tiene una interpretación económica similar a la del precio sombra.
  - **b.** Es la tasa de cambio del VO cuando aumenta el LD de una restricción.
  - **c.** Es válido (es decir, constante) para una gama de valores del LD.
24. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones *no* es verdadera?
  - **a.** Aun cuando las soluciones globales no pueden ser garantizadas, la optimización sigue siendo una herramienta útil para la toma de decisiones.
  - **b.** En PL, nunca tenemos que preocuparnos por soluciones locales (es decir, toda solución local es también global).
  - **c.** Como sólo podemos garantizar que las soluciones locales son también globales cuando existen las propiedades adecuadas de convexidad (o concavidad), éstos son los únicos tipos de problemas de PNL que proporcionan información útil.
25. ¿Cuál de estas afirmaciones acerca de las soluciones en puntos ubicados en vértices es verdadera en PNL?
  - **a.** No importa qué función objetivo tengamos, la solución óptima siempre estará en un punto ubicado en un vértice.
  - **b.** Sólo deberemos preocuparnos por los puntos ubicados en vértices si la función objetivo es lineal.
  - **c.** En general, el óptimo puede no encontrarse ubicado en algún vértice.

Respuestas

1.	V	**8.**	V	**14.**	V	**20.**	b
2.	F	**9.**	F	**15.**	d	**21.**	b
3.	F	**10.**	F	**16.**	d	**22.**	d
4.	V	**11.**	V	**17.**	b	**23.**	c
5.	F	**12.**	F	**18.**	b	**24.**	c
6.	F	**13.**	F	**19.**	c	**25.**	c
7.	V						

Ejercicios de repaso: Programación cuadrática

Verdadero-Falso

1. **V F** Un modelo de programación cuadrática puede tener funciones de restricción cuadráticas.
2. **V F** Tratar de maximizar o minimizar cualquier función objetivo no lineal sujeta a un conjunto de restricciones de igualdades y desigualdades lineales, y también de posibles condiciones de no negatividad sobre los valores de las variables de decisión, es un modelo de programación cuadrática.
3. **V F** Cualquier modelo de PL puede resolverse con un optimizador de PC.
4. **V F** No es posible identificar los puntos extremos de la región factible de un PC.

5. **V F** La solución óptima para un modelo de PC no necesita ser una solución en vértice.
6. **V F** La solución óptima para un modelo de PC debe incluir por lo menos tantas variables positivas como restricciones haya en el modelo.
7. **V F** Si se suaviza una restricción en un PC, el VO mejorará o no cambiará.
8. **V F** En un modelo Max, la tasa de mejoramiento del VO es siempre el multiplicador de Lagrange con signo negativo.
9. **V F** La pendiente de la tangente a la gráfica de la función VO(R) en el punto($\hat{R}$, VO($\hat{R}$)) es la tasa de cambio de la función VO(R) en $R = \hat{R}$.
10. **V F** El cambio del coeficiente de un término en la función objetiva de un PC siempre produce cambios en la solución óptima.
11. **V F** La varianza del rendimiento de una cartera de inversiones es una función lineal del monto invertido en cada acción de dicha cartera.
12. **V F** Si en la cartera están incluidas tres acciones, la región factible estará sobre un plano.
13. **V F** El modelo de cartera incluye un límite inferior para el rendimiento esperado. En general, esta restricción no tiene que ser obligatoria.

Opción múltiple

14. La definición de un modelo de PC no incluye
    - **a.** funciones de restricción cuadráticas
    - **b.** restricciones como igualdades lineales
    - **c.** términos no lineales en la función objetivo
15. En un modelo de PC con n variables, $(x_i, \ldots, x_n)$, la función objetivo puede no incluir términos de la forma
    - **a.** x_j^2
    - **b.** $x_i x_j$
    - **c.** $x_i^2 x_j$
    - **d.** $9x_i$
16. Un modelo de PL es un caso especial de un PC porque
    - **a.** la región factible de la PL es un caso especial de la región factible de un PC
    - **b.** las funciones de restricción en PL son un caso especial de las funciones de restricción en PC
    - **c.** cualesquiera condiciones de no negatividad son específicas de un modelo de PL
    - **d.** la función objetivo en PL es un caso especial de la función objetivo en PC
17. La solución óptima de un modelo de PC con n restricciones puede no tener
    - **a.** valores negativos para algunas variables de decisión
    - **b.** más de n variables de decisión positivas
    - **c.** menos de n variables de decisión positivas
    - **d.** valores de cero para algunas variables de decisión
18. La solución óptima para un modelo de PC
    - **a.** debe estar en un vértice del conjunto factible
    - **b.** no puede estar en un vértice del conjunto factible
    - **c.** siempre es una expresión no degenerada
    - **d.** nada de lo anterior
19. En la solución óptima para un modelo de PC, las variables de holgura
    - **a.** no tienen significado
    - **b.** tienen el mismo significado que en un modelo de PL
    - **c.** tienen un significado diferente que en un modelo de PL
    - **d.** no tienen restricciones de signo
20. Solver se puede utilizar para resolver
    - **a.** modelos de programación no lineal en general
    - **b.** modelos de PC
    - **c.** modelos de PL
    - **d.** todo lo anterior
21. Si se suaviza una restricción en un modelo de cartera para minimizar la varianza,
    - **a.** debe aumentar el multiplicador lagrangiano sobre esa restricción
    - **b.** debe disminuir el multiplicador lagrangiano sobre esa restricción
    - **c.** puede cambiar el signo del multiplicador lagrangiano sobre esa restricción
    - **d.** no puede incrementar la función objetivo

Respuestas

1.	F	**7.**	V	**12.**	V	**17.**	a
2.	F	**8.**	F	**13.**	V	**18.**	d
3.	V	**9.**	V	**14.**	a	**19.**	b
4.	F	**10.**	F	**15.**	c	**20.**	d
5.	V	**11.**	F	**16.**	d	**21.**	d
6.	F						

Ejercicios de repaso: Modelos de inventario

Verdadero-Falso

1. **V F** El segmento del costo de oportunidad, como parte del costo de mantenimiento del inventario, se determina por factores tales como artículos estropeados, mermas y seguros.
2. **V F** En modelos de inventario, la demanda siempre es mayor o igual que las ventas.
3. **V F** En el modelo CEP, el costo de pedido anual es directamente proporcional a la cantidad del pedido.
4. **V F** En el modelo CEP, el costo anual de mantenimiento de existencias y pedidos es aceptablemente insensible a los errores en la estimación de los parámetros de costo.
5. **V F** En el modelo del tamaño del lote de producción no se incluyen costos de ajuste inicial, porque el ritmo de la producción es uniforme.

Opción múltiple

6. Las siguientes son algunas razones por las cuales se mantiene un inventario:
   a. para protegerse contra la incertidumbre de la demanda
   b. para abatir los costos de producción
   c. como una forma de almacenar mano de obra
   d. por todo lo anterior
7. Entre las consideraciones importantes para decidir *cuándo* y *cuánto* conviene ordenar, figuran todos los factores excepto
   a. el tiempo de anticipación
   b. la proporción del costo de mantenimiento de existencias correspondiente al costo de oportunidad
   c. la posibilidad de obtener descuentos por cantidad
   d. el grado en que se conozca la demanda futura
8. En el modelo CEP
   a. cada embarque llega en una partida
   b. la demanda es conocida y se presenta a un ritmo constante
   c. es preciso satisfacer toda la demanda
   d. todo lo anterior
9. En el modelo CEP, si el precio del artículo aumenta y todos los demás parámetros permanecen iguales, la cantidad de pedido óptima generalmente
   a. aumentará
   b. disminuirá
   c. permanecerá igual
10. En el modelo CEP, el número óptimo de pedidos por año
    a. aumenta directamente con
    b. aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de
    c. disminuye en proporción directa con
    d. no cambia con
    la tasa anual de demanda.
11. Considere un modelo CEP con un descuento por cantidad, en el cual se aplica un precio unitario más bajo a todas las unidades si la compra incluye B o más unidades. Si Q_D^* minimiza el costo CAMEP suponiendo el precio más bajo, y Q_R^* minimiza dicho costo suponiendo el precio regular, y $Q_D^* > B$, la cantidad de pedido óptima es siempre
    a. Q_D^*
    b. ya sea Q_R^* o B, dependiendo de cuál de esos valores produzca el costo total anual más bajo
    c. Q_R^*
    d. B
12. En el modelo del tamaño del lote de producción, al incrementar el ritmo de producción
    a. aumenta
    b. no se produce influencia alguna en
    c. disminuye
    el número óptimo de pedidos que conviene hacer cada año.

Respuestas

1.	F	**4.**	V	**7.**	b	**10.**	b
2.	V	**5.**	F	**8.**	d	**11.**	a
3.	F	**6.**	d	**9.**	b	**12.**	a

Problemas de programación no lineal

8-1. **(a)** Use Solver para maximizar la función $f(x) = -8x^2 - 14x - 32$.
(b) Use Solver para maximizar esta función en el intervalo $1 \leq x \leq 10$.
(c) ¿Puede usted determinar si esta función es cóncava o convexa?

8-2. **(a)** Use Solver para maximizar la función $f(x) = -x^2 + 4x + 6$.
(b) Use Solver para maximizar esta función en el intervalo $3 \leq x \leq 12$.
(c) ¿Puede usted determinar si esta función es cóncava o convexa?

8-3. Lenard Crumb, gerente de Crumb Baking Services, está estudiando la oferta de un distribuidor que vende una mezcla instantánea para elaborar *croissants*. El costo total de x libras de la mezcla se calcula mediante

$$\text{costo total} = x^3 - 50x^2 + 750x$$

¿Qué cantidad de esta mezcla minimizará el *costo total por libra?*

8-4. Use Solver para minimizar

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 8x - 12y + 6.$$

Use la tabla de datos y el asistente para gráficas y trace la gráfica de $f(x, y)$.

•• **8-5.** Hoot Spa importa aceite de coco de su país de origen, Jamaica. Usa este aceite para producir dos tipos de crema bronceadora: Sear y Char. El precio por kilogramo al cual podrá vender estos productos depende de la cantidad que fabrique de cada uno. En particular, si Hoot produce x_1 kilos de Sear y x_2 kilos de Char, podrá vender toda su producción a los siguientes precios (en dólares):

$$\text{precio por kilogramo de Sear} = 120 - x_1$$

y también

$$\text{precio por kilogramo de Char} = 150 - 2x_2$$

El costo de fabricación de x_1 kilos de Sear y x_2 kilos de Char es

$$\text{costo de fabricación de las dos cremas} = 1.2x_1 + 16.8x_2 + 1.3x_1x_2$$

Suponiendo que pueda vender toda la mercancía que produzca, Hoot desea saber cuántos kilogramos de cada crema debe programar para producción a fin de maximizar sus ganancias.

8-6. Queremos construir un cilindro macizo con volumen 2π. Si deseáramos minimizar el área del cilindro (incluyendo ambas tapas), ¿cuáles tendrían que ser su radio y su altura? SUGERENCIA: volumen = $\pi r^2 h$, área = $2\pi rh + 2\pi r^2$

•• **8-7.** *Análisis de regresión lineal.* En el modelo de regresión lineal, los puntos correspondientes a los datos históricos (x_i, y_i), $i = 1,..., n$ son conocidos. El modelo lineal es una ecuación estimativa (llamada también línea de regresión) $y = ax + b$, donde a y b se eligen de modo que se minimice la suma de los cuadrados de las desviaciones

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

(a) Use este enfoque y determine la ecuación de estimación para los siguientes datos:

x	8	6	12
y	6	14	−18

(b) Use el mismo enfoque y determine la ecuación de estimación para los siguientes datos:

x	10	17.4	20.1	12.6	14.9
y	25	10	5	20	15

8-8. **(a)** Resuelva el siguiente problema:

$$\text{Min } 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_1 - 9x_2 + 16$$
$$\text{s.a. } x_1 + x_2 = 5$$

(b) Use el Informe de sensibilidad para estimar el cambio en VO si el LD de la restricción aumentara de 5 a 8, y compare esa estimación con el resultado real que corresponde a ese cambio.

8-9. **(a)** Resuelva el siguiente problema:

$$\text{Max } -3x_1^2 + 42x_1 - 3x_2^2 + 48x_2 - 339$$
$$\text{s.a. } 4x_1 + 6x_2 = 24$$

(b) Use el Informe de sensibilidad para estimar el cambio del VO si el LD de la restricción aumenta de 24 a 28, y compare esa estimación con el resultado real correspondiente a dicho cambio.

••**8-10.** Industrias Ure tiene una productividad de

$$f(x, y) = 2x^2y + 3xy^2 + 2y^3$$

a partir de x unidades de trabajo y de y unidades de capital. Si la mano de obra cuesta \$50 por unidad y el capital cuesta \$100 por unidad, ¿cuántas unidades de trabajo y capital deberá usar Ure, considerando que su presupuesto es de \$150,000?

(a) Formule el modelo de Solver y optimícelo desde un punto inicial de $x = 0$ y $y = 1$.
(b) Optimice igual que en el caso (a), pero desde un punto inicial de $x = 1{,}000{,}000$ y de $y = 1{,}000{,}000$.
(c) Explique las dos respuestas anteriores.

8-11. Demuestre que la solución encontrada en el ejemplo "gastos óptimos de mercadotecnia" (sección 8.5) es en realidad un óptimo global (a diferencia de uno local).

••**8-12.** Demuestre que la solución óptima para el problema 8-10 satisface la siguiente expresión

$$\frac{\text{Productividad marginal de la mano de obra}}{\text{Productividad marginal del capital}} = \frac{\text{Precio unitario de la mano de obra}}{\text{Precio unitario del capital}}$$

SUGERENCIA: Suprima la restricción sobre el presupuesto y sustituya las restricciones sobre x y sobre y, de modo que cada una de ellas sea menor o igual que sus respectivos valores óptimos encontrados en el problema 8-10.

••**8-13.** Resuelva el ejemplo 2 suponiendo que $s_i = 1/2$ para $i = 1, 2, 3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 2.8$, $p_3 = 4$, y el presupuesto $B = 250$. ¿Cuál es el multiplicador de Lagrange para la restricción del presupuesto?

•••**8-14.** ¿Forma un conjunto convexo la siguiente serie de restricciones? ¿Por qué?

$$\begin{aligned} x + y &\leq 20 \\ -2x + y &\geq 10 \\ x^2 + 2x + 1 &\leq 100 \\ -x^4 - 2x^2 + 60 &\geq 36 \end{aligned}$$

••**8-15.** *Un problema de combinación. Dos* productos químicos, X y Y, se fabrican mediante la combinación de tres ingredientes químicos, A, B y C. Estos insumos están contaminados con azufre, y los productos deben satisfacer restricciones sobre el contenido de ese elemento. Los tres ingredientes se embarcan ya mezclados en dos camiones cisterna. A se embarca en el camión 1, C en el camión 2 y B en el camión 1 y en el camión 2. No es posible vender más que 100 unidades de X y 200 unidades de Y. Con los datos de la siguiente tabla, formule una programación no lineal para maximizar las ganancias y optimícelo utilizando Solver.

PRODUCTO QUÍMICO	COSTO UNITARIO ($)	CONTENIDO DE AZUFRE (%)
A	6	3
B	16	1
C	10	2
	Precio de venta por unidad	
X	9	no más de 2.5
Y	15	no más de 1.5

8-16. Suponga que en el modelo de Gulf Coast Oil en la sección 8.5, el octanaje del suministro i varíe de un mes a otro. Introduzca una nueva variable, *OCTS*1, el número de octanos del suministro 1, y sustituya todas las referencias al octanaje del suministro 1, en el modelo, por esta variable. Agregue al modelo Solver la restricción de que *OCTS*1 sea igual a 93, y optimice después la PNL. Usando el informe de sensibilidad, *estime* qué pasaría con la ganancia óptima si el octanaje aumentara a 94, a 96 y a 98; a continuación, modifique realmente el número de octanos a 94, después a 96 y finalmente a 98, y vuelva a optimizar en cada ocasión, comparando los resultados reales con su estimación. Observe que en realidad estamos realizando un análisis de sensibilidad sobre el coeficiente de una restricción.

8-17. *Sustitutos económicos.* En el modelo de Astro y Cosmo de la sección 8.5, suponga que las unidades Astro y Cosmo son sustitutos económicos. Esto significa que un incremento en el precio de uno de ellos provoca un incremento en la demanda del otro. En términos más específicos, supongamos que las nuevas ecuaciones de demanda son

$$\begin{aligned} A &= 1000 - 4.7PA + PC \\ C &= 1000 + 2PA - 6.2PC \end{aligned}$$

Vuelva a formular el modelo y optimícelo con Solver. Interprete el informe de sensibilidad.

Problemas de programación cuadrática

••**8-18.** "Si *por lo menos una* de las acciones incluidas en la cartera de inversiones tiene un rendimiento esperado mayor que o igual al rendimiento requerido para toda la cartera, entonces esta formulación nunca dejará de ser factible." ¿Bajo qué condiciones es verdadero este enunciado?

••**8-19.** Considere el modelo de cartera resuelto en la sección 8.11. La solución actual para este modelo es AT&T= 0.53, GM = 0.3564, USS = 0.1135). ¿Representan estas cifras un punto extremo de la región factible? ¿Por qué sí o por qué no?

8-20. Considere el modelo de cartera resuelto en la sección 8.11. Suponga que está estudiando la posibilidad de agregar acciones de la corporación MILOCURA a su modelo de selección de cartera. Estas acciones tienen un rendimiento esperado *negativo.* ¿En qué condiciones el modelo podría seleccionar acciones de MILOCURA para incluirlas en la cartera?

8-21. Considere el modelo de cartera de inversiones resuelto en la sección 8.11. ¿Cuál es la disminución permisible en la restricción que limita a 75% la inversión en acciones de GM para dicha cartera?

8-22. Como en el caso del análisis de PL puro, hay un Informe de sensibilidad asociado con la PC. ¿Por qué este Informe de sensibilidad de PC no incluye incrementos y decrementos permisibles en el LD de las restricciones?

8-23. Considere el modelo de cartera resuelto en la sección 8.11. Suponga que su objetivo es maximizar el rendimiento, bajo la restricción de que la variabilidad de la cartera no puede ser mayor que V. Vuelva a escribir el modelo simbólico con esta modificación.

8-24. Remítase al problema 8-23. Sea $V = 0.0205$. Si no existen óptimos alternativos en el modelo original, ¿cuál es el rendimiento esperado máximo en la nueva formulación de su modelo? Explique su respuesta.

••**8-25.** Las acciones x, y, z tienen rendimientos esperados de 7%, 6% y 10% respectivamente, y la siguiente matriz de varianza-covarianza:

	x	y	z
x	.01		
y	.001	.04	
z	.001	−.04	.08

(a) Determine la fracción de la cartera que se destinará a cada una de esas acciones para minimizar la varianza de las inversiones y bajo un rendimiento esperado mínimo de la cartera de 8%.

(b) ¿Es posible que la varianza de la cartera sea más pequeña que la varianza de cualquier acción individual? Explique su respuesta.

(c) Utilice la información del multiplicador de Lagrange para estimar qué pasaría con la varianza de la cartera óptima si el rendimiento esperado mínimo se elevara a 9%. Compare su estimación con las cifras reales, resolviendo el modelo.

Problemas de inventario

8-26. La demanda de libros de interés general en la Librería Universitaria se presenta a un ritmo constante de 18,000 volúmenes al año. El gerente satisface esta demanda sin acumulación de atrasos. Él calcula la cantidad de pedido óptima basándose en un costo de $30 por cada pedido y un costo anual de mantenimiento de existencias de $3 por libro. Suponga un total de 250 días al año. ¿Cuáles serán los valores de Q^*, N^* y CAMEP(Q^*)?

8-27. Una ferretería local vende 364,000 libras de clavos al año. En la actualidad ordena 14,000 libras de clavos cada 2 semanas, al precio de $0.50 por libra. Suponga que

1. La demanda se presenta a ritmo constante.
2. El costo de colocar un pedido es de $50, independientemente de la magnitud del mismo.
3. El costo anual de mantenimiento del inventario es 12% del valor del nivel promedio de inventario.
4. Estos factores no cambian a través del tiempo.
   - **(a)** ¿Cuál es el nivel promedio del inventario?
   - **(b)** ¿Cuál es el costo anual del mantenimiento de existencias?
   - **(c)** ¿Cuál es el costo anual de los pedidos?
   - **(d)** ¿Cuál es el costo anual del mantenimiento de existencias y de los pedidos?
   - **(e)** ¿Cuál es el costo total anual?
   - **(f)** ¿Le resultaría más barato al propietario hacer pedidos por lotes mayores que 14,000 (con menor frecuencia) o en lotes más pequeños (más a menudo)?

8-28. La heladería de la universidad vende 180 cuartos de galón de helado de vainilla cada mes. En la actualidad, abastece su inventario al principio de cada mes. El precio de su helado al mayoreo es de $3 por cuarto de galón. Suponga que

1. La demanda se presenta a una tasa o ritmo constante.
2. El costo anual de mantenimiento del inventario es 25% del valor del nivel promedio de inventario.
3. El costo anual total fue de $7,627.50 el año pasado.
4. Estos factores no cambian con el tiempo.
   (a) Calcule el nivel promedio de inventario.
   (b) Calcule el costo anual de mantenimiento de existencias.
   (c) Calcule el costo de los pedidos.
   (d) Use la tabla de datos 1 para trazar la gráfica correspondiente a los costos anuales de mantenimiento de existencias, los costos anuales de pedidos y el costo CAMEP, en función de la cantidad del pedido.
   (e) ¿En qué punto se minimiza el CAMEP? ¿Cuánto podría ahorrar anualmente la heladería si adoptara efectivamente la cantidad de pedido óptima?

8-29. Un joven empresario vende lápices a un ritmo constante de 25 por día. Cada lápiz le cuesta $0.05. Si los costos del pedido son $5 y los costos de mantenimiento de inventario representan 20% del costo de su inventario promedio, ¿cuáles son: a) la cantidad de pedido óptima y, b) el número óptimo de pedidos que deberá colocar cada año?

••8-30. Una compañía de tarjetas de crédito tiene ingresos anuales que ascienden a $100,000,000. Si el costo de enviar los estados de cuenta a sus clientes es $30,000 y la tasa de interés vigente es 6%, ¿con cuánta frecuencia deberá enviar la compañía dichos estados de cuenta?

••8-31. Specific Electric (SE) es uno de los gigantes manufactureros estadounidenses de aparatos eléctricos para el hogar. En éstos usa motores eléctricos que compra de otra empresa a una tasa constante. El total de sus costos de compra durante un año es de $2,400,000. El costo de cada pedido es de $100 y el costo anual de mantenimiento de inventario es el 20% del costo del inventario promedio.
(a) ¿Cuál es el valor en dólares de la cantidad de pedido óptima?
(b) ¿Cuántas veces al año SE debe colocar pedidos?
(c) ¿Cuál es la duración óptima del ciclo en años y días, si hay 250 días laborales cada año?
SUGERENCIA: Si P es el costo unitario para Specific Electric y Q^* es la cantidad óptima, PQ^* es el valor en dólares de la cantidad de pedido óptima.

8-32. Si en el problema 8-28 se duplicara el costo del pedido, ¿qué cambio sufriría la cantidad de pedido óptima?

••8-33. Strumm and Howell (S y H) es una tienda de discos especializada en música *country.* La tienda ha tenido un grado considerable de éxito en los últimos años, pues ha realizado ventas al menudeo por $400,000 al año. Las ventas se producen a un ritmo constante en el curso del año. S y H compra sus discos a una importante compañía del ramo. El precio de venta al menudeo es igual a 5/3 del costo original para S y H. El costo de los pedidos por cada embarque de discos es de $75, independientemente de la magnitud del pedido. Los costos anuales de mantenimiento del inventario representan 10% del costo del nivel promedio de inventario.
(a) ¿Cuál es el valor en dólares de la cantidad de pedido óptima?
(b) ¿Con cuánta frecuencia debe colocar sus pedidos S y H cada año?
(c) ¿Cuál es la duración óptima del ciclo en años?
SUGERENCIA: Si P es el costo unitario para S y H y Q^* es la cantidad óptima del pedido, PQ^* es el valor en dólares de la cantidad óptima del pedido.

8-34. Si en el problema 8-28, el vendedor mayorista ofrece helado a $2.43 el cuarto de galón cuando se compra una cantidad de 1,000 cuartos o más, ¿cuál será la estrategia óptima para la heladería del campus?

••8-35. El representante de Cheep Chicks en Waukon, Iowa, compra pollos recién nacidos a la incubadora central de la firma en Des Moines. Cada uno de los 360 días del año de producción hay una demanda de 22 docenas y media de pollos. El procesamiento de cada pedido cuesta $40, independientemente del número de pollos requeridos, y cuesta $80 mantener una docena de pollos en inventario durante un año. Suponga que Cheep calcula los costos de mantenimiento del inventario con base en el nivel promedio del inventario.
(a) ¿Cuál es la cantidad de pedido óptima?
(b) ¿Cuántas órdenes debe colocar la compañía en un año?
(c) ¿Cuál es la duración óptima del ciclo en años? ¿Y en días laborales?

8-36. La Napa Wine Company, el mayor distribuidor nacional de productos vinícolas de California, tiene una demanda constante de 192 cajas al mes de su producto más popular, Wino Delux. Su costo de atención de cada pedido es de $100, los costos anuales de mantenimiento son 25% del inventario promedio y el producto cuesta $200 por caja. En la actualidad no tiene demanda acumulada y aplica la política óptima de pedidos. Sin contar las vacaciones y las festividades religiosas, trabaja 200 días al año. Bajo la política actual (sin acumulación), encuentre Q^*, N^* y el costo CAMEP(Q^*).

••**8-37.** Bed Bug, un fabricante local de colchones ortopédicos, satisface actualmente sus constantes requerimientos de producción de 500 colchones de resortes por día, usando un modelo CEP basado en un costo de pedidos de $90, un costo de producción de $1 por resorte y un costo de mantenimiento del inventario igual a 15% del costo del inventario promedio. Su proveedor, Springy Steel, ha ofrecido recientemente 0.5% de descuento si Bed Bug hace pedidos por cantidades de 20,000 resortes por lo menos, o un descuento de 0.7% si los pedidos se presentan cada trimestre. Suponga un año de 240 días laborales.

(a) Encuentre Q^* y el costo total anual bajo las suposiciones de costo actuales.

(b) ¿Cuál es el costo total anual con cada una de las alternativas de descuento?

(c) ¿Qué deberá hacer Bed Bug?

8-38. Si en el problema 8-28 se duplicara el % del costo de mantenimiento de existencias, ¿qué cambio se produciría en la cantidad de pedido óptima?

8-39. La Destilería XXX, un importante productor de medicamentos contra la artritis y las afecciones nerviosas en el sureste de Estados Unidos, fabrica esos productos en partidas. Para poner en marcha cada una de estas partidas, los dueños de la compañía necesitan seleccionar un lugar estratégico y reunir el equipo adecuado. El costo de esta operación es de $900. El rendimiento de la producción es de 60 galones diarios, cada uno de los cuales cuesta $0.025 por cada día que permanece en el inventario. La demanda es constante y equivale a 1,125 galones mensuales. Suponga un periodo de 12 meses, 300 días por año y 25 días por mes.

(a) Encuentre Q^*, N^* y la duración del ciclo para el tamaño óptimo del lote de producción.

(b) Encuentre el inventario máximo y la duración (en días) de cada corrida de producción para el tamaño óptimo de dicho lote de producción.

(c) Encuentre el costo DMA(Q^*).

8-40. Debido a la importancia de lo confidencial en la empresa, la Destilería XXX del problema 8-39 decide realizar tres corridas de producción al año.

(a) Encuentre la producción de la cantidad de pedido, Q, la duración del ciclo (en días), la duración de la corrida de producción y el nivel máximo del inventario.

(b) Encuentre el costo DMA para la política descrita en la parte (a).

•••**8-41.** Considere usted el problema 8-39.

(a) Suponga que la Destilería XXX prefiriera comprar su producto en lugar de fabricarlo, y que el costo de colocación de un pedido fuera de $900. Encuentre Q^* y el costo CAMEP(Q^*).

(b) ¿Cómo es el CAMEP(Q^*) de la parte (a) en comparación con el DMA(Q^*), cuando el ritmo de producción es de 60 galones diarios? Explique esta relación.

(c) Use una Tabla de datos para trazar la gráfica del DMA($Q^*[p]$) en función de la tasa de producción diaria, p.

(d) A causa de las economías de escala, los costos unitarios de producción disminuyen cuando p aumenta. La relación precisa es $C(p) = 30/p$, donde $C(p)$ es el costo unitario de producción cuando la tasa de producción diaria es p. Encuentre el valor mínimo de la suma del DMA y los costos de producción diaria para $p = 45$ y para $p = 60$.

•••**8-42.** A causa de la obsolescencia técnica de su equipo, la Destilería XXX (problema 8-39) ha suspendido su producción y actualmente funciona sólo como una organización de mercadotecnia. Ahora compra el producto a otro fabricante. Esta empresa tiene que comprar por lo menos 1,000 galones por pedido para tener derecho a un descuento por cantidad. ¿Cuál es el menor descuento por galón que bastaría para convencer a XXX de pedir 1,000 galones? Suponga que ahora $P = \$5$, $C_h = \$2.50$ y $C_O = \$200$.

Caso práctico — Justo a tiempo

¡Justo a tiempo! Aun cuando el concepto de justo a tiempo (JAT) es muy reciente, pues surgió hace unos 10 o 15 años en Estados Unidos, ya se ha difundido tanto en los rubros manufactureros y de servicios que se ha vuelto casi un estereotipo en ese país. Esto se debe quizá a que la idea es muy sencilla y sumamente atractiva. En suma, la estrategia JAT consiste en tener "el producto adecuado en el lugar preciso y en el momento oportuno". Esto implica que, en la manufactura o en los servicios, cada etapa del proceso produce precisamente la cantidad necesaria para el siguiente paso de dicho proceso. Esta idea es válida para todos los pasos incluidos en el sistema. Supongamos, por ejemplo, que en nuestra fábrica todos los productos pasan por una operación de perforación y a continuación, por una operación de fresado. Con JAT, el taladro producirá solamente la cantidad que vaya a requerir la fresa en el paso siguiente. Esto también es aplicable al último paso, ya que el sistema producirá únicamente la cantidad que la clientela desea comprar.

La aplicación de un sistema JAT implica de ordinario hacer énfasis en los siguientes aspectos del proceso de producción:

1. Reducción del costo y el tiempo necesarios para el ajuste inicial. La idea es lograr que la producción en lotes muy pequeños resulte efectiva en términos de costos. Lo ideal es que el tamaño del lote sea la unidad.
2. Insistencia en la importancia del mantenimiento preventivo. Esto es necesario porque el proceso de manufactura siempre debe estar listo para iniciarse cuando se requiera, cuando se aspira a hacerlo "justo a tiempo".

3. Un proceso de mejoramiento continuo para garantizar la buena calidad. Si vamos a fabricar el número exacto de unidades, tendremos que saber que cada una de ellas es de buena calidad. Con este enfoque no es posible seleccionar únicamente los mejores artículos de un lote mayor. El proceso de mejoramiento continuo se basa típicamente en un alto nivel de participación y poder de decisión de los empleados.
4. Reducción de los tiempos de espera mediante el uso eficaz de la tecnología de la información y estrechas relaciones con los proveedores.

En muchas publicaciones el concepto JAT se coloca en un extremo de un continuo que tiene la CEP en el otro extremo. Al modelo CEP se le presenta como anticuado, improcedente y, tal vez, culpable de muchos de los problemas que abruman a las firmas manufactureras de Estados Unidos. Nos agradaría sugerir una interpretación alternativa. ¿Es posible que los conceptos fundamentales del modelo CEP sean congruentes con la filosofía JAT, y que el problema estribe en su interpretación y aplicación? Examinemos esa posibilidad.

Preguntas

1. ¿Cuál es el efecto de la reducción del costo de ajuste inicial sobre el tamaño del lote en el modelo CEP? ¿Dicho efecto es igual en un sistema JAT?
2. ¿Cuál es el papel de la calidad y el mantenimiento preventivo en el modelo CEP? ¿Por qué?
3. ¿Percibe usted alguna diferencia en la filosofía del enfoque CEP y el concepto JAT? En particular, ¿en qué aspectos del problema de la producción se supone que podemos influir en los dos enfoques?
4. ¿Cree usted que sea posible extraer alguna enseñanza de carácter general en relación con los modelos, en la transición del CEP al JAT?

Caso práctico

El Internal Revenue Service (Agencia estadounidense recaudadora de impuestos) (1994–1995)[1]

Al Swanson estaba preocupado. Se encontraba revisando los costos y resultados del programa de auditoría realizado por el Internal Revenue Service (IRS) en el año fiscal 1992.[2] Ahora, Swanson, analista de la División de Planeación y Análisis del IRS, acababa de ser designado jefe del comité interdepartamental para la planeación y revisión de procedimientos de auditoría de las declaraciones de impuestos individuales presentadas en 1995. En el comité había otros miembros de la misma división con amplias responsabilidades sobre el mejoramiento de las funciones del IRS, y también había gente de la División de Auditoría, cuya responsabilidad específica consistía en garantizar el debido cumplimiento de las leyes fiscales vigentes por parte de los contribuyentes. La creación de este comité formó parte de una revisión exhaustiva del funcionamiento del IRS, y sus recomendaciones tendrían una repercusión directa sobre las asignaciones del presupuesto que realizara el Congreso.

La tarea del señor Swanson fue aún más importante a causa del desarrollo del Plan Maestro de Negocios (PMN) del IRS, expedido el 1 de abril de 1994 para aplicarse durante los años fiscales 1995 a 2001. El Plan Maestro de Negocios sustituiría al Plan Estratégico de Negocios y al Plan Operativo Anual para Todo el Servicio, entonces vigentes. La creación del PMN surgió, en parte, de la Ley sobre el Desempeño y los Resultados del Gobierno. Esta ley dispone que las agencias del gobierno desarrollen planes anuales para respaldar su dirección estratégica, atender todas las actividades presupuestadas, establecer metas e indicadores del desempeño anual, describir todo lo que se requiere para alcanzar las metas de desempeño declaradas y establecer un sistema para medir los resultados de todo el proceso. Se esperaba que, por medio del PMN, el IRS estaría en mejores condiciones para presentar su caso ante la Oficina de Administración y Presupuesto (OAP), la cual brinda su ayuda para configurar las propuestas de la administración en materia de presupuesto.

La misión del IRS

El señor Swanson hizo estas reflexiones sobre la declaración de la misión del IRS:

> El propósito del Internal Revenue Service es recaudar el monto apropiado de rentas fiscales al menor costo; servir al público mejorando continuamente la calidad de nuestros productos y servicios, y desempeñarse en forma congruente con la visión de negocios del IRS.
> Nuestra visión de los negocios consiste en administrar un sistema tributario para nuestros clientes que:
> - Proporcione formularios sencillos y fáciles de entender; procedimientos simplificados de presentación; métodos de presentación alternativos de acuerdo con las necesidades individuales, y formas opcionales de interactuar con el IRS a fin de obtener formularios, plantear preguntas acerca de procedimientos o resolver cuestiones de contabilidad para maximizar la probabilidad de que todos los contribuyentes presenten sus declaraciones y paguen correctamente.

[1]Este caso fue preparado por Krishnan Anand y Haim Mendelson, de la Stanford Business School. Su propósito es servir de base para la discusión en el aula y no intenta ilustrar el manejo eficaz o ineficaz de una situación administrativa.

[2]En cada año fiscal, el IRS recauda y procesa los impuestos del año *anterior*. La mayoría de los datos disponibles se compilan en términos de años fiscales, y en este caso se observa esa convención. A veces nos referimos al año tributario por motivos pedagógicos. Todos esos casos serán señalados explícitamente. En todos los demás, los años mencionados corresponderán a años *fiscales*.

- Asegure el acceso telefónico en horarios cómodos para los contribuyentes, y la respuesta expedita y exacta de la correspondencia escrita.
- Permita a los contribuyentes discutir sus problemas o diversos temas con empleados que los traten en forma cortés y profesional, actúen con apego a la ética, tengan acceso inmediato a la información de contabilidad y posean la autoridad necesaria para resolver problemas.
- Confiera a los empleados la capacidad que requieren para resolver los casos que presenten los contribuyentes con oportunidad y precisión, mediante sistemas y procedimientos establecidos para ese propósito.
- Brinde discreción y trato confidencial en torno a la información de las declaraciones fiscales, garantizando la seguridad de los datos y sistemas.
- Imparta a los diversos contribuyentes la capacidad de interactuar con los empleados o los sistemas en formas que satisfagan sus necesidades.

Swanson sabía que una causa de gran preocupación para el IRS era el deterioro real o aparente de su efectividad en cuatro rubros clave: (a) proveer información a los contribuyentes; (b) recaudar impuestos adicionales; (c) hacer rembolsos cuando resulte apropiado; y (d) vigilar el cumplimiento de la tributación. Si bien se logró mejorar la eficacia en las tres primeras tareas, en parte, gracias a inversiones en recursos humanos y de cómputo (que analizaremos más adelante) y también por medio de procedimientos mejorados, la vigilancia del cumplimiento de la tributación era más difícil. El efecto de un aumento del presupuesto para auditoría sería menos visible y más difícil de evaluar, además de que cualquier propuesta de ese tipo tendría que competir con otros programas de mayor visibilidad. Así, los tres principales problemas que encaraba el comité del señor Swanson consistían en: *(i)* desarrollar lineamientos razonables y medidas del desempeño para la División de Auditoría; *(ii)* elaborar pronósticos de impuestos y multas adicionales recolectados en función de la asignación del presupuesto, para luego determinar el presupuesto de auditoría que se solicitaría a la OAP y justificar tal solicitud; y *(iii)* optimizar el uso del presupuesto que finalmente fuera aprobado por el Congreso para vigilar el debido cumplimiento fiscal. La necesidad más urgente consistía en defender ante la OAP un incremento del presupuesto y usar en forma óptima el presupuesto asignado. Aun cuando el incremento en los recursos asignados al IRS no era proporcional al aumento de la carga de trabajo a través del tiempo, lo que el señor Swanson quería investigar era si esos recursos se usaban en forma óptima.

Era indudable que la pérdida de eficacia del IRS en algunos renglones reflejaba el incremento abrumador de su carga de trabajo. Desde fines de la década de 1980, el número de declaraciones presentadas había aumentado apreciablemente, en gran parte a causa del crecimiento de la población, la expansión económica y el aumento del número de requisitos de información. Además, la organización no había logrado avanzar a la par con los incrementos de productividad que la industria privada había capitalizado durante años.

A diferencia del sector privado, que frente a la competencia tuvo que estar siempre alerta y al pendiente de las posibilidades de la tecnología para mejorar sus operaciones fundamentales, el IRS había seguido realizando sus operaciones prácticamente en la misma forma durante los últimos 40 años. En consecuencia, los más absurdos anacronismos surgían por doquier. Por ejemplo, la mayor parte de la gestión de los asuntos fiscales se realizaba a mano, pues las declaraciones pasaban de mano en mano, al estilo de las viejas fábricas, a lo largo de una línea de montaje conocida en el propio IRS como “la tubería”.

Históricamente, los funcionarios del Congreso y la agencia habían lidiado con los problemas de cumplimiento de ésta al estilo de Washington, es decir, con infusiones de dinero. Desde 1982, el presupuesto de operación del IRS casi se había triplicado, al tiempo que su fuerza de trabajo creció, de menos de 83,000 personas en 1982, a un máximo de casi 117,000 en 1992. Aun cuando el servicio recaudaba cifras sin precedente, su productividad operacional en términos del costo de la recaudación se había desplomado. En 1992, el IRS gastaba casi 40% más que en 1982 para recaudar $100 (véase la tabla 1).

El presupuesto del IRS aumentó de $4,400 millones en el año fiscal 1987 a cerca de $7,000 millones en 1992, lo cual representa un crecimiento real de 3.7% al año. Aproximadamente un tercio de este incremento se destinó al proyecto de $23,000 millones conocido como la Modernización de Sistemas Tributarios (MST), un programa para actualizar sus sistemas de cómputo. En el mismo periodo, la carga de trabajo del IRS había crecido en 10%. Así, con la estructura organizacional y la base tecnológica existentes, el IRS necesitaría 2,000 empleados adicionales cada año, tan sólo para mantenerse al ritmo del aumento de su carga de trabajo, según estimaciones de sus funcionarios. Sin embargo, eso no era lo que la administración esperaba para el IRS en el futuro. Por el contrario, aspiraba a suprimir cerca de 17,000 puestos de trabajo en el siguiente decenio y ahorrar cientos de millones de dólares en operaciones intensivas en mano de obra, como las de “la tubería”.

TABLA 1 Recaudación, costos y personal del Internal Revenue Service (1986-1992)

AÑO FISCAL	COSTOS DE OPERACIÓN (MILLONES $)	RECAUDACIONES (MILLONES $)	COSTO DE RECAUDAR $100	NÚMERO DE EMPLEADOS
1982	**2,626**	**632,241**	**0.42**	**82,857**
1986	3,842	782,252	0.49	95,880
1987	4,366	886,291	0.49	102,188
1988	5,069	935,107	0.54	114,873
1989	5,199	1,013,322	0.51	114,758
1990	5,440	1,056,366	0.52	111,858
1991	6,098	1,086,851	0.56	115,628
1992	**6,536**	**1,120,800**	**0.58**	**116,673**

Los datos incluyen todas las recaudaciones (impuestos sobre ingresos, empleo, ventas, donaciones y tributación estatal, entre otros).

El señor Swanson se percató muy pronto de que el centro Cincinnati, un edificio bajo que se extendía hasta ocupar toda una manzana de casas en el lado del río Ohio correspondiente a Kentucky, se convertiría en el lugar de prueba para un enorme conglomerado de equipo de manipulación de imágenes conocido como el sistema de reconocimiento/procesamiento de imágenes del centro de servicio o SCRIPS (por sus siglas en inglés). Se esperaba que SCRIPS, un sistema de cómputo con un costo cercano a $90 millones, se pagara a sí mismo al aumentar la precisión y velocidad con las cuales la información de las declaraciones fiscales se introducía a las computadoras del IRS, y reducir la enorme dependencia del centro con respecto a la captura manual de dicha información (cifra por cifra y línea por línea). El sistema ya estaba en operación, en plan de prueba, y allanaría el camino para la adquisición de un paquete de manejo de imágenes, más sofisticado, con valor de $4,000 millones, conocido como Sistema de Procesamiento de Documentos (SPD), cuya entrada en línea estaba prevista para el año 2000. El SPD sería capaz de captar los datos fiscales de casi cualesquiera de los documentos autorizados para su uso por el IRS, suprimiendo en gran parte la necesidad de contar con mecanógrafos capturistas, quienes por muchos años fueron la columna vertebral del sistema de procesamiento de la información fiscal.

La depuración del procesamiento fiscal era un aspecto perturbador en el proyecto MST (de una década de duración) de la agencia fiscal. Sin embargo, como bien lo sabía el señor Swanson, cabía la esperanza de que el verdadero adelanto de la MST no fuera tan sólo tecnológico ni se limitara exclusivamente a los centros de procesamiento de documentos, como el de Cincinnati. Se preveían cambios drásticos en la estructura administrativa y en la organización de toda la agencia, los cuales establecerían una nueva definición de la forma de trabajar del IRS y la calidad de sus funciones.

Grandes intereses en juego

En la MST había mucho más de por medio que el desempeño de una agencia. Como se explica en una publicación del IRS:

> El propósito del sistema tributario de la renta interna de la nación consiste en garantizar la solidez fiscal de las políticas y programas del gobierno de Estados Unidos.

Así, cuando el IRS recauda una cantidad inferior al total de los impuestos pendientes, el resultado es que se tiene menos dinero para otros programas públicos o se incurre en un mayor endeudamiento federal. La agencia estimó que el monto aproximado de los impuestos sobre la renta no cobrados era de $120,000 millones aproximadamente sólo en el año anterior. Además, para quienes elaboran las leyes, aumentar la recaudación efectiva de impuestos es un recurso mucho menos doloroso para elevar la recaudación que aumentar los impuestos. (La recaudación insuficiente, al permitir que la gente que paga menos de lo debido quede impune, alienta también al público a no declarar completos sus ingresos en los años siguientes. Por consiguiente, esto también tiene un efecto grave a largo plazo sobre la recaudación.)

El Plan Maestro de Negocios del IRS para los años fiscales 1995-2001 se subdividió aún más, en metas específicas para los tres primeros años del plan, es decir, los años fiscales 1995-1997. El principal objetivo del Plan Maestro del IRS para 1995-1997 era mejorar el cumplimiento de la ley. Con un programa vigoroso y efectivo de auditoría y vigilancia tributaria se elevarían directamente los ingresos mediante recaudaciones adicionales de impuestos y se produciría también un efecto indirecto, pero significativo, en la proporción del futuro cumplimiento voluntario de las obligaciones fiscales.

El señor Swanson suspiró y volvió a examinar los datos que tenía a su alcance acerca del desempeño del IRS en el último par de años, en especial las cifras relacionadas con la función de auditoría (véase la tabla 2).

Con más de 100,000 empleados y casi 30,000 de ellos sólo en la función de revisión (auditoría), el IRS presentaba muchas de las fortalezas y debilidades de las grandes organizaciones burocráticas. Incluso en lo relativo a los costos de personal dentro de la función de revisión, existen costos *fijos* significativos, es decir, aquellos en los que incurre la agencia independientemente de cuál sea el nivel de las actividades de revisión o la amplitud de las auditorías realizadas. Cerca de 25% o 30% de los costos de personal correspondientes a la función de revisión eran gastos fijos en realidad, mientras que el resto (poco menos de 75%) variaba de acuerdo con el nivel de cobertura de las auditorías.

En el aspecto de la recaudación, hay diferencias sustanciales entre las declaraciones fiscales de los individuos y de las empresas. En términos de la importancia relativa de ambas, el señor Swanson observó que a los impuestos sobre la renta individual les correspondía la parte del león en el total de la recaudación del IRS (tabla 8.9). Durante muchos años, la recaudación total de causantes individuales fue sistemáticamente cuatro veces mayor que la de las empresas. Por lo tanto, mejorar las operaciones de recaudación de impuestos y las funciones de vigilancia del cumplimiento por parte de los individuos eran tareas cruciales dentro de los planes del IRS para el futuro. De hecho, el impuesto sobre la renta de los individuos había constituido por lo menos 8% del Producto Interno Bruto (PIB) durante los últimos 20 años.[3] El impuesto sobre la renta de las empresas osciló entre 1 y 2% del PIB en ese periodo. En vista de la magnitud de la recaudación por concepto de impuestos sobre la renta de los individuos, un pequeño cambio en la recaudación produce un impacto apreciable sobre el déficit federal. Por eso el señor Swanson decidió designarla como prioridad y enfocar su análisis para 1995 en la recaudación del impuesto sobre la renta de los individuos únicamente, la cual será también nuestro centro focal en el resto de este caso práctico.

[3] El año de 1976 fue la única excepción, pues el impuesto sobre la renta de los individuos cayó a 7.8% del PIB

TABLA 2 Costos y personal del Internal Revenue Service (1991-1992)

		1991	1992
COSTOS:	Todas las actividades	6,098	6,536
(millones $)	Función de revisión únicamente	1,532	1,605
	Función de revisión: pagos al personal	1,297	1,378
CUENTAS DE PERSONAL:	En todo el servicio	117,017	117,945
	Función de revisión	28,592	28,393

En esta tabla, las cifras correspondientes a todo el servicio se subdividen en las que son aplicables a la función de revisión (auditoría). (Todos los costos se expresan en millones de dólares. Las cifras correspondientes a personal representan promedios anuales.)

TABLA 3 Impuesto sobre la renta de individuos y empresas (1986-1994)

AÑO FISCAL	DECLARACIONES DEL IMPUESTO SOBRE LA RENTA DE INDIVIDUOS (MILLONES)	RECAUDACIÓN DEL IMPUESTO SOBRE LA RENTA (MILLONES $)	
		Individuos	Empresas
1986	102.4	348,959	63,143
1987	103.5	392,557	83,926
1988	107.0	401,181	94,508
1989	110.3	445,690	103,291
1990	112.5	466,884	93,507
1991	113.8	467,827	98,086
1992	115.0	475,964	100,270
1993	114.2	509,680	117,520
1994	114.5*	549,901*	130,719*
1995	—	595,048*	140,437*
1996	—	627,652*	145,790*
1997	—	664,062*	149,822*
1998	—	701,620*	152,492*
1999	—	745,120*	157,152*

*Estimaciones del IRS.
División pormenorizada del impuesto sobre la renta procedente de fuentes corporativas e individuales, número de declaraciones individuales presentadas en 1986-1994 y estimaciones de la recaudación de impuestos en 1994-1999. Todas las estimaciones provienen del Servicio de Información de la Administración del IRS para Ejecutivos de Alto Nivel.

De ordinario, las declaraciones individuales son mucho menos complicadas que las corporativas y, por tanto, sus costos de auditoría son mucho más bajos. En el pasado, 56% del total de los costos variables de las auditorías solía corresponder a las declaraciones de individuos y 44% a las declaraciones de empresas.

A continuación, el señor Swanson observó las cifras relativas a su problema más inmediato: los impuestos adicionales recomendados (IAR) que habrán de recaudarse tomando como base auditorías de expedientes individuales. Éstas fluctuaron en forma considerable entre 1986 y 1992, pero no mostraron una tendencia sistemática (tabla 8.10). Sin embargo, considerando que el número de *expedientes* individuales aumentó de manera más o menos uniforme en ese periodo (véase la tabla 8.9), al señor Swanson le preocupaba que la falta de un incremento correspondiente en el número de auditorías pudiera indicar debilidad en el programa de cumplimiento y vigilancia fiscal del IRS.

Procedimiento de auditoría: declaraciones individuales

Para los propósitos de la auditoría, las declaraciones del impuesto sobre la renta fueron clasificadas primero de acuerdo con su tipo (por ejemplo, individuales *versus* corporativas), después se dividieron según los subtipos (por ejemplo, el tipo de formatos presentados) y por último de acuerdo con el monto en dólares del ingreso bruto ajustado antes de las deducciones. En el caso de las declaraciones de individuos,[4] esto dio lugar a 10 clases de auditorías.

[4]El formulario regular o “largo” para individuos se conoce con el número 1040. En ciertos casos, para simplificar el trabajo a los contribuyentes y al IRS, se permite usar un formulario simplificado, conocido como 1040A (el formulario 1040EZ es una versión aún más simplificada). Cuando un individuo obtiene ingresos por actividades empresariales o el ejercicio de una profesión, está obligado a adjuntar al formulario 1040 un documento conocido como la lista C. Los individuos que reciben ingresos de la agricultura presentan un formulario llamado lista F, en lugar de la lista C. Por supuesto, algunos individuos pueden recibir ingresos tanto de actividades empresariales como de la agricultura, por lo cual necesitan presentar ambas listas, la C y la F, además del formulario 1040.

Para simplificar su análisis, el señor Swanson decidió catalogar las declaraciones individuales en tres clases, basadas en el tipo de formularios utilizados: 1040A (inclusive el 1040EZ), 1040 sin las listas C/F y, 1040 con la lista C o la lista F (o con ambas). El principal resultado de esta simplificación consistiría en que gracias a ella se pasarían por alto los efectos del ingreso dentro de cada una de esas clases. Sin embargo, existía un grado considerable de homogeneidad *dentro* de cada una de dichas clases, en relación con la complejidad de las declaraciones (y, por consiguiente, con los costos de procesamiento y auditoría de las mismas), los tipos de problemas observados en las declaraciones presentadas, etc.

Para cada clase de auditoría, la **cobertura de la auditoría** se define como el porcentaje real de auditorías sometidas del total de las declaraciones presentadas en dicha clase durante un año determinado. A las declaraciones de cada clase de auditoría se les asigna un número conocido como el “DIF”, basado en un ordenamiento por jerarquías, antes de poner en práctica las decisiones referentes a la cobertura de la auditoría. A partir de 1970 aproximadamente, la clasificación DIF es realizada con un programa de cómputo que califica cada declaración de individuos en términos de su capacidad prevista para generar impuestos adicionales si es objeto de auditoría. La aplicación de las decisiones sobre la cobertura de las auditorías requiere efectuar éstas sobre las declaraciones de cada una de las clases separadas, en el ordenamiento por rangos determinado por el programa, hasta alcanzar el porcentaje de cobertura deseado para esa clase específica. Este procedimiento se repite por separado para cada clase de auditoría. El IRS emplea el término **IAR** para referirse al “impuesto adicional recomendado” como resultado de una auditoría. El IAR puede tener valor negativo (cuando corresponde a una devolución de impuestos), cero (sin cambio alguno) o positivo. En la mayoría de los casos, el resultado obtenido es un IAR positivo. La auditoría puede arrojar también como resultado cargos por intereses y multas, los cuales están incluidos en la cifra del IAR.

Las auditorías reales son realizadas por agentes del sistema tributario y auditores fiscales, o por medio de centros de servicio.

Las auditorías de las declaraciones fiscales más complejas (a las que corresponden los máximos impuestos adicionales esperados) están a cargo de agentes del sistema tributario, que son expertos adscritos al personal de la División de Auditoría. Las auditorías de otras declaraciones son realizadas por miembros del personal del IRS conocidos como auditores fiscales. Los agentes del sistema tributario y los auditores fiscales llevan a cabo la mayor parte de sus revisiones por medio de contactos personales con los contribuyentes o sus representantes en las 63 oficinas de distrito del IRS. Las auditorías de algunas declaraciones individuales sencillas son realizadas a través del correo por examinadores tributarios en 10 centros de servicio.

Además de su función de determinar el desempeño de las auditorías del IRS, las cifras de cobertura para cada clase de auditoría, que se divulgan públicamente, hacen las veces de señales para indicar al público la seriedad con que el gobierno juzga a quienes incurren en omisiones al presentar sus declaraciones fiscales. En vista de esto, el IRS tiene **restricciones de política** internas sobre la **cobertura mínima de las auditorías** que debe satisfacer para cada clase de auditoría. Estas coberturas mínimas se especifican tanto para dar cumplimiento al papel de señales dirigidas al público que desempeñan las coberturas de auditoría como para garantizar la "equidad" para todos los electores. Como podemos ver en las tablas 4 y 5, el IAR total para el programa de auditorías de 1992 ascendió a más de 6,000 millones de dólares y una cobertura de auditoría más amplia produciría tal vez mayores ingresos (incluso después de contabilizar los costos de auditoría). No obstante, el IRS no efectuó auditorías en más de 1% de las declaraciones presentadas, principalmente por sus restricciones presupuestarias derivadas de la asignación del presupuesto por el Congreso (la tabla 5 muestra las coberturas para auditoría de 1992, subdivididas por clases). Aun cuando se considere la asignación presupuestaria como un dato conocido, la efectividad del plan de auditoría *a través* de las diferentes clases de auditoría tendrá que ser examinada. La prioridad número uno de señor Swanson consistía en analizar las coberturas óptimas para cada clase de auditoría durante el año siguiente, bajo restricciones en cuanto a la cobertura mínima de las auditorías para diferentes escenarios de asignación presupuestaria por el Congreso. También deseaba evaluar la precisión de los métodos menos formales (y de carácter más intuitivo, empleados hasta entonces por el IRS) para determinar coberturas de auditoría en comparación con la precisión del nivel óptimo teórico.

La planeación para 1995

La principal prioridad de señor Swanson era la planeación para 1995, es decir, decidir cómo sacar el mayor provecho de la función de auditoría a fin de lograr los objetivos del Plan Maestro de Negocios. Los dos objetivos (no necesariamente incompatibles) del PMN que tienen importancia directa para la función de auditoría son *(i)* maximizar la recaudación y *(ii)* fomentar el cumplimiento voluntario, dentro de las limitaciones de gastos determinadas por la afinación presupuestaria del Congreso. Para cualquier presupuesto, la rama de auditoría tenía que decidir cuáles serían las asignaciones entre las diferentes clases de auditorías. En condiciones ideales, lo que el señor Swanson deseaba era desarrollar una metodología en la cual los distintos presupuestos posibles fueran manejados como datos de entrada, y la salida resultante de sus cálculos fueran las coberturas óptimas de auditoría para cada clase, además de estimaciones de los impuestos adicionales así generados, con el debido cumplimiento de las restricciones presupuestarias y de políticas. Para lograr este propósito, necesitaba mayor cantidad de datos.

TABLA 4 Impuestos y multas adicionales para individuos (1986-1992)

AÑO FISCAL	NÚMERO DE AUDITORÍAS	IMPUESTO NETO ADICIONAL EN MILLONES DE DÓLARES 1992 Cátalogos C/F[a]	Otros individuos	Total
1986	1,110,941	1,460	4,388	5,848
1987	1,109,212	1,685	4,228	5,913
1988	1,058,544	1,389	3,953	5,342
1989	982,456	1,218	3,007	4,225
1990	883,293	1,540	3,393	4,933
1991	1,099,505	1,872	4,793	6,665
1992	1,039,355	1,586	4,455	6,041

[a]La **lista C** (formulario 1040) es presentada por individuos que trabajan por su cuenta. La **lista F** (formulario 1040) es presentada por los individuos que declaran ganancias o pérdidas resultantes de actividades agrícolas.
Impuestos (y multas) Adicionales Recomendados (IAR) por la función de auditoría del IRS para declaraciones fiscales de individuos, 1986-1992. Las cantidades están expresadas en millones de dólares para 1992. La "lista C/F" representa el IAR total de los individuos que trabajaban por su cuenta o recibían ingresos de la agricultura (y, en consecuencia, presentaron por lo menos una de las listas C *o* F junto con sus formularios fiscales 1040). "Otros individuos" indica los ingresos IAR correspondientes a todas las demás declaraciones de individuos (1040 sin listas, o los formularios "cortos" 1040A y 1040EZ).

TABLA 5 1992 Registro de auditorías 1992 (sumas globales para el análisis)

TIPO DE DECLARACIÓN	DECLARACIONES PRESENTADAS	DECLARACIONES REVISADAS	COBERTURA DE LA AUDITORÍA	IAR (MILLONES $)
1) 1040A[a]	43,430,500	300,480	0.69%	781
2) 1040 Sin los catálogos C/F	62,977,400	575,493	0.91%	3,674
3) 1040 Con el catálogo C or F	7,421,300	163,382	2.20%	1,586
En total	**113,829,200**	**1,039,355**	**0.91%**	**6,041**

[a]Incluido el 1040EZ.
Exposición pormenorizada del desempeño alcanzado para las tres principales clases de auditorías en 1992. Para cada clase se indica el número total de declaraciones presentadas, el número de declaraciones revisadas y la consecuente cobertura de las auditorías.

El señor Swanson examinó primero las estimaciones del número de declaraciones individuales presentadas dentro de cada clase de auditoría en el año fiscal 1993 (éstas eran las declaraciones que serían sometidas a las siguientes auditorías). Como la mayoría de las declaraciones correspondientes al año fiscal 1993 ya habían sido presentadas, él confiaba en que esas cifras eran fidedignas y las registró en la tabla 6.

Al realizar la auditoría de una declaración cualquiera, el resultado puede ser que no habrá cambio alguno o incluso una disminución del impuesto adeudado. El porcentaje de declaraciones sin cambio oscila de ordinario entre 10% y 20%, según la clase de auditoría de que se trate y quién fue el auditor. Sin embargo, en la mayoría de las auditorías de todas las clases, el resultado es la recomendación de un impuesto adicional. En virtud de que las declaraciones se clasifican con propósitos de auditoría según su IAR potencial —cuanto más alta sea la calificación DIF, más probable será que el resultado de la auditoría represente un incremento de la deuda fiscal del contribuyente— las declaraciones que se eligen para someterlas a auditoría son las que tienen más probabilidades de producir un IAR positivo.

Al planear el programa de auditorías más adecuado para esas declaraciones fiscales, el señor Swanson consideró que la relación entre la cobertura de la auditoría y el impuesto adicional recomendado (IAR) que se espera como resultado de dicha auditoría, era un elemento clave de su análisis. El IAR esperado que puede realizarse con la auditoría de cada declaración adicional tiende a disminuir a medida que el porcentaje de la cobertura de las auditorías aumenta. Esta disminución, que había sido validada por los datos del IRS, se produce en cada una de las clases de auditoría, a causa del ordenamiento de los rendimientos por jerarquías, resultante del procedimiento de clasificación DIF ya descrito.

Estudios anteriores del IRS han confirmado que, después de la normalización apropiada para el número de declaraciones recibidas, la forma general de la relación entre la cobertura de las auditorías y el IAR es consistente a través de todas las distintas clases de auditoría y, por consiguiente, puede representarse por medio de funciones matemáticas similares. Solamente los *parámetros* de esas relaciones varían de una clase a otra, lo cual refleja los diferentes niveles de cumplimiento propios del comportamiento asociado a cada clase. Además, análisis estadísticos ampliados en múltiples años han demostrado que *dentro* de cada clase de auditoría, la relación fue generalmente estable a lo largo del tiempo, tanto en lo referente a su *forma* como a sus *parámetros numéricos*, después de hacer los ajustes necesarios para compensar las diferencias en el número de declaraciones recibidas a través del tiempo.

Los datos requeridos para este análisis fueron obtenidos mediante el Programa de Cumplimiento y Vigilancia Fiscal (PCVF) del IRS. En pocas palabras, bajo el PCVF, se tomaron muestras aleatorias de las declaraciones fiscales presentadas en cada año (incluyendo todas las clases de declaraciones) y esas muestras fueron sometidas a minuciosas auditorías. Esto ayudó al IRS a comprender cabalmente en qué medida cumplía el público con sus obligaciones fiscales. El hecho de que las muestras tomadas para el programa PCVF fueran *aleatorias* hizo que las propiedades estadísticas de las declaraciones incluidas en la muestra reflejaran las propiedades correspondientes de toda la población. Para su propio análisis, el señor Swanson tomó una muestra de declaraciones dentro de cada clase (1040A, 1040 sin listas C/F y 1040 con la lista C o F) a partir de los resultados del PCVF.

El señor Swanson simplificó los datos obtenidos del PCVF de acuerdo con sus propios objetivos (por ejemplo, suprimió las direcciones y demás elementos de identificación de esos datos). El resultado fue una base de datos relacional formada por tres tablas primarias, cuyas estructuras presentamos a continuación.

(i) Tabla de DECLARACIONES FISCALES:

Declaración fiscal	Número de Seguro Social	Ingresos	Clase de auditoría	DIF

La *clase de auditoría* es una de las tres categorías de auditoría: '1' para los 1040A/1040EZ, '2' para los 1040 sin catálogo C/F, y '3' para el 1040 con el catálogo C o F. El *DIF* para cada declaración es la calificación asignada en la jerarquización preliminar computarizada de todas las declaraciones: cuanto más alta es la calificación, mayor será el potencial de una auditoría. El *número del Seguro Social* es la identificación de nueve caracteres del contribuyente.

(ii) Tabla del AUDITOR:

Auditor	ID	Nombre del auditor	Costo por hora

La *ID del auditor* es una clave de cinco dígitos que permite identificar a un auditor del IRS. A los distintos auditores se les pueden pagar salarios diferentes, de acuerdo con la antigüedad, la experiencia previa, etc., y el *costo por hora* es el costo por hora efectivo del auditor.

(i) Tabla de AUDITORÍA:

Auditoría	Número del Seguro Social	ID del auditor	IAR	Horas

TABLA 6 Número estimado de declaraciones presentadas correspondientes al año fiscal 1993

	TIPO DE DECLARACIÓN	DECLARACIONES PRESENTADAS (AÑO FISCAL 1993)
1)	1040A[a]	43,619,000
2)	1040 sin catálogos	63,315,200
3)	1040 con el catálogo C or F	7,609,900
	Total	**114,544,100**

[a]Incluido el 1040EZ.
Número de declaraciones fiscales de individuos presentadas para el año fiscal 1993, por tipo de declaración.

Esta tabla presenta la información clave contenida en los resultados de la auditoría, es decir, los impuestos y multas adicionales recomendados (*IAR*) y las *horas* destinadas a cada auditoría, lo cual puede usarse para calcular los costos. El *número del Seguro Social* es la clave de identificación, y la *ID del auditor* identifica en forma única a uno de los nombres incluidos en la tabla **Auditor.**

El primer paso en el análisis del señor Swanson consistió en identificar la relación entre la cobertura de la auditoría y el IAR esperado. Esto implicaba *(i)* identificar la función matemática fundamental que relacionaba la cobertura de la auditoría y el IAR subsecuente esperado, y *(ii)* estimar los parámetros de esta función para cada una de las clases de auditoría. Sin embargo, en primer lugar y ante todo, surgía la pregunta de qué función se debería estimar.

Para este análisis, suponga que N declaraciones fiscales de una clase de auditoría son candidatas a una auditoría. La declaración fiscal más "prometedora" de la clase tiene el valor DIF más alto y debe auditarse primero. Continuando con este proceso, las declaraciones fiscales de la clase deben ser jerarquizadas, desde la que tiene el DIF más alto hasta la correspondiente al DIF más bajo, para que sean auditadas en ese orden. Se espera que cada auditoría sucesiva de esa clase genere un IAR adicional. El señor Swanson definió la **función acumulativa IAR (*n*)** para cada clase como el IAR esperado total correspondiente a las auditorías de las n primeras declaraciones de esa clase, en el conjunto jerarquizado de N declaraciones. Conforme n fluctúa desde la jerarquía 1 hasta la N, hay una tendencia general a que los valores acumulativos IAR (n) aumenten, pero a una tasa decreciente, porque se acumulan valores incrementales cada vez más pequeños del IAR. La última columna de la tabla 8.11 muestra los valores de la función acumulativa IAR (n). Por ejemplo, fue sometido a auditoría 0.69% de los 43.4305 millones (=N) formularios 1040A, dando lugar a n = 300,480 (0.69% por 43.4305 millones) y, en consecuencia, la Tesorería hizo efectivo un IAR acumulativo de 781 millones de dólares en la clase de auditorías 1040A.

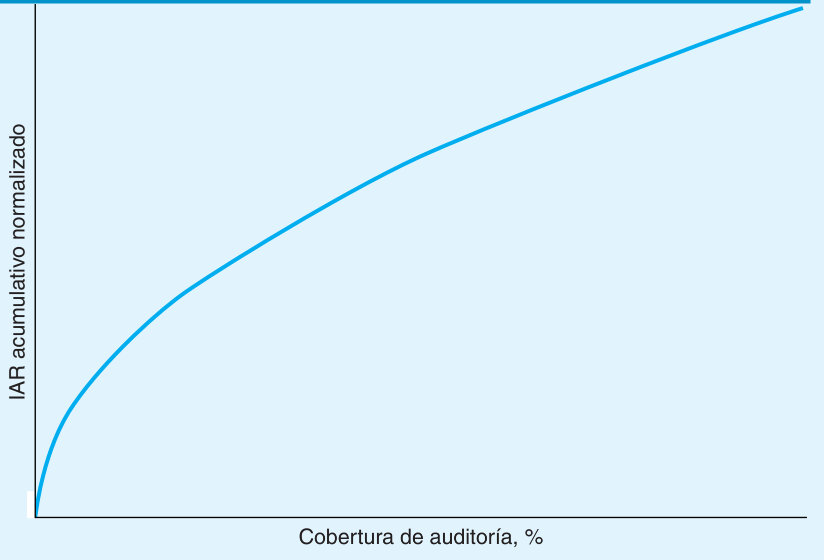
La función acumulativa IAR (n) es muy sensible al número de declaraciones disponibles, N. Por esa razón, el señor Swanson consideró importante emplear una función que estuviera normalizada para N. A continuación decidió estimar la **función IAR (*n*) acumulativa normalizada,** que fue obtenida dividiendo el IAR (n) acumulativo entre el número de declaraciones disponibles en la clase, N. A continuación, examinaría la relación entre el porcentaje de cobertura de la auditoría y el IAR normalizado acumulativo, el cual debería ser estable para cada clase de auditoría.

La función IAR acumulativa normalizada tiene una forma similar a la curva que aparece en la muestra 1. En virtud de que las declaraciones son sometidas a auditoría en orden descendente, según sus respectivas jerarquías DIF, las primeras auditorías producirían IAR elevados, cuyo valor iría disminuyendo progresivamente hasta llegar a las últimas auditorías. De esta manera, la función acumulativa se elevaría con rapidez al principio y más moderadamente después.

La estimación de estas funciones no fue trivial. Para cada una de las clases de auditorías, el señor Swanson pidió una muestra aleatoria de N = 2,000 declaraciones fiscales, a fin de que participaran en el programa PCVF (totalizando 6,000 declaraciones entre las tres clases consideradas). A continuación, esas declaraciones fueron jerarquizadas por orden decreciente, de acuerdo con sus respectivos números DIF, dentro de cada clase sometida a auditoría. Para simplificar las operaciones, el señor Swanson decidió analizar solamente el rango de cobertura de auditorías comprendido entre $p = 0$ y 10%.[5] En consecuencia, solicitó al personal del SIA que le proporcionara solamente las declaraciones correspondientes al 10% de los valores DIF más altos incluidos en la mues-

[5]El señor Swanson consideró improbable que la cobertura de auditoría para cualquiera de las clases fuera mayor que 10%, y no quería que el comportamiento correspondiente a los altos niveles de cobertura incidiera en sus resultados.

CUADRO 1 Forma del IAR acumulativo normalizado en función de la cobertura de auditoría, *p*, para una clase de auditoría



tra de cada clase sometida a auditoría. El resultado de este proceso consistió en una submuestra de 600 declaraciones, constituida por las 200 declaraciones más altas de cada clase sometida a auditoría.[6] Por medio de un análisis de regresión, el señor Swanson llevó a cabo la estimación de las tres funciones IAR acumulativas normalizadas (una para cada clase sometida a auditoría). Como dijimos con anterioridad, la forma de la función definida matemáticamente tendría que ser la misma en todas las clases o jerarquías, ya que sólo cambiaría el valor de los parámetros.

[6]Recuerde que las declaraciones están jerarquizadas dentro de cada clase por valores DIF descendentes, desde el número 1 hasta el número N = 2,000. Por consiguiente, el señor Swanson recibió los datos de las declaraciones 1–200 de cada una de esas tres muestras jerarquizadas.

A continuación, el señor Swanson estimó los costos de auditoría. Estos costos varían principalmente a causa de la diferente complejidad de las declaraciones. En tales condiciones, existen diferencias sustanciales de costo entre las tres clases de auditorías. Sin embargo, no hubo una variación sistemática identificable en los costos de auditoría dentro de las tres clases consideradas. El investigador tenía necesidad de investigar el costo promedio de auditoría por declaración en cada una de dichas clases.

El señor Swanson examinó todos los materiales que tenía a su alcance en relación con el problema. Finalmente consideró que las tablas que había reunido, en combinación con los datos PCVF, serían elementos adecuados para que él pudiera avanzar a la siguiente etapa del análisis, que sería la obtención de las coberturas de auditoría óptimas y los valores totales IAR asociados, correspondientes a cada una de las clases de auditoría para el año fiscal 1995.

Referencias

John Mulvey, “An Asset-Liability Investment System”, en *Interfaces,* 24, núm. 3 (1994), págs. 22-33.

Yosi Ben-Dov, Lakhbir Hayre y Vincent Pica, “Mortgage Valuation Models at Prudential Securities”, en *Interfaces,* 22, núm. 1 (1992), págs. 55-71.

CAPÍTULO

9

Toma de decisiones con objetivos múltiples y heurística

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN — Planeación de recursos en la Universidad de Missouri

En el ambiente académico la búsqueda de la excelencia en las áreas de la enseñanza, la investigación y el servicio de extensión en los niveles educativos plantea desafíos muy peculiares para los encargados de la planeación de recursos, quienes finalmente deben tratar de asignar los recursos limitados con miras a lograr las combinaciones óptimas de los objetivos, frecuentemente antagónicos, de la universidad. El departamento de administración de ingeniería de la Universidad de Missouri-Rolla, se benefició con una importante ampliación de sus instalaciones en 1987. Esta expansión incluyó 5,072 pies cuadrados de espacio, en el cual se instalaría un laboratorio de manufactura integrada por computadora (MIC) para la enseñanza, la investigación y los servicios de extensión. El propósito de esta instalación era fomentar el interés por la enseñanza e investigación de sistemas avanzados de manufactura, y se esperaba que su evolución propiciara la creación de un centro para el fomento de la excelencia técnica de la industria en todo el estado.

La universidad interpretó la nueva instalación del laboratorio MIC como un recurso al servicio de todo el campus, que sería usado por todos los departamentos de la escuela de ingeniería y también por diversos centros de investigación, pertenecientes a la universidad. Este proyecto dio lugar a encarnizados debates y discusiones en torno a cuál sería el mejor diseño para el nuevo laboratorio. A fin de resolver el conflicto se nombró un grupo específico de trabajo. Después de identificar las propuestas alternativas sobre la distribución, 15 secciones fueron elegidas para su inclusión en el laboratorio MIC (por ejemplo, área de simulación física, Autocad, sistema de robótica, y así sucesivamente). Se calculó cuál sería el área ideal para cada sección. La suma de los requisitos ideales fue de 6,035 pies cuadrados, es decir, casi 1,000 veces más que todo el espacio disponible.

El equipo tenía que encontrar una forma sistemática de asignar el espacio disponible real a las secciones deseadas, procediendo de un modo congruente con la misión general de la universidad. Se establecieron cinco metas (por ejemplo, desarrollo de nuevos cursos dependientes del laboratorio, dotar a la industria de mayor conocimiento sobre los conceptos MIC, y así por el estilo), y se utilizó un proceso de jerarquía analítica (PJA) para determinar el grado de prioridad de las diversas metas. Se aplicó además un cuestionario a todo el equipo para determinar las prioridades relativas. El análisis preliminar de las respuestas reveló varias incongruencias en la comparación subjetiva de atributos por pares. Los encuestados tuvieron oportunidad de revisar y ajustar sus respuestas, lo cual garantizó un mayor grado de congruencia en las comparaciones subjetivas.

Una vez establecidas las prioridades, se utilizó un modelo de programación lineal de metas para determinar la asignación del espacio a cada una de las 15 áreas. Nueve de éstas obtuvieron factores de asignación de espacio menores que 1.0, lo cual sugirió la necesidad de reducir las áreas asignadas originalmente como ideales. Cuatro áreas fueron reducidas en forma significativa. El comité utilizó esa asignación de espacios como guía para desarrollar el plan de distribución inicial del laboratorio. También se empleó el análisis de sensibilidad para determinar el efecto de la modificación de prioridades, y se descubrió que el modelo era bastante satisfactorio, de acuerdo con las jerarquías de prioridad.

Se comprobó que el PJA era una metodología eficaz para obtener consensos de grupo en ambientes altamente políticos, en forma oportuna para un problema de planeación institucional bastante complejo. Gracias a la adopción de esta metodología de planeación sistemática, la escuela de ingeniería aceptó sin dificultad las propuestas del departamento sobre el diseño del laboratorio MIC y reconoció que el desarrollo del laboratorio en el futuro debía confiarse al departamento de administración de ingeniería. El laboratorio MIC ha cumplido satisfactoriamente hasta hoy sus objetivos de enseñanza, investigación y extensión. (Véase Benjamin *et al*.)

9.1 INTRODUCCIÓN

De vez en cuando, el modelo utilizado por un administrador puede llegar a ser tan complejo, que el modelo matemático construido para el efecto no puede ser resuelto mediante los algoritmos tradicionales que el analista tiene a su alcance. Esta situación puede presentarse porque

1. El modelo, "correctamente formulado", es demasiado grande, demasiado no lineal o demasiado complejo desde el punto de vista lógico (por ejemplo, cuando requiere el empleo de muchas variables 0–1 en su formulación).
2. Se considera que la imposición de suposiciones o aproximaciones de simplificación, con las cuales el modelo podría ser más accesible, destruiría demasiados elementos de la estructura del modelo que son importantes en el mundo real (es decir, alejaría tanto de la realidad al modelo, que dejaría de ser útil).

Éste es un auténtico dilema. La resolución de un modelo en estas circunstancias es demasiado compleja. Al mismo tiempo, no deseamos simplificarlo en forma perjudicial. ¿Qué hacer en esta situación aparentemente desesperanzadora?

La especialidad conocida como heurística de programación se ha desarrollado, en parte, para responder esta pregunta. Cuando empleamos la expresión "la *resolución* del modelo es demasiado compleja" en la exposición anterior, usamos la palabra *resolución* en un sentido matemático riguroso. Con esto queremos decir que el modelo matemático era tan complicado que, aun cuando exista una solución rigurosa (por ejemplo, una solución óptima en un modelo de optimización), resulta demasiado difícil, demasiado laborioso o quizá hasta imposible encontrarla con los conocimientos y la tecnología actuales. En esos casos se puede aplicar un *algoritmo heurístico.*

Un **algoritmo heurístico** es el que proporciona en forma eficiente soluciones aproximadas satisfactorias para un modelo determinado. Con frecuencia cuando se emplea ese tipo de algoritmos es posible medir con precisión qué tan "buena" es la aproximación obtenida. Por ejemplo, en el contexto de la optimización, se puede decir: "Al terminar el proceso podrá tener seguridad de contar con _____% de optimalidad", cuando se utilizan determinados algoritmos heurísticos. O bien, puede declararse que: "En ciertas suposiciones, la respuesta heurística será óptima en _____% de las ocasiones." Los algoritmos heurísticos nunca proporcionan una solución "mala". Siempre es preferible contar en forma sistemática con soluciones razonablemente buenas, que obtener a veces la mejor solución y, de vez en cuando, una mala solución.

También nos encontraremos a menudo con el término **heurística.** La **heurística** es una regla empírica intuitivamente atractiva para manejar un aspecto determinado de un modelo. Una colección de heurística, o algoritmos heurísticos, se conoce como un **programa heurístico.** Por ejemplo, algunos programas de computadora para resolver programas lineales (como Solver de Excel) aplican la heurística en la fase inicial del método símplex como un intento por encontrar con rapidez un vértice inicial. La heurística se aplica para hallar un inicio rápido con el algoritmo del transporte, y así sucesivamente.

Como podrá usted inferir por las definiciones anteriores, sin duda utiliza la heurística con frecuencia en la resolución de los problemas cotidianos. Por ejemplo, cuando va usted al banco, decide colocarse en la hilera más corta para reducir el tiempo de espera. A pesar de que nada le garantiza a usted que esta actitud sea la óptima, obedece a una regla empírica que frecuentemente produce buenos resultados.

En el contexto de la programación matemática, la heurística se emplea a menudo en conexión con otras estrategias más rigurosas para la resolución de problemas, o bien, como un caso especial de éstas. Lo importante es recordar que un procedimiento o algoritmo heurístico es intuitivamente atractivo, pero la única forma en que podemos garantizar sus resultados es en términos estadísticos o dentro de ciertos márgenes de incertidumbre. Se emplea sobre todo por motivos de eficiencia, es decir, para obtener rápidamente ciertos resultados que se espera serán buenos, aunque quizá no sean los óptimos.

En términos generales, desde el punto de vista de un administrador, un procedimiento heurístico puede ser sin duda alguna tan aceptable como un algoritmo "más exacto" que produzca una solución óptima, y tal vez incluso preferible a éste (en términos de costos). En este caso, las consideraciones predominantes deberán ser qué cantidad de conocimientos y orientaciones podrá proporcionar el modelo y cuál será el beneficio neto global, medido por la diferencia entre "los ahorros obtenidos con el modelo y el costo de producción del propio modelo y de su solución".

En la primera parte de este capítulo examinamos varios ejemplos de algoritmos heurísticos, que aplicamos a grandes modelos de *optimización combinatoria.* El término **optimización combinatoria** significa que existe sólo un número finito de alternativas factibles y que si todas ellas son enumeradas, será posible encontrar la óptima. El problema es que, en la práctica, ese número finito asciende muchas veces a millones o incluso a miles de millones de posibilidades, por lo cual la enumeración exhaustiva es del todo imposible, aunque se utilicen computadoras de alta velocidad. Si bien es cierto que esos modelos se pueden formular como programas de números enteros con variables 0–1, muchas veces son tan grandes que aun con la formulación de PE resulta prohibitivo (por lo caro) tratar de optimizarlos mediante los procedimientos habituales.

Después de los ejemplos presentados en la primera parte del capítulo, examinaremos modelos donde el objetivo consiste en lograr niveles aceptables de ciertas "metas". Por ejemplo, considere modelos con objetivos múltiples y antagónicos entre sí: el presidente de una empresa que desea obtener altas ganancias, pero también quiere mantener sus precios bajos para no perder clientes. Este ejemplo es típico en las aplicaciones de negocios. La *programación por metas* se ocupa de esos modelos. Este tema está estrechamente relacionado con la programación heurística porque la misma programación por metas puede considerarse, en cierto modo, como un enfoque heurístico para el tratamiento de objetivos múltiples.

A continuación examinaremos un tema nuevo e importante conocido como el proceso de jerarquía analítica (PJA), el cual ayuda a los administradores a escoger entre muchas decisiones alternativas cuando se emplean múltiples criterios para calificar dichas alternativas.

9.2 PROGRAMACIÓN DE RECURSOS (SECUENCIA DE TRABAJOS EN COMPUTADORA)

TIEMPO DE AJUSTE INICIAL DEPENDIENTE DE LA SECUENCIA

Consideremos un recurso de producción con el cual tenemos que realizar muchos trabajos; por ejemplo, una computadora, un taladro o una máquina para hacer helados. En el caso típico, es probable que dicho recurso tenga que detenerse después del procesamiento de un trabajo, a fin de hacer los ajustes necesarios para iniciar el siguiente. Ese "tiempo ocioso" se conoce como tiempo de **ajuste inicial**, *de cambio* o *de preparación.* La duración de este periodo puede depender tanto del siguiente trabajo que se va a procesar como del trabajo que acaba de finalizar. Una secuencia de procesos similares (elaborar helado de vainilla estilo francés, después de haber fabricado helado de vainilla estilo Nueva York) implicaría interrupciones menos largas para el ajuste (la limpieza de la máquina), que si se trata de una secuencia de trabajos muy diferentes entre sí (helado de vainilla estilo francés después de helado de chocolate estilo holandés). Un problema muy común de la administración consiste en establecer en forma apropiada *la secuencia de trabajos, de manera que se minimice el tiempo total de ajuste inicial.* Éste es un problema característico para compañías como Monsanto Chemical, que fabrica sustancias químicas en recipientes comunes, o bien, las transporta en los mismos vehículos cisterna. Un factor importante para el costo del ajuste inicial es el orden en el cual las sustancias químicas son elaboradas o transportadas.

Usted comprenderá con facilidad que, desde el punto de vista de las combinaciones, este modelo puede ser sumamente extenso. Si solamente hay tres trabajos por procesar, que llamaremos A, B y C, entonces cualquiera de los tres podrá realizarse primero, cualquiera de los otros dos puede ocupar el segundo lugar y así quedará determinado el tercer lugar (es decir, lo deberá ocupar el trabajo restante). Las secuencias posibles pueden ilustrarse como un árbol en el cual cada rama representa una secuencia. Las seis posibilidades han sido ilustradas en la figura 9.1. En términos generales, con n trabajos existen $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$ combinaciones o secuencias posibles ($n!$ es el símbolo matemático correspondiente a *factorial de n*). Con sólo 10 trabajos tenemos $10! = 3{,}628{,}800$ secuencias diferentes. Usted podrá observar que este número de secuencias posibles ($n!$) aumenta rápidamente cuando se eleva el valor de n.

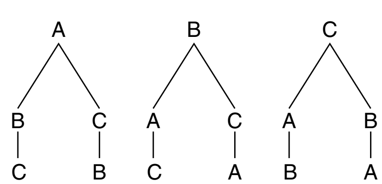


FIGURA 9.1

Árbol que muestra las seis secuencias posibles para tres trabajos A, B y C

Resulta obvio que una forma de resolver el problema de minimización anterior consiste en llevar a cabo una enumeración exhaustiva. Es decir, se debe generar cada una de las $n!$ posibles secuencias de trabajos y calcular el tiempo inicial total que requiere cada una, para finalmente elegir la secuencia a la cual corresponda el tiempo total más corto. Sin embargo, aunque este algoritmo nos proporcionaría un óptimo verdadero, su uso no resulta práctico ni siquiera con valores modestos de n, por el gran número de secuencias que es necesario enumerar. Si se tratara de 20 trabajos y una computadora pudiera calcular 3,000,000 de combinaciones por segundo (3 MIPS en el léxico del cómputo), se requerirían más de 25,000 años para encontrar la respuesta óptima mediante la enumeración exhaustiva de todas las combinaciones posibles.

SOLUCIONES HEURÍSTICAS

A pesar de que las reglas heurísticas no garantizan una solución óptima, se aplican con frecuencia a este tipo de modelos porque generalmente nos conducen con bastante rapidez a una solución satisfactoria.

A manera de ejemplo, considere que un operador de computadora necesita "correr" tres trabajos bastante largos el lunes por la tarde. Actualmente la computadora está ociosa. A cada uno de esos trabajos le corresponde un tiempo de ajuste inicial (el necesario para la búsqueda de las cintas de entrada, la colocación de las mismas, el ajuste apropiado de las unidades de disco y demás equipo auxiliar) según se especifica en la figura 9.2. Como el número de secuencias es solamente $3! = 3 \cdot 2 = 6$ secuencias posibles, todas ellas pueden ser enumeradas. Los resultados aparecen en la tabla 9.1. Como podrá usted ver, la secuencia óptima (la que corresponde al tiempo de ajuste inicial mínimo) es $0 \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$.

Una heurística codiciosa Veamos ahora cómo puede aplicarse una regla heurística a este modelo. La regla que vamos a ilustrar se conoce como la **regla del segundo mejor,** conocida en ocasiones como el **algoritmo codicioso.** Podemos expresarla así:

1. En el paso 1 (por ejemplo, cuando seleccione el primer trabajo), realice la tarea a la cual corresponda el menor tiempo de ajuste inicial.
2. Para cada uno de los siguientes pasos elija la tarea asociada al menor tiempo de ajuste inicial, de acuerdo con el estado actual del proceso.

Apliquemos ahora esta regla a los datos que aparecen en la figura 9.2. La tarea a la cual corresponde el menor tiempo de ajuste inicial es B. Por consiguiente, sabemos que el primer paso es $0 \rightarrow B$. De acuerdo con el algoritmo codicioso, ahora que ya hemos terminado con B, la tarea que resulta conveniente seleccionar es C, ya que el ajuste inicial para $B \rightarrow C$ es menor que el de $B \rightarrow A$. Así pues, tenemos $0 \rightarrow B \rightarrow C$, y ahora solamente podemos terminar con A. Con estas operaciones obtenemos

$$\text{heurística codiciosa: } 0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$$
$$\text{tiempo total de ajuste inicial} = 21 + 46 + 46 = 113$$

Observe que esta solución dista mucho de ser la óptima. De hecho, en este ejemplo la heurística codiciosa, aunque intuitivamente es atractiva, ha propuesto la peor política posible para nuestro modelo. Aun cuando, en general, es cierto que cuando se trata de modelos de decisión secuencial el algoritmo codicioso *no* nos conduce a una solución óptima, en realidad existen unos cuantos modelos especiales en los que sí lo hace. (Véase, por ejemplo, el problema de encontrar un árbol

Del trabajo \ Al trabajo	A	B	C
0	27	21	32
A		35	22
B	49		46
C	46	12	

FIGURA 9.2
Tiempos de ajuste inicial en minutos

	A	B	C
0	0	9	10
A		23	0
B	22		24
C	19	0	

FIGURA 9.3
Datos transformados

TABLA 9.1 Resultados de la enumeración exhaustiva

SECUENCIA	TIEMPO DE AJUSTE INICIAL	TOTAL (MIN)
$0 \to A \to B \to C$	27 + 35 + 46	108
$0 \to A \to C \to B$	27 + 22 + 12	61
$0 \to B \to C \to A$	21 + 46 + 46	113
$0 \to B \to A \to C$	21 + 49 + 22	92
$0 \to C \to A \to B$	32 + 46 + 35	113
$0 \to C \to B \to A$	32 + 12 + 49	93

de expansión mínima en el capítulo 6.) Sin embargo, esta regla es sumamente fácil de aplicar y los estudios realizados acerca de este tipo de modelo han demostrado que *estadísticamente,* dicha regla no resulta inapropiada para el tipo de modelo de secuencia antes mencionado. Por ejemplo, en un artículo [véase Gavett] se demostró que la heurística produce a menudo mejores resultados que los que sería posible obtener por medio de la selección de las tareas en forma exclusivamente aleatoria.

Una heurística mejor En el mismo artículo se demuestra que mediante la siguiente heurística modificada se obtienen resultados todavía mejores:

1. Transforme los datos originales de la figura 9.2, restando el mínimo tiempo de ajuste de cada columna a todos los demás datos contenidos en dicha columna. Con este procedimiento obtenemos los datos que aparecen en la figura 9.3.
2. Aplique el algoritmo codicioso a este conjunto de datos transformados. Al hacerlo, obtenemos

El mejor primer paso	$0 \to A$
El mejor segundo paso	$A \to C$
El tercer paso	$C \to B$

y así, la heurística modificada produce la secuencia $0 \to A \to C \to B$ que, según se ha demostrado, es la óptima para este modelo.

Aunque es cierto que esta heurística modificada no siempre nos proporciona la solución óptima, su aplicación es sencilla y, en la práctica, produce a menudo resultados muy satisfactorios cuando se trata de modelos grandes.

9.3 PROGRAMACIÓN CON RECURSOS LIMITADOS (ALIGERAMIENTO DE LA CARGA DE TRABAJO)

Imagine una secuencia de actividades que deben programarse para completar un proyecto. Los modelos básicos como PERT y CPM, que veremos en el capítulo 14, programan las actividades con el fin de minimizar el tiempo total de ejecución del proyecto, bajo la restricción de que algunas actividades no pueden comenzar antes de que otras hayan sido terminadas. Con frecuencia se considera que los recursos (dinero, trabajo, maquinaria, etc.) necesarios para terminar cada una de las actividades están disponibles en cualquier cantidad necesaria para cualquier programa en particular. Sin embargo, en la realidad esos recursos pueden ser limitados y, en ese caso, la disponibilidad de recursos se convierte en una restricción más.

UN EJEMPLO SENCILLO

Como un ejemplo sencillo, considere el modelo de programación que aparece en la figura 9.4 y la tabla 9.2. La figura 9.4 ilustra las **relaciones de precedencia** entre las diferentes actividades. Es decir, muestra qué actividades deben completarse antes de que otras puedan comenzar. Por ejemplo, la actividad VIII no puede comenzar sino hasta que la VII esté completamente concluida, y la VII no puede dar principio sino hasta que la I haya finalizado. En la tabla 9.2 se indica

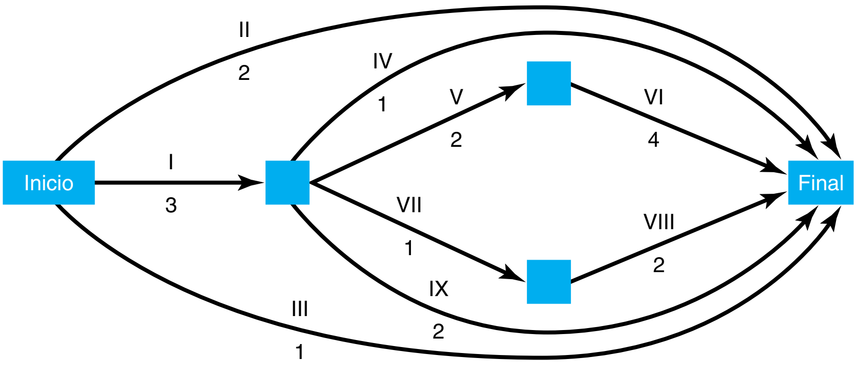


FIGURA 9.4

Relaciones de precedencia

TABLA 9.2 Requerimientos de cada actividad

ACTIVIDAD	TIEMPO NECESARIO PARA COMPLETARLA (SEMANAS)	NÚM. DE PERSONAS (POR SEMANA) NECESARIO PARA COMPLETARLA)
I	3	6
II	2	3
III	1	3
IV	1	3
V	2	6
VI	4	5
VII	1	3
VIII	2	4
IX	2	3

la duración de cada actividad (en semanas) y los recursos requeridos (número de personas) para completar cada una de ellas.

Si por el momento pasamos por alto el "número de personas requerido", este problema es sencillo y, por tanto, se puede calcular con facilidad el menor tiempo posible que se requiere para finalizar toda la secuencia de tareas. El resultado es nueve semanas.[1] La figura 9.5 muestra un programa de actividades propuesto que permitirá alcanzar ese tiempo de finalización. De esta manera, la figura 9.5 respeta las relaciones de precedencia de la figura 9.4 y, al mismo tiempo, muestra cuándo debe comenzar cada una de las actividades y cuánto tiempo requerirá (en semanas). En este programa propuesto, cada actividad empieza lo más temprano posible. Podrá usted ver que I, II y III comienzan de inmediato (al principio de la semana 1). Las actividades IV, V, VII y IX se ponen en marcha al principio de la semana 4. La actividad VI empieza al principio de la semana 6 y la actividad VIII comienza al inicio de la semana 5.

Consideremos ahora el número de personas que serán necesarias cada semana para cumplir con el programa propuesto. Los datos de la tabla 9.2 sobre personal pueden combinarse con el programa de la figura 9.5 para producir la **gráfica de carga de personal** de la figura 9.6. Usted podrá comprobar que el programa propuesto utiliza al personal en forma errática, pues los requerimientos al respecto fluctúan entre los extremos de 15 personas en la semana 4 y sólo cinco en las semanas 7, 8 y 9. Un programa que utilice los recursos con mayor uniformidad puede ser conveniente para la gerencia. Con frecuencia se aplican programas heurísticos para lograr objetivos de este tipo.

[1]Si usted ha estudiado PERT, verá que las actividades I, V y VI forman la ruta *crítica* (véase la sección 14.3).

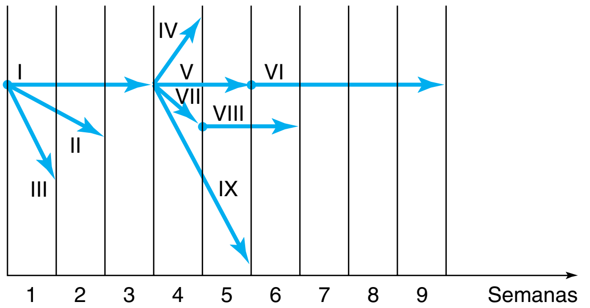


FIGURA 9.5
Programa de actividades propuesto

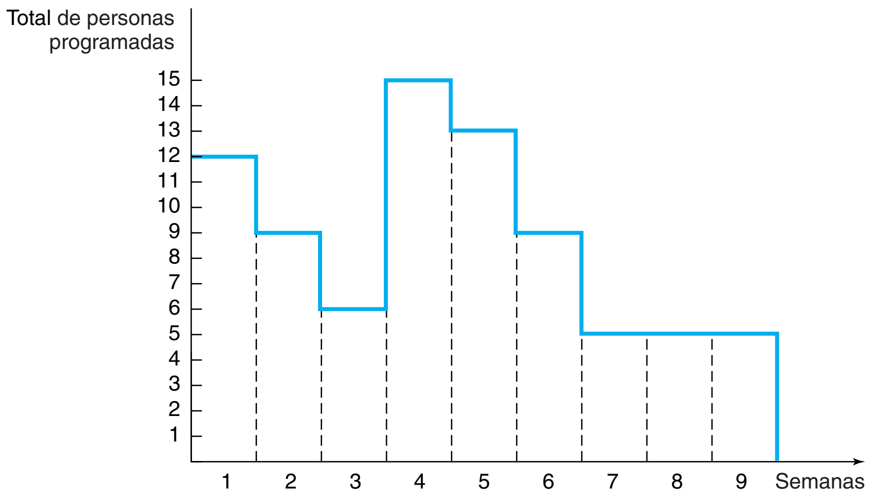


FIGURA 9.6
Gráfica de carga de personal para el programa propuesto

HEURÍSTICA PARA ALIGERAR LA CARGA DE TRABAJO

Para referirnos a este tipo de heurística, definiremos primero una **holgura** para cada actividad.

> La holgura es la cantidad máxima de tiempo que una actividad puede aplazarse sin provocar un retraso en la fecha de terminación de todo el proyecto.

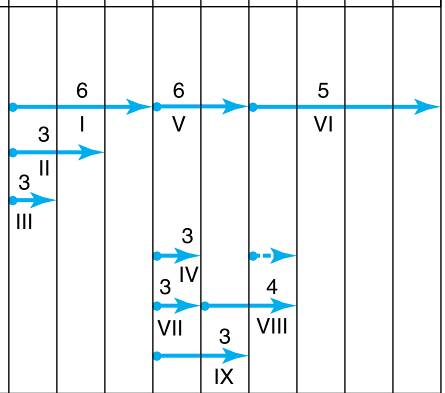
Observe en la figura 9.5 que si el tiempo de terminación de la actividad V se aplazara, la actividad VI no podría comenzar al principio de la semana 6 y el proyecto no podría completarse al final de la novena semana. De esto se deduce que la actividad V no tiene holgura. En cambio, la terminación de la actividad VIII podría aplazarse hasta tres semanas sin retrasar la terminación del proyecto. Por consiguiente, la actividad VIII tiene una holgura de tres semanas.

Ahora bien, aplicando este concepto llegamos a la siguiente heurística, que nos ayudará a "aplanar las crestas" y "elevar los valles" para tener una carga de trabajo más uniforme a lo largo del tiempo:

1. Determine los máximos recursos requeridos en el programa propuesto; por ejemplo, m trabajadores por semana.

2. Para cada semana, determine un nuevo límite superior de $m - 1$ para la utilización de recursos (recuerde que estamos tratando de reducir las crestas en un procedimiento de un paso a la vez) y, si es posible, revise el programa propuesto para que satisfaga esta restricción. La revisión se realiza sistemáticamente en la siguiente forma:

   a. A partir de la primera semana que se viole la restricción, considere cuáles son las actividades que contribuyen a la excesiva carga de trabajo y traslade hacia adelante la que tenga *más* holgura, desplazándola lo menos posible, hasta un punto donde ya no contribuya a la sobrecarga, pero sin que ocasione un retraso en la terminación de todo el proyecto (lo cual significa que las actividades con holgura cero no pueden moverse). Si existen empates, desplace hacia adelante la actividad que contribuya *menos* a la sobrecarga (es decir, la que requiera menos mano de obra).



Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Personal total	12	9	6	15	13	9	5	5	5
Nuevo límite	14	14	14	14	14	14	14	14	14

FIGURA 9.7

Primera propuesta

b. El proceso heurístico termina cuando la sobrecarga presente ya no se puede reducir más.

Para la aplicación de esta heurística presentaremos el plan que aparece ilustrado en la figura 9.7. En ella, el rótulo con el cual se designan las actividades (por ejemplo, I, II y así sucesivamente) aparece *debajo* de cada flecha. *Encima* de cada flecha hemos anotado el número de personas requerido cada semana. Por ejemplo, el 6 escrito sobre la actividad I implica que se requieren seis personas en cada una de las tres semanas necesarias para completar la actividad I. Así, puede usted buscar en las columnas apropiadas para conocer la utilización total de personal en una semana cualquiera. Por ejemplo, puesto que la semana 2 se entrecruza con las actividades I y II, el dato que se encuentra en la fila correspondiente a personal total, bajo la columna de la semana 2, es 9. En forma similar, la distancia desde la cabeza de cada flecha sin continuidad al final de una serie de trabajos hasta el final de la semana 9 indica la holgura que corresponde a esa flecha. De este modo, la actividad IV tiene cinco semanas de holgura, mientras que la actividad VIII tiene tres semanas, y así sucesivamente. Para la actividad VII, que va seguida de una flecha, calculamos la holgura observando que VII va seguida solamente por VIII. Puesto que la holgura de VIII es tres semanas, la holgura de la actividad VII debe ser igualmente de tres semanas. Observe también que las actividades I, V y VI tienen holgura cero porque ya no es posible desplazarlas más hacia adelante sin que aumente el tiempo total de terminación de nueve semanas. Al aplicar la heurística anterior, desplazamos hacia adelante sólo las actividades con holgura positiva y, por esta razón, ni siquiera se consideró a las actividades I, V y VI.

Aplicación de la heurística Una vez hechas estas observaciones, ya podemos aplicar la heurística. Para la primera propuesta (figura 9.7), el recurso máximo requerido es 15 en el periodo 4. Así pues, según el paso 2, imponemos un nuevo límite superior de 14 en cada una de las semanas. Este límite sólo es transgredido en la semana 4. Las actividades "movibles" que contribuyen a la sobrecarga son la IV, la VII y la IX (porque no necesitamos tomar en cuenta la V). De ellas, la IV es la que tiene más holgura. Al desplazar un periodo hacia adelante la actividad IV, la utilización de personal en la semana 4 se reduce en tres unidades hasta llegar a 12 personas, pero se crea una utilización de tres unidades adicionales en la semana 5, con lo cual y después de todo se tiene un total de 16 y esto provoca una sobrecarga (no se respeta el límite superior convenido, que es de 14). Por tanto, esa actividad no se debe mover más hacia adelante. Usted podrá observar que al desplazar la actividad IV un total de dos semanas (hasta la semana 6, como ilustra la figura 9.7) no se ha transgredido algún límite superior. Con esto tenemos la segunda propuesta tal como aparece en la figura 9.8.

En esta figura, el límite superior de 13 deberá reducirse a 12. La única sobrecarga es ocasionada por VIII y IX en la semana 5. La actividad IX es la que tiene más holgura y debe adelantarse tres semanas, de modo que comience en la semana 7, como muestra la figura. Así obtenemos la tercera propuesta, presentada en la figura 9.9. En este caso, el límite superior de 12 tendrá que reducirse a 11. Se han producido sendas discrepancias en las semanas 1 y 6. De acuerdo con el algoritmo, tenemos que desplazar primero dos semanas la actividad III y a continuación desplazaremos una semana la actividad IV. Continuando con la misma heurística obtenemos la cuarta y la quinta propuestas, tal como aparecen en las figuras 9.10 y 9.11.

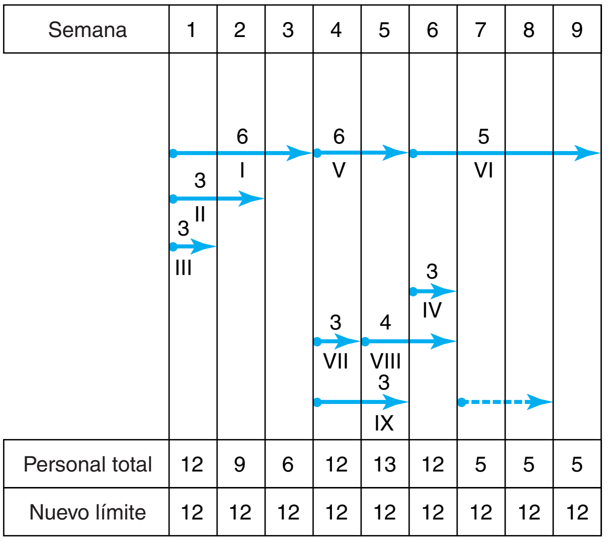


FIGURA 9.8
Segunda propuesta

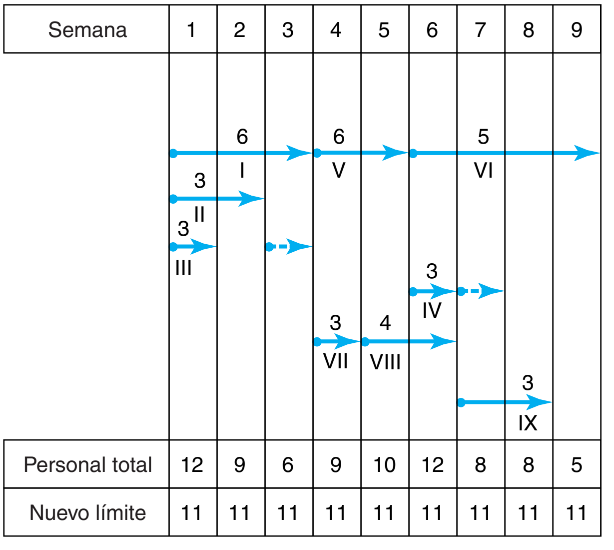


FIGURA 9.9
Tercera propuesta

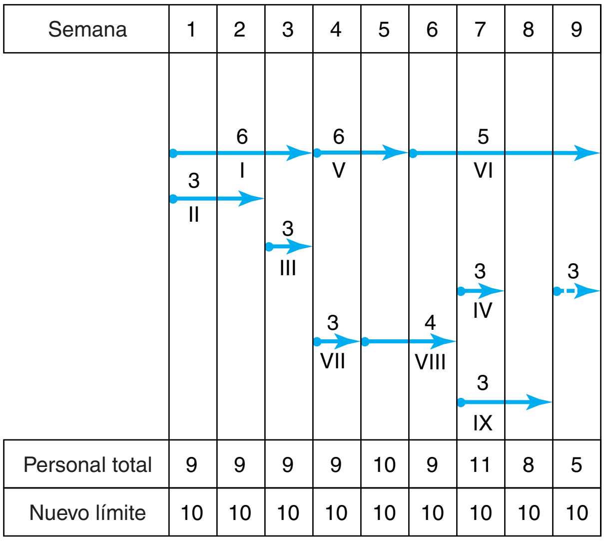


FIGURA 9.10
Cuarta propuesta

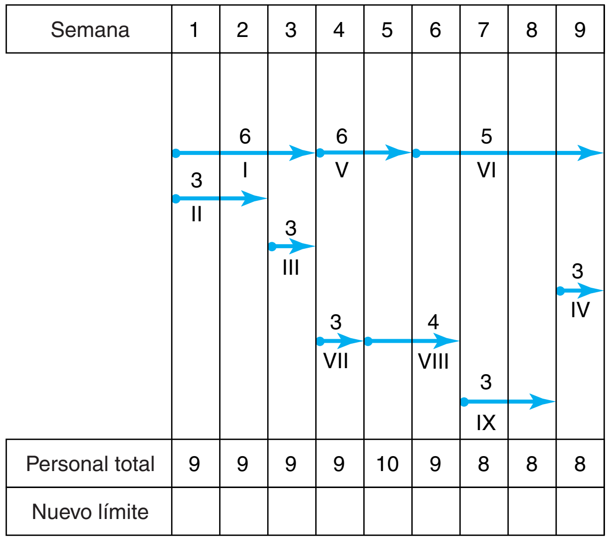


FIGURA 9.11
Quinta propuesta

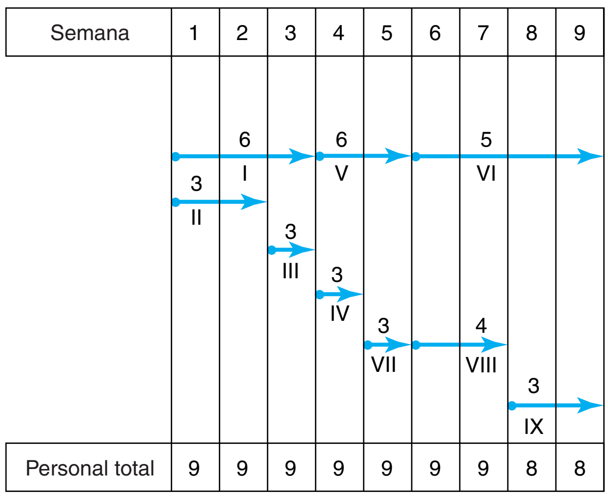


FIGURA 9.12
Programa minimax óptimo

Dónde termina la heurística Este algoritmo es incapaz de mejorar los resultados más allá de la quinta propuesta. Para apreciarlo con claridad, observe que la sobrecarga en la semana 5 sólo puede reducirse desplazando hacia adelante la actividad VIII. Sin embargo, acelerar la actividad VIII en una, dos o tres semanas incrementaría a 12 el personal total en las semanas 7 y 8 o en las semanas 8 y 9. En consecuencia, se *satisface* el paso 2b de la heurística y, por tanto, este programa de trabajo representa la solución heurística. Con nuestro programa final se ha impartido a la utilización de personal un grado mucho mayor de uniformidad que el representado en la figura 9.6, pues ahora la utilización máxima es 10 (en la semana 5) y la mínima es ocho.

Para este modelo, podríamos definir la solución óptima como un programa que *minimice la utilización máxima* de personal. En la figura 9.12 se ilustra un programa óptimo construido según este criterio *minimax.* La utilización máxima en este programa es nueve. Aunque el algoritmo heurístico no nos condujo a la optimalidad (en este sentido minimax; y debemos admitir que el programa de la figura 9.12 es más uniforme que el de la figura 9.11), nuestro enfoque heurístico funcionó bastante bien. En modelos grandes (es decir, que abarcan muchas actividades) puede no ser posible generar con facilidad el programa minimax óptimo. Por esta razón se emplea a menudo un enfoque heurístico para dar mayor uniformidad a los requisitos.

Esta sección y la anterior han sido solamente una breve introducción al importante tema de los algoritmos heurísticos. En los problemas 9-2, 9-3 y 9-4 que aparecen al final de este capítulo, se expondrá otro ejemplo, en el cual se asignarán ciertos recursos a diferentes lugares o ubicaciones de trabajo dentro de un edificio (lo que se conoce a veces como el modelo de "diseño de distribución").

9.4 OBJETIVOS MÚLTIPLES

En muchas aplicaciones, la persona que planea persigue más de un objetivo. Es posible que todos esos objetivos sean igualmente importantes o que, por lo menos, a dicha persona le resulte difícil comparar la importancia de uno de ellos frente a la de otro. La presencia de objetivos múltiples se describe frecuentemente como el problema de "combinar manzanas y naranjas". Considere usted, por ejemplo, a la persona que planea y organiza una empresa cuyas metas a largo plazo son: (1) maximizar las ganancias por concepto de descuentos, (2) maximizar la participación de la firma en el mercado al final del periodo de planeación, y (3) maximizar el capital en equipo físico existente al final de dicho periodo. Estas metas no son conmensurables, es decir, no es posible combinarlas o compararlas *directamente.* También está muy claro que estas metas son *conflictivas.* Es decir, existen posibles compensaciones en las cuales el hecho de sacrificar los requisitos de una meta cualquiera tenderá a producir mayores rendimientos en las demás metas. Por ejemplo, el hecho de gastar menos en mercadotecnia puede reducir la participación de la firma en el mercado y, de esa manera, impedir que alcance su segunda meta. Sin embargo, ese dinero puede emplearse para comprar nueva maquinaria con el fin de incrementar el capital en equipo físico y satisfacer la tercera meta.

El tratamiento de objetivos múltiples es un área de aplicación nueva, pero importante. En la actualidad, los métodos analíticos para manejar modelos con objetivos múltiples no han sido aplicados en la práctica con tanta frecuencia como algunos otros modelos, por ejemplo, la programación lineal, los pronósticos, el control de inventarios y la simulación Monte Carlo. No obstante, los conceptos involucrados son importantes y algunos miembros destacados del círculo de las ciencias de la administración o incluso de la alta gerencia consideran que esas ideas serán aún más importantes en el futuro cercano. Se ha descubierto que los modelos son especialmente útiles para manejar problemas del sector público.

Se han desarrollado varios métodos para la resolución de modelos con objetivos múltiples (conocidos también como toma de decisiones con criterios múltiples). Mencionaremos los siguientes: el uso de la teoría de utilidad con múltiples atributos, la búsqueda de soluciones óptimas de Pareto

CÁPSULA DE APLICACIÓN

Llegó el recaudador: Podría afinar su sistema tributario con la ayuda de la programación por metas

El diseño de un sistema tributario equitativo que produzca suficientes ingresos para mantener programas del gobierno sin ser una carga excesiva para algún grupo particular de contribuyentes es una tarea extremadamente difícil (e incomprendida). La pérdida de fuentes de ingresos, a medida que los residentes y las empresas emigran de la ciudad hacia los suburbios, ha complicado más este problema para quienes planean el pago de impuestos urbanos. Históricamente, los impuestos sobre la propiedad han sido la principal fuente de ingresos para las ciudades, como en el caso de Peoria, Illinois. Sin embargo, la posibilidad de confiar en esta fuente se ha debilitado a causa de la disminución de la base tributaria en términos de propiedades inmuebles y por una revolución gradual entre los contribuyentes. Los impuestos más altos sobre la propiedad tienden a alentar la emigración de las familias de esta ciudad que tienen altos ingresos y mayor movilidad, con lo cual los ingresos fiscales *decrecen* y se forma un círculo vicioso.

Por esa razón, quienes planean se han visto forzados a depender más de otras formas de tributación, como los impuestos sobre las ventas. Estos gravámenes tienden a asignar una carga proporcionalmente mayor a las familias de bajos ingresos. Sin embargo, también tienen ciertas ventajas frente a los impuestos sobre la propiedad:

1. Son menos propensos a provocar la emigración de las empresas de la ciudad o a desalentar la creación de nuevas empresas.
2. Trasladan una parte de la carga fiscal a los residentes no urbanos que se benefician con los servicios públicos.
3. En virtud de que los impuestos sobre las ventas se tienen que pagar de manera continua en cantidades más pequeñas, el público los percibe comúnmente como menos gravosos (o menos fuertemente gravosos) que los impuestos cuyo pago implica el desembolso de sumas globales.

El alcalde de Peoria obtuvo la ayuda de consultores universitarios para buscar la forma de mejorar la estructura tributaria de la ciudad. Entre todos ellos formularon un modelo de programación lineal con objetivos múltiples (PLOM) para comprender más a fondo las alternativas disponibles y los pros y contras de los diferentes planes. El modelo tenía cuatro variables (las tasas del impuesto sobre la propiedad, sobre ventas generales, sobre bienes duraderos y sobre la gasolina) junto con varios objetivos, entre los cuales figuraban los siguientes:

- Reducir los impuestos sobre la propiedad
- Minimizar la carga fiscal para las familias de bajos ingresos
- Minimizar la fuga de las empresas y de los compradores, quienes emigran a los suburbios para huir de los altos impuestos sobre las ventas

Era esencial encontrar la forma de alcanzar esos objetivos sin mermar la recaudación fiscal ni acrecentar la carga fiscal sobre las familias residentes en la ciudad con ingresos medianos y altos. Se formularon varias restricciones para representar éstos y otros requerimientos, como limitar el impuesto general sobre las ventas entre 1 y 3%, y suprimir el impuesto vigente sobre alimentos y medicinas.

La solución produjo 12 planes fiscales eficientes para que el ayuntamiento los considerara. Con los mejores de esos planes se consiguió una reducción considerable del impuesto sobre la propiedad y la recaudación perdida se compensó por medio de un impuesto de $0.033 por galón de gasolina y de un aumento de 1 a 2% del impuesto sobre las ventas. (Véase Chrisman *et al*.)

mediante la programación lineal con criterios múltiples, el proceso de jerarquía analítica (PJA) y la programación por metas. Nuestra exposición se limitará a los dos últimos métodos: el PJA y la programación por metas. El PJA fue desarrollado por Thomas Saaty [véase Saaty] y es un enfoque relativamente nuevo para ayudar a los administradores a escoger entre muchas alternativas de decisión, sobre la base de criterios múltiples. El concepto de la programación por metas (PM) fue introducido por A. Charnes y W. W. Cooper [véase Charnes y Cooper] el cual, en algunos aspectos, se puede considerar como una aproximación heurística al modelo de objetivos múltiples. La PM es un enfoque poderoso que se ha construido a partir de la programación lineal presentada en los capítulos 3 a 5. Ambas áreas de estudio son actualmente objeto de considerable interés y desarrollo, y representan temas potencialmente importantes para los futuros administradores.

LA PROGRAMACIÓN POR METAS

Se aplica generalmente a modelos lineales; es una extensión de la PL que permite a la persona que planea aproximarse lo más posible para satisfacer diversas metas y restricciones. Con dicha extensión la persona que toma las decisiones puede incorporar, por lo menos en un sentido heurístico, su propio sistema de preferencias al enfrentarse a múltiples metas antagónicas. Algunas veces se considera que es un intento de colocar en un contexto de programación matemática el concepto de la *satisfacencia* (combina las ideas de satisfacción y complacencia). Este término fue acuñado por Herbert Simon, ganador del Premio Nobel de economía, para transmitir la idea de que en algunas ocasiones las personas no buscan las soluciones óptimas, sino más bien soluciones “suficientemente buenas” o “aproximaciones aceptables”; en otras palabras, ese término se refiere al deseo de maximizar varios objetivos en forma simultánea a niveles mínimamente satisfactorios. Ilustraremos el método de programación por metas con varios ejemplos.

Suponga que tenemos un modelo de diseño para un programa educacional con variables de decisión x_1 y x_2, donde x_1 representa las horas de trabajo en el aula y x_2 son las horas de trabajo en el laboratorio. Suponga que tenemos la siguiente restricción sobre el total de horas del programa:

$$x_1 + x_2 \leq 100 \qquad \text{(total de horas del programa)}$$

Dos tipos de restricciones En el enfoque de programación por metas hay dos tipos: (1) *restricciones del sistema* (llamadas restricciones duras), que no pueden ser violadas, y (2) *restricciones de metas* (llamadas restricciones blandas), que pueden ser violadas en caso necesario. La restricción anterior referente al total de horas del programa es un ejemplo de una restricción del sistema.

Ahora, en el programa que estamos diseñando, suponga usted que cada hora de trabajo en el aula incluye 12 minutos de experiencia en grupos pequeños y 19 minutos para la resolución individual de problemas, en tanto que cada hora de trabajo en el laboratorio incluye 29 minutos de experiencia en grupos pequeños y 11 minutos para la resolución individual de problemas. Observe que el tiempo total del programa es de 6,000 minutos (100 hr* 60 min/hr) como máximo. Los autores de este modelo persiguen las dos *metas* siguientes: cada estudiante debe dedicar al trabajo en grupos pequeños una porción de tiempo que se aproxime lo más posible a la cuarta parte del tiempo máximo del programa, y un tercio de dicho tiempo deberá dedicarlo a la resolución de problemas. Estas condiciones se expresan así:

$$12x_1 + 29x_2 \cong 1500 \qquad \text{(experiencia en grupos pequeños)}$$
$$19x_1 + 11x_2 \cong 2000 \qquad \text{(resolución individual de problemas)}$$

donde el símbolo $\cong$ significa que tratamos de hacer que el miembro izquierdo de la expresión “se aproxime lo más posible” al LD. Si fuera factible encontrar una política que satisficiera exactamente las metas sobre grupos pequeños y resolución de problemas (es decir, que cumpliera exactamente con los requisitos correspondientes a los dos miembros derechos), sin violar la restricción del sistema sobre el total de horas del programa, esa sería la política que resolviera el modelo. Sin embargo, un sencillo análisis geométrico nos mostrará que tal política no existe. En esas condiciones, resulta claro que para satisfacer la restricción del sistema será necesario transgredir cuando menos una de las dos metas.

Para aplicar el enfoque de la programación por metas, la condición sobre la experiencia en grupos pequeños se escribe de nuevo como la restricción de la meta

$$12x_1 + 29x_2 + u_1 - v_1 = 1500 \; (u_1 \geq 0, v_1 \geq 0)$$

donde u_1 = cantidad por la cual la experiencia en grupos pequeños es inferior a 1,500
v_1 = cantidad por la cual la experiencia en grupos pequeños excede los 1,500 minutos

Variables de desviación A las variables u_1 y v_1 se les llama **variables de desviación** porque miden en qué cantidad el valor producido por la solución se desvía de la meta. Observamos que, por definición, queremos que u_1 o v_1 (o ambas) sean cero, porque es imposible que al mismo tiempo sean menores y mayores que 1,500. Para que $12x_1 + 29x_2$ se aproxime lo más posible a 1,500, basta hacer que la suma $u_1 + v_1$ sea un número pequeño.

En forma similar, la condición referente a la resolución individual de problemas se expresa como la siguiente restricción sobre la meta:

$$19x_1 + 11x_2 + u_2 - v_2 = 2000 \; (u_2 \geq 0, v_2 \geq 0)$$

y en este caso queremos que la suma de las dos variables de desviación $u_2 + v_2$ sea un número pequeño. Nuestro modelo (ilustrativo) completo puede escribirse ahora en la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll}
\text{Min } u_1 + v_1 + u_2 + v_2 & & \\
\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 & \leq 100 & \text{(total de horas del programa)} \\
12x_1 + 29x_2 + u_1 - v_1 & = 1500 & \text{(experiencia en grupos pequeños)} \\
19x_1 + 11x_2 + u_2 - v_2 & = 2000 & \text{(resolución de problemas)} \\
x_1, x_2, u_1, v_1, u_2, v_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

Nota: Tanto u_1 y v_1 no pueden ser > 0 al mismo tiempo..

Éste es un modelo PL ordinario y puede resolverse fácilmente con Excel. Las variables de decisión óptimas satisfarán la restricción del sistema (el total de horas del programa). Además, resulta que Solver (por razones técnicas que no explicaremos aquí) garantizará que u_1 o v_1 (o ambas) serán cero, por lo cual estas variables satisfarán automáticamente la condición deseada. Lo mismo es válido para u_2 y v_2, así como para cualquier pareja de variables de desviación en general.

Observe que la función objetivo es la suma de las variables de desviación. Esta elección de una función objetivo indica que no tenemos preferencia entre las distintas desviaciones con respecto a las metas declaradas. Por ejemplo, cualquiera de las tres decisiones siguientes es aceptable: (1) una decisión que sobrepase la meta de la experiencia en grupo por cinco minutos y cumpla con exactitud la meta de la resolución de problemas, (2) una decisión que cumpla exactamente con la meta de la experiencia en grupo y que dé cinco minutos por debajo de la meta de la resolución de problemas, y (3) una decisión con la cual falten 2.5 minutos para alcanzar cada una de las metas. En otras palabras, no tenemos preferencia entre las tres soluciones:

(1)	$u_1 = 0$	(2)	$u_1 = 0$	(3)	$u_1 = 2.5$
	$v_1 = 5$		$v_1 = 0$		$v_1 = 0$
	$u_2 = 0$		$u_2 = 5$		$u_2 = 2.5$
	$v_2 = 0$		$v_2 = 0$		$v_2 = 0$

No debemos tener preferencia alguna, ya que cada una de estas tres decisiones produce el mismo valor (es decir, 5) para la función objetivo.

Ponderación de las variables de desviación Por supuesto, esa falta de preferencia por una u otra solución no es un rasgo común de todos los modelos de programación por metas. Por sí solas, las diferencias de unidades pueden dar lugar a alguna preferencia entre las distintas variables de desviación. Supongamos, por ejemplo, que la restricción sobre la resolución de problemas en forma individual se hubiera expresado en horas; es decir, como

$$\frac{19}{60}x_1 + \frac{11}{60}x_2 + u_2 - v_2 = \frac{2000}{60}$$

Es difícil creer que los creadores del programa no hubieran preferido un excedente de un minuto en el caso de la experiencia en grupos pequeños ($v_1 = 1$), antes que un faltante de una hora en la resolución individual de problemas ($u_2 = 1$).

Una forma de expresar la preferencia entre las diversas metas consiste en asignar distintos coeficientes a las variables de desviación de la función objetivo. En el ejemplo de la planeación de programas, podríamos seleccionar

$$\text{Min } 10u_1 + 2v_1 + 20u_2 + v_2$$

como función objetivo. Puesto que v_2 (con valor excedente en la solución del problema) tiene el coeficiente más pequeño, los creadores del programa preferirían una v_2 positiva, mejor que cualquiera de las otras variables de desviación (la v_2 positiva tiene la menor penalización). De hecho, con esta función objetivo, es mejor un excedente de nueve minutos en la meta de resolución de problemas, que un faltante de un minuto en la meta de la experiencia en grupos pequeños. Usted apreciará esto si observa que para cualquier solución en la cual $u_1 \geq 1$, el hecho de disminuir u_1 en 1 y aumentar v_2 en 9 produciría un valor más pequeño para la función objetivo.

Restricciones sobre el intervalo de la meta Otro tipo de restricción de metas se conoce como la **restricción del intervalo de la meta.** Dicha restricción limita la meta a un rango o *intervalo* determinado, en lugar de limitarla a un valor numérico específico. Supongamos, por ejemplo, que en el ejemplo anterior los creadores del modelo no tuvieran preferencia alguna entre distintos programas, en los cuales

$$1800 \leq [\text{minutos de resolución individual de problemas}] \leq 2100$$
$$\text{es decir, } 1800 \leq 19x_1 + 11x_2 \leq 2100$$

En este caso, la meta del intervalo se expresa mediante dos restricciones sobre la meta:

$$19x_1 + 11x_2 - v_1 \leq 2100 \qquad (v_1 \geq 0)$$
$$19x_1 + 11x_2 + u_1 \geq 1800 \qquad (u_1 \geq 0)$$

Cuando los términos u_1 y v_1 están incluidos en la función objetivo, el programa PL tratará de minimizarlos. Observamos que en condiciones óptimas, cuando $u_i^* = 0$ y $v_i^* = 0$ (sus mínimos valores posibles), el número total de minutos dedicados a la resolución individual de problemas ($19x_1 + 11x_2$) se encuentra dentro del intervalo deseado (es decir, $1{,}800 \leq 19x_1 + 11x_2 \leq 2{,}100$). En otras condiciones resultará que, en el punto óptimo, una de las dos variables será positiva y la otra será 0, lo cual significa que sólo uno de los dos lados de la desigualdad podrá satisfacerse.

Resumen del uso de restricciones sobre las metas En este momento puede ser útil resumir las diversas formas en que las restricciones sobre las metas pueden ser formuladas y utilizadas. Cada restricción de meta tiene un lado izquierdo, llamémoslo $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ y un lado derecho, b_i. Las restricciones de meta se expresan por medio de variables de desviación no negativas u_i, v_i. En condiciones de optimalidad, por lo menos uno de los elementos de la pareja u_i, v_i siempre será cero. La variable u_i representa un *resultado insuficiente*; v_i representa un *resultado excesivo*. Cuando se utiliza u_i ésta se *agrega* a $g_i(x_1, \ldots, x_n)$. Siempre que se utiliza v_i ésta se *sustrae* de $g_i(x_1, \ldots, x_n)$. En la función objetivo aparecen únicamente variables de desviación (o un subconjunto de ese tipo de variables), y el objetivo siempre consiste en obtener un valor mínimo. Las variables de decisión x_i, $i = 1, \ldots, n$ no aparecen en el objetivo. Hemos descrito en este lugar cuatro tipos de metas:

1. ***Propósito.*** Lograr que $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ se aproxime lo más posible a b_i. Para lograrlo, expresamos la restricción de la meta como

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) + u_i - v_i = b_i \qquad (u_i \geq 0, v_i \geq 0)$$

y en el objetivo, minimizamos $u_i + v_i$. En condiciones óptimas, por lo menos una de las variables u_i, v_i será cero.

2. ***Minimizar el valor faltante.*** Para lograrlo, podemos expresar

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) + u_i - v_i = b_i \qquad (u_i \geq 0, v_i \geq 0)$$

y en la función objetivo, minimizamos u_i, es decir, el valor faltante para alcanzar la meta. Puesto que v_i no aparece en la función objetivo y solamente figura en esta restricción, entonces dicha restricción puede expresarse mediante esta expresión equivalente

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) + u_i \geq b_i \qquad (u_i \geq 0)$$

Si la u_i óptima es positiva, esta restricción será activa, porque de lo contrario u_i^* podría hacerse más pequeña. Este resultado también se aprecia con claridad por la forma de igualdad de la restricción. Es decir, si $u_i^* > 0$, entonces como v_i^* debe ser igual a cero, debe ser válido que $g_i(x_1, \ldots, x_n) + u_i^* = b_i$.

3. ***Minimizar el excedente.*** Para lograr esto, podemos expresar

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) + u_i - v_i = b_i \qquad (u_i \geq 0, v_i \geq 0)$$

y en la función objetivo minimizamos v_i, es decir, el excedente. Como en este caso u_i no aparece en la función objetivo, la restricción puede expresarse en forma equivalente como

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) - v_i \leq b_i \qquad (v_i \geq 0)$$

Si el valor óptimo v_i es positivo, esta restricción será activa. El argumento es análogo al del inciso 2 anterior.

4. ***Restricción del intervalo de la meta.*** En este caso, la meta consiste en aproximarse lo más posible a la satisfacción total de

$$a_i \leq g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq b_i$$

Para expresar esto como una meta, "estiramos" primero el intervalo en la forma

$$a_i - u_i \leq g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq b_i + v_i \qquad (u_i \geq 0, v_i \geq 0)$$

que es equivalente a las dos restricciones siguientes

$$\left.\begin{matrix} g_i(x_i, \ldots, x_n) + u_i \geq a_i \\ g_i(x_i, \ldots, x_n) - v_i \leq b_i \end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix} g_i(x_i, \ldots, x_n) + u_i - \hat{v}_i = a_i & (u_i \geq 0, \hat{v}_i \geq 0) \\ g_i(x_i, \ldots, x_n) + \hat{u}_i - v_i = b_i & (\hat{u}_i \geq 0, v_i \geq 0) \end{matrix}\right.$$

En el caso de una restricción sobre el intervalo de la meta, minimizamos $u_i + v_i$ en la función objetivo. Las variables $\hat{v}_i$ y $\hat{u}_i$ son tan sólo el excedente y la holgura, respectivamente (no variables de desviación). Como de costumbre, en condiciones óptimas, por lo menos una de las variables de desviación u_i, v_i será 0. Si se trata de dos restricciones que representan un intervalo de meta, la restricción que tenga una variable de desviación diferente de cero (si la hay) será activa.

En general, las restricciones de meta se expresan más a menudo en la forma apropiada de igualdad, usando variables de desviación, de excedente y de holgura según se requiera. Las formas de desigualdad equivalentes que hemos mostrado nos permitirán obtener información geométrica sobre el procedimiento de resolución, cuando se trate de modelos con dos variables de decisión.

PRIORIDADES ABSOLUTAS

En algunos casos, los administradores no desean expresar sus preferencias entre varias metas en términos de variables de desviación ponderadas, porque el proceso de asignación de ponderaciones les puede parecer demasiado arbitrario o subjetivo. En esos casos, puede ser más aceptable expresar las preferencias en términos de **prioridades absolutas** (en lugar de ponderaciones) entre un conjunto de metas. Este método, para el cual se requiere que las metas se satisfagan en un orden específico, se ilustra en el siguiente ejemplo. Con ponderaciones, el modelo de programación de metas se resuelve sólo una vez. Con prioridades, el modelo de programación de metas se resuelve por etapas como una secuencia de modelos.

Modelo de selección de medios de Swenson: un caso en miniatura Tom Swenson, socio importante de la agencia de publicidad J. R. Swenson, propiedad de su padre, acaba de celebrar un convenio con un fabricante del ramo farmacéutico para realizar una campaña por radio y televisión a fin de presentar un nuevo producto: Mylonal. El gasto total destinado a la campaña no deberá exceder los $120,000. Al cliente le interesa que esta campaña llegue a diversas audiencias. Para determinar en qué medida satisface las necesidades de este cliente una campaña específica, la agencia estima el impacto de los anuncios en las audiencias de su interés. El impacto se mide en *exposiciones clasificadas*, una expresión que significa "personas en las que se ha incidido cada mes". La radio y la televisión, los dos medios que la agencia ha proyectado utilizar, no son igualmente eficaces para incidir en todo tipo de audiencias. Los datos pertinentes para la campaña de Mylonal aparecen en la tabla 9.3.

Después de largas discusiones con el cliente, Tom acepta las siguientes metas para su campaña. Él considera que el orden en el cual ha presentado sus metas refleja la prioridad absoluta entre todas ellas.

TABLA 9.3 Exposiciones por cada $1,000 gastados

	TV	RADIO
Total	14,000	6000
Altos ingresos	1200	1200

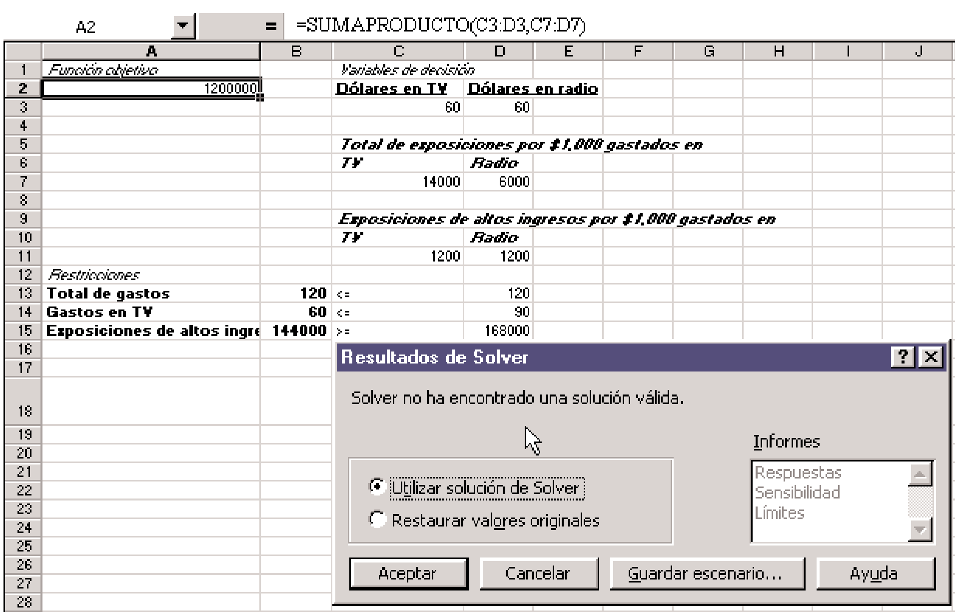
1. Tom espera que el número total de exposiciones será de por lo menos 840,000.
2. Para mantener un contacto efectivo con la radiodifusora más importante, él espera gastar no más de $90,000 en publicidad por televisión.
3. Tom considera que con la campaña deberá conseguir por lo menos 168,000 exposiciones de altos ingresos.
4. Finalmente, si todas las demás metas son alcanzadas, a Tom le agradaría aproximarse lo más posible al punto que maximice el número total de exposiciones. Él se percata de que si gasta los $120,000 en anuncios de televisión, obtendrá 1,680,000 exposiciones (120*14,000), y éste es el máximo alcanzable.

Resulta claro que este modelo tiene varias restricciones. Sin embargo, no es un modelo típico de programación matemática porque Tom persigue varios objetivos. Sin embargo, él considera que un enfoque de programación matemática le ayudará a entender y resolver el modelo. Por consiguiente, procede en la forma típica a ese respecto. Para formular el modelo del problema, introduce la siguiente notación:

$$x_1 = \text{dólares gastados en TV} \qquad \text{(en miles)}$$
$$x_2 = \text{dólares gastados en radio} \qquad \text{(en miles)}$$

Como la meta que constituía su más alta prioridad era el número total de exposiciones, a Tom le pareció razonable presentar el total de exposiciones como la función objetivo y considerar todas las demás metas como restricciones, al formular el modelo del problema.

Un modelo no factible La formulación y la solución en hoja de cálculo de este modelo ("Caso básico" de SWENSON.XLS) aparecen en la figura 9.13. Cada restricción y la función objetivo llevan rótulos que indican cuál es su propósito. El cuadro de diálogo Resultados de Solver le muestra a Tom que el modelo no es factible. Está claro que, como no es factible, no será posible satisfacer simultáneamente las tres metas (el total de gastos, el gasto en TV y las exposiciones de altos ingresos) que Tom ha declarado como restricciones. Como en este modelo sólo hay dos variables de decisión, puede usarse el método gráfico para investigar las



Celda	Fórmula	Cópiese a
A2	= SUMAPRODUCTO(C3:D3,C7:D7)	—
B13	= SUMA(C3:D3)	—
B14	= C3	—
B15	= SUMAPRODUCTO(C3:D3,C11:D11)	—

FIGURA 9.13

Maximización del total de exposiciones

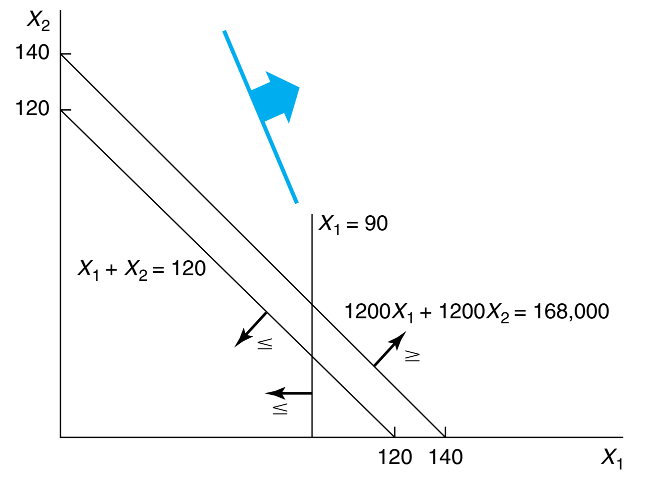


FIGURA 9.14

Maximización del total de exposiciones: un enfoque gráfico

formulaciones iniciales de Tom. El análisis de la figura 9.14 muestra claramente que no existen puntos capaces de satisfacer al mismo tiempo la primera restricción (total de gastos) y la tercera (exposiciones de altos ingresos). En este punto, Tom podría intentar una aproximación ligeramente diferente a este modelo. Podría cambiar una o varias de sus metas, o tal vez la función objetivo, y comenzar de nuevo. Sin embargo, en general, éste no es un enfoque sistemático satisfactorio. En modelos con muchas variables de decisión y varias metas antagónicas, puede ser muy difícil estructurar nuevamente el modelo para crear otro nuevo que tenga una solución factible. Pero lo más importante es que la esencia del modelo del mundo real puede perderse en este proceso de reestructuración.

Recuerde que Tom no es indiferente frente a las diversas metas; de hecho, ha señalado una prioridad absoluta sobre todas ellas. La programación por metas con prioridades absolutas fue diseñada precisamente para el tipo de proceso de decisión que Tom Swenson desea realizar. Es un proceso secuencial donde las metas se van agregando una por una (en orden descendente de prioridad) a un modelo PL.

Modelo de programación por metas de Swenson Para preparar este modelo como un programa por metas, Tom observa que si la primera meta es violada, obtendrá un valor faltante. Si la segunda meta es violada, obtendrá un valor excedente, y así sucesivamente. Con este razonamiento vuelve a declarar sus metas, en orden de prioridad descendente, como sigue:

1. Minimizar el faltante de 840,000 exposiciones del total (es decir, Min u_1, bajo la condición $14{,}000x_1 + 6{,}000x_2 + u_1 \geq 840{,}000$; $u_1 \geq 0$).
2. Minimizar el gasto excedente de \$90,000 en TV (es decir, Min v_2, bajo la condición $x_1 - v_2 \geq 90$; $v_2 \geq 0$).
3. Minimizar el faltante de las 168,000 exposiciones de altos ingresos (es decir, Min u_3, bajo la condición $1{,}200x_1 + 1{,}200x_2 + u_3 \geq 168{,}000$; $u_3 \geq 0$).
4. Minimizar el faltante de las 1,680,000 exposiciones totales: el máximo posible (es decir, Min u_4, donde $14{,}000x_1 + 6{,}000x_2 + u_4 \geq 1{,}680{,}000$; $u_4 \geq 0$).

Observe que ahora las prioridades de Tom están claramente expresadas en términos de minimizar faltantes (es decir, minimizar una u_i) o minimizar excedentes (es decir, minimizar una v_i). Como antes dijimos, sus metas antes expresadas están como desigualdades, de acuerdo con nuestra exposición precedente. Este método facilita el análisis gráfico.

Considerando que ha formulado correctamente sus prioridades, Tom debe distinguir entre (1) *restricciones del sistema* (todas las restricciones que no pueden ser violadas) y (2) *restricciones de metas.* En este modelo, la única restricción del sistema es que el total de gastos no debe ser mayor que \$120,000. Así (como x_1 y x_2 están expresadas en miles), tenemos que

$$x_1 + x_2 \leq 120 \qquad \textbf{(S)}$$

Según la notación de la programación por metas, el modelo de Tom puede expresarse ahora como muestra la figura 9.15:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Min } P_1u_1 + P_2v_2 + P_3u_3 + P_4u_4 & & & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + x_2 & & \leq & 120 & & \text{(S)} \\
& 14{,}000x_1 & + 6000x_2 & + u_1 & \geq & 840{,}000 & & \text{(1)} \\
& x_1 & & - v_2 & \leq & 90 & & \text{(2)} \\
& 1200x_1 & + 1200x_2 & + u_3 & \geq & 168{,}000 & & \text{(3)} \\
& 14{,}000x_1 & + 6000x_2 & + u_4 & \geq & 1{,}680{,}000 & & \text{(4)} \\
& & x_1, x_2, u_1, v_2, u_3, u_4 & & \geq 0 & & &
\end{array}
$$

FIGURA 9.15

Formulación del programa por metas

Observe que la función objetivo consiste solamente en variables de desviación y es de la forma *Min.* Como ya dijimos, todas las formulaciones de programación por metas son modelos de minimización, ya que el objetivo consiste en aproximarse lo más posible a las metas. Los términos sirven tan sólo para señalar prioridades, correspondiendo a P_1 la más alta prioridad, y así sucesivamente. El significado preciso de la exposición del problema anterior es:

1. Encontrar el conjunto de variables de decisión que satisfaga la restricción del sistema (S) y que produzca además el mínimo valor posible de u_1 respetando la restricción (1) y el hecho de que $x_1, x_2, u_1 \geq 0$. A este conjunto de decisiones lo llamaremos RF I (es decir, "la región factible I"). Si se toma en cuenta *sólo la meta más alta,* todos los puntos de la RF I son "óptimos" (es decir, lo mejor que Tom puede lograr) y (considerando de nuevo solamente la meta más alta) le es indiferente cuál de estos puntos vaya a seleccionar.
2. Encontrar el subconjunto de puntos de RF I que produzca el mínimo valor posible para v_2, bajo la restricción (2) y $v_2 \geq 0$. Este subconjunto se llamará RF II. Considerando sólo la jerarquía ordinal de las dos metas con más alta prioridad, todos los puntos de RF II son "óptimos", y en términos de estas dos metas de más alta prioridad, Tom no tiene preferencia alguna sobre cuál de esos puntos vaya a seleccionar.
3. Sea RF III el subconjunto de los puntos de RF II que minimizan u_3, bajo la restricción (3) y $u_3 \geq 0$.
4. RF IV es el subconjunto de puntos de RF III que minimizan u_4, bajo la restricción (4) y $u_4 \geq 0$. Cualquier punto de RF IV es una solución óptima para el modelo general de Tom.

Análisis gráfico y aplicación del procedimiento de solución en hoja de cálculo Siempre y cuando el modelo de mercadotecnia de Tom tenga sólo dos variables de decisión, el método de solución anterior puede realizarse por medio del análisis gráfico. En todos los modelos del mundo real, debería usarse también la hoja de cálculo con su herramienta Solver. En la próxima sección veremos cómo puede realizarse esto usando PL.

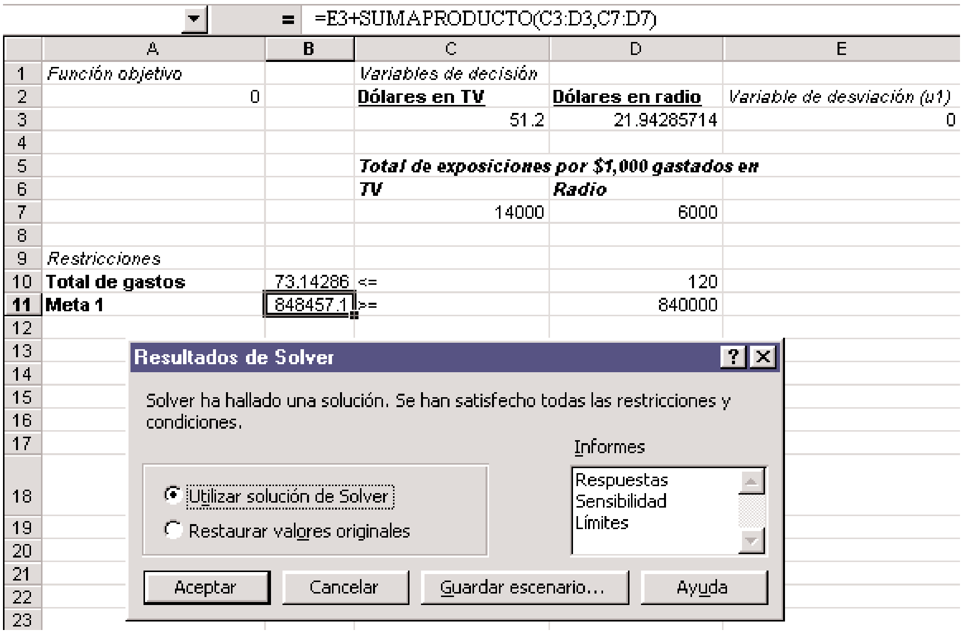
1. En la figura 9.16, tanto los datos de salida resultantes de la hoja de cálculo (una hoja nueva llamada "Primera meta" en el mismo SWENSON.XLS) como la geometría revelan que el mínimo de u_1 s.a. (S), (1), y también $x_1, x_2, u_1 \geq 0$ es $u_1^* = 0$. Aunque Solver devuelve valores óptimos para x_1^* y x_2^*, , esos valores no tienen interés alguno. La información importante es que $u_1^* = 0$, lo cual indica que la primera meta puede alcanzarse por completo. Los puntos óptimos alternativos para el modelo actual corresponden a todos los valores de (x_1, x_2) que satisfacen las condiciones

$$
\text{RF I} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 120 \\ 14{,}000x_1 + 6000x_2 \geq 840{,}000 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

En cualquiera de esos puntos se alcanza la primera meta de Tom ($u_1^* = 0$), por lo cual estas decisiones son igualmente aceptables si sólo se considera la primera meta. Así, RF I es el área sombreada *ABC* en la figura 9.16.

La recta rotulada (1) representa la meta 1. La flecha marcada $u_1 = 0$ indica que en todos los puntos ubicados a la derecha de la recta (1) se alcanza la meta 1.

2. En la formulación de la hoja de cálculo que muestra la figura 9.17 (la nueva hoja llamada "Meta 2"), hemos introducido las restricciones que definen RF I (las restricciones de las celdas B10:D11), junto con la nueva restricción de la meta (2) (contenida en las celdas B12:D12), y vemos que



Celda	Fórmula	Cópiese a
A2	= E3	—
B10	= SUMA(C3:D3)	—
B11	= E3+SUMAPRODUCTO(C3:D3,C7:D7)	—

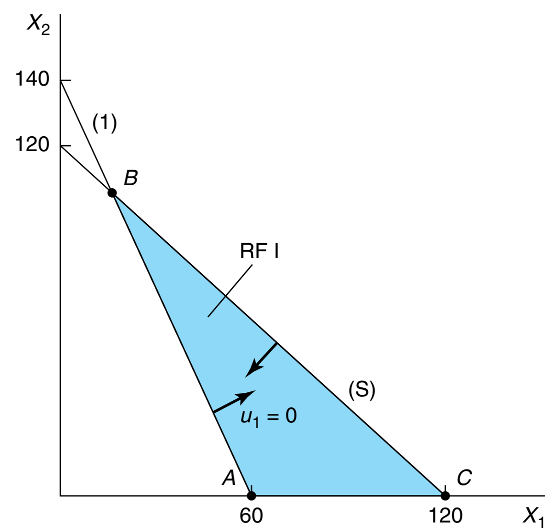
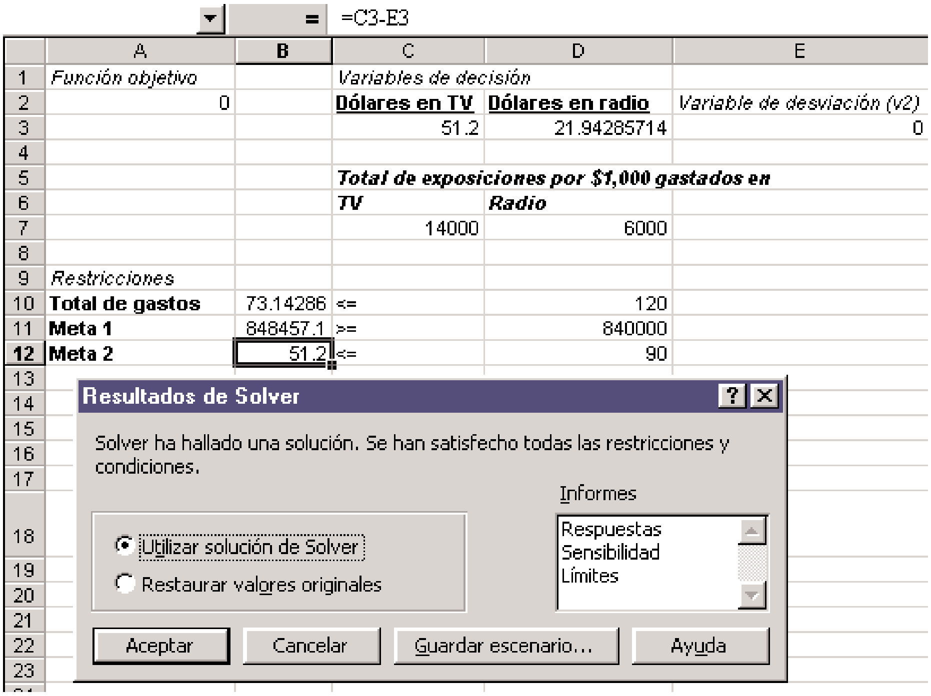


FIGURA 9.16
Primera meta

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } v_2\\
&\text{s.a.}\quad x \text{ en RF I, meta (2), y } v_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

es $v_2^* = 0$. En consecuencia, RF II está definida por

$$
\text{FR II}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 120 \\ 14{,}000x_1 + 6000x_2 \geq 840{,}000 \\ x_1 \leq 90 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$


=C3-E3

	A	B	C	D	E
1	Función objetivo		Variables de decisión		
2	0		Dólares en TV	Dólares en radio	Variable de desviación (v2)
3			51.2	21.94285714	0
4					
5			Total de exposiciones por $1,000 gastados en		
6			TV	Radio	
7			14000	6000	
8					
9	Restricciones				
10	Total de gastos	73.14286	<=	120	
11	Meta 1	848457.1	>=	840000	
12	Meta 2	51.2	<=	90	

Celda	Fórmula	Cópiese a
A2	= E3	—
B10	= SUMA(C3:D3)	—
B11	= SUMAPRODUCTO (C3:D3,C7:D7)	—
B12	= C3–E3	—

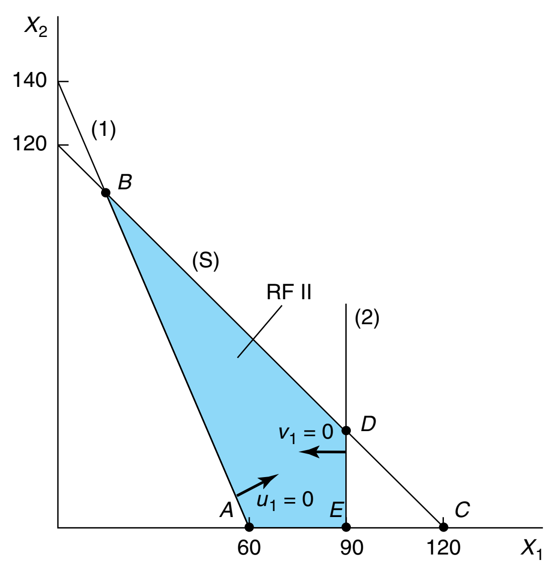


FIGURA 9.17
Meta 2

que es el área sombreada *ABDE,* lo cual es claramente un subconjunto de RF I. Como se esperaba, el tamaño de la región factible es ahora más pequeño.

Continuando en la misma forma, la figura 9.18 (la nueva hoja llamada "Meta 3") muestra que RF III es el segmento de recta *BD.* En este caso $u_3^* = 24{,}000$. Aun cuando las dos metas fueron alcanzadas por completo (porque $u_1^* = v_2^* = 0$), la tercera meta no se puede alcanzar íntegramente porque $u_3^* > 0$. En esta etapa, a Tom le es indiferente elegir cualquier decisión que satisfaga

B16 = =E3+SUMAPRODUCTO(C3:D3,C11:D11)

	A	B	C	D	E	F
1	*Función objetivo*		*Variables de decisión*			
2	24000		**Dólares en TV**	**Dólares en radio**	*Variable de desviación (v3)*	
3			81.429	38.571	24000	
4						
5			***Total de exposiciones por $1,000 gastados en***			
6			***TV***	***Radio***		
7			14000	6000		
8						
9			***Exposiciones de altos ingresos por $1,000 gastados en***			
10			***TV***	***Radio***		
11			1200	1200		
12	*Restricciones*					
13	**Total de gastos**	120	<=	120		
14	**Meta 1**	1371429	>=	840000		
15	**Meta 2**	81.4286	<=	90		
16	**Meta 3**	168000	>=	168000		

Celda	Fórmula	Cópiese a
A2	= E3	—
B13	= SUMA(C3:D3)	—
B14	= SUMAPRODUCTO(C3:D3,C7:D7)	—
B15	= C3	—
B16	= E3+SUMAPRODUCTO(C3:D3,C11:D11)	—

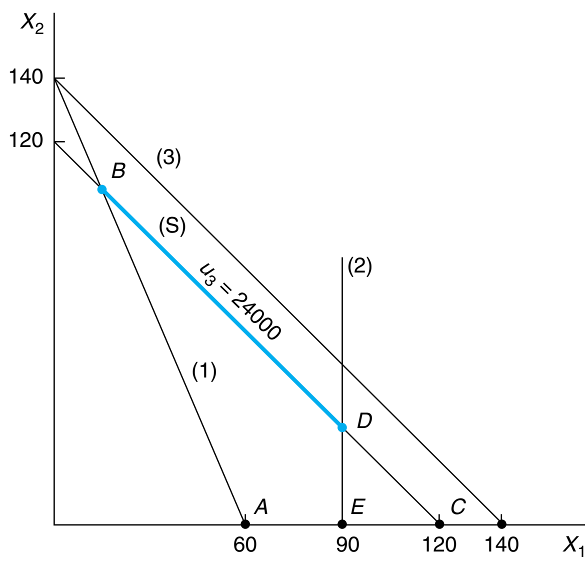


FIGURA 9.18
Meta 3

$$\text{RF III}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 120 \\ 14{,}000x_1 + 6000x_2 \geq 840{,}000 \\ x_1 \leq 90 \\ 1200x_1 + 1200x_2 \geq 168{,}000 - 24{,}000 = 144{,}000 \end{cases}$$

lo cual define el segmento de recta *BD*.

Finalmente, la figura 9.19 (una nueva hoja llamada “Óptima”) muestra la solución óptima en el punto *D*. Recuerde que la cuarta meta consiste en minimizar el faltante con respecto al máximo número de exposiciones posible, que es 1,680,000. Así, deseamos minimizar el faltante u_4 donde

B16 = =E3+SUMAPRODUCTO(C3:D3,C11:D11)

	A	B	C	D	E	F
1	*Función objetivo*		*Variables de decisión*			
2	24000		**Dólares en TV**	**Dólares en radio**	*Variable de desviación (v3)*	
3			90.000	30.000	24000	
4						
5			***Total de exposiciones por $1,000 gastados en***			
6			***TV***	***Radio***		
7			14000	6000		
8						
9			***Exposiciones de altos ingresos por $1,000 gastados en***			
10			***TV***	***Radio***		
11			1200	1200		
12	*Restricciones*					
13	**Total de gastos**	120	<=	120		
14	**Meta 1**	1440000	>=	840000		
15	**Meta 2**	90	<=	90		
16	**Meta 3**	144000	>=	144000		
17	**Meta 4**	1680000	>=	1680000		

Celda	Fórmula	Cópiese a
A2	= E3	—
B13	= SUMA(C3:D3)	—
B14	= SUMAPRODUCTO(C3:D3,C7:D7)	—
B15	= C3	—
B16	= SUMAPRODUCTO(C3:D3,C11:D11)	—
B17	= E3+SUMAPRODUCTO(C3:D3,C7:D7)	—

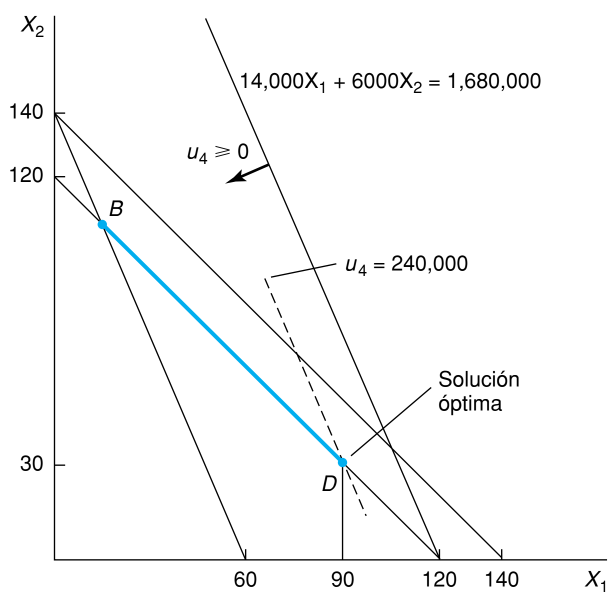


FIGURA 9.19

Solución óptima

$$14{,}000x_1 + 6000x_2 + u_4 \geq 1{,}680{,}000$$

En la figura 9.19 encontramos el óptimo único $x_1^* = 90$ y $x_2^* = 30$; es decir, Tom tendría que gastar $90,000 en anuncios por televisión y $30,000 en anuncios por radio. Este hecho se comprueba por medio del análisis geométrico, en el cual resulta claro que el punto D ($x_1 = 90$, $x_2 = 30$) está más cerca de la recta correspondiente a la meta 4 ($14{,}000x_1 + 6{,}000x_2 = 1{,}680{,}000$) que cualquier otro punto de RF III (es decir, más cerca que cualquier otro punto del segmento BD).

Observamos también que $u_4^* = 240{,}000$. De este modo, Tom consigue solamente 1,680,000 − 240,000 = 1,440,000 exposiciones.

Por consiguiente, vemos que la programación por metas con prioridades absolutas permite que un administrador (como Tom) resuelva un modelo para el cual no existe una solución capaz de alcanzar todas las metas, siempre que él esté dispuesto a especificar la jerarquía absoluta de las distintas metas y concentre su atención sucesivamente en los puntos que se aproximan lo más posible a cada una de ellas.

LA COMBINACIÓN DE PONDERACIONES Y PRIORIDADES ABSOLUTAS

Hasta cierto punto, es posible combinar los conceptos de las metas ponderadas y las prioridades absolutas. Para ilustrar este hecho, volvamos al modelo de publicidad de Tom Swenson.

Al examinar los resultados del estudio de prioridad absoluta, Tom y su cliente han empezado a reconocer la importancia de los miembros más maduros del mercado del Mylonal. En particular, enfocan su atención en el número de exposiciones de individuos de 50 años o más. Comprueban de nuevo que la radio y la televisión no son igualmente eficaces para generar exposiciones en este segmento de la población. Las exposiciones obtenidas por $1,000 de publicidad se presentan en la tabla 9.4:

TABLA 9.4

GRUPO DE EXPOSICIÓN	TV	RADIO
50 años o más	3000	8000

Si no hubiera otros factores que considerar, Tom desearía contar con el mayor número posible de exposiciones para personas de 50 años o más. En virtud de que la radio propicia dichas exposiciones a una tasa más alta que la televisión (8,000 > 3,000), Tom comprende que el mayor número posible de exposiciones para 50 años o más podría lograrse asignando en su totalidad a la radio los $120,000 disponibles. Así, el número máximo de exposiciones para 50 o más es 960,000 (= 120 × 8,000). Tom y su cliente desean aproximarse lo más posible a esta meta (minimizando el faltante) una vez que hayan alcanzado las tres primeras metas. Sin embargo, recuerde que también desean acercarse lo más posible a la meta de 1,680,000 exposiciones en total (minimizando el faltante) una vez que hayan sido alcanzadas las tres primeras metas. Para resolver este conflicto de metas, deciden usar una suma ponderada de las variables de desviación como objetivo en la fase final de su enfoque de prioridades absolutas. En su opinión, el hecho de que exista un faltante para alcanzar la quinta meta (960,000 exposiciones en el grupo de 50 años o más) resulta tres veces más grave que la presencia de un faltante para lograr la cuarta meta (1,680,000 exposiciones en total). La formulación, su solución correspondiente (una nueva hoja llamada "Ponderada" en el mismo libro SWENSON.XLS) y el análisis gráfico se presentan en la figura 9.20.

En la hoja de cálculo observamos que la solución óptima para este modelo es el punto *B* ($x_1^* = 15$, $x_2^* = 105$). Recuerde que cuando la función objetivo consistía en minimizar u_4, la decisión óptima era el punto *D* ($x_1^* = 90$, $x_2^* = 30$). Así pues, en el análisis gráfico vemos que la nueva función objetivo ha desplazado la solución óptima desde un extremo de RF III hasta el otro. No disponemos de una forma gráfica obvia para encontrar la solución óptima de este modelo; es decir, no existe un contorno de función objetivo obvio que podamos desplazar en dirección descendente para llegar al punto $x_1 = 15$, $x_2 = 105$. Sin embargo, intuitivamente es atractivo observar que la solución óptima se localiza lo más cerca posible de la meta a la cual corresponde la mayor ponderación. Podríamos llevar a cabo un análisis de sensibilidad de las ponderaciones incorporadas a la función objetivo, para ver cuándo cambia la solución del punto *D* al punto *B*.

Esto completa el análisis del modelo para la campaña de publicidad de Tom Swenson. El procedimiento secuencial general de PL anteriormente descrito para la programación por metas con prioridades absolutas es válido con cualquier modelo donde las restricciones del sistema y las restricciones de las metas hayan sido formuladas por medio de funciones lineales. Para cada nuevo modelo se agrega una sola restricción al modelo anterior, y la función objetivo se modifica ligeramente. En términos generales, puede intervenir un número bastante grande de variables de decisión. El ejemplo con dos variables fue útil porque nos permitió presentar, junto con los resultados de la hoja de cálculo, interpretaciones geométricas que aportaron mayores conocimientos sobre la técnica de resolución.

A2 = =3*F3+E3

	A	B	C	D	E	F
1	*Función objetivo*		*Variables de decisión*			
2	1065000		**Dólares en TV**	**Dólares en radio**	*Variable de desviación (u4)*	*Variable de desviación (u5)*
3			15.000	105.000	840000	75000
4						
5			***Total de exposiciones por $1,000 gastados en***			
6			***TV***	***Radio***		
7			14000	6000		
8						
9			***Exposiciones de altos ingresos por $1,000 gastados en***			
10			***TV***	***Radio***		
11			1200	1200		
12			***Exposiciones de personas mayores por $1,000 gastados en***			
13			***TV***	***Radio***		
14			3000	8000		
15	*Restricciones*					
16	**Total de gastos**	120	<=	120		
17	**Meta 1**	840000	>=	840000		
18	**Meta 2**	15	<=	90		
19	**Meta 3**	144000	>=	144000		
20	**Meta 4**	1680000	>=	1680000		
21	**Meta 5**	960000	>=	960000		

Celda	Fórmula	Cópiese a
A2	= 3*F3+E3	—
B16	= SUMA(C3:D3)	—
B17	= SUMAPRODUCTO(C3:D3,C7:D7)	—
B18	= C3	—
B19	= SUMAPRODUCTO(C3:D3,C11:D11)	—
B20	= E3+SUMAPRODUCTO(C3:D3,C7:D7)	—
B21	= F3+SUMAPRODUCTO(C3:D3,C14:D14)	—

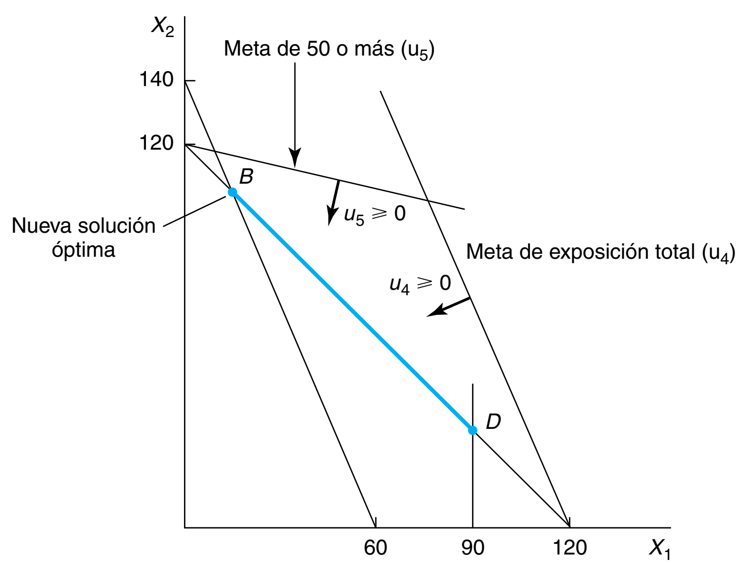


FIGURA 9.20

Ponderación del paso final

El modelo anterior es útil para mostrar la forma en la cual las metas antagónicas y no congruentes (es decir, como manzanas y naranjas) pueden manejarse simultáneamente mediante la programación por metas. De esta manera, el modelo aporta conocimientos que nos explican por qué la programación por metas es una herramienta prometedora y cada día más útil para el análisis de cuestiones de política pública.

9.5 PROCESO DE JERARQUÍA ANALÍTICA

Esta sección trata el tema del mundo real, en el cual se tiene que tomar una decisión cuando es preciso considerar múltiples objetivos o criterios. Todos los días se presentan muchos ejemplos de este tipo de decisiones. Considere los siguientes:

- Seleccionar qué empleo conviene aceptar entre muchas ofertas de trabajo
- Escoger qué computadora (o qué automóvil, etc.) conviene comprar
- Decidir qué nuevo producto se debe introducir primero al mercado
- Seleccionar la ubicación para un nuevo restaurante, hotel, planta manufacturera, etcétera.
- Elegir en qué universidad deberá realizar sus estudios
- Determinar cuál es la mejor escuela de administración de empresas o ingeniería del país
- Clasificar cuáles son las mejores ciudades para vivir en ellas
- Seleccionar un nuevo sistema de información que realice operaciones de pago de nómina, contabilidad y otras funciones para su compañía (o escoger cualquier nuevo programa de cómputo que ofrezcan otros proveedores)
- Decidir qué combinación de impuestos (sobre propiedades, ventas, gasolina, etc.) será conveniente aplicar a los ciudadanos de una localidad.

Por ejemplo, cuando usted decide comprar un automóvil toma en cuenta numerosos factores, entre ellos el precio, la seguridad, la potencia del motor, la economía de combustible y así sucesivamente. En forma similar, en cada uno de los ejemplos anteriores es necesario considerar numerosos factores para tomar esas complejas decisiones.

Una forma sencilla de abordar tales decisiones consiste en asignar ponderaciones a cada uno de los criterios que sea necesario considerar al tomar la decisión. A continuación se establece la jerarquía de cada alternativa de decisión usando una escala de 1 (lo peor) a 10 (lo mejor). Finalmente, se multiplican las ponderaciones por las jerarquías asignadas a cada criterio y se suman los resultados. La alternativa que resulte con menor puntaje será la preferida. Veamos un ejemplo.

Supongamos que su jefa le ha solicitado a usted que le ayude a comprar la próxima computadora para uso de la oficina. Usted tiene que elegir entre tres computadoras: (1) el modelo A que funciona a base de un microcircuito Pentium a 166 Mhz, (2) el modelo B que funciona con un microcircuito 486 DX a 133 Mhz y (3) el modelo C que funciona con un microcircuito PowerPC a 200 Mhz. Los criterios relevantes para usted y su jefa son el precio, la velocidad, la capacidad del disco duro y la garantía o soporte técnico. Usted decide que al precio le deberá corresponder 50% de la ponderación total al tomar la decisión, a la velocidad corresponderá 15%, a la capacidad del disco duro 20% y a la garantía o soporte técnico 15%. A continuación, establece usted la jerarquía de cada uno de los tres modelos según esos cuatro criterios. Con ese propósito emplea una escala de 1 a 10 (según se describió anteriormente), como se aprecia en la siguiente hoja de cálculo (COMPUTER.XLS) que presentamos en la figura 9.21.

Como puede observar, el modelo B es el que resulta con un puntaje ponderado más alto (7.05) y, por tanto, es el que le debe recomendar a su jefa. Este enfoque es muy simplista y hay dificultades para establecer las escalas de clasificación sobre esos distintos criterios.

E8 = =SUMAPRODUCTO($C$4:$C$7,E4:E7)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2						Jerarquías de las alternativas		
3		Criterio	Ponderaciones		Modelo A	Modelo B	Modelo C	
4		*Precio*	50%		5	8	3	
5		*Velocidad*	15%		7	5	9	
6		*Disco duro*	20%		9	4	10	
7		*Garantía*	15%		7	10	7	
8			100%		6.4	7.05	5.9	

Celda	Fórmula	Cópiese a
C8	= SUMA (C4:C7)	—
E8	= SUMAPRODUCTO ($C$4:$C$7, E4:E7)	F8:G8

FIGURA 9.21
Modelo de decisión con atributos múltiples para la compra de una computadora

En el **proceso de jerarquía analítica (PJA)** se emplea también la idea de la aproximación con promedios ponderados, pero aplicando un método para asignar calificaciones (o jerarquías) y ponderaciones que se considera más fiable y congruente que el método simple descrito con anterioridad. El PJA se basa en comparaciones (tomadas por pares) entre las alternativas de decisión de cada uno de los criterios. Después se realiza un conjunto de comparaciones similar para determinar la importancia relativa de cada criterio y así se producen las ponderaciones. El procedimiento básico es el siguiente:

1. Desarrolle las jerarquías correspondientes a cada una de las alternativas de decisión para cada criterio
   - desarrollando una matriz de comparación por parejas para cada criterio
   - normalizando la matriz resultante
   - promediando los valores de cada fila para obtener la clasificación correspondiente
   - calculando y comprobando la relación de congruencia
2. Desarrolle las ponderaciones para los criterios
   - desarrollando una matriz de comparación por pares para cada criterio
   - normalizando la matriz resultante
   - promediando los valores de cada fila para obtener las ponderaciones apropiadas
   - calculando y comprobando la relación de congruencia
3. Calcule la clasificación del promedio ponderado para cada alternativa de decisión. Escoja la que tenga el puntaje más alto.

Demostraremos este procedimiento con un nuevo ejemplo. Sleepwell Hotels está buscando, entre las ofertas de varios proveedores, ayuda para seleccionar el "mejor" paquete de programas de cómputo para administración de ingresos. Mark James es director de administración de ingresos de esta cadena de hoteles y se le ha asignado la tarea de seleccionar dicho paquete de programas. Ya ha identificado a tres proveedores cuyos programas parecen satisfacer sus necesidades básicas: Revenue Technology Corporation (RTC), PRAISE Strategic Solutions (PSS) y El Cheapo (EC). Los criterios que él considera importantes para tomar esta decisión son: (1) el costo total del sistema instalado, (2) el servicio de seguimiento que se proporcione durante el año próximo, (3) el refinamiento de los recursos matemáticos subyacentes y (4) el grado en que el sistema pueda adaptarse a las medidas de Sleepwell. El primer paso del procedimiento PJA consiste en hacer comparaciones por pares entre los distintos proveedores para cada criterio. Para hacer esas comparaciones se usa una escala normal cuya descripción es la siguiente:

Clasificación	Descripción
1	El mismo grado de preferencia
3	Un grado moderado de preferencia
5	Un fuerte grado de preferencia
7	Un grado muy fuerte de preferencia
9	Un grado extremadamente fuerte de preferencia

También se podrían asignar los valores 2, 4, 6 u 8 para representar preferencias intermedias en la serie de estos enteros (por ejemplo, un 2 sería un grado ubicado entre el 1 y el 3, es decir, en un punto intermedio entre el mismo grado de preferencia y un grado moderado de preferencia).

Mark comienza con el primer criterio (costo total) y genera los siguientes datos en su hoja de cálculo (la hoja "Costo total" del libro SLEEPWLL.XLS que muestra la figura 9.22). La tabla se lee en la siguiente forma: el proveedor cuyo nombre aparece en esa fila es comparado con el de la columna correspondiente. Si el proveedor de la fila es preferible al de la columna, entonces se asigna un número del 1 al 9 (tomado de la tabla PJA) a la celda que se encuentra en la intersección de la fila y la columna en cuestión. En cambio, si el proveedor de la columna resulta preferible al de la fila, entonces el valor de 1 dividido entre (un número del 1 al 9) se asigna a la celda que está en la intersección de la fila y la columna. Es obvio que, como el proveedor 1 (RTC) tiene el mismo grado de preferencia que el 1, entonces se asigna un "1" a esa fila/columna y, de hecho, a toda la diagonal. El proveedor 1 tiene un grado de preferencia entre moderado y fuerte sobre el proveedor 2, considerando una base de costo total y, por consiguiente, se asig-

B6 = =1/D4

	A	B	C	D
1				
2				
3		RTC	PSS	EC
4	RTC	1	4	0.5
5	PSS	0.25	1	0.142857
6	EC	2	7	1

Celda	Fórmula	Cópiese a
B5	= 1/C4	—
B6	= 1/D4	—
C6	= 1/D5	—

FIGURA 9.22

Comparación por parejas del costo total

B12 = =B4/B$8

	A	B	C	D	E
1					
2					
3		RTC	PSS	EC	
4	RTC	1	4	0.5	
5	PSS	0.25	1	0.142857	
6	EC	2	7	1	
7					
8	Suma	3.25	12	1.642857	
9					
10	*NORMALIZADA*				
11		RTC	PSS	EC	Promedio
12	RTC	0.308	0.333	0.304	0.315
13	PSS	0.077	0.083	0.087	0.082
14	EC	0.615	0.583	0.609	0.602

Celda	Fórmula	Cópiese a
B8	= SUMA(B4:B6)	C8:D8
B12	= B4/B$8	B12:D14
E12	= PROMEDIO(B12:D12)	E13:E14

FIGURA 9.23

Matriz normalizada para el costo total

na un "4" a la segunda columna de la primera fila (celda C4). El proveedor 3 (EC) tiene un grado de preferencia igual o moderadamente mayor que el proveedor 1 (RTC), por lo cual se asigna el valor "$^1/_2$" a la columna 3 de la fila 1 (celda D4). Mark ha dispuesto su hoja de cálculo de tal manera que una vez introducidos los valores ubicados encima y a la derecha de la diagonal (celdas C4, D4 y D5), ésta calcule automáticamente las preferencias recíprocas. Por ejemplo, como al proveedor 1 se le asignó un "4" en su comparación con el proveedor 2, entonces en la comparación entre el proveedor 2 y el proveedor 1 aparecerá automáticamente "$^1/_4$" (celda B5).

Una vez que se han realizado todas las comparaciones pertinentes por parejas, la matriz tiene que ser normalizada. Esto se logra calculando el total de los números de cada columna. A continuación, cada elemento de la columna se divide entre la suma de dicha columna para encontrar su puntaje normalizado. Esto es lo que ha hecho Mark en su hoja de cálculo, tal como se aprecia en las celdas B12:D14 de la figura 9.23. Su siguiente paso consiste en calcular el puntaje promedio de cada proveedor para aplicar el criterio de "costo total". Estos valores se presentan en la columna E de la figura 9.23. Mark observa que EC tiene el puntaje promedio más alto para este factor.

Una vez que se ha completado la matriz normalizada, Mark tiene que calcular la relación de congruencia y comprobar su valor. El propósito de esto es asegurarse de que las jerarquías de preferencia que expresó en la tabla original fueron congruentes. Por ejemplo, si él expresó una fuerte preferencia por el proveedor 1 sobre el proveedor 2 en el criterio de costo total, y un grado moderado de preferencia por el proveedor 2 sobre el proveedor 3, entonces sería incongruente que expresara el mismo grado de preferencia entre los proveedores 1 y 3 o, peor aún, que expresara preferencia por el proveedor 3 sobre el proveedor 1. Los tres pasos siguientes nos conducen a la razón de congruencia:

1. Calcule la medida de congruencia para cada proveedor.
2. Calcule el índice de congruencia (IC).
3. Calcule la razón de congruencia (IC/IA donde IA es un índice aleatorio).

Para calcular la medida de la congruencia podemos aprovechar la función de multiplicación matricial de Excel = MMULT(). Como quiera que Mark nos ha mostrado, en la figura 9.24, que en el caso del proveedor 1 (RTC) es necesario multiplicar la clasificación promedio de cada proveedor (celdas E12:E14) por los puntajes de la primera fila (celdas B4:D4) uno por uno, estos productos deben sumarse y después el total se divide entre la clasificación promedio del primer proveedor (celda E12). Se realiza un cálculo similar para el segundo y tercer proveedores. En el caso ideal, las mediciones de congruencia serían iguales al número de alternativas de decisión incluidas en el ejemplo (en nuestro caso, tenemos tres proveedores). Para calcular el índice de congruencia (IC), Mark toma la medida de congruencia promedio de los tres proveedores, resta el número de alternativas (n) y divide la cantidad entera entre $n - 1$. Esto se ilustra en la celda F16 de la figura 9.24 y Mark observa que su IC tiene un valor de 0.001. El paso final para hallar la razón de congruencia (RC) consiste en dividir el IC entre un índice aleatorio (IA) proporcionado por el PJA y que mostramos a continuación:

n	Índice aleatorio
2	0.00
3	0.58
4	0.90
5	1.12
6	1.24
7	1.32
8	1.41
9	1.45
10	1.51

F12 = =MMULT(B4:D4,$E$12:$E$14)/E12

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		RTC	PSS	EC		
4	RTC	1	4	0.5		
5	PSS	0.25	1	0.142857		
6	EC	2	7	1		
7						
8	Suma	3.25	12	1.642857		
9						
10	*NORMALIZADA*					
11		RTC	PSS	EC	Promedio	Medición de congruencia
12	RTC	0.308	0.333	0.304	0.315	3.0019
13	PSS	0.077	0.083	0.087	0.082	3.000
14	EC	0.615	0.583	0.609	0.602	3.004
15						
16					IC =	0.001
17						
18					IA=	0.58
19						
20					Razón C.=	0.002

Celda	Fórmula	Cópiese a
F12	= MMULT(B4:D4,$E$12:$E$14)/E12	F13:F14
F16	= (PROMEDIO(F12:F14)-3)/2	—
F20	= F16/F18	—

FIGURA 9.24

Razón de congruencia para el costo total

Esta razón de congruencia aparece en la celda F20 de la figura 9.24 y su valor es 0.002 en el ejemplo de Mark.

En el caso de un administrador totalmente congruente, las medidas de congruencia tendrían el valor *n* y, por tanto, los IC serían iguales a cero, así como la razón de congruencia. Si esa razón es muy grande (Saaty sugiere > 0.10), eso significa que el administrador no es suficientemente congruente y lo mejor que puede hacer es volver a revisar las comparaciones (en la mayoría de los casos, se trata de un error sencillo y este cálculo le alertará sobre este hecho).

Ahora Mark tendrá que efectuar la misma operación con los otros tres criterios. Esto lo puede lograr con facilidad, copiando simplemente la hoja “Costo total” en otras tres hojas (“Servicio”, “Refinamiento” y “Ajuste al gusto”) y modificando a continuación el sentido de las comparaciones por parejas. Los resultados aparecen en las figuras 9.25 a 9.27. Mark observa que, en los tres casos, los valores del RC fluctúan entre 0.0 y 0.047, lo cual indica que ha habido suficiente congruencia. Él se percata también de que PSS es el vencedor bajo el criterio de servicio, RTC y PSS están empatados como los mejores en términos de refinamiento y PSS se considera el mejor en lo referente a adaptación del producto al gusto del cliente.

Con todo este trabajo finaliza el primer paso del procedimiento. El paso siguiente (2) de dicho proceso consiste en realizar comparaciones similares por parejas a fin de determinar las ponderaciones apropiadas para cada uno de los criterios. El procedimiento es el mismo que empleamos para hacer las comparaciones, salvo que ahora serán comparados los criterios y no los proveedores como en el paso 1. Mark realiza esta operación en una nueva hoja llamada “Ponderaciones” (en el mismo libro) como muestra la figura 9.28.

F20 = =F16/F18

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		**RTC**	**PSS**	**EC**			
4	**RTC**	1	0.5	6			
5	**PSS**	2	1	8			
6	**EC**	0.166667	0.125	1			
7							
8	Suma	3.166667	1.625	15			
9							
10	***NORMALIZADA***						
11		**RTC**	**PSS**	**EC**	**Promedio**	**Medición de congruencia**	
12	**RTC**	0.316	0.308	0.400	0.341	3.0200	
13	**PSS**	0.632	0.615	0.533	0.593	3.0315	
14	**EC**	0.053	0.077	0.067	0.065	3.0034	
15							
16					IC =	0.009	
17							
18					IA=	0.58	
19							
20					Razón C.=	0.016	

FIGURA 9.25

Razón de congruencia para el servicio

F16 = =(PROMEDIO(F12:F14) - 3)/2

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		**RTC**	**PSS**	**EC**			
4	**RTC**	1	1	5			
5	**PSS**	1	1	5			
6	**EC**	0.2	0.2	1			
7							
8	Suma	2.2	2.2	11			
9							
10	***NORMALIZADA***						
11		**RTC**	**PSS**	**EC**	**Promedio**	**Medición de congruencia**	
12	**RTC**	0.455	0.455	0.455	0.455	3.0000	
13	**PSS**	0.455	0.455	0.455	0.455	3.000	
14	**EC**	0.091	0.091	0.091	0.091	3.000	
15							
16					IC =	0.000	
17							
18					IA=	0.58	
19							
20					Razón C.=	0.000	

FIGURA 9.26

Razón de congruencia para el refinamiento

C8 = =SUMA(C4:C6)

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		**RTC**	**PSS**	**EC**		
4	**RTC**	1	0.25	3		
5	**PSS**	4	1	6		
6	**EC**	0.333333	0.166667	1		
7						
8	Suma	5.333333	1.416667	10		
9						
10	***NORMALIZADA***					
11		**RTC**	**PSS**	**EC**	**Promedio**	**Medición de congruencia**
12	**RTC**	0.188	0.176	0.300	0.221	3.0399
13	**PSS**	0.750	0.706	0.600	0.685	3.1094
14	**EC**	0.063	0.118	0.100	0.093	3.0131
15						
16					IC =	0.027
17						
18					IA=	0.58
19						
20					Razón C.=	0.047

FIGURA 9.27

Razón de congruencia para el ajuste al gusto del cliente

G16 = =(PROMEDIO(G12:G15) - 4)/3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		**Costo**	**Servicio**	**Refinamiento**	**Ajuste al cliente**			
4	**Costo**	1	6	0.5	3			
5	**Servicio**	0.166667	1	0.125	0.333333333			
6	**Refinamiento**	2	8	1	5			
7	**Ajuste al cliente**	0.333333	3	0.2	1			
8	**Suma**	3.500	18.000	1.825	9.333			
9								
10	***NORMALIZADA***							
11		**Costo**	**Servicio**	**Refinamiento**	**Ajuste al cliente**	**Promedio**	**Medición de congruencia**	
12	**Costo**	0.286	0.333	0.274	0.321	0.304	4.0713	
13	**Servicio**	0.048	0.056	0.068	0.036	0.052	4.0108	
14	**Refinamiento**	0.571	0.444	0.548	0.536	0.525	4.0869	
15	**Ajuste al cliente**	0.095	0.167	0.110	0.107	0.120	4.0229	
16						IC =	0.016	
17								
18						IA=	0.9	
19								
20						Razón C.=	0.018	

Celda	Fórmula	Cópiese a
B5	= 1/C4	—
B6	= 1/D4	—
B7	= 1/E4	—
C6	= 1/D5	—
C7	= 1/E5	—
D7	= 1/E6	—
B8	= SUMA(B4:B7)	C8:E8
B12	= B4/B$8	B12:E15
F12	= PROMEDIOGE(B12:E12)	F13:F15
G12	= MMULT(B4:E4,$F$12:$F$15)/F12	G13:G15
G16	= PROMEDIO(G12:G15)/3	—
G20	= G16/G18	—

FIGURA 9.28

Razón de congruencia para las ponderaciones de los criterios

Mark observa que los algoritmos matemáticos arrojan la mayor parte de la ponderación en el refinamiento (52.5% en la celda F14), seguido del costo (30.4% en la celda F12), a partir de las comparaciones por parejas. Una vez más, le complace que sus mediciones de congruencia se aproximen a 4 y, por tanto, que sus IC y RC se aproximen a cero.

B3 = =Ponderaciones!F12

	A	B	C	D	E
1			*Clasificación de las alternativas*		
2	*Criterios*	***Ponderaciones***	**RTC**	**PSS**	**EC**
3	**Costo**	0.304	0.315	0.082	0.602
4	**Servicio**	0.052	0.341	0.593	0.065
5	**Refinamiento**	0.525	0.455	0.455	0.091
6	**Ajuste al cliente**	0.120	0.221	0.685	0.093
7					
8	***Clasificaciones ponderadas***		0.378	0.376	0.245

Celda	Fórmula	Cópiese a
B3	= PONDERACIONES!F12	B4:B6
C3	= COSTO TOTAL!E12	—
D3	= COSTO TOTAL!E13	—
E3	= COSTO TOTAL!E14	—
C4	= SERVICIO!E12	—
D4	= SERVICIO!E13	—
E4	= SERVICIO!E14	—
C5	= REFINAMIENTO!E12	—
D5	= REFINAMIENTO!E13	—
E5	= REFINAMIENTO!E14	—
C6	= AJUSTE!E12	—
D6	= AJUSTE!E13	—
E6	= AJUSTE!E14	—
C8	= SUMAPRODUCTO($B$3:$B$6,C3:C6)	D8:E8

FIGURA 9.29

Clasificaciones PJA promedio ponderadas usando ponderaciones PJA

El paso final consiste en calcular las clasificaciones promedio ponderadas de cada alternativa de decisión y usar los resultados para decidir cuál será el proveedor elegido para la compra del nuevo paquete de *software*. Este último paso es similar al ejemplo sencillo que presentamos al iniciar esta sección, y Mark utiliza los resultados de todas sus otras hojas de cálculo para efectuar esas operaciones (véase la hoja "Comparación" en el mismo SLEEPWLL.XLS). Esto se ilustra en la figura 9.29. A partir de los resultados obtenidos, Mark comprende que RTC (.378 en la celda C8) supera por estrecho margen a PSS (.376 en la celda D8) como ganador del nuevo contrato de *software*, mientras que EC ocupa un distante tercer lugar.

9.6 NOTAS SOBRE LA APLICACIÓN

Como sucede con la mayoría de los modelos cuantitativos, las aproximaciones heurísticas se aplican de ordinario con la hoja de cálculo o con cualquier otro programa de cómputo. En la práctica, una diferencia entre el uso de procedimientos heurísticos y el empleo de modelos más formales, como la programación lineal o cuadrática, es que ya existen programas de cómputo para estas últimas. Sin embargo en el caso heurístico, la aplicación es a menudo *ad hoc,* lo cual implica que es necesario crear el programa adecuado. Como dijimos con anterioridad, una aplicación típica de la heurística es el rubro de los grandes modelos combinatorios, en los cuales la obtención de una solución, ya sea por enumeración o por la aplicación de un modelo formal matemático o de programación con enteros, sería prohibitivamente cara. En todas las aplicaciones de la heurística prevalece el juicio administrativo implícito de que la forma de pensar más acertada consiste en buscar lo "aceptable" antes que lo "óptimo". En otras palabras, se estima que las "buenas soluciones", en oposición a las "soluciones óptimas", pueden ser útiles y satisfactorias. *Esta filosofía es particularmente apropiada para modelos cuya descripción es muy vaga, como los modelos de alto nivel que incluyen objetivos subordinados o para los cuales puede haber muchos criterios de interés en conflicto y, por ende, no existe una función objetivo clara, única y definitiva.*

En la práctica, el uso de la heurística está a veces estrechamente vinculado con el terreno de la *inteligencia artificial*, en la cual las computadoras son programadas con técnicas heurísticas para que sean capaces de demostrar teoremas, jugar ajedrez y hasta componer poemas.

La aplicación más común de la heurística en la ciencia de la administración ha sido quizá, hasta la fecha, los modelos para la determinación del equilibrio de trabajo en la línea de montaje, la programación de trabajos en el taller y la asignación de recursos en la administración de proyectos. Sin embargo, recientemente ha habido un incremento en el alcance de las aplicaciones, las cuales se están aproximando a esferas tales como la selección de medios en mercadotecnia, la definición de distritos políticos, la elaboración de horarios para las clases universitarias o el posicionamiento de sistemas urbanos.

En la aplicación de todos los modelos heurísticos, la interacción y la retroalimentación administrativa deberán desempeñar quizá un papel aún más importante que cuando se trata de modelos más formales, porque en el caso heurístico el administrador no sólo tiene que evaluar el modelo, sino también, implícitamente, el algoritmo heurístico. Esta evaluación es necesaria porque, *con el mismo modelo, una heurística diferente conducirá a "soluciones" también diferentes.*

Esa estrecha interacción entre el modelo y la persona que toma las decisiones se manifiesta también en la programación por metas, cuando dicha persona tiene que asignar prioridades a diferentes metas, como en el formato de la jerarquización ordinal (es decir, *prioridades absolutas*). La programación por metas es un enfoque intuitivamente atractivo, y "heurístico" en este sentido, para modelos con objetivos múltiples. En la programación por metas con prioridades absolutas, el administrador debe considerar cuidadosamente la importancia o utilidad relativa de sus propias metas. Según cuál sea la salida del modelo de hoja de cálculo, la persona que esté a cargo de tomar decisiones puede tener el deseo de cambiar las prioridades, o incluso el número de metas, y procesar de nuevo el modelo de hoja de cálculo. En otras palabras, igual que en el caso de la PL, el análisis de sensibilidad se convierte en un aspecto importante de la aplicación. En virtud de que la programación por metas todavía está en sus inicios, esa especialidad se está desarrollando a un ritmo acelerado desde el punto de vista teórico, y nos parece bastante claro que eso propiciará una mayor utilización de dicha técnica, sobre todo a medida que el análisis de sensibilidad llegue a ser mejor comprendido.

En la práctica, existen programas de computadora para resolver programas por metas a gran escala en la modalidad del procesamiento por lotes, pero por lo general no forman parte de las bibliotecas ordinarias de programación. Con modelos de dimensiones modestas, la modalidad interactiva resulta ideal para la técnica secuencial que hemos descrito en este capítulo.

Términos clave

Algoritmo codicioso. Un algoritmo que impone el principio de que se debe lograr la máxima mejoría en cada paso de un proceso secuencial.

Algoritmo heurístico. Algoritmo que proporciona en forma eficiente buenas soluciones aproximadas para un modelo dado, frecuentemente presenta estimaciones de la calidad de dicha aproximación.

Diagrama de carga de personal. Diagrama de barras que muestra el número total de personas que es requerido por semana para llevar a cabo un programa de actividades determinado.

Heurística. Regla práctica intuitivamente atractiva para el tratamiento de algún aspecto de un modelo.

Holgura. En el contexto de la programación de proyectos, se refiere al tiempo máximo que puede aplazarse una actividad cualquiera sin retrasar la fecha de finalización de todo el proyecto.

Optimización combinatoria. Modelo de optimización con un número finito de alternativas factibles.

Prioridad absoluta. Forma de programación por metas en la cual éstas deben satisfacerse en un orden específico.

Proceso de jerarquía analítica (PJA). Procedimiento en el cual se usan comparaciones por parejas para decidir entre varias alternativas que compiten entre sí, tomando en cuenta múltiples criterios que se consideran importantes.

Programa heurístico. Colección de heurística y/o algoritmos heurísticos.

Programación por metas. Procedimiento consistente en buscar las decisiones permisibles que se aproximen lo más posible al logro de las metas especificadas.

Regla del siguiente mejor. Igual que el algoritmo codicioso.

Relaciones de precedencia. Significa que ciertas actividades deberán completarse antes de que otras puedan comenzar.

Restricción del intervalo de la meta. Restricción por la cual se especifican las metas mediante un intervalo de indiferencia, y no por un valor numérico específico.

Tiempo de ajuste inicial. Tiempo requerido antes que pueda empezar una actividad.

Variables de desviación. Variables que se usan en la programación por metas para medir el grado en el cual se transgrede una meta especificada.

Ejercicios de repaso

Verdadero-Falso

1. **V F** Existe la seguridad de que los algoritmos heurísticos, al finalizar el proceso, proporcionarán un porcentaje específico de optimalidad.
2. **V F** La solución óptima para un modelo de optimización combinatoria se puede encontrar, en principio, por medio de la enumeración completa.
3. **V F** Una heurística alternativa, en el modelo de programación con recursos limitados, consiste en desplazar hacia adelante la actividad que más contribuye a la sobrecarga (es decir, la que requiere la participación del mayor número de personas).
4. **V F** La programación por metas es la única técnica cuantitativa creada para emplearse en modelos con objetivos múltiples.
5. **V F** Cada paso de la programación por metas con prioridades absolutas introduce una nueva meta y elimina de cualquier consideración ulterior a todas las candidatas actuales que no sean capaces de satisfacer también, en la medida de lo posible, esa nueva meta.
6. **V F** Considere la restricción de la meta $12x_1 + 3x_2 + u_1 - v_1 = 100$. Suponga que, por la presencia de otras restricciones del modelo, esa meta no pueda ser alcanzada. Si u_1 es positiva, la meta se alcanzará con un margen excedente.
7. **V F** Una forma de establecer prioridades entre diversas metas consiste en aplicar ponderaciones a las variables de desviación.
8. **V F** Considere la restricción del intervalo de la meta $180 \leq 4x_1 + 12x_2 \leq 250$. Una formulación correcta de la meta es

$$4x_1 + 12x_2 - v_1 \leq 250$$
$$4x_1 + 12x_2 - u_1 \geq 180$$

9. **V F** Si una restricción del intervalo de la meta no puede alcanzarse (satisfacerse con exactitud), entonces una variable de desviación tiene que ser positiva, y la restricción a la cual se aplica dicha variable será activa.
10. **V F** En la programación por metas no se permite que ninguna restricción del sistema sea violada.
11. **V F** Nunca un modelo de programación por metas puede ser no factible.

Opción múltiple

12. Si el tiempo requerido para el ajuste inicial a fin de realizar n trabajos en una sola máquina depende de la secuencia, entonces el problema de minimizar el tiempo total de ajuste inicial requiere de la inspección de
    a. n secuencias
    b. 1 secuencia
    c. $n!$ secuencias
    d. $\binom{n}{2}$ secuencias
13. La noción intuitivamente atractiva que sirve de motivación para un algoritmo *codicioso* es
    a. aproximarse lo más posible a la solución óptima
    b. conseguir el mejor resultado posible en el paso actual
    c. minimizar el número requerido de pasos
    d. ninguna de las afirmaciones anteriores
14. En el modelo de la programación de recursos, la operación de restar a los demás elementos de una columna el tiempo de ajuste inicial mínimo correspondiente a la misma
    a. es un procedimiento heurístico basado en la idea de que lo importante son los costos relativos
    b. garantiza la obtención de una solución óptima si se aplica el algoritmo codicioso
    c. hace que el algoritmo codicioso no resulte útil
    d. ninguna de las afirmaciones anteriores
15. Si un modelo de programación por metas incluye la restricción $g_1(x_1, \ldots, x_n) + u_1 - v_1 = b_1$ y el término $6u_1 + 2v_1$ en la función objetivo, entonces la persona que está a cargo de la toma de decisiones
    a. prefiere que $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ sea mayor que b_1 no menor
    b. prefiere que $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ sea menor que b_1 no mayor
    c. le es indiferente que $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ sea mayor o menor que b_1
16. Los modelos con objetivos múltiples
    a. son difíciles porque con frecuencia es verdad que al mejorar un objetivo se perjudica otro
    b. son difíciles porque los objetivos pueden estar expresados en medidas incongruentes entre sí (es decir, como el problema de "combinar manzanas y naranjas")
    c. pueden abordarse en algunas ocasiones con el método de la programación por metas
    d. todo lo anterior

Las preguntas 17, 18, 19 corresponden al siguiente problema:

1. $g_1(x_1, x_2) \leq b_1$ es una restricción del sistema
2. La máxima prioridad consiste en minimizar el faltante para el logro de $g_2(x_1, x_2) = b_2$
3. La siguiente prioridad consiste en minimizar el excedente para el logro de $g_3(x_1, x_2) = b_3$

17. El primer paso del procedimiento de resolución es
    a. Min u_2, s.a. $g_1(x_1, x_2) \leq b_1$; $g_2 - u_2 = b_2$; $x_1, x_2, u_2 \geq 0$

b. Min u_2, s.a. $g_1(x_1, x_2) \leq b_1$; $g_2 + u_2 \geq b_2$; $x_1, x_2, u_2 \geq 0$
c. Min u_2, s.a. $g_1(x_1, x_2) \leq b_1$; $g_2 - u_2 \leq b_2$; $x_1, x_2, u_2 \geq 0$

18. Sea RF I la expresión que denota los puntos (x_1, x_2) obtenidos en el primer paso del procedimiento de resolución. El segundo paso es
a. Min $u_3 + v_3$, s.a. (x_1, x_2) en RF I y $g_3(x_1, x_2) + u_3 - v_3 = b_3$
b. Min u_3, s.a. (x_1, x_2) en RF I y $g_3(x_1, x_2) + u_3 \leq b_3$
c. Min v_3, s.a. (x_1, x_2) en RF I y $g_3(x_1, x_2) - v_3 \leq b_3$

19. En este modelo
a. será posible alcanzar por lo menos una de las metas
b. si no se alcanza la primera meta, la segunda tampoco podrá alcanzarse
c. ninguna de las dos

20. Considere un programa por metas con la siguiente restricción:

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) - v_1 \leq b_1, \; v_1 \geq 0$$

y con v_1 en la función objetivo. En ese caso
a. La meta consiste en minimizar el excedente del logro
b. Si $v_1^* > 0$ entonces la restricción será activa
c. ninguna de las afirmaciones anteriores
d. tanto a como b

Respuestas

1.	F	**6.**	F	**11.**	F	**16.**	d
2.	V	**7.**	V	**12.**	c	**17.**	b
3.	V	**8.**	F	**13.**	b	**18.**	c
4.	F	**9.**	V	**14.**	a	**19.**	c
5.	V	**10.**	V	**15.**	a	**20.**	d

Problemas

9-1. Encuentre una solución óptima alternativa, diferente de la presentada en la figura 9.12 para el modelo de programación minimax.

Los problemas 9-2, 9-3 y 9-4 se refieren al siguiente ejemplo de lo que se conoce como *el modelo de distribución de instalaciones:*

El consultor administrativo de alto costo Solomon Gemorah ha sido contratado para redistribuir las instalaciones de un banco pequeño. Ahora él deberá tomar en cuenta cuatro departamentos clave: (1) fideicomisos, (2) propiedades, (3) contabilidad y (4) ahorros. Estos cuatro departamentos deberán ser asignados a cuatro ubicaciones. La tabla que aparece abajo a la izquierda muestra las distancias que separan a estas ubicaciones. De este modo, la distancia desde la ubicación 2 hasta la ubicación 4 es una unidad, de la 4 a la 1 es otra unidad, y así sucesivamente. En la tabla que le acompaña, la cual aparece a la derecha, vemos una medida de la intensidad del "flujo diario", en ambos sentidos, entre los cuatro departamentos clave.

TABLA 9.5 Distancias entre las ubicaciones

	UBICACIÓN			
UBICACIÓN	1	2	3	4
1	0	2	3	1
2	2	0	3	1
3	3	3	0	2
4	1	1	2	0

TABLA 9.6 Intensidad del flujo entre los departamentos

	DEPARTAMENTO			
DEPTO.	1	2	3	4
1	0	15	20	16
2	15	0	13	9
3	20	13	0	19
4	16	9	19	0

El problema consiste en asignar los cuatro departamentos a las cuatro ubicaciones disponibles (un departamento por ubicación) de modo que se minimice la suma de los flujos diarios ponderados según la distancia. Por ejemplo, si revisamos la asignación de departamentos a ubicaciones en esta forma: $1 \to 1$, $2 \to 2$, $3 \to 3$, $4 \to 4$, entonces el valor objetivo será:

costo ponderado en ambos sentidos entre las instalaciones 1 y 2 = distancia $\times$ flujo = 2(15) = 30

costo ponderado en ambos sentidos entre las instalaciones 1 y 3 = distancia $\times$ flujo = 3(20) = 60

costo ponderado en ambos sentidos entre las instalaciones 1 y 4 = distancia $\times$ flujo = 1(16) = 16

costo ponderado en ambos sentidos entre las instalaciones 2 y 3 = distancia × flujo = 3(13) = 39
costo ponderado en ambos sentidos entre las instalaciones 2 y 4 = distancia × flujo = 1(9) = 9
costo ponderado en ambos sentidos entre las instalaciones 3 y 4 = distancia × flujo = 2(19) = 38
costo total = 192

9-2. Suponga ahora que Solomon asignó el departamento 1 a la ubicación 4, el departamento 2 a la ubicación 3, el departamento 3 a la ubicación 2 y el departamento 4 a la ubicación 1.
- **(a)** ¿Cuál sería la distancia entre los departamentos?
- **(b)** ¿Cuál sería el costo total de las asignaciones de Solomon?
- **(c)** ¿Cuál es el número total de posibles asignaciones de instalaciones a ubicaciones que tendría que considerar Solomon si intentara resolver este modelo por medio de una numeración completa?
- **(d)** En el caso del modelo general de asignar n instalaciones a n ubicaciones, ¿cuál es el número total de las posibles asignaciones?

9-3. Suponga que el departamento 1 ha sido asignado a la ubicación 1. Dibuje un árbol, como el de la figura 9.1, en el cual muestre las asignaciones posibles de los restantes departamentos 2, 3 y 4, a las ubicaciones 2, 3 y 4.

••9-4. Refiriéndonos todavía a Solomon y su modelo de distribución,
- **(a)** ¿Cuántos pares diferentes de departamentos pueden seleccionarse a partir de cuatro departamentos?
- **(b)** A partir de la respuesta correspondiente a la parte (a) del problema 9-2, trate de mejorar las asignaciones empleando la siguiente heurística de intercambio para encontrar la mejor pareja,[2] tal como se describe más adelante. ¿Cuánto ha logrado usted mejorar su función objetivo?

Paso 1: Encuentre el mejoramiento potencial de la función objetivo asociada a cada intercambio de departamentos por pareja. Por ejemplo, si los departamentos 1 y 2 son intercambiados, la nueva asignación será $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 2$, y $4 \rightarrow 1$. Es decir, la ubicación de los departamentos 1 y 2 cambiará, pero los departamentos 3 y 4 permanecerán sin cambio alguno.

Paso 2: Realice el intercambio por parejas que produzca el mayor mejoramiento. Repita después el procedimiento hasta que ningún otro intercambio de parejas logre mejorar el valor de la función objetivo.

9-5. Sam Hull es el gerente de mercadotecnia de una compañía farmacéutica. Tiene que asignar cinco visitadores médicos a cinco hospitales. La siguiente tabla muestra las ventas esperadas.
- **(a)** Aplique una heurística codiciosa para asignar cada uno de los visitadores médicos a cada hospital, de manera que se maximice el total de las ventas esperadas.
- **(b)** Utilice la heurística modificada de la sección 9.2 (es decir, después de transformar los datos restando las ventas máximas en cada columna a todos los demás elementos de dicha columna, aplique la heurística codiciosa) para encontrar una nueva solución. ¿En qué medida es mejor el desempeño de esta heurística que el de la utilizada en la parte (a)?

TABLA 9.7

	HOSPITAL				
VISITADOR MÉDICO	A	B	C	D	E
1	25	18	23	22	16
2	20	21	18	15	12
3	23	19	20	21	20
4	30	26	25	22	20
5	28	22	23	20	18

••9-6. Tres trabajos —J1, J2 y J3— tendrán que ser realizados en un mismo torno. El costo de la preparación o ajuste inicial para cada trabajo depende del ajuste realizado para el trabajo anterior. El costo de esos cambios de trabajo se presenta en la tabla siguiente. En estos momentos, el torno no ha sido ajustado aún para algún trabajo.
- **(a)** Use la heurística codiciosa para programar los trabajos. El objetivo es minimizar el costo total de ajuste o preparación para los trabajos.
- **(b)** Use la heurística modificada en la sección 9.2 para programar los trabajos.
- **(c)** ¿Se obtiene siempre un resultado mejor con la heurística modificada que con la heurística codiciosa?

[2]En la literatura administrativa se han propuesto muchos métodos heurísticos para resolver el modelo de asignación de instalaciones. En un estudio [véase Mojena *et al.*] que incluyó 12 instalaciones, se informó que para lograr un valor óptimo verdadero con un algoritmo de ramificación y acotamiento se requirieron dos horas de procesamiento usando una computadora de alta velocidad. En siete segundos, la heurística del mejor intercambio por parejas produjo una propuesta que en términos de los valores objetivo asociados, permitió una aproximación comprendida dentro de 3% del valor óptimo.

TABLA 9.8

	J1	J2	J3
Sin ajuste inicial	\$50	\$35	\$39
J1	—	\$30	\$34
J2	\$41	—	\$30
J3	\$35	\$25	—

••9-7. Erma McZeal está a cargo del control de calidad del suministro de agua para la ciudad de Chicago. Actualmente funcionan tres estaciones de prueba que están localizadas en el lago Michigan. Si mediante (x_1, x_2) expresamos las coordenadas en kilómetros, las tres ubicaciones existentes quedarán distribuidas en la siguiente forma:

$$\text{estación 1: } x_1 = 2, x_2 = 10$$
$$\text{estación 2: } x_1 = 6, x_2 = 6$$
$$\text{estación 3: } x_1 = 1, x_2 = 3$$

La tarea de Erma consiste en ubicar una nueva estación de manera que la distancia total de la nueva estación a las otras tres ya existentes se minimice. Suponga que, por causa de la ubicación de los canales existentes, la distancia se tiene que medir en trayectorias rectangulares. En otras palabras, si la nueva estación se ubica en $(x_1 = 3, x_2 = 4)$, estará a una distancia de $|3 - 2| + |4 - 10|$, o sea $7(= 1 + 6)$ unidades de la estación 1; y así sucesivamente. Sean (x_1, x_2) las coordenadas de la nueva estación. Formule un modelo de programación por metas para resolver el problema de Erma.

••9-8. La figura 9.30 es el diagrama de precedencia para las actividades de un proyecto. El tiempo y el personal que cada actividad requiere se muestran en la siguiente tabla. Aplique la heurística para uniformar la carga de trabajo y elabore un programa para este proyecto.

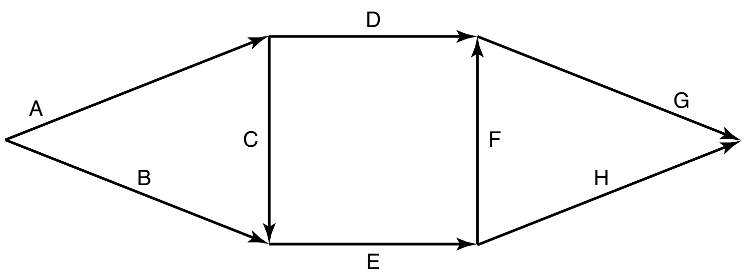


FIGURA 9.30

TABLA 9.9

ACTIVIDAD	TIEMPO REQUERIDO	PERSONAL
A	1	4
B	2	5
C	1	3
D	2	2
E	2	7
F	1	7
G	1	5
H	1	4

9-9. ***Mezcla de productos.*** Una empresa fabrica dos productos. Cada uno de ellos tiene que ser elaborado utilizando dos máquinas, cada una de las cuales tiene 240 minutos de capacidad disponible todos los días. Cada unidad del producto 1 requiere 20 minutos en la máquina 1 y 12 minutos en la máquina 2. Cada unidad del producto 2 requiere 12 minutos en la máquina 1 y 20 minutos en la máquina 2. Al buscar la mezcla de productos diaria, la gerencia desea alcanzar las siguientes metas:

1. La producción total conjunta de 12 unidades
2. La fabricación de 9 unidades del producto 2
3. La fabricación de 10 unidades del producto 1

Suponga que la gerencia deseara minimizar el faltante para el logro de cada una de estas metas y que las ponderaciones de prioridad predeterminadas w_1, w_2, y w_3 fueran asignadas a las tres metas, respectivamente. Formule esta situación como un modelo de programación por metas.

•• **9-10.** T&C Furniture Company (TCFC) fabrica mesas y sillas. Escriba las restricciones de las metas para los siguientes objetivos (las variables T y C representan, respectivamente, el número de mesas y sillas producidas en un periodo):

(a) La fabricación de una mesa requiere 10 horas y la de una silla 5 horas. El número total de horas de trabajo disponibles por periodo es de 3,200. Aunque el tiempo ocioso y las horas extraordinarias de trabajo son opciones aceptables, TCFC desea que el número total de horas de trabajo se aproxime lo más posible a 3,200.

(b) Se utiliza una pieza de madera para fabricar una mesa y media pieza para una silla; durante un periodo determinado se dispone de 300 piezas de madera y no es posible comprar más. TCFC desea utilizar lo más posible de esta reserva de madera durante cada periodo.

(c) TCFC fabrica mesas sobre pedido y se ha comprometido a proveer 200 mesas en un periodo dado. Cualquier mesa adicional que produjera tendría que mantenerse en inventario, y la compañía desea minimizar el número de mesas que mantenga en inventario.

(d) La demanda de sillas es incierta, pero se estima que será de entre 200 y 250. La compañía desea fabricar sillas aproximándose lo más posible a estas cifras.

9-11. Considere el siguiente modelo de programación por metas

$$
\begin{aligned}
\text{Min } & P_1v_1 + P_2v_2 + P_3u_3 + P_4(u_4 + v_4) \\
\text{s.a. } & \quad x_2 + u_1 - v_1 = 100 \\
& x_1 + x_2 + u_2 - v_2 = 80 \\
& x_2 + u_3 = 40 \\
& x_1 + 2x_2 + u_4 - v_4 = 160 \\
& x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Use el método gráfico para resolver el modelo.

(b) Interprete la tercera meta $x_2 + u_3 = 40$.

(c) Sustituya $x_2 + u_3 = 40$ con $x_2 + u_3 \geq 40$. ¿Cuál será la nueva interpretación?

(d) Aplique el método gráfico para resolver el modelo con la sustitución propuesta en (c).

9-12. Considere el siguiente modelo de programación por metas

$$
\begin{aligned}
\text{Min } & P_1v_1 + P_2v_2 + P_3v_3 + P_4(u_4 + v_4) \\
\text{s.a. } & \quad x_2 + u_1 - v_1 = 100 \\
& x_1 + x_2 + u_2 - v_2 = 80 \\
& x_1 - v_3 = 40 \\
& x_1 + 2x_2 + u_4 - v_4 = 160 \\
& x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Utilice el método gráfico para resolver el modelo.

(b) Interprete la tercera meta $x_1 - v_3 = 40$.

(c) Sustituya $x_1 - v_3 = 40$ por $x_1 - v_3 \leq 40$. ¿Cuál será la nueva interpretación?

(d) Aplique el método gráfico para resolver el modelo con la sustitución propuesta en (c).

9-13. Considere el siguiente programa por metas:

$$
\begin{aligned}
\text{Min } & P_1u_2 + P_2v_1 + P_3u_3 \\
\text{s.a. } & x_1 + x_2 + u_1 - v_1 = 80 \\
& x_1 + u_2 - v_2 = 100 \\
& x_2 + u_3 \geq 45 \\
& x_1, x_2, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Resuélvalo por medio del método gráfico.

(b) ¿Se ha alcanzado la meta correspondiente a la primera prioridad?

(c) ¿Y qué podemos decir de la segunda y tercera prioridades?

Nota: en caso de que exista una cantidad faltante o excedente para el logro preciso de las metas, indique los montos numéricos reales de esas discrepancias.

•• **9-14.** La compañía de transportes de Al tiene sus propios almacenes y distribuye productos a diversos centros de venta al menudeo. Al tiene almacenes en cinco ubicaciones diferentes y cuenta con cuatro clientes minoristas. Los costos de transporte por unidad, la demanda y los costos de operación de los almacenes se presentan en la siguiente tabla. La capacidad de todos los almacenes se considera ilimitada. Al tiene que decidir qué almacenes deberán seguir funcionando y cuáles habrán de ser clausurados. La heurística codiciosa abierta para responder estas preguntas consiste en abrir el almacén que permita ahorrar más dinero y mantenerlo abierto todo el tiempo que sea posible seguir obteniendo ahorros.

(a) Use la heurística codiciosa abierta para resolver este modelo. ¿Qué almacenes se abrirán?
(b) ¿Cuánto dinero se ahorrará?

TABLA 9.10

ALMACÉN	MINORISTA A	B	C	D	COSTO FIJO DE OPERACIÓN DEL ALMACÉN
1	5	4	1	6	31
2	9	7	3	5	35
3	8	1	7	4	20
4	4	3	6	2	29
5	6	3	5	2	38
Demanda	10	15	6	5	

9-15. Hay seis trabajos que es necesario procesar en dos máquinas (de corte y pulido). Cada trabajo debe pasar por la máquina cortadora antes de llegar a la máquina pulidora. Suponga que la secuencia de procesamiento de los trabajos es idéntica en ambas máquinas.

La siguiente tabla muestra el tiempo (en horas) necesario para terminar un trabajo en cada máquina. El objetivo es programar los trabajos de modo que el tiempo requerido para terminarlos todos se minimice.

(a) ¿Cuántas alternativas tendrá usted que comparar para realizar una enumeración completa?
(b) ¿Cuál es el tiempo requerido para terminar todos los trabajos, si éstos son procesados por orden ascendente en términos del tiempo total de procesamiento?

Nota: puede resultar útil una ilustración como la figura 9.7. En el caso de esta aplicación, aparecen en una fila todas las tareas asignadas a la máquina 1, y en una segunda fila las asignadas a la máquina 2.

TABLA 9.11

MÁQUINA	TIEMPO REQUERIDO PARA CADA TRABAJO (HORAS) A	B	C	D	E	F
Corte	3	4	2	1	5	3
Pulido	2	5	2	1	3	4
Total	5	9	4	2	8	7

•• **9-16.** Considerando el ejercicio de programación de trabajos presentado en el problema 9-15, ¿obtiene usted alguna mejoría cuando aplica el siguiente modelo heurístico?

Paso 1: Prepare una lista de los distintos trabajos, junto con sus respectivos tiempos de procesamiento en las máquinas de corte y pulido.
Paso 2: Averigüe qué trabajo requiere el menor tiempo de procesamiento. Si el menor tiempo corresponde al trabajo en la máquina cortadora, programe ese trabajo en el momento más temprano posible, pero si corresponde a la máquina pulidora, prográmelo en el momento más tardío posible. Corte arbitrariamente los vínculos entre ambas operaciones.
Paso 3: Elimine ese trabajo de la lista.
Paso 4: Repita los pasos 2 y 3 hasta que todos los trabajos hayan sido programados.

•• **9-17.** La ciudad de Chicago está estudiando dos proyectos. Cada unidad de proyecto A cuesta $400, crea 20 empleos y reditúa $200 al final del año. Cada unidad del proyecto B cuesta $600, crea 40 empleos y reditúa $200. La persona encargada de la planeación desea alcanzar las siguientes metas:

1. Mantener el total de gastos en $2,400 o menos.
2. Crear 120 empleos por lo menos.
3. Maximizar el rendimiento obtenido al final del año.

Suponga que las tres metas aparecen en orden descendente de prioridad absoluta.

(a) Utilice el análisis gráfico para encontrar el número óptimo de unidades que deberá dedicarse a cada proyecto.
(b) ¿Se han alcanzado las metas? Si no es así, ¿cuál es el faltante para lograrlo?
(c) ¿Cuáles son el gasto neto y el número de empleos creados?

•• 9-18. Otro método heurístico para resolver el problema 9-14 se conoce como el “cierre codicioso”. En este caso, comenzamos con todos los almacenes abiertos y cerramos el que, al hacerlo, nos permita ahorrar más dinero. Continuamos aplicando este procedimiento hasta que ya no sea posible cerrar ningún almacén sin perder dinero.

(a) Resuelva el problema 9-14 aplicando la heurística del cierre codicioso.
(b) ¿Esta solución es mejor o peor que la del problema 9-14?

•• 9-19. Aplique el PJA para ayudar a Marlene Wyatt en la selección de su primer empleo cuando salga de la universidad. Ha recibido tres ofertas de trabajo (una en Bakersfield, otra en Fresno y la última en Oildale, las tres en el estado de California) y ha determinado que para ella resultan muy importantes tres criterios: el salario, la estabilidad del empleo y la calidad de la ciudad. Consulte JOB.XLS, incluido en su Disco para el estudiante, el cual contiene los siguientes datos que reproducimos en la figura 9.31.

B6 = =1/D4

	A	B	C	D
1				
2				
3		Bakersfield	Fresno	Oildale
4	Bakersfield	1	4	0.5
5	Fresno	0.25	1	7
6	Oildale	2	0.14285714	1

FIGURA 9.31

(a) ¿Cuáles son las clasificaciones promedio para el criterio “salario”?
(b) ¿Ha sido congruente Marlene? ¿Cómo podría usted modificar estas comparaciones para que sus opiniones efectivamente fueran congruentes?
(c) ¿Cuáles son las ponderaciones promedio para cada uno de los criterios?
(d) ¿Cuál de las ofertas de empleo le recomendaría a Marlene que aceptara?

•• 9-20. Utilice el PJA con el fin de ayudar a Mick Mott en la elección de la universidad más adecuada para que realice sus estudios de posgrado. Dos universidades le han ofrecido becas (Harvard y Stanford) y ha llegado a la conclusión de que cuatro criterios son importantes para él: el monto de la beca, el prestigio de la institución, el costo de la vida en cada lugar y la calidad de la ciudad. Consulte COLLEGE.XLS, en su Disco para el estudiante, donde aparecen los siguientes datos que ilustramos en la figura 9.32.

	A	B	C
1			
2			
3		Harvard	Stanford
4	Harvard	1	2
5	Stanford	0.5	1

FIGURA 9.32

(a) ¿Cuáles son las clasificaciones promedio para el criterio de “prestigio”?
(b) ¿Cuáles son las ponderaciones promedio que corresponden a cada uno de los criterios?
(c) ¿Qué universidad le recomendaría usted a Mick para que asistiera a ella en el otoño?

•• 9-21. Utilice el PJA para ayudar a Charles Shumway a escoger su nuevo automóvil. Él mismo ya ha reducido las posibilidades a sólo tres opciones (Buick Regal, Toyota Camry y Honda Accord) y ha determinado que para él son importantes tres criterios: precio, clasificación de la confiabilidad según el *Consumer Reports* y velocidad/rendimiento. Consulte CAR.XLS, incluido en su Disco para el estudiante, donde aparecen los siguientes datos ilustrados en la figura 9.33.

	A	B	C	D
1				
2				
3		Regal	Camry	Accord
4	Regal	1	0.33333333	0.2
5	Camry	3	1	0.5
6	Accord	5	2	1
7				

FIGURA 9.33

(a) ¿Cuáles son las clasificaciones promedio correspondientes al criterio “velocidad”?
(b) ¿Cuáles son las ponderaciones promedio para cada uno de los criterios?
(c) ¿Ha sido congruente Charles al asignar sus ponderaciones?
(d) ¿Qué automóvil le recomendaría a Charles que comprara?

••• **9-22.** Supongamos que usted ha sido contratado por el ayuntamiento de Peoria, Illinois (recuerde la segunda cápsula de aplicación) para que ayude a sus funcionarios en la tarea de alcanzar sus metas tributarias de carácter general. Se trata en realidad de tres metas (que mencionaremos por orden descendente de prioridad):

1. Limitar a $1,750 millones la carga fiscal sobre la población de bajos ingresos (BI).
2. Mantener el impuesto sobre la propiedad en un nivel inferior a 1%.
3. Minimizar la “emigración hacia los suburbios”, manteniendo la carga fiscal que pesa sobre la población de medianos ingresos (MI) en un monto menor de $2,500 millones, y la carga fiscal correspondiente a la población de altos ingresos (AI) en menos de $1,250 millones.
4. Tratar de eliminar el impuesto sobre la venta de alimentos y medicinas siempre que sea posible.

En la actualidad, la ciudad recauda cinco tipos de impuestos: (a) impuesto sobre la propiedad (donde p representa la tasa tributaria), (b) impuesto sobre la venta de mercancías en general, con excepción de alimentos y medicinas, así como de bienes durables (en este caso, s es la tasa del impuesto general sobre las ventas), (c) impuesto sobre la venta de alimentos y medicinas (f representa la tasa del impuesto sobre dicha venta), (d) impuesto sobre la venta de bienes durables (d es la tasa del impuesto sobre la venta de dichos bienes) y (e) impuesto sobre la gasolina (g es la tasa del impuesto aplicable a la gasolina).

La información pertinente acerca de los ingresos generados por medio de un impuesto de 1% aparece en la figura 9.34 (y en el libro PEORIA.XLS) para cada tipo de impuesto, por categorías de causantes definidas de acuerdo con sus respectivos ingresos (por ejemplo, BI, MI o AI).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			<---Tipo de impuesto--->							
2	NIVEL DE INGRESOS	Propiedad	Ventas	Alimentos y medicinas	Duraderos	Gasolina				
3	Bajos (BI)	400	300	200	50	120				
4	Medianos (MI)	1500	450	125	30	80		La tabla indica los millones		
5	Altos (AI)	1200	150	80	15	60		de dólares recaudados		
6								mediante un impuesto de 1%		

FIGURA 9.34

Suponga usted que 10% de la población BI emigrará de la ciudad para instalarse en los suburbios si su carga fiscal rebasa los $1,750 millones, que 20% de la población MI emigrará de la ciudad a los suburbios si su carga fiscal rebasa los $2,500 millones y que 30% de la población AI emigrará de la ciudad a los suburbios si su carga fiscal llega a rebasar los $1,250 millones. Tendrá usted que trabajar bajo las siguientes restricciones “duras”:

- La tasa del impuesto sobre las ventas debe fluctuar entre 1 y 3%, tal como se explica en la cápsula de aplicación.
- La recaudación total deberá exceder el nivel actual de $6,000 millones.
- La carga fiscal sobre la población AI no deberá exceder los $1,500 millones.
- La carga fiscal sobre la población MI no podrá exceder los $3,000 millones.

(a) Utilice la programación por metas para formular este modelo.
(b) ¿Qué metas podrá usted alcanzar?
(c) ¿Qué pasará con las metas que no pueda alcanzar?

Caso práctico — Sleepmore Mattress Manufacturing: Consolidación de una planta fabril[1]

W. Carl Lerhos, asistente especial del presidente de Sleepmore Mattress Manufacturing, fue asignado a la tarea de estudiar la consolidación propuesta de plantas fabriles ubicadas en tres localidades diferentes. La compañía acababa de adquirir varias instalaciones nuevas a raíz de la adquisición de una empresa competidora, pero algunas de ellas estaban localizadas en mercados que ya eran atendidos por sus instalaciones anteriores. El presidente sabía que el cálculo del ahorro en dólares por cada localidad sería relativamente sencillo, pero que los factores cualitativos y los pros y contras entre todas ellas serían más difíciles de evaluar. A este aspecto deseaba que Carl dedicara la mayor parte de su tiempo.

Los principales objetivos al evaluar un plan de consolidación para esas plantas consistían en maximizar las ganancias de la fabricación, maximizar las ganancias de las ventas y maximizar las ganancias financieras directas. Estos objetivos, a su vez, estarían compuestos por el aprovechamiento de 13 atributos (véase el anexo 1). Después de examinar individualmente cada atributo durante algún tiempo, Carl y los demás funcionarios de Sleepmore los clasificaron por orden jerárquico, desde el más importante hasta el menos importante. Agregaron también a su estudio el mejor y el peor resultados posibles para cada uno de los atributos (véase el anexo 2).

Mediciones

En cada caso se asignó a cada uno de los atributos un número del 0 al 10, correspondiendo al 10 la calificación del mejor resultado posible mencionado en el anexo 2. Cada ubicación representaba una región diferente, y cada uno de los tres locales implicaba la necesidad de tomar una decisión para elegir una de dos alternativas: consolidar las plantas establecidas en ese lugar específico, o bien, mantenerlas como entidades separadas. En las plantas en cuestión se fabricaban diferentes líneas de productos. En los anexos 3 al 5 presentamos breves descripciones y los puntajes asignados a las tres oportunidades potenciales de consolidación. Solamente las alternativas correspondientes a la opción de "consolidar" han sido calificadas; en otras palabras, a todas las alternativas referentes a "mantener separadas" las plantas se les asignó un puntaje predeterminado de 5 por cada atributo. En consecuencia, los atributos han sido calificados en *relación* con la situación actual, en la cual las plantas se encuentran separadas.

[1]Este caso sólo podrá ser utilizado como material de base para la discusión en el aula, pero no pretende ilustrar el manejo eficaz o ineficaz de una situación administrativa. Usted podrá consultar los resúmenes del caso Darden en la World Wide Web, en el sitio www.darden.virginia.edu/dems.

ANEXO 1 Jerarquía de los objetivos

- I. Maximizar las ganancias de la fabricación
  - a. Mano de obra
  - b. Efectividad administrativa
    1. Disponibilidad de talento
    2. Dimensiones de la planta
  - c. Operatividad
    1. Complejidad de la línea de productos
    2. Capacitación
    3. Estabilidad de la producción
  - d. Instalaciones
    1. Distribución
    2. Ubicación
    3. Disponibilidad de espacio
- II. Minimizar las ganancias de las ventas
  - a. Maximizar el servicio
  - b. Maximizar la calidad
- III. Maximizar las ganancias directas del financiamiento
  - a. Minimizar el costo inicial
  - b. Maximizar las ganancias en la operación normal

ANEXO 2 Trece atributos seleccionados para la evaluación de la consolidación

JERARQUÍA	ATRIBUTO	EL PEOR RESULTADO	EL MEJOR RESULTADO
1	Trabajo	Crear un sindicato hostil	Eliminar un sindicato hostil
2	Calidad	Empeorar drásticamente la calidad	Mejorar notablemente la calidad
3	Servicio	Perder negocios	Incrementar los negocios
4	Ahorro anual	Perder $1 millón/año	Ahorrar $1 millón/año
5	Costo inicial	Gastar $5 millones	Ahorrar $5 millones
6	Talento administrativo	Empeorar gravemente la administración	Mejorar notablemente la administración
7	Magnitud de la planta (ventas)	Crear una planta de $35 millones	Crear una planta de $15 millones
8	Ubicación de la planta	Trasladarse de un área rural a la ciudad	Trasladarse de la ciudad a un área rural
9	Complejidad de la línea de productos	Aumentar a una línea completa de productos	Reducir la línea de productos
10	Disponibilidad de espacio	Necesitar una nueva instalación (100,000 pies^2)	Ahorrar una extensión de 100,000 pies^2
11	Estabilidad en la producción	Incrementar la variabilidad de la demanda	Disminuir la variabilidad
12	Capacitación	Capacitar a todo el personal nuevo	Algunos despidos; sin nueva capacitación
13	Distribución de la planta	Crear una mala distribución	Eliminar las fallas de la distribución

ANEXO 3 La consolidación evaluada en la ubicación 1: fusión de la planta 1A con la planta 1B

ATRIBUTO	PLANTA 1A	PLANTA 1B	PUNTAJE DE LA COMBINACIÓN
Mano de obra	Deficiente	Excelente	9; gran mejoría
Calidad	Deficiente	Buena	9
Servicio	Deficiente	Bueno	8
Ahorro anual	Gastos generales altos	Eficiente; la fusión ahorra $1 millón/año	— —
Costo inicial	$1 millón de ahorro si se fusiona la planta	N/D	—
Talento administrativo	Deficiente	Excelente	9
Magnitud de la planta (ventas)	$3 millones	$27 millones	—
Ubicación de la planta	Ciudad grande	Área rural	10
Complejidad de la línea de productos	2 líneas de productos importantes	2 líneas separadas	0; muy compleja
Disponibilidad de espacio	N/D	Tiene espacio extra; necesita 0 pies^2 nuevos	—
Estabilidad en la producción	Poca demanda/alta incertidumbre	Gran demanda/baja incertidumbre	7; menor variabilidad
Capacitación	N/D	Trabajo adicional disponible	7.5
Distribución de la planta	Planta congestionada	Bien distribuida	7.5

ANEXO 4 La consolidación evaluada en la ubicación 2: incluir la planta 2B en la planta 2A

ATRIBUTO	PLANTA 2A	PLANTA 2B	PUNTAJE DE LA COMBINACIÓN
Mano de obra	Promedio	Deficiente	6
Calidad	Promedio	Promedio	5
Servicio	Promedio	Bueno	7
Ahorro anual	Falta de capacidad; la fusión ahorra $500K	Falta de capacidad	—
Costo inicial	N/D	Ahorra $1 millón si se fusiona la planta	—
Talento administrativo	Promedio	Bueno	6
Magnitud de la planta (ventas)	$5 millones	$10 millones	—
Ubicación de la planta	Parque industrial	Ciudad grande	6
Complejidad de la línea de productos	2 líneas de productos importantes	2 líneas diferentes	0; muy compleja
Disponibilidad de espacio	Habrá que agregar 50 mil pies^2 si se fusiona	No hay espacio	—
Estabilidad en la producción	Poca demanda/alta incertidumbre	Demanda contracíclica	9; reduce la variabilidad
Capacitación	Mano de obra subutilizada	Mano de obra subutilizada	9; unos cuantos despidos
Distribución de la planta	Excelente	Deficiente	9

ANEXO 5 La consolidación evaluada en la ubicación 3: introducción de la planta 3B en la planta 3A

ATRIBUTO	PLANTA 3A	PLANTA 3B	PUNTAJE DE LA COMBINACIÓN
Mano de obra	Inferior al promedio	Bueno	3; puede perderse la mano de obra de la planta 3A
Calidad	Promedio	Promedio	5
Servicio	Promedio	Bueno	6
Ahorro anual	Falta de capacidad; la fusión ahorra $200K/año	Eficiente	—
Costo inicial	N/D	Ahorro de $2MM si se fusiona	—
Talento administrativo	Promedio	Inferior al promedio	6
Magnitud de la planta (ventas)	$9 millones	$18 millones	—
Ubicación de la planta	Ciudad grande	Suburbio	4
Complejidad de la línea de productos	2 líneas de productos importantes	2 líneas diferentes	0; muy compleja
Disponibilidad de espacio	Habrá que añadir 30 mil pies^2 si se fusiona	No hay espacio	—
Estabilidad en la producción	Poca demanda/alta incertidumbre	Demanda incierta	6; demanda no contracíclica
Capacitación	Mano de obra subutilizada	N/D	3; algunos trabajadores renuncian
Distribución de la planta	Buena	Congestionada	7

Carl asignó los puntajes basándose en evaluaciones subjetivas después de haber conversado con los gerentes y de visitar las distintas plantas.

Las ponderaciones

Después de calificar cada atributo de acuerdo con su escala de 0 a 10, Carl emprendió una tarea más difícil, consistente en decidir qué importancia correspondía a cada atributo en comparación con los demás. Los atributos cuantitativos serían bastante fáciles de ponderar. Él sabía que la tasa de descuento de la compañía (15%), combinada con su horizonte de planeación (10 años) serían datos útiles para realizar esta actividad, pero no estaba muy seguro de cómo le ayudarían.

Carl había oído al presidente decir: "Cuanto más pequeña es una planta, tanto más fácil es administrarla. Si pudiéramos mejorar una planta de \$35 millones para convertirla en una planta de \$15 millones, la ganancia sería equivalente al ahorro de \$1 millón al año, sin introducir algún cambio en la situación habitual de la misma, tan sólo por concepto de costos de operación". Carl realizó un rápido cálculo mental y consideró que la ponderación por el tamaño de la planta representaría la mitad de la ponderación correspondiente al ahorro anual (aunque esto lo tuvo que rectificar más tarde).

En la industria de la fabricación de colchones se necesita mucho espacio. Si una consolidación requería una nueva planta o una adición apreciable, entonces las dificultades de la mudanza y los gastos ocultos correspondientes constituían factores negativos adicionales. El costo sería de \$25/pie^2 por cada pie^2 de espacio adicional.

Como un elemento auxiliar para la asignación de las ponderaciones de los demás atributos, de carácter más cualitativo, Carl recurrió a las notas que había tomado en una reunión anterior a la cual asistieron el presidente, el vicepresidente de operaciones y el vicepresidente de recursos humanos. En aquella junta, celebrada en la época de la adquisición, fue elaborada la lista que presentamos en el anexo 2 y se discutió la importancia relativa de cada uno de los atributos.

El vicepresidente de recursos humanos declaró: "El trabajo es lo más importante porque la calidad del mismo determina los principales aspectos del desempeño de la planta (tales como calidad, rentabilidad y otros similares). La experiencia ha demostrado que una fuerza de trabajo eficiente es capaz de superar muchos obstáculos, mientras que una fuerza de trabajo deficiente suele ocasionar problemas. En realidad, me parece que la mano de obra es doblemente importante que el promedio de los 13 atributos considerados en conjunto." Carl decidió investigar el contexto de esta declaración. De este modo, comprobó que el vicepresidente habló teniendo muy presente uno de los renglones incluidos en el anexo 2: mejorar las relaciones laborales, pasando de "crear un sindicato hostil" a "eliminar un sindicato hostil" le parecía doblemente más valioso que elevar el atributo promedio de "lo peor" a "lo mejor".

El vicepresidente de operaciones estuvo de acuerdo con el comentario acerca del trabajo y dijo: "Creo que la calidad y el servicio, aunque son un poco menos importantes que la mano de obra, constituyen otros dos atributos que merecen una ponderación superior al promedio."

Parecía existir un consenso que señalaba al factor administración como el siguiente atributo cualitativo en importancia porque, igual que el trabajo, la administración determina el destino de la planta. Sin embargo, a diferencia de la mano de obra, la administración podría sustituirse con mucha facilidad. En general, este atributo fue considerado "promedio" en términos de importancia.

A continuación, el presidente recomendó que se considerara el factor localización: "La ubicación de una planta es tan importante como las dimensiones de la misma. Nuestros datos demuestran que las plantas localizadas en las áreas más congestionadas (ciudades) tienden a ser menos rentables que las plantas ubicadas en áreas rurales."

El vicepresidente de operaciones comentó: "Como Sleepmore fabrica una línea de productos diferente en cada planta, las consolidaciones aumentarían drásticamente la complejidad y reducirían la eficiencia en el largo plazo. Propongo que la complejidad de la línea de productos sea considerada como el siguiente atributo de mayor importancia, a pesar de que sólo le deberán corresponder, en mi opinión, dos terceras partes de la importancia que se le asigne al talento administrativo."

Se llegó a un acuerdo en cuanto a que los tres atributos restantes (estabilidad, capacitación y distribución de la planta) tienen efectos individuales relativamente pequeños, pero su efecto combinado reviste una importancia casi dos veces mayor que la correspondiente a los efectos de la complejidad de la línea de productos.

La tarea más difícil consistió en la evaluación de los pros y contras que la administración tendría que estar dispuesta a comparar entre los distintos factores cuantitativos y cualitativos. A este respecto, el presidente le había expresado a Carl que le resultaba difícil escoger entre una situación con ahorros iniciales de costo de \$7 millones y otra en la cual fuera eliminado un sindicato hostil.

La decisión

Carl tuvo que idear una forma eficaz de combinar toda esta información acerca de los factores cuantitativos y cualitativos, para tomar decisiones en torno a la conveniencia de la consolidación en *cada una* de las tres ubicaciones. Así, fue necesario que reflexionara sobre el grado de sensibilidad que tendrían sus decisiones frente a las ponderaciones que él mismo asignara a cada atributo.

Referencias

Colin Benjamin, Ike Ehie, y Yildirim Omurtag, "Planning Facilities at the University of Missouri–Rolla," en *Interfaces,* 22, núm. 4 (1992), 95–105.

Abraham Charnes y William Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming* (Nueva York: John Wiley, 1961).

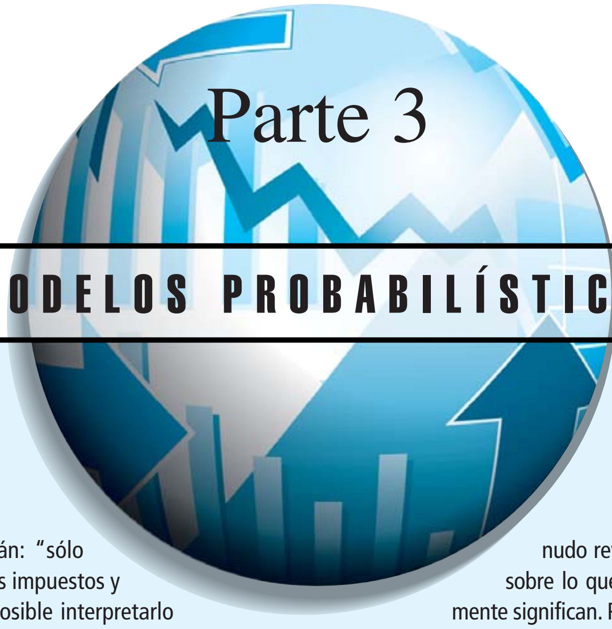
James Chrisman, Timothy Fry, Gary Reeves, Holly Lewis, y Robert Weinstein, "A Multiobjective Linear Programming Methodology for Public Sector Tax Planning," en *Interfaces* 19, núm. 5 (1989), 13–30.

William Gavett, "Three Heuristic Rules for Sequencing Jobs to a Single Production Facility," en *Management Science,* vol. 11 (1965), B166–B176.

Richard Mojena, Thomas Vollmann, y Yoshihiro Okamoto, "On Predicting Computational Time of a Branch-and-Bound Algorithm for the Assignment of Facilities," en *Decision Sciences,* 7, núm. 4 (1976), 856–867.

Thomas Saaty, *The Analytic Hierarchy Process* (Nueva York: McGraw-Hill, 1988).

Parte 3



MODELOS PROBABILÍSTICOS

Todos conocemos el refrán: "sólo dos cosas hay seguras, los impuestos y la muerte". Aunque es posible interpretarlo como una crítica a quienes nos gobiernan, este refrán también expresa una visión un tanto fundamental de la naturaleza y del quehacer humanos. Sugiere que incluso los fenómenos más comunes y corrientes involucran algún grado de incertidumbre e impredecibilidad. El Libro del Eclesiastés, de la Biblia, hace la misma observación sobre los esfuerzos de la especie humana: "El tiempo y la oportunidad los tuvieron todos."

Nosotros respondemos a este hecho de la vida en varias formas. En algunas situaciones elegimos ignorar la incertidumbre; en otras, intentamos enfrentarla explícitamente. Nos hemos pasado los últimos nueve capítulos ignorando la incertidumbre. En los cinco capítulos siguientes nos enfrentaremos a situaciones en las cuales el nivel de incertidumbre es demasiado grande para ignorarse, y nosotros como administradores debemos tener esto en cuenta. Hay muchos ejemplos: toda la industria de los seguros es uno de ellos. Otros incluyen las inversiones en acciones, bonos y bienes raíces, así como cualesquiera otros negocios en los que se crea un producto ante la expectativa de una demanda.

Esta parte del libro está dedicada a esclarecer nuestra manera de pensar acerca de la incertidumbre y a desarrollar métodos para manejarla en modelos de decisión. Nuestro objetivo es ayudarle a definir de manera consistente y útil problemas en los cuales la incertidumbre juega un papel principal, y proporcionarle algunas técnicas útiles para la solución de problemas. El enfoque sigue siendo el mismo: consideramos situaciones en las cuales la administración tiene la oportunidad de elegir entre varias opciones. Pero ahora el problema se complica por el hecho de que no estamos seguros de cuál será el resultado de cada una de las opciones.

La *probabilidad* es la rama de las matemáticas que nos da la base para el análisis que constituye esta parte del libro. El lenguaje de la probabilidad forma parte de nuestra experiencia cotidiana: los pronósticos del tiempo dicen que la *posibilidad* de lluvia es de 30%, en los periódicos aparecen *predicciones* sobre un evento deportivo, y el gobierno se preocupa sobre los efectos *probables* de las leyes fiscales propuestas. Sin embargo, un examen más minucioso a menudo revela la existencia de gran confusión sobre lo que estos términos y enunciados realmente significan. Para comprender estos capítulos usted tendrá que empezar entendiendo (o desarrollando) algunos conceptos relacionados con la probabilidad. El apéndice A, que está al final del libro, contiene una breve introducción a los conceptos fundamentales. El material en este apéndice intenta proporcionar una base adecuada para que usted logre dominar esta parte del texto.

La probabilidad es un tema difícil para muchos estudiantes. Puede que usted no encuentre difícil leer estos capítulos y hacer los ejercicios, pero la dificultad está en que usted haga de la probabilidad una parte de su método personal para la resolución de problemas. Esto sucederá sólo cuando usted llegue a pensar de manera instintiva en una *distribución* de las utilidades o de los tiempos de espera o de la demanda, y cuando tenga las herramientas adecuadas para utilizarlas en problemas reales. De nuevo, aquí la computación juega un papel importante, especialmente en la simulación. Es posible simular problemas interesantes utilizando hojas de cálculo, y es especialmente fácil con los complementos de la hoja de cálculo Crystal Ball y @RISK. Estas herramientas serán analizadas en el capítulo sobre la simulación, el cual se encuentra en esta parte del libro. Le recomendamos encarecidamente que utilice este *software* y haga los ejercicios de simulación, lo que mejorará en gran medida el valor final de su estudio. Los capítulos sobre análisis de decisiones y líneas o colas de espera también presentan algunos excelentes accesorios de hoja de cálculo para ayudarle a poner exitosamente en práctica estas herramientas.

Esta parte contiene los siguientes capítulos:

CAPÍTULO

10

Análisis de decisiones

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN — Prueba antidoping a estudiantes atletas

La mesa directiva de atletismo de la Universidad de Santa Clara tenía que decidir si debía recomendar la puesta en práctica de un programa antidoping para sus atletas intercolegiales. Se aplicaron técnicas de análisis de decisión al programa de prueba antidoping propuesto. Se desarrolló un modelo de decisión simple que analiza la interrogante de si se debe o no ejecutar la prueba de manera individual buscando la presencia de drogas.

La persona que desarrolló el modelo creía que el aspecto más importante de este problema eran las consecuencias que podrían provocar los errores en la prueba. Otro elemento importante era evaluar la ventaja de poder identificar a un usuario de drogas, en comparación con el costo de los errores (acusaciones falsas de uso de drogas y la incapacidad para identificar usuarios). El árbol de decisiones básico tiene dos alternativas principales: "probar" y "no probar". Si la prueba no se lleva a cabo, entonces el resultado de esa decisión es una lotería (evento aleatorio) en lo que se refiere a si el individuo utiliza o no drogas. La probabilidad de estos eventos se determina con base en la fracción de la población de estudiantes que utiliza drogas. Si el individuo no utiliza drogas, no hay costo, pero si las utiliza existe un costo por tener un usuario no identificado.

Si se elige la alternativa de "probar", la prueba sería efectuada y los resultados serían determinados por el laboratorio apropiado. Los resultados podrían ser "+" o "−". Si el resultado es "+", el encargado de tomar la decisión debe decidir entre "actuar" o "no actuar". En general, se da por sentado que quien toma la decisión actuaría en caso de obtenerse una prueba con resultado "+". Las consecuencias de actuar son una lotería sobre el verdadero estado del uso de drogas por parte del individuo. La probabilidad de que un individuo sea un usuario de drogas condicionada a un resultado "+" se conoce como probabilidad *a posteriori*, y se determina por medio del teorema de Bayes y es distinta de 1.0. Resulta interesante saber que, si la prueba es confiable en 95% y aproximadamente 5% de la población de estudiantes son usuarios de drogas, ¡hay 50% de probabilidades de que la prueba prediga correctamente si el individuo que resultó positivo es realmente un usuario (es decir, no resulta ni más ni menos confiable que lanzar una moneda al aire)!
A continuación, se debe determinar el costo de cada resultado posible. A la identificación exacta de un usuario de drogas le fue asignado un costo de 0. Al hecho de acusar falsamente a un "no usuario" se le asignó un costo de C_1, al hecho de no hacer algo con un usuario de drogas se le dio un costo de C_2, y finalmente, a la cuestión de invadir la privacía de un no usuario, forzándolo a someterse a la prueba de drogas, se le asignó un costo de C_3. Con base en estos costos, se desarrollaron las condiciones bajo las cuales el costo esperado de hacer la prueba fuera más bajo que el de no hacerla (o sea, que hacerla fuera una decisión racional). La condición principal relacionaba la probabilidad *a posterio-*

ri analizada anteriormente con una relación de los tres costos. Si se creyera que la relación de los costos de los errores fuera de un décimo, entonces la probabilidad *a posteriori* tendría que ser superior a 90%.

En la última junta de la mesa directiva, donde se discutió y se habló sobre el tema, el director de atletismo repasó el memorándum que contenía el análisis de decisión. La discusión principal se centró en la evaluación de los parámetros del modelo de decisión (por ejemplo, las probabilidades y los costos). La dirección concluyó que la incidencia en el uso de drogas en el campus era tan reducida y el costo de una falsa acusación tan elevado que la prueba de drogas no era la decisión correcta. Por lo tanto votaron de manera unánime por no recomendar la puesta en práctica del citado programa antidoping (véase Feinstein).

10.1 INTRODUCCIÓN

El análisis de decisión proporciona un marco para analizar una gran variedad de modelos de administración. Este marco establece (1) un sistema para clasificar los modelos de decisión, basado en la cantidad de información disponible sobre el modelo, y (2) un criterio de decisión; esto es, una medida de la "bondad" de la decisión para cada tipo de modelo.

En la primera parte de este capítulo presentaremos la estructura de la teoría de decisiones y la relacionaremos con modelos previamente analizados. La segunda mitad del capítulo está dedicada a los árboles de decisión. Los árboles de decisión aplican conceptos de teoría de decisiones a decisiones secuenciales que incluyen eventos inciertos. Son una ayuda pragmática y práctica para la toma de decisiones administrativa.

En términos generales, la teoría de decisiones se ocupa de decisiones contra la naturaleza. Esta frase se refiere a una situación donde el resultado (rendimiento) de una decisión individual depende de la acción de otro agente (naturaleza), sobre el cual no se tiene control. Por ejemplo, si la decisión consiste en llevar o no paraguas, el rendimiento (mojarse o no) dependerá del estado subsiguiente de la naturaleza. Es importante observar que en este modelo los rendimientos afectan únicamente al que toma la decisión. A la naturaleza no le importa cuál es el resultado. Esta condición distingue la teoría de decisiones de la teoría de los juegos. En la *teoría de los juegos* ambos jugadores tienen un interés económico en el resultado.

En los modelos de la teoría de decisiones, la pieza fundamental de información es la **tabla de retribuciones**, como se observa en la tabla 10.1. Las decisiones alternativas están enumeradas en un lado de la tabla, y los posibles estados de la naturaleza están indicados en la parte superior. Las entradas del cuerpo de la tabla son las retribuciones para todas las combinaciones posibles de decisiones y estados de la naturaleza. El proceso de decisión es como sigue:

1. Usted, quien toma la decisión, selecciona una de las decisiones alternativas $d_1, \ldots, d_n$. Suponga que elige d_1.
2. Una vez tomada su decisión, ocurre un estado de la naturaleza que queda fuera de su control. Suponga que ocurre el estado 2.
3. El rendimiento que usted reciba puede ser determinado ahora a partir de la tabla de retribuciones. Dado que usted tomó la decisión d_1 y ocurrió el estado de la naturaleza 2, el resultado es r_{12}.

Otra vez, la decisión se toma primero, y a continuación ocurre uno de los estados de la naturaleza. Una vez tomada la decisión, no puede cambiarse después de ocurrido el estado de la

TABLA 10.1 Tabla de retribuciones

	ESTADO DE LA NATURALEZA			
DECISIÓN	**1**	**2**	···	**M**
d_1	r_{11}	r_{12}	···	r_{1m}
d_2	r_{21}	r_{22}	···	r_{2m}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
d_n	r_{n1}	r_{n2}	···	r_{nm}

naturaleza. En general la pregunta es, ¿cuál de las decisiones debemos seleccionar? Nos gustaría un rendimiento tan grande como sea posible; esto es, el valor de r_{ij} más grande posible, donde i representa la decisión tomada y j el estado de la naturaleza ocurrido. Es obvio que la decisión que debemos seleccionar dependerá de lo que creamos que la naturaleza hará, esto es, cuál de los estados de la naturaleza ocurrirá. Si creemos que el estado 1 ocurrirá, seleccionaremos la decisión asociada con el mayor valor en la columna 1. Si creemos que es más probable que ocurra el estado 2, escogeremos la decisión a la que corresponde la retribución más alta en la columna 2, y así sucesivamente.

En la sección siguiente consideraremos varias suposiciones sobre el comportamiento humano. Cada suposición lleva a un *criterio* diferente para seleccionar la "mejor" decisión, y por lo tanto también nos lleva a un procedimiento diferente.

10.2 TRES CLASES DE MODELOS DE DECISIÓN

Esta sección se ocupa de tres clases de modelos de decisión contra la naturaleza. Cada clase está definida por una suposición acerca del comportamiento de la naturaleza. Las tres clases son: decisiones bajo certidumbre, decisiones bajo riesgo y decisiones bajo incertidumbre. De las tres, lo más probable es que nos encontremos ante decisiones bajo riesgo, pero las otras dos son presentadas para dar una idea más completa.

DECISIONES BAJO CERTIDUMBRE

Una **decisión bajo certidumbre** es aquella en la que usted sabe cuál es el estado de la naturaleza que va a ocurrir. De manera alternativa, usted puede pensar en ella como un caso con un solo estado de la naturaleza. Suponga, por ejemplo, que por la mañana usted está tratando de decidir si debe llevar su paraguas al trabajo, y usted *está seguro* de que estará lloviendo para cuando salga de trabajar por la tarde. En la tabla de retribuciones para este modelo (tabla 10.2) el costo de limpiar su traje si lo sorprende la lluvia es de \$7. Entra en la tabla con un signo de menos, ya que es una tabla de rendimientos, y un costo es un rendimiento negativo. Obviamente, la decisión óptima es llevar el paraguas.

Todos los modelos de programación lineal, los modelos de programación con enteros, los modelos de programación no lineal y otros modelos determinísticos como el modelo CEP (cantidad económica del pedido), pueden considerarse como decisiones contra la naturaleza debido a que sólo hay un estado de la naturaleza. Esto es así dado que estamos seguros (dentro del contexto del modelo) del rendimiento que obtendremos para cada decisión que tomemos. Para un ejemplo concreto, considere el modelo PROTRAC E y F del capítulo 3:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 5000E + 4000F \\
&\text{s.a.} \quad 10E + 15F \le 150 \\
&\qquad\;\; 20E + 10F \le 160 \\
&\qquad\;\; 30E + 10F \ge 135 \\
&\qquad\;\; E - 3F \le 0 \\
&\qquad\;\; E + F \ge 5 \\
&\qquad\;\; E, F \ge 0
\end{aligned}$$

La tabla 10.3 presenta este modelo en forma de tabla de retribuciones. En esta tabla se asigna un valor de $-\infty$ a cualquier decisión no factible. Por ejemplo, dado que $E = 0$, $F = 0$ infringe la tercera y la quinta restricciones, el rendimiento asociado se define como $-\infty$. Para cualquier par (E, F) factible, el rendimiento se define como el valor de la función objetivo; es decir, $5000E + 4000F$. En el caso de este modelo conocemos exactamente el resultado que obtenemos para cada decisión (cada selección para el par E, F). Por lo tanto, podemos enumerar todos los rendi-

TABLA 10.2 Tabla de retribuciones del ejemplo del paraguas

	LLUVIA
Llevar paraguas	0
No llevarlo	−7.00

TABLA 10.3 Tabla de retribuciones para el modelo Protrac E y F

DECISIÓN	ESTADO DE LA NATURALEZA
$E = 0, F = 0$	$-\infty$
$E = 5; F = 4$	41,000
⋮	⋮
$E = 6, F = 3.5$	44,000
⋮	⋮

mientos en una columna y considerarla como la representación de un estado de la naturaleza del cual estamos seguros que ocurrirá.

Teóricamente, es fácil resolver un modelo con un solo estado de la naturaleza. Simplemente se selecciona la decisión con el rendimiento más alto. En la práctica, de manera contraria a "la teoría", encontrar esa decisión es otra historia. Dado que E y F pueden asumir un número infinito de valores, habrá un número infinito de filas para este modelo (véase la tabla 10.3). Incluso en este modelo simple, no es posible enumerar las alternativas y seleccionar la mejor. Se necesita un análisis matemático adicional (en este caso, el algoritmo Solver de Excel) para encontrar la decisión óptima.

DECISIONES BAJO RIESGO

Una falta de certidumbre respecto a los eventos futuros es una característica de muchos, si no es que de la mayoría, de los modelos de decisiones administrativas. Considere cómo cambiarían las decisiones de la vicepresidenta financiera de una compañía de seguros, si pudiera saber exactamente qué cambios habrá en el mercado de bonos. Imagine el alivio del comprador principal de Maxwell House si pudiera saber con exactitud qué tan grande será la cosecha de café del año siguiente.

Por lo tanto, parece claro que numerosos modelos de decisión están caracterizados por una falta de certidumbre. También está claro que aquellos que manejan de manera eficiente estos modelos, ya sea por habilidad o por suerte, a menudo son generosamente recompensados por sus logros. En el primer libro del Viejo Testamento, José es ascendido de esclavo a asistente del faraón de Egipto por pronosticar acertadamente siete años de abundancia y siete años de escasez.[1]

En el uso de modelos cuantitativos, la falta de certidumbre se puede manejar de varias maneras. Por ejemplo, en un modelo de programación lineal, una parte de los datos puede consistir en una estimación del valor futuro. En el modelo PROTRAC E y F antes citado, la capacidad del mes entrante (disponibilidad de horas) en el departamento A (el lado derecho de la primera restricción) puede depender de factores que ocurrirán la semana siguiente, pero los planes de producción, digamos, tienen que ser definidos hoy. Como se dijo anteriormente en el capítulo 5 (análisis de sensibilidad de programación lineal), la administración puede manejar esta falta de certidumbre estimando la capacidad en 150 horas y después llevando a cabo el análisis de sensibilidad.

Definición de riesgo La teoría de decisiones proporciona procedimientos alternativos para modelos que tienen menos de una total certidumbre. Uno de esos procedimientos se llama **decisiones bajo riesgo**. En este contexto, el término *riesgo* tiene un significado bien definido y restrictivo. Cuando hablamos de decisiones bajo riesgo, nos referimos a una clase de modelos de decisión para la cual hay más de un estado de la naturaleza y para la cual suponemos que *quien toma la decisión puede llegar a una estimación de probabilidades de la ocurrencia de cada uno de los diversos estados de la naturaleza.* Suponga, por ejemplo, que hay $m > 1$ estados de la naturaleza, y p_j será la probabilidad estimada de que ocurrirá el estado j. Generalmente estimaremos la probabilidad de que ocurra el estado j (p_j) utilizando frecuencias históricas, lo cual significa que investigaremos a lo largo de la historia y registraremos el porcentaje de tiempo que ese estado j

[1]Además de un pronosticador acertado, en virtud de su habilidad para interpretar exitosamente los sueños del faraón, a José se le ha llamado el primer psicoanalista. Aunque, es menos sabido el hecho de que José fue también el primer científico de la administración. Anticipándose a la escasez, aconsejó al faraón construir almacenes para guardar grano. Cuando todo había terminado y se había superado la escasez, se le preguntó a José cómo había llegado a adquirir tanta sabiduría y conocimiento. Su contestación fue: "Programación en los años flacos."

realmente ocurrió en todas nuestras observaciones. Por ejemplo, si en los últimos 1,000 días encontramos que llovió en 200, estimaremos la probabilidad futura de lluvia en un día dado como 0.20 (= 200/1,000). Cuando estos datos históricos no están disponibles o el administrador siente que no son relevantes para el futuro, el administrador debe hacer estimaciones subjetivas de estas probabilidades. Este último procedimiento será expuesto en la sección 10.10.

Recuerde que el valor esperado de cualquier variable aleatoria es el promedio ponderado de todos los valores posibles de la variable aleatoria, donde los coeficientes de ponderación son las probabilidades de que los valores ocurran. Dado que a los diferentes rendimientos se asocian distintos estados de la naturaleza, el rendimiento esperado asociado con la decisión i es la suma, en todos los estados j posibles, de términos de la forma: (rendimiento en el estado j cuando la decisión es i) multiplicado por (la probabilidad de ocurrencia del estado j), o $r_{ij}\, p_j$. Entonces podemos utilizar la siguiente ecuación para calcular ER_i, el rendimiento esperado si seleccionamos la decisión i:

$$\mathrm{ER}_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} \cdot p_j = r_{i1}p_1 + r_{i2}p_2 + \cdots + r_{im}p_m \tag{10.1}$$

Para este tipo de modelo, *la administración debe entonces tomar aquella decisión que maximice el rendimiento esperado.*[2] En otras palabras, i^* es la decisión óptima cuando

$$\mathrm{ER}_{i^*} = \text{máximo de } \mathrm{ER}_i \text{ para todo valor de } i$$

El modelo del repartidor de periódicos Un ejemplo de este tipo de modelo es el siguiente modelo del repartidor de periódicos. (Se tratan modelos similares en el capítulo 11). Un repartidor de periódicos puede comprar el *Wall Street Journal* a 40 centavos cada uno y venderlo a 75 centavos. Sin embargo, debe adquirir los periódicos antes de saber cuántos puede vender realmente. Si compra más periódicos de los que puede vender, simplemente desechará el excedente, sin costo adicional. Si no compra suficientes periódicos, pierde ventas potenciales ahora y posiblemente en el futuro (los clientes disgustados podrían ya no comprarle). Suponga, por el momento, que esta pérdida de ventas *futuras* es representada por un costo de pérdida del buen nombre estimado en 50 centavos por cliente insatisfecho. Con propósitos ilustrativos y para facilitar el cálculo, también suponga que la distribución de la demanda que enfrenta es

$$P_0 = \text{Prob}\{\text{demanda} = 0\} = 0.1$$
$$P_1 = \text{Prob}\{\text{demanda} = 1\} = 0.3$$
$$P_2 = \text{Prob}\{\text{demanda} = 2\} = 0.4$$
$$P_3 = \text{Prob}\{\text{demanda} = 3\} = 0.2$$

En este modelo, cada uno de los cuatro diferentes valores de la demanda es un estado de la naturaleza diferente, y el número de periódicos ordenados es la decisión. Los rendimientos, o retribuciones, para este modelo se muestran en la tabla 10.4.

Las entradas de esta tabla representan el flujo de efectivo neto asociado con cada combinación de cantidad ordenada y cantidad solicitada, menos el costo por la pérdida de la buena reputación comercial (PBRC) —o también llamada "del buen nombre"— cuando la cantidad ordenada no es suficiente para satisfacer la demanda. Estas entradas se calculan mediante la expresión

$$\text{retribución} = 75\ (\text{número de periódicos vendidos}) - 40\ (\text{número de periódicos ordenados}) - 50\ (\text{demanda no satisfecha})$$

TABLA 10.4 Tabla de retribuciones para el modelo del repartidor de periódicos

	ESTADO DE LA NATURALEZA (DEMANDA)			
DECISIÓN	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	−50	−100	−150
1	−40	35	−15	−65
2	−80	−5	70	20
3	−120	−45	30	105

[2]Posteriormente se mostrará que esto es equivalente a otro criterio: *minimización* del arrepentimiento esperado.

donde el precio de venta por periódico es de 75 centavos, el costo de comprar un periódico es de 40 centavos y el costo por desilusionar a un cliente (el costo PBRC) es de 50 centavos. Es importante observar que en este modelo, la ventas y la demanda no tienen que ser idénticas. De hecho, las ventas son el mínimo de las dos cantidades (cantidad ordenada, cantidad demandada). Por ejemplo, cuando no se ordenan o piden periódicos, claramente se ve que no se podrá vender ninguno, no importa lo grande que sea la demanda, y la demanda insatisfecha será igual a la demanda requerida. Por lo tanto, para todas las entradas de la primera fila, la expresión arriba citada para la retribución da 75(0) − 40(0 − 50(demanda) = − 50(demanda). Si se ordena 1 periódico y no hay ninguna demanda, no se vende ninguno, la demanda insatisfecha es igual a 0 y la retribución es de 75(0) − 40(1) − 50(0) = −40, que es la primera entrada de la fila 2. Sin embargo, si se ordena 1 periódico y hay demanda de 1 o más, entonces se venderá exactamente 1; la demanda insatisfecha será 1 menor a la demanda y la retribución se convierte en 75(1) − 40(1) − 50(demanda − 1) = 85 − 50(demanda). ¿Puede usted verificar si los valores restantes de la tabla 10.4 son correctos? También medite por qué las decisiones posibles de ordenar cuatro o más periódicos fueron ignoradas.

Una vez que todos los datos están reunidos en la tabla 10.4, el proceso para encontrar la decisión óptima es estrictamente mecánico. Utilice la ecuación (10.1) para evaluar el rendimiento esperado para cada decisión (ER_i para $i = 0, 1, 2, 3$) y escoja el más grande. Demostraremos este proceso primero a mano y después mostraremos cómo hacerlo en una hoja de cálculo. Por ejemplo, si usted ordena dos periódicos,

$$ER_2 = -80(0.1) - 5(0.3) + 70(0.4) + 20(0.2) = 22.5$$

El primer término es el rendimiento si ordenamos 2 periódicos y la demanda es 0, multiplicado por la probabilidad de que la demanda sea igual a 0. El segundo término es el rendimiento si ordenamos 2 periódicos y la demanda es 1 (véase la tabla 10.4), multiplicado por la probabilidad de que la demanda sea igual a 1. Los otros términos están definidos de manera similar. Los rendimientos esperados para todas las otras posibles decisiones están calculados como sigue:

$$ER_0 = 0(0.1) - 50(0.3) - 100(0.4) - 150(0.2) = -85$$
$$ER_1 = -40(0.1) + 35(0.3) - 15(0.4) - 65(0.2) = -12.5$$
$$ER_3 = -120(0.1) - 45(0.3) + 30(0.4) + 105(0.2) = 7.5$$

Dado que ER_2 es el mayor de estos cuatro valores, la decisión óptima es ordenar dos periódicos.

Otra manera de comparar las decisiones es observar una gráfica de sus perfiles de riesgo. El **perfil de riesgo** muestra todos los resultados posibles, con sus probabilidades asociadas, para una decisión dada, y le da al administrador una idea del rango de resultados posible. Algunos administradores encuentran esto más útil que ver simplemente una cifra (por ejemplo, el rendimiento esperado) que resume toda la información disponible (probabilidades y resultados potenciales). Los perfiles de riesgo para las cuatro decisiones que enfrenta el repartidor de periódicos se muestran en la figura 10.1.

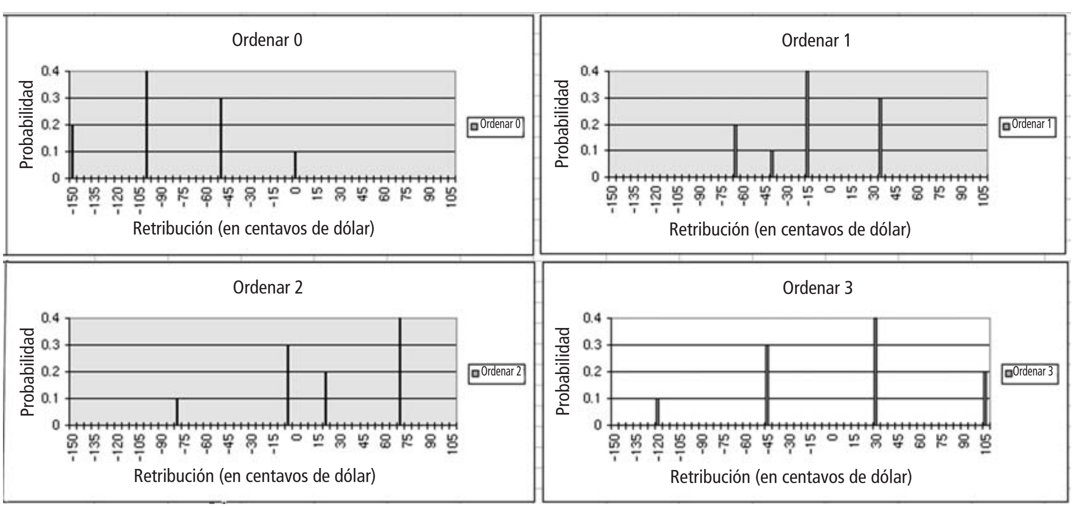


FIGURA 10.1

Perfiles de riesgo para las cuatro decisiones del repartidor de periódicos

B7 = =$B$1*MIN($A7,B$6)-$B$2*$A7-$B$3*MAX(B$6-$A7,0)

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Precio de venta**	75					
2	**Costo de la compra**	40					
3	**Costo PBRC**	50					
4							
5			***Estados de la naturaleza***				
6	***Decisión***	***0***	***1***	***2***	***3***	**Rendimiento esperado**	
7	***0***	0	-50	-100	-150	-85	
8	***1***	-40	35	-15	-65	-12.5	
9	***2***	-80	-5	70	20	22.5	
10	***3***	-120	-45	30	105	7.5	
11							
12	**Probabilidades**	0.1	0.3	0.4	0.2		
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							

Celda	Fórmula	Cópiese a
B7	= $B$1*MIN($A7,B$6)–$B$2*$A7–$B$3*MAX(B$6–$A7,0)	B7:E10
F7	= SUMAPRODUCTO (B7:E7,$B$12:$E$12)	F8:F10

FIGURA 10.2

Hoja de cálculo del repartidor de periódicos

Podemos ver que los cuatro posibles resultados para “Ordenar 0” son menores que o iguales a cero. El 75% de los resultados para “Ordenar 1” son no positivos, y 50% de los resultados para “Ordenar 2” y “Ordenar 3” son no positivos. También podemos ver que Ordenar 2 tiene una alta probabilidad (40%) de generar la segunda retribución más alta de todas (70 centavos). Por supuesto, toda esta información está disponible en la tabla de retribuciones original, pero a veces ayuda ver los datos en una gráfica.

El costo por la pérdida de la buena reputación comercial: un análisis de sensibilidad con hoja de cálculo Esta decisión está basada en un costo, el costo por la pérdida de la buena reputación comercial (PBRC), cuyo valor es mucho menos seguro que los otros dos parámetros: el precio de venta y el costo de la compra. ¿Qué le pasaría a la decisión óptima si el costo PBRC fuera diferente? Para responder a esta pregunta llevaremos a cabo un análisis de sensibilidad sobre el valor del costo PBRC.

Una posible manera de hacer esto sería suponer un valor diferente para el costo PBRC, calcular de nuevo la matriz de retribución, recalcular los rendimientos esperados y ver qué sucede con la decisión óptima. Sería cansado hacer esto a mano, pero es completamente adecuado para hacerlo en Excel. La figura 10.2 muestra la hoja de cálculo (NEWSBOY.XLS) para calcular la matriz de retribución y los rendimientos esperados.

Los precios y costos conocidos se introducen junto con sus etiquetas en las celdas A1:B3. La retribución para cualquier combinación de decisión/estado de la naturaleza se muestra en el renglón de la ecuación de la figura 10.2 y se calcula como sigue:

El primer término calcula los ingresos por ventas: el Precio de venta ($B$1), multiplicado por la cantidad vendida (la menor entre la cantidad ordenada y la cantidad solicitada, = MIN-[$A7,B$6]). El segundo término resta el costo de los periódicos comprados: el Precio de compra ($B$2) multiplicado por la cantidad de periódicos adquiridos ($A7). El último término resta el costo PBRC, es decir: el Costo PBRC ($B$3) multiplicado por la demanda no satisfecha (la cantidad mayor entre la demanda menos la cantidad ordenada o 0, = MAX[B$6-$A7,0]).

Esta fórmula en la celda B7 ha sido establecida cuidadosamente utilizando las referencias de celda relativas y absolutas de Excel, de tal forma que pueda ser copiada para obtener todas las otras fórmulas en la matriz de retribución. La columna del rendimiento esperado (columna F) se puede generar utilizando la fórmula SUMAPRODUCTO. Por ejemplo, en la celda F7, escribimos =SUMAPRODUCTO(B7:E7,$B$12:$E$12), que es simplemente la suma

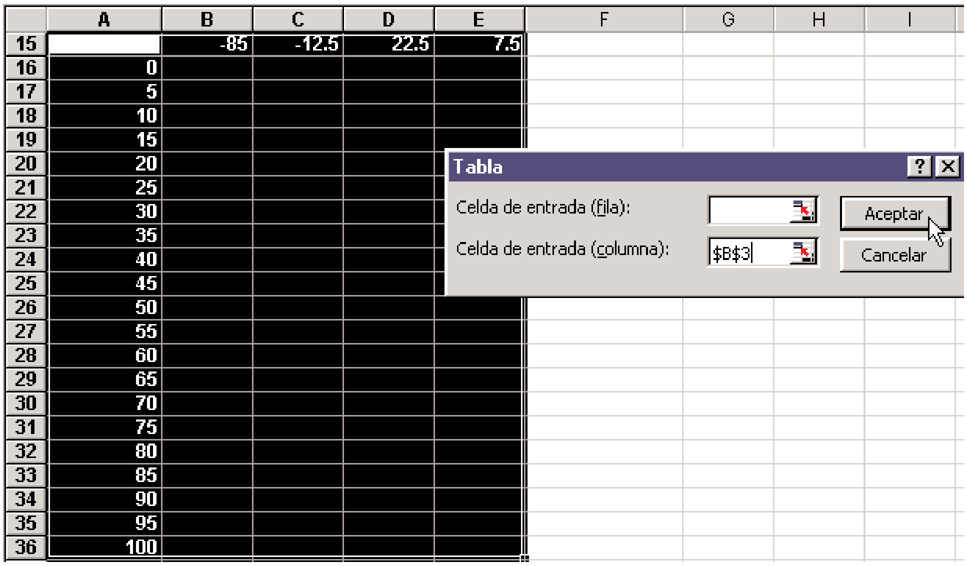


FIGURA 10.3

Preparación de la tabla de datos para el modelo del repartidor de periódicos.

de los productos de la probabilidad de recibir una retribución dada multiplicada por la retribución respectiva.

Utilizando el comando Tabla de datos, puede generarse fácilmente una tabla de rendimientos esperados para un rango de costos PBRC. Hemos llevado esto a cabo en la nueva hoja de cálculo “Sensibilidad a la buena reputación comercial” en la misma hoja de cálculo NEWSBOY.XLS. La tabla de datos mostrará los rendimientos esperados correspondientes a las diferentes cantidades ordenadas y valores del costo PBRC entre 0 y 150, en incrementos de 5 centavos. Para hacerlo usted mismo, siga estos pasos:

1. Copie la hoja de cálculo “Caso básico” a la nueva hoja de cálculo “Sensibilidad a la buena reputación”.
2. Introduzca en la celda A16 el valor inicial (0) para los costos PBRC que vamos a investigar.
3. Haga clic de nuevo en la celda A16, y después haga clic en el menú Edición, después en Llenar y más tarde en Series.
4. Haga clic en “Series en columnas”, escriba un valor incremental de 5 y un valor final de 150. Haga clic en Aceptar.
5. Queremos que la celda B15 contenga la fórmula que nos dé el rendimiento esperado cuando ordenemos 0 periódicos (=F7). En las celdas C15:E15 queremos hacer algo similar, de forma que la tabla de datos nos dé los rendimientos esperados para una orden de 1, 2, y 3 periódicos (es decir, escriba =F8, =F9, =F10, respectivamente, en estas celdas).
6. Haga clic en el menú Datos, después en Tabla. Escriba la celda de entrada de la columna $B$3, como se muestra en la figura 10.3. Con esto le estamos indicando a Excel que ponga los valores contenidos en la columna A en la celda B3 (uno por uno) y después que nos informe en las columnas B, C, D y E los valores calculados en las celdas F7:F10.

Después de que la tabla de datos haya hecho sus cálculos, queremos crear una gráfica de los resultados para ayudarnos a organizar este mar de cifras. Para llevar a cabo esto utilizamos el Asistente para gráficas (Graph Wizard) de Excel, como sigue:

1. Seleccione el rango de datos que deseamos graficar (A16:E46).
2. Haga clic en el icono del Asistente para gráficas de Excel (que nos conduce automáticamente a través de una serie de pasos); arrástrelo y colóquelo en cualquier parte de la hoja de cálculo donde usted desee que aparezca la gráfica.
3. En el primer paso, usted escoge el tipo de gráfica que desea. Haga clic en “Línea”, después haga clic en el subtipo de gráfica que prefiera (la predeterminada [la cuarta] está bien), y después haga clic en “Siguiente”.
4. Ahora el Asistente presenta una muestra de la futura apariencia de la gráfica. Sólo necesitamos hacer una modificación aquí. Haga clic en la ceja “Series” y después indique que las

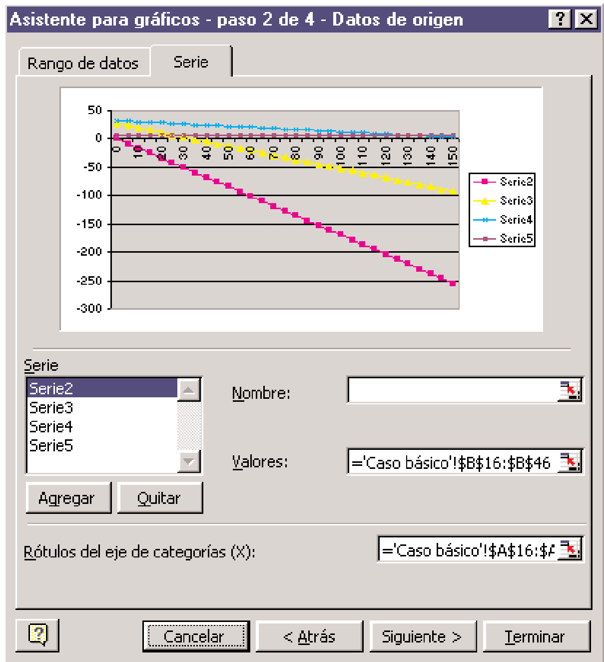


FIGURA 10.4

Asistente de gráficas para el modelo del repartidor de periódicos

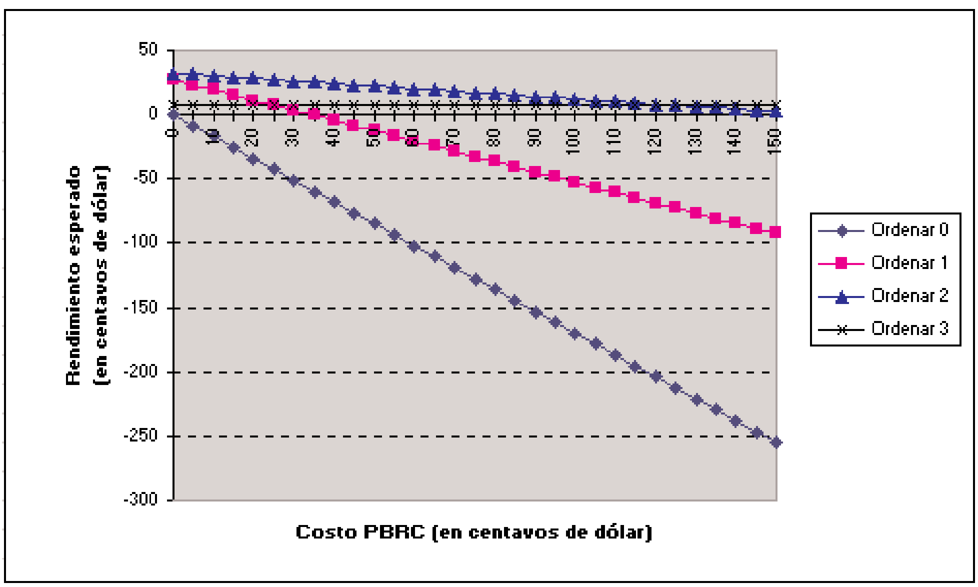


FIGURA 10.5

Gráfica de análisis de sensibilidad para el costo (PBRC)

"Etiquetas del eje de categorías (X)" se encuentran en A16:A46, como se muestra en la figura 10.4. Después eliminamos Serie 1 del despliegue, ya que ahora es nuestro rótulo para el eje X. Haga clic en "Siguiente".

5. A continuación tenemos la opción de escribir títulos para la gráfica o etiquetas para los ejes. Escribimos los valores apropiados y después hacemos clic en "Siguiente>".
6. Finalmente, indicamos que queremos la gráfica como un objeto en nuestra hoja de trabajo actual (que es la opción predeterminada) y hacemos clic en "Terminar".
7. Aparece desplegada una gráfica parecida a la que se muestra en la figura 10.5. (Hemos alterado las leyendas de las cuatro series de un "Series 1, Series 2, Series 3, Series 4" genérico a "Ordenar 0, …Ordenar 2, Ordenar 3" utilizando algunas de las características avanzadas de Excel.)

Observe que conforme aumenta el costo PBRC los rendimientos esperados se reducen (cuando se piden 0, 1 o 2 periódicos) o bien permanecen constantes (cuando se piden 3 periódicos). Para los costos PBRC inferiores a 125 centavos, la decisión óptima es pedir 2 periódicos. Para un costo PBRC de 125 centavos, existen dos decisiones alternativas óptimas: pedir 2 o 3 periódicos. Para un costo PBRC mayor que 125 centavos la decisión óptima es pedir 3 periódicos. Por lo tanto, no es necesario conocer el costo PBRC de manera precisa, sólo es necesario saber si es mayor o menor que 125 centavos. Estos resultados nos recuerdan al análisis de sensibilidad de un coeficiente de costo en un modelo de programación lineal donde la solución óptima no se altera por cambios de valores del coeficiente dentro de un rango determinado. Con este ejemplo hemos ilustrado la clase más importante de modelos de decisión (decisiones bajo riesgo) y el criterio de decisión asociado (maximizar el rendimiento esperado).

DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE (OPCIONAL)

En las **decisiones bajo incertidumbre** otra vez tenemos más de un estado posible de la naturaleza, pero ahora quien toma la decisión no quiere o no puede especificar las probabilidades de que los diferentes estados de la naturaleza ocurran. Hay una discusión eterna acerca de si una situación de este tipo debería existir; esto es, ¿quien toma la decisión debería estar siempre dispuesto a especificar las probabilidades, aunque sea de manera subjetiva, incluso cuando él o ella no tenga mucha idea (o ninguna) de cuál estado de la naturaleza puede ocurrir? A pesar de que es difícil imaginar una decisión de negocios real hecha bajo semejante nube, dejaremos esta discusión a los filósofos y nos centraremos en los diferentes procedimientos recomendados para esta clase de modelos para aquellos que estén interesados. Observe que hemos indicado que esta sección es opcional para quienes consideren "decisiones bajo riesgo" como el tema más importante. Para esos lectores, por favor pasen a la sección 10.3.

Criterio de Laplace El procedimiento del criterio de Laplace interpreta el estado de "incertidumbre" como equivalente a suponer que todos los estados de la naturaleza son igualmente probables. Este punto de vista podría resumirse como: "si nada sé, entonces todo es igualmente posible". Por ejemplo, en el modelo del repartidor de periódicos, suponer que todos los estados son igualmente probables significa que, dado que hay cuatro estados, cada estado ocurre con una probabilidad de 0.25. Utilizar estas probabilidades cambia el modelo a una decisión bajo riesgo, y uno entonces puede calcular el rendimiento esperado. Usted puede verificar con facilidad que, utilizando estas probabilidades, el rendimiento esperado sería maximizado de nuevo por la decisión de pedir dos periódicos. Cuando se utiliza el criterio de Laplace, dado que cada estado tiene igual número de probabilidades, todo lo que usted necesita hacer para encontrar la mejor decisión es añadir todas las retribuciones para cada decisión y elegir la decisión con la suma más elevada (que también tendrá la mayor retribución promedio).

A pesar de que en algunas situaciones este procedimiento de "igualmente probable" puede producir resultados aceptables, en otros escenarios sería inapropiado. Por ejemplo, considere a su amigo de Turkmenistán, a punto de ver el juego de futbol americano entre las universidades estatales de Ohio y de Michigan, en un año en el cual uno de los equipos está pasando por una mala racha y por consiguiente el otro está enormemente favorecido en las apuestas. A pesar de que su amigo no sabe nada sobre futbol y no tiene ningún conocimiento de las probabilidades de cada equipo para ganar, éstas por supuesto existen y *no* son iguales. En otras palabras, a pesar de que uno "no tenga conocimiento" puede que haya probabilidades subyacentes en los diferentes estados de la naturaleza, y estas probabilidades puede que no concuerden de ninguna manera con la suposición de "igual posibilidad". Con este descubrimiento, puede que haya contextos en los cuales usted podría no querer utilizar el criterio de rendimiento esperado basado en la suposición de igual probabilidad (es decir, el criterio de Laplace).

Para estos casos, existen tres diferentes criterios que pueden utilizarse para tomar decisiones bajo incertidumbre: *maximin*, *maximax* y *minimax arrepentimiento.* Todos estos criterios pueden utilizarse sin especificar probabilidades. El análisis será ilustrado con el modelo del repartidor de periódicos. Observe por un momento la tabla de retribuciones mencionada antes y piense qué criterio podría utilizar para tomar una decisión. Con esto queremos decir que piense en una regla que pudiera describirle a un amigo. Tiene que ser una regla general, de forma que su amigo pueda aplicarla a cualquier tabla de retribuciones y obtener una decisión. Recuerde, usted está aceptando no hacer suposiciones sobre las probabilidades de los estados de la naturaleza. Ahora considere los siguientes criterios.

Criterio maximin El **criterio maximin** es un procedimiento extremadamente conservador, quizás pesimista, para tomar decisiones. Evalúa cada decisión según la peor circunstancia que

TABLA 10.5 Tabla de rendimientos mínimos del repartidor de periódicos

DECISIÓN	RENDIMIENTO MÍNIMO
0	−150
1	−65
2	−80
3	−120

TABLA 10.6 Tabla de retribuciones: contra el ejemplo del criterio maximin

	ESTADO DE LA NATURALEZA								
DECISIÓN	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	100	2	100	100	100	100	100	100
2	3	3	3	3	3	3	3	3	3

pudiera pasar si se tomara esa decisión. En este caso, entonces, evalúa cada decisión según el rendimiento *mínimo* posible asociado con la decisión. En el ejemplo del repartidor de periódicos, el rendimiento mínimo posible si se ordenan 3 periódicos es de –120; por lo tanto, este valor es asignado a la decisión de "ordenar 3 periódicos". De manera similar, cada una de las otras decisiones podemos asociarla con el valor mínimo en su fila. Seguir esta regla le permite a quien toma la decisión preparar una tabla como la 10.5. La decisión que proporciona el valor máximo de los rendimientos mínimos (por lo tanto, maximin) es entonces seleccionada. En este caso, el repartidor de periódicos deberá pedir 1 periódico.

Maximin es utilizado a menudo en situaciones donde la persona que planea siente que no puede permitirse un error. (La planeación de la defensa nacional puede ser un ejemplo, así como la inversión de los ahorros de toda la vida.) Quien planea elige una decisión que hace lo mejor posible en el peor (o más pesimista) caso posible.

Sin embargo, es fácil crear ejemplos en los cuales la mayor parte de la gente no aceptaría la decisión seleccionada con el criterio o enfoque maximin. Considere, por ejemplo, la tabla de retribuciones 10.6. La mayoría de la gente preferiría la decisión 1. Es mucho mejor que la decisión 2 para todos los estados de la naturaleza excepto para el estado 3, y ahí sólo es ligeramente peor. Aun así, el criterio maximin seleccionaría la decisión 2. Si usted se cuenta entre aquellos que definitivamente prefieren la decisión 1 de este ejemplo, debe hacerse a sí mismo la siguiente pregunta: "Si el criterio maximin da una respuesta que no me place en este simple ejemplo, ¿estaría dispuesto a utilizarlo en modelos más complicados e importantes?" No hay respuesta correcta a esta pregunta. La respuesta depende del gusto de quien toma la decisión, pero así usted empezará a comprender por qué no subrayamos las reglas de decisión de esta sección tan enfáticamente como la regla de maximizar el valor esperado de la sección "Decisiones bajo riesgo".

Criterio maximax El **criterio maximax** es tan optimista como pesimista es el maximin. Evalúa cada decisión según lo mejor que pudiera pasar si ésta se tomara. En este caso, entonces, evalúa cada decisión por el rendimiento máximo posible asociado con esa decisión. En particular, remítase de nuevo a la tabla de retribuciones del modelo del repartidor de periódicos (tabla 10.4). Si el repartidor de periódicos ordenase 2 periódicos, el mejor resultado posible sería un rendimiento de 70. Este valor es por lo tanto asignado a la decisión "ordenar 2 periódicos". En otras palabras, para cada decisión identificamos el valor máximo de esa fila. Utilizando esta regla, el administrador prepara una tabla como la 10.7.

TABLA 10.7 Tabla de rendimientos máximos del repartidor de periódicos

DECISIÓN	RENDIMIENTO MÁXIMO
0	0
1	35
2	70
3	105

TABLA 10.8 Tabla de retribuciones: contra el ejemplo del criterio maximax

	ESTADO DE LA NATURALEZA								
DECISIÓN	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	100	100	100	100	100	100	100	100
2	3	3	101	3	3	3	3	3	3

La decisión que proporcione el máximo de estos rendimientos máximos (es decir, maximax) es entonces seleccionada. En este caso, por lo tanto, el repartidor de periódicos deberá pedir 3 periódicos. Una advertencia: no confunda la decisión con el estado de la naturaleza que produce la retribución máxima. La *decisión* óptima bajo el criterio maximax es "ordenar 3 periódicos", no "ordenar 3 periódicos y tener 3 clientes".

El criterio maximax es objeto del mismo tipo de crítica que el maximin; esto es, es fácil crear ejemplos donde la utilización del criterio maximax lleva a una decisión que la mayor parte de la gente encuentra inaceptable. Considere la tabla de retribuciones 10.8, por ejemplo. La mayoría de la gente prefiere la decisión 1, dado que es mucho mejor que la decisión 2 para cada estado de la naturaleza, excepto en el estado 3, y ahí es sólo ligeramente peor. El criterio maximax, sin embargo, selecciona la decisión 2.

Arrepentimiento y arrepentimiento minimax El **arrepentimiento** introduce un nuevo concepto para medir el carácter deseable de un resultado; esto es, es una nueva forma de crear la tabla de retribuciones. Algunos gerentes de personal creen que los graduados universitarios tienden a escoger entre varias opciones para su primer empleo utilizando el criterio de arrepentimiento minimax. Se imaginan a sí mismos en los diferentes puestos y deciden en cuál se sentirían menos arrepentidos de estar.

Hasta ahora, todos los criterios de decisión han sido utilizados en una tabla de retribuciones como rendimientos en dólares, medidos por flujos netos de efectivo. En particular, cada entrada de la tabla 10.4 muestra el flujo neto de efectivo del repartidor de periódicos para cada combinación de decisión (cantidad de periódicos ordenada) y estado de la naturaleza (cantidad de la demanda de periódicos). La tabla 10.9 muestra el arrepentimiento para cada combinación de decisión y estado de la naturaleza. Ésta se obtiene a su vez de la tabla 10.4 de la siguiente manera:

1. Se encuentra la entrada máxima en cada columna de la tabla 10.4 (por ejemplo, 70 es la entrada más grande de la columna del tercer estado de la naturaleza [es decir, la columna bajo Estado de la naturaleza "2"]).
2. Se calcula la nueva entrada sustrayendo la entrada actual del máximo en su columna. Por lo tanto, la nueva entrada en la segunda fila de la tercera columna, es

$$70 - (-15) = 85 \text{ (nueva entrada de la segunda fila, tercera columna)}$$

En cada columna, estas nuevas entradas, llamadas de arrepentimiento, indican qué es lo mejor que podemos hacer. En otras palabras, "arrepentimiento" es sinónimo del "costo de oportunidad" de no tomar la mejor decisión en un estado de la naturaleza en particular. Es obvio que la administradora desearía tomar una decisión que minimizara el arrepentimiento, pero (lo mismo

TABLA 10.9 Tabla de arrepentimiento del modelo del repartidor de periódicos

	ESTADO DE LA NATURALEZA			
DECISIÓN	0	1	2	3
0	0	85	170	255
1	40	0	85	170
2	80	40	0	85
3	120	80	40	0

TABLA 10.10 Tabla de máximo arrepentimiento del repartidor de periódicos

DECISIÓN	MÁXIMO ARREPENTIMIENTO
0	255
1	170
2	85
3	120

de siempre) no sabe cuál de los estados de la naturaleza ocurrirá. Si ella supiera cuál es la distribución de probabilidades del estado de la naturaleza, podría minimizar el arrepentimiento esperado. (En la siguiente sección, veremos que esto es equivalente a maximizar el flujo neto de efectivo esperado.) Si ella no conoce las probabilidades, la sugerencia típica es utilizar el *criterio minimax* conservador; esto es, seleccionar aquella decisión que funciona mejor en el peor caso (la decisión con el arrepentimiento máximo más pequeño).

Por ejemplo, considere la tabla de arrepentimiento para el modelo del repartidor de periódicos que se muestra en la tabla 10.9. Si se ordena 1 periódico, ocurre un arrepentimiento máximo de 170 si la demanda es de 3 periódicos. El valor de 170 está por lo tanto asociado con la decisión de esa fila, “ordenar 1 periódico”. En otras palabras, el valor máximo en cada fila está asociado con la decisión que se tome en esa fila. Siguiendo esta regla, se produce la tabla 10.10.

El administrador entonces selecciona la decisión que minimice el arrepentimiento máximo. En este caso, el criterio de arrepentimiento minimax indica que el repartidor de periódicos debe ordenar 2 periódicos. Nuestro ejemplo del repartidor de periódicos ilustra que, cuando se toman decisiones sin utilizar probabilidades, los tres criterios —flujo de efectivo maximin, flujo de efectivo maximax y arrepentimiento minimax— pueden llevar a diferentes decisiones “óptimas”.

10.3 EL VALOR ESPERADO DE LA INFORMACIÓN PERFECTA: EL MODELO DEL REPARTIDOR DE PERIÓDICOS BAJO RIESGO

Volvamos al modelo del repartidor de periódicos bajo riesgo (es decir, con la distribución de probabilidades de la demanda que se muestra en la fila 12 de la figura 10.2). Recuerde que, en este caso la política óptima era ordenar 2 periódicos, y que el rendimiento esperado era de 22.5. Resulta útil considerar este modelo de manera muy estilizada para introducir el concepto del valor esperado de la información perfecta. En particular, vamos a suponer que la secuencia de sucesos durante un día del repartidor de periódicos (la “secuencia actual de los sucesos”) es como sigue:

1. Un genio, partiendo de la distribución de la demanda de los periódicos, determina el número de periódicos que serán solicitados.
2. El repartidor de periódicos, ignorante de la cantidad solicitada, pero conociendo la distribución de la demanda, ordena o pide los periódicos.

3. La demanda le es entonces revelada al repartidor de periódicos y él consigue un rendimiento *real* (en contraste con el esperado) determinado en función de su decisión sobre el tamaño del pedido y de la demanda.

Ahora imagine un nuevo escenario. El repartidor de periódicos tiene la oportunidad de negociar con el genio. Bajo este nuevo arreglo la secuencia de eventos es como sigue:

1. El repartidor de periódicos le paga al genio una cuota.
2. El genio determina la demanda igual que antes. Es importante señalar que el genio no puede hacer que una demanda en particular se convierta en cierta; él simplemente tiene el conocimiento perfecto de lo que sucederá y está dispuesto a vender ese conocimiento o información.
3. El genio le dice al repartidor de periódicos a cuánto ascenderá la demanda.
4. El repartidor de periódicos ordena sus periódicos.
5. El repartidor de periódicos recibe el rendimiento determinado por la demanda y el número de periódicos que ordenó.

La pregunta es, ¿cuál es la cuota más alta que el repartidor de periódicos debería estar dispuesto a pagar en el paso 1? Esta cuota se conoce como el **valor esperado de la información perfecta**. En términos generales,

cuota = (rendimiento esperado con el nuevo trato) − (rendimiento esperado con la secuencia actual de los eventos [sin trato o arreglo])

Con el nuevo trato el repartidor de periódicos, en el paso 4, siempre ordenará o pedirá el número de periódicos que le darán el rendimiento máximo para el estado de la naturaleza que va a ocurrir. Sin embargo, el pago en el paso 1 debe ser hecho *antes* de saber cuál será la demanda. Remitiéndonos a la tabla 10.4, vemos que si hay una demanda de 0 periódicos, él ordenará 0 periódicos y disfrutará de un máximo rendimiento de 0. Dado que el genio parte de la distribución de la demanda, hay una probabilidad de 0.1 de que el repartidor de periódicos sabrá por medio del genio que la demanda será efectivamente de 0. De manera similar, sabrá con una probabilidad de 0.3 que habrá una demanda de 1 periódico. Si esto ocurre, ordenará 1 periódico y disfrutará un máximo rendimiento de 35. Siguiendo este razonamiento, su rendimiento esperado (RE) bajo el nuevo trato será

$$\text{RE(nuevo)} = 0\,(0.1) + 35\,(0.3) + 70\,(0.4) + 105\,(0.2) = 59.5$$

Esta operación puede ser llevada a cabo fácilmente en Excel utilizando la función =MAX() sobre los rendimientos de cada estado de la naturaleza. Ya hemos visto que en ausencia de información perfecta su decisión óptima (ordenar 2 periódicos) da un rendimiento esperado de 22.5. Por lo tanto, podemos calcular el valor esperado de la información perfecta (VEIP) como sigue:

$$\text{VEIP} = 59.5 - 22.5 = 37.0 \text{ centavos}$$

Ésta es la cantidad máxima que nuestro vendedor deberá estar dispuesto a pagar en el paso 1 para el trato con el genio. A pesar de que la historia que hemos utilizado para desarrollar el concepto es exagerada, el valor esperado de la información perfecta (VEIP) tiene un significado práctico importante. Es un límite superior para la cantidad que usted debería estar dispuesto a pagar para mejorar su conocimiento sobre el estado de la naturaleza que ocurrirá. Literalmente millones de dólares se gastan en diferentes proyectos de investigación de mercados y otros dispositivos de prueba (pruebas geológicas, experimentos para el control de calidad, etc.) para determinar qué estado de la naturaleza ocurrirá en una gran variedad de aplicaciones. El valor esperado de la información perfecta indica la cifra esperada a ganar por llevar a cabo este esfuerzo, y por lo tanto coloca un límite superior a la cifra que debería ser invertida para reunir esa información.

10.4 UTILIDADES Y DECISIONES BAJO RIESGO

La **utilidad** es una manera alternativa de medir el aspecto atractivo del resultado de una decisión. En otras palabras, es una manera alternativa de encontrar los valores a llenar en una tabla de retribuciones. Hasta ahora hemos utilizado el rendimiento neto en dólares (flujo de efectivo neto) y el arrepentimiento como dos medidas de la "bondad" de una combinación específica de decisión y estado de la naturaleza.

La utilidad sugiere otro tipo de medida. Nuestra exposición de este tema consta de dos secciones principales:

TABLA 10.11 Tabla de retribuciones (flujos de efectivo netos)

	ESTADO DE LA NATURALEZA	
DECISIÓN	Bola blanca	Bola negra
Jugar	−10,000	1,000,000
No jugar	0	0

1. Una razón fundamental para la utilidad (es decir, saber por qué usar el flujo de efectivo neto puede llevar a una decisión inaceptable).
2. Cómo crear y utilizar una función de utilidad.

LA RAZÓN FUNDAMENTAL DE LA UTILIDAD

En la sección precedente vimos que los criterios de decisión maximin y maximax podrían llevar a decisiones inaceptables en modelos ilustrativos simples. Ahora queremos apuntar que el criterio de maximizar el flujo de efectivo neto esperado en una decisión bajo riesgo también puede producir resultados inaceptables. Por ejemplo, considere una urna que contenga 99 bolas blancas y 1 bola negra. A usted se le ofrece la oportunidad de jugar un juego en el que debe sacarse una bola de esta urna. Cada bola tiene las mismas posibilidades de ser sacada que las demás. Si se saca una bola blanca, usted debe pagar \$10,000. Si se saca la bola negra, usted recibe \$1,000,000. Usted debe decidir si juega o no. La tabla de retribuciones, basada en el flujo de efectivo neto, aparece en la tabla 10.11.

Ahora utilizaremos la información de esta tabla, junto con el hecho de que las probabilidades de cada bola blanca y la bola negra son, respectivamente, 0.99 y 0.01, para calcular el rendimiento esperado de cada decisión (jugar o no jugar) de la manera usual.

$$\begin{aligned} \text{RE(jugar)} &= -10{,}000\,(0.99) + 1{,}000{,}000\,(0.01) \\ &= -9900 + 10{,}000 = 100 \\ \text{RE(no jugar)} &= 0\,(0.99) + 0\,(0.01) = 0 \end{aligned}$$

Dado que RE(jugar) > RE(no jugar), debemos jugar si aplicamos el criterio de maximizar el flujo de efectivo neto esperado.

Ahora pregúntese si usted decidiría jugar este juego. Recuerde que existe una probabilidad de 0.99 de que usted perderá \$10,000. Mucha gente simplemente encuentra inaceptable este elevado "riesgo hacia abajo"; esto es, no están dispuestos a aceptar la decisión basada en el criterio de maximizar el flujo de efectivo neto esperado. Por lo tanto, una vez más vemos en un ejemplo simple que es necesario tener cuidado al seleccionar el criterio adecuado. Esto es más válido si se trata con complicados modelos de la vida real. Otro ejemplo de la vida real en el cual la mayoría de la gente no sigue el criterio de maximización del flujo de efectivo esperado es cuando hay que decidir si comprar o no un seguro para el automóvil. Suponga que usted es propietario de un automóvil deportivo nuevo y puede decidir si compra o no un seguro contra colisión. El seguro le cuesta una prima anual con un determinado deducible. Básicamente, usted está eligiendo entre comprar el seguro o correr el riesgo (de tener una colisión) sin estar asegurado. La mayoría de la gente escoge comprar el seguro, aunque uno puede estar seguro de que la prima que se le pague a la compañía de seguros es mayor que el costo esperado de los daños a causa de una colisión (es decir, la compañía de seguros obtiene una ganancia).

Afortunadamente, no es necesario rechazar el concepto de maximización de los rendimientos esperados. Para adaptar el criterio del rendimiento esperado a decisiones bajo riesgo de tipo general, sólo es necesario reconocer que los rendimientos netos en dólares no siempre reflejan con exactitud el "aspecto atractivo" de los resultados posibles de nuestras decisiones. Para hacer patente lo que esto significa, pregúntese si estaría dispuesto a ganar o perder 10 centavos dependiendo del lanzamiento de una moneda. (La mayoría de la gente diría que sí.) ¿Qué le parecería ganar o perder \$10,000 dependiendo del mismo lanzamiento de moneda? (En este caso, la mayoría de la gente diría que no.) ¿Cuál es la diferencia? La ganancia de 10 centavos parece compensar una pérdida de 10 centavos. ¿Por qué una ganancia de \$10,000 no compensa una pérdida de \$10,000? La respuesta es que en esta última situación la mayoría de la gente resulta **adversa al riesgo**, lo que significa que sienten que la pérdida de \$10,000 sería más dolorosa que el beneficio proveniente de una ganancia de \$10,000.

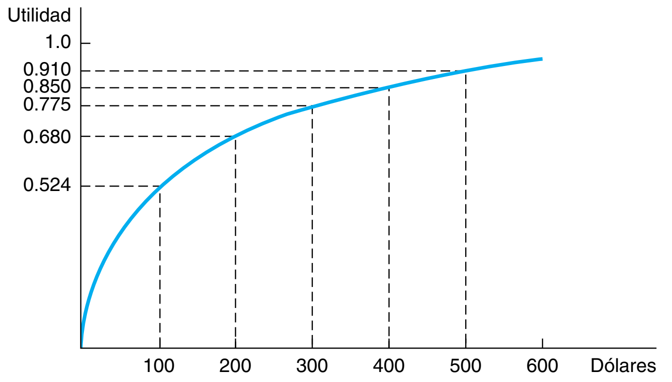


FIGURA 10.6
Función típica de utilidad adversa al riesgo

El análisis de decisiones maneja este comportamiento con una función que mide el "aspecto atractivo" del dinero. Esta función se llama *función de utilidad* donde, para efectos de este análisis, la palabra *utilidad* puede considerarse como una medida de "satisfacción". En la figura 10.6 se muestra una típica función adversa al riesgo. Vale la pena observar dos características de esta función:

1. Es no decreciente, puesto que más dinero siempre es por lo menos igual de atractivo que menos dinero.
2. Es cóncava. Un enunciado equivalente es que la utilidad marginal del dinero es no creciente. Para abundar en este fenómeno, examinemos la figura 10.6.

Primero, suponga que tiene \$100 y alguien le da \$100 adicionales. Observe que su utilidad aumenta según

$$U(200) - U(100) = 0.680 - 0.524 = 0.156$$

Ahora, suponga que comienza con \$400 y alguien le da \$100 adicionales. Ahora su utilidad aumenta en

$$U(500) - U(400) = 0.910 - 0.850 = 0.060$$

En otras palabras, 100 dólares adicionales son menos atractivos para usted si tiene \$400 en la mano que si comienza con \$100. Otra manera de describir este fenómeno es que en cualquier momento, la ganancia correspondiente a una cantidad específica de dólares incrementa menos las utilidades que una pérdida de una misma suma de dólares reduce la utilidades. Por ejemplo, utilizando la función de utilidades de la figura 10.6, ya hemos calculado que la ganancia en utilidades que proviene de pasar de \$400 a \$500 es de 0.060. La pérdida en utilidades de pasar de \$400 a \$300, sin embargo, es de $U(400) - U(300) = 0.850 - 0.755 = 0.075$, que es mayor. Otra manera de verlo es que para la mayoría de la gente sería tremendamente emocionante recibir \$1,000,000, pero recibir \$2,000,000 no sería el doble de emocionante. De manera similar, encontrar \$100 sería un agradable golpe de suerte, pero la diferencia entre recibir \$1,000,000 y \$1,000,100 sería despreciable. Por lo tanto, vemos que un mismo incremento tiene una utilidad decreciente para la mayoría de la gente, o para obtener un mismo grado de utilidad cada incremento debe ser mayor.

La figura 10.7 muestra otros dos tipos generales de funciones de utilidad. La primera es una función **propensa al riesgo** (convexa), donde la ganancia de una cantidad específica de dólares incrementa la utilidad más de lo que una pérdida de la misma cantidad la reduce. Por ejemplo, si usted comienza con \$200 y aumenta su acervo en \$100 para llegar a \$300, su utilidad aumenta en

$$U(300) - U(200) = 0.590 - 0.260 = 0.330$$

mientras que si empieza con \$200 y reduce su acervo en \$100 para llegar a \$100, su utilidad se reduce en

$$U(200) - U(100) = 0.260 - 0.075 = 0.185$$

Por lo tanto, con una función de utilidad propensa al riesgo, un incremento de \$100 aumenta su utilidad más de lo que un decremento de \$100 la reduce. Como hemos visto, en una función adversa al riesgo (cóncava) como la que se muestra en la figura 10.6 es válido un enunciado completamente opuesto.

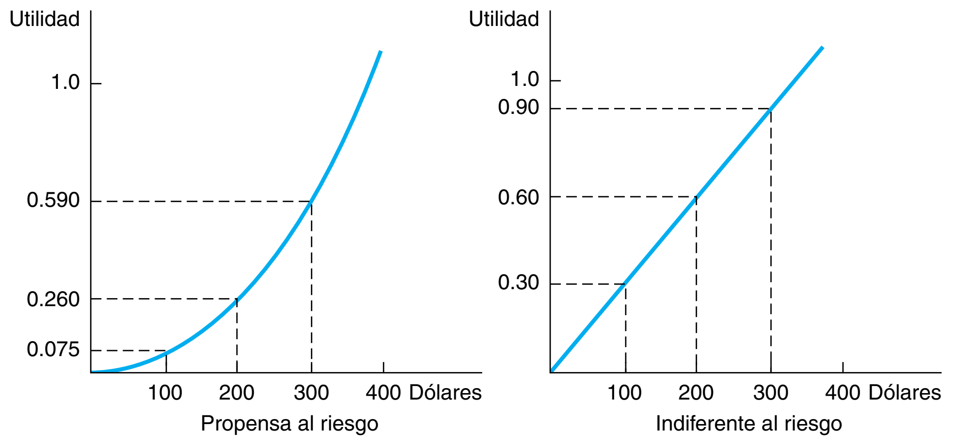


FIGURA 10.7

Algunas otras funciones de utilidad

Para la función **indiferente al riesgo** que se muestra en la figura 10.7, una ganancia o pérdida de una cantidad de dólares específica produce un cambio de la misma magnitud en su utilidad.

CÓMO CREAR Y UTILIZAR UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD

Analizaremos dos métodos para crear la función de utilidad. El primero es un método más exacto, pero tedioso, en tanto que el segundo es más rápido, dado que asume una forma predeterminada. El primer método para crear una función de utilidad como la que se muestra en la figura 10.6 requiere que el administrador, en nuestro caso el repartidor de periódicos, haga una serie de elecciones entre un rendimiento seguro y una lotería. En lenguaje más formal, se requiere que el administrador cree una **lotería equivalente**. Éste, sin embargo, es el segundo paso. Empecemos por el principio.

El repartidor de periódicos puede seleccionar arbitrariamente los puntos extremos de su función de utilidad. Es una regla convencional conveniente establecer la utilidad del rendimiento neto mínimo en dólares igual a 0 y la utilidad del rendimiento neto más elevado igual a 1. Dado que en el ejemplo del repartidor de periódicos el rendimiento mínimo es de –150 y el máximo es de +105, él determina que $U(-150) = 0$ y $U(105) = 1$. Ambos valores juegan un papel importante para encontrar la utilidad de cualquier cantidad de dinero entre −150 y 105. Quizá sea más fácil explicar el procedimiento con un ejemplo.

Suponga que quien toma la decisión comienza con $U(-150) = 0$ y $U(105) = 1$, y quiere encontrar la utilidad de 10 (es decir, $U[10]$). Comienza seleccionando una probabilidad p que resulte indiferente entre las siguientes alternativas.

1. Recibir un pago seguro de 10.
2. Participar en una lotería en la cual, con una probabilidad p, él recibe un pago de 105, o con probabilidad $(1 - p)$ recibe un pago de −150.

Es claro que si $p = 1$, quien toma la decisión prefiere la alternativa 2, ya que prefiere un pago de 105 a un pago de 10. Igualmente claro es que si $p = 0$, preferirá la alternativa 1, dado que deseará un pago de 10 a una pérdida de 150 (o lo que es lo mismo, un pago de −150). Es claro que en algún punto entre 0 y 1 habrá un valor de p tal que a quien toma la decisión le resulte indiferente cualquiera de las dos alternativas. Este valor variará de una persona a otra dependiendo de cuán atractivas sean las alternativas. Podemos llamar a este valor de p la utilidad de 10. Por ejemplo, suponga que el administrador elige que p sea igual a 0.6. Entonces el valor esperado de la lotería será $0.6(105) + 0.4(-150) = 3$. En otras palabras, está expresando indiferencia entre un pago seguro de 10 y arriesgar un valor esperado menor, 3. Esto significa que está buscando el riesgo, ya que requiere de un pago seguro más alto que el rendimiento esperado, esto para compensar la pérdida de la posibilidad de lograr más que el rendimiento esperado.

Ahora suponga que hubiera elegido $p = 0.8$, entonces el valor esperado de la lotería hubiera sido $0.8(105) + 0.2(-150) = 54.0$. Esto significa que es adverso al riesgo, ya que requiere un valor esperado más alto que el pago seguro, para compensar el riesgo de la lotería. En algún modo, entre más alto sea el valor de p que elija, más adverso al riesgo será, dado que requiere un valor esperado más alto de la lotería para compensar su riesgo. Resolviendo la ecuación

$$p(105) + (1 - p)(-150) = 10$$
$$255p - 150 = 10$$
$$p = \frac{160}{255} = 0.6275$$

encontramos el valor de p en el cual el valor esperado de la lotería iguala al pago seguro de 10. Si el administrador elige un valor de p mayor que 0.6275, es adverso al riesgo; igual a 0.6275, indiferente al riesgo; y menor que 0.6275, propenso al riesgo. Repitiendo el mismo procedimiento para todos los posibles rendimientos en dólares en el ejemplo del repartidor de periódicos, podríamos evaluar completamente toda la función de utilidad. Esto es, obviamente significa mucho trabajo, y uno podría preguntarse cuántos administradores tienen el conocimiento y la habilidad en la teoría de las probabilidades, así como la paciencia para hacer este ejercicio de manera consistente y correcta. Otra preocupación de los analistas de decisión que trabajan con corporaciones para ayudar a determinar funciones de utilidad es que deben tener mucho cuidado de que, al realizarlas, el administrador utilice el punto de vista monetario de la corporación, en vez de sus propios valores personales. En lo individual, la gente tiende a temer arriesgar unos cuantos miles de dólares o quedar indiferente cuando se habla de millones de dólares. Por lo tanto, hay una clara diferencia entre la utilidad corporativa y la utilidad personal. Es más, no hemos *demostrado* que utilizar la probabilidad p para definir una lotería equivalente sea una manera infalible de elaborar una función de utilidad. Un análisis comprensible de la razón por la que este método funciona nos llevaría mucho más allá del alcance de este texto. Debemos contentarnos con el *cómo* y dejar el *por qué* para otros cursos más avanzados.

Debido a todos los retos arriba mencionados, el segundo y más popular método para elaborar funciones de utilidad consiste en usar una función de utilidad exponencial. Esta función tiene una forma predeterminada (es decir, es cóncava → adversa al riesgo) y requiere la evaluación de un solo parámetro. Ha sido utilizada para analizar decisiones de inversiones financieras y para otras aplicaciones en los negocios. La función tiene la siguiente forma:

$$U(x) = 1 - e^{-x/r}$$

donde x es la cantidad de dinero que vamos a convertir en utilidad. Como se puede ver, el único parámetro por evaluar es r, que es una constante que mide el grado de aversión al riesgo. Es decir, entre *más elevado* sea el valor de r, *menos* adversa al riesgo es la persona o la empresa (en otras palabras, están dispuestos a correr mayor riesgo). De manera similar, entre *menor* sea el valor de r, *más* adversa al riesgo es la persona o empresa.

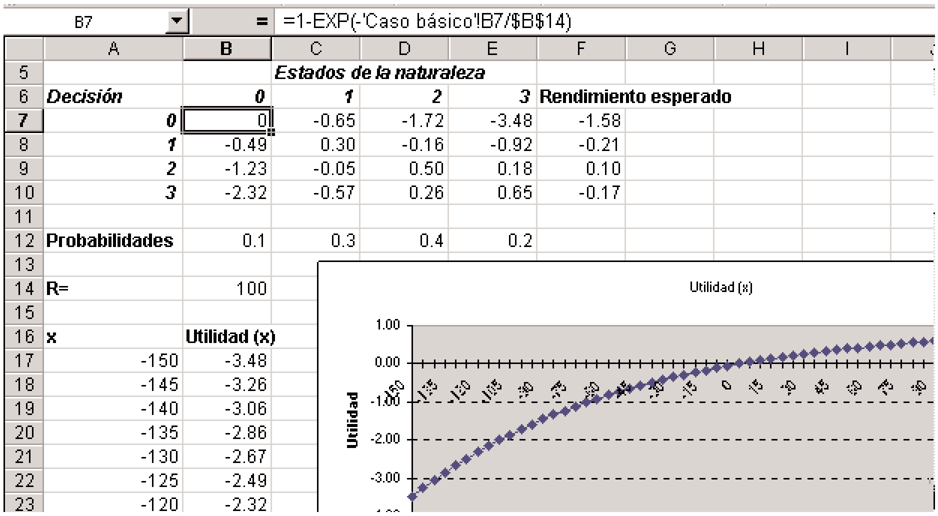
Hay muchas formas para determinar el valor de r. Dos de las más sencillas se muestran a continuación. Primero, debemos determinar una cantidad de dinero r tal que al administrador le sean indiferentes las siguientes dos opciones:

1. Un juego al 50-50 donde la retribución es una ganancia de r dólares o una pérdida de $r/2$ dólares.
2. Una retribución de cero.

Supongamos que nuestro repartidor de periódicos se muestra indiferente entre una apuesta donde gana \$100 o pierde \$50 con igual probabilidad, y ninguna apuesta, entonces su r es de \$100.

La segunda manera de determinar r proviene de evidencia empírica reunida por un famoso analista de las decisiones, Ron Howard. El doctor Howard ha sido asesor de muchas empresas y ha encontrado varias reglas prácticas (ver Howard) sumamente valiosas, que relacionan los ingresos netos de la compañía, el capital contable y las ventas netas con el grado de aversión al riesgo, r. Por ejemplo, encontró que r es aproximadamente igual a 124% de los ingresos netos, a 15.7% del capital contable y a 6.4% de las ventas netas. En otras palabras, una gran empresa con ingresos netos de \$1,000 millones tendrá una r de 1.24 mil millones, en tanto que una empresa más pequeña con ventas netas de \$5 millones tendrá una r de 320,000. Por supuesto, se trata sólo de grandes lineamientos, pero pueden ser muy útiles y de seguro indican la tendencia de las empresas más grandes a tener valores de r más elevados y una menor aversión al riesgo.

Ahora regresemos a nuestro ejemplo del repartidor de periódicos y juzguemos su función de utilidad. Dado que él posee un negocio muy pequeño, opta por utilizar el método de la función de utilidad exponencial predeterminada y lleva a cabo la apuesta al 50-50 ya analizada para determinar su valor de r (\$100). Él desea incluir la función de utilidad en una nueva hoja de cálculo llamada "Utilidad" en el mismo libro de trabajo (NEWSBOY.XLS), y evaluar la utilidad de todas las retribuciones en dólares. El uso de esta nueva función de utilidad exponencial para la toma de decisiones cuando se conocen las probabilidades de los estados de la naturale-



B7 = =1-EXP(-'Caso básico'!B7/$B$14)

	A	B	C	D	E	F
5			*Estados de la naturaleza*			
6	***Decisión***	***0***	***1***	***2***	***3***	**Rendimiento esperado**
7	***0***	0	-0.65	-1.72	-3.48	-1.58
8	***1***	-0.49	0.30	-0.16	-0.92	-0.21
9	***2***	-1.23	-0.05	0.50	0.18	0.10
10	***3***	-2.32	-0.57	0.26	0.65	-0.17
11						
12	**Probabilidades**	0.1	0.3	0.4	0.2	
13						
14	**R=**	100				
15						
16	**x**	**Utilidad (x)**				
17	-150	-3.48				
18	-145	-3.26				
19	-140	-3.06				
20	-135	-2.86				
21	-130	-2.67				
22	-125	-2.49				
23	-120	-2.32				

Celda	Fórmula	Cópiese a
B7	= 1 − ESPERADO(-`Caso básico !B7/$B$14)	B7:E10
F7	= SUMAPRODUCTO (B7:E7,$B$12:$E$12)	F8:F10

FIGURA 10.8

Hoja de cálculo de la utilidad del repartidor

za es un proceso sencillo. Especificando, el repartidor de periódicos genera una nueva tabla de retribuciones donde las entradas consisten en la utilidad del flujo neto de efectivo asociado con cada combinación de una decisión con un estado de la naturaleza (es decir, sustituye la utilidad del flujo neto de efectivo por el flujo de efectivo mismo). Por ejemplo, la fila 3 (ordenar 2), columna 3 (demanda 2) en la tabla 10.4 muestra un flujo de efectivo neto de 70. Su hoja de cálculo (que se muestra en la figura 10.8) traduce esto en una utilidad de aproximadamente 0.50, que se convierte en una nueva entrada en la fila 3, columna 3. El repartidor de periódicos ahora procede como anteriormente lo hizo; esto es, calcula la utilidad esperada para cada decisión. Esto se muestra en la columna F de la figura 10.8. Finalmente, desea hacer una gráfica de su función de utilidad para conocer su forma, lo que también se muestra en la figura 10.8.

Para crear esta hoja de cálculo, el repartidor de periódicos hizo lo siguiente:

1. Creó una nueva hoja de cálculo llamada "Utilidad" en el mismo libro de trabajo (NEWSBOY.XLS).
2. Copió las celdas A5:F12 de la hoja de cálculo "Caso básico" a la nueva hoja de cálculo, cambió la fórmula de la celda B7 a = 1 – esperado(–`Caso básico´!B7/$B$14) y después la copió a B7:E10.
3. Escribió un valor inicial de −150 en la celda A17.
4. Hizo clic de nuevo en la celda A17 y después hizo clic en: Editar, Llenar y Series.
5. Hizo clic en "Series en columnas" y escribió un primer valor de 5 y un valor límite de 105. Después hizo clic en Aceptar.
6. Escribió la fórmula (que se muestra en la línea de ecuaciones de la figura 10.8 para convertir dólares a utilidad) en la celda B17 y la copió a B68.
7. Utilizó el asistente para gráficas con los datos en A17:B68 para crear una gráfica de la función de utilidad como la que se muestra en la esquina inferior derecha de la figura 10.8.

Podemos ver en la columna F de la figura 10.8 que, basándose en el criterio de maximización de la utilidad esperada, el repartidor de periódicos debería ordenar 2 periódicos (tiene la utilidad esperada más elevada, de 0.10). Regresando al análisis de decisiones bajo condiciones de riesgo de la sección 10.2, se observa que si el repartidor de periódicos fundamentase su decisión en la maximización del flujo de efectivo neto esperado, también ordenaría 2 periódicos. No obstante, no siempre resulta cierto que la decisión que presenta el mayor flujo de efectivo esperado también obtenga la utilidad esperada más grande. El hecho de que este fenómeno haya ocurrido en este ejemplo en particular no implica que ocurrirá siempre. Veamos un ejemplo de la vida real donde la utilidad esperada y el rendimiento esperado no generan la misma decisión.

G4 = =SUMAPRODUCTO(E4:F4,$E$6:$F$6)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Prima anual**	$ 1,000			***Estados de la naturaleza***			
2	**Deducible**	$ 250		***Decisión***	***Colisión***	***No Colisión***	**Rendimiento esperado**	
3				***Comprar***	$ 1,250	$ 1,000	1001.25	
4				***No comprar***	$ 50,000	0.00	250.00	
5	**Probabilidad de colisión**	0.50%						
6	**Monto de los daños**	$ 50,000		**Probabilidades**	0.50%	99.50%		
7								

Celda	Fórmula	Cópiese a
E3	= B2+B1	—
F3	= B1	—
E4	= B6	—
F4	= 0	—
G3	= SUMAPRODUCTO(E3:F3,$E$6:$F$6)	G4
E6	= B5	—
F6	= 1−B5	—

FIGURA 10.9

Hoja de cálculo de un seguro para automóvil

F12 = =1-EXP(F3/$F$8)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Prima anual**	$ 1,000		**Retribuciones**	***Estados de la naturaleza***			
2	**Deducible**	$ 250		***Decisión***	***Colisión***	***No Colisión***	**Rendimiento esperado**	
3				***Comprar***	$ 1,250	$ 1,000	1001.25	
4				***No comprar***	$ 50,000	0.00	250.00	
5	**Probabilidad de colisión**	0.50%						
6	**Monto de los daños**	$ 50,000		**Probabilidades**	0.50%	99.50%		
7								
8					r =	10000		
9								
10				**Utilidades**	***Estados de la naturaleza***			
11				***Decisión***	***Colisión***	***No Colisión***	**Rendimiento esperado**	
12				***Comprar***	-0.13	-0.11	-0.11	
13				***No comprar***	-147.41	0.00	-0.74	

Celda	Fórmula	Cópiese a
E12	= 1−EXP(E3/$F$8)	E12:F13
G12	= SUMAPRODUCTO(E12:F12,$E$6:$F$6)	G13

FIGURA 10.10

Hoja de cálculo de la utilidad del seguro para automóvil

Considere el siguiente ejemplo de un seguro para automóvil. Hace 10 años que Carol Lane salió de la Graduate School of Business (Escuela para graduados en negocios) de Stanford y acaba de adquirir un hermoso Lexus nuevo. Telefonea a su compañía de seguros para automóviles y determina que la prima anual de un seguro por colisión sería de $1,000, con un deducible de $250. Tiene una probabilidad de sólo 0.5% de ser la causante de una colisión durante el siguiente año, en cuyo caso puede esperar un costo por daños de $50,000. Dado que ella compró el Lexus al contado (es decir, sin préstamo), no está obligada a comprar el seguro por colisión. ¿Deberá comprar o no el seguro? Carol ha hecho un modelo de esta situación en la hoja de cálculo que se muestra en la figura 10.9 (AUTOINSU.XLS).

Con base en una “maximización del rendimiento esperado”, Carol observa que le resultaría menos costoso, en promedio, no adquirir el seguro ($250 comparado con $1,001.25). Sabe, sin embargo, que la decisión no puede ser tan sencilla y se siente un tanto incómoda. Recuerda el concepto de utilidad de su estancia en la escuela de negocios. Decide que ella es adversa al riesgo, y estima su valor *r* en $10,000 (utilizando el primer método explicado en esta sección [apuesta al 50-50]). Elabora una nueva hoja de cálculo llamada “Utilidad” en el mismo libro de trabajo para incorporar su utilidad, como se puede ver en la figura 10.10.

Con esta base, ella ve que la decisión de "Comprar el seguro" maximiza la utilidad esperada (−0.11 contra −0.74), debido a la gran utilidad negativa que aparece cuando la situación consiste en la decisión de no comprar el seguro combinada con el estado de la naturaleza en que ella sufre una colisión. Con base en su análisis de la utilidad esperada, Carol siente que vale la pena comprar el seguro (y pagar los $751 extra anuales en promedio) a fin de tener una paz mental que no tendría si se ve obligada a sacar $50,000 de sus ahorros en el poco probable caso de ser la causante de un choque o colisión.

10.5 UN RESUMEN A LA MITAD DEL CAPÍTULO

Las tres secciones precedentes nos dieron el fundamento teórico en el que se basa el resto del capítulo. Las secciones siguientes están dedicadas a procedimientos que juegan un papel importante en la resolución de modelos de la vida real. Es útil hacer un resumen de lo que hemos logrado antes de proseguir.

La sección 10.2 nos dio un marco general para la clase de modelos conocidos como decisiones contra la naturaleza. En este marco, el modelo se puede describir por medio de una tabla de retribuciones en la cual los rendimientos para quien toma la decisión dependen de la decisión seleccionada y del estado de la naturaleza cuando ocurra. Se analizaron tres casos específicos:

1. ***Decisiones bajo certidumbre:*** Quien toma la decisión sabe exactamente qué estado de la naturaleza ocurrirá. El "único" problema es seleccionar la mejor decisión. Los modelos determinísticos como la programación lineal, la programación con enteros, la programación no lineal y la CEP en inventarios quedan incluidos en esta categoría.

2. ***Decisiones bajo condiciones de riesgo:*** En los estados de la naturaleza está definida una distribución de probabilidades. Quien toma la decisión puede utilizar los siguientes criterios para seleccionar la "mejor decisión":

- **a.** Maximizar el rendimiento esperado medido por un rendimiento neto en dólares.
- **b.** Minimizar el arrepentimiento esperado (costo de oportunidad).
- **c.** Maximizar el rendimiento esperado medido por su utilidad.

Vimos que los criterios a y b siempre conducen a la misma decisión. La mayor parte de los modelos de decisiones administrativas caen dentro de esta categoría de decisiones bajo riesgo.

3. ***Decisiones bajo incertidumbre:*** Aquí se asume que quien toma la decisión *no* tiene conocimiento de cuál estado de la naturaleza ocurrirá. Quien toma la decisión puede aplicar el criterio de Laplace; esto es, asignar iguales probabilidades a los diferentes estados de la naturaleza, y después elegir la decisión que maximice el rendimiento esperado. De manera alternativa, quien toma la decisión puede atacar el modelo sin utilizar probabilidades. En este caso, vimos tres criterios diferentes para tomar la "mejor decisión":

- **a.** Maximizar el rendimiento neto mínimo en dólares.
- **b.** Maximizar el rendimiento neto máximo en dólares.
- **c.** Minimizar el arrepentimiento máximo.

Cada uno de estos criterios conducirá, en general, a diferentes decisiones, con las cuales muchos administradores se sentirán inconformes.

La sección 10.3 estuvo dedicada al concepto del valor esperado de la información perfecta (VEIP). Este concepto desempeña un papel importante, pues establece un límite superior a la cifra que usted debería pagar para obtener nueva información acerca del estado de la naturaleza que ocurrirá.

Finalmente, en la sección 10.4 analizamos la *utilidad* como una medida alternativa del aspecto atractivo de cada combinación entre una decisión y un estado de la naturaleza. El deseo de utilizar una función de utilidad es motivado por el hecho de que en algunos casos, por ejemplo, debido a la magnitud de las pérdidas potenciales, la decisión que maximiza el rendimiento neto esperado en dólares no es la decisión que usted desearía escoger. Se describieron un par de métodos para evaluar la función de utilidad.

Las secciones restantes de este capítulo se ocuparán de las ampliaciones al modelo más común (decisiones bajo riesgo). Se incluyen los árboles de decisión, una técnica de gran importancia en la práctica, a través del uso de un complemento de hoja de cálculo llamado TreePlan, y se hace la introducción a dos conceptos importantes: el uso de nueva información en la toma de decisiones y el análisis de modelos de decisión secuenciales. Dada la naturaleza secuencial de estos modelos nuevos y más complejos, las decisiones y las tablas de decisión o de retribuciones de las secciones anteriores ya no funcionan.

10.6 ÁRBOLES DE DECISIÓN: VENTA DE TRACTORES PARA JARDÍN Y USO DOMÉSTICO

Un **árbol de decisiones** es un dispositivo gráfico para el análisis de decisiones bajo riesgo; esto es, modelos en los que tanto las decisiones como las probabilidades de los estados de la naturaleza están definidas. De manera más precisa, los árboles de decisiones fueron diseñados para utilizarse en modelos en los que hay una secuencia de decisiones, cada una de las cuales podría llevarnos a uno de varios resultados inciertos. Por ejemplo, un concesionario tiene que decidir típicamente cuánto ofrecer por cada uno de los diversos locales posibles en la feria estatal. El resultado de esta decisión no es seguro, ya que depende de cuánto decidirán ofrecer los competidores. Una vez conocida la localización, el concesionario debe decidir cuánta comida almacenar. El resultado de esta decisión en términos de utilidades tampoco es seguro, dado que dependerá de la demanda de los clientes.

Nuestro análisis de los árboles de decisión está organizado de la siguiente manera: en esta sección hacemos una introducción a los conceptos básicos y a un complemento de hoja de cálculo, TreePlan, que elabora los árboles de decisión en una hoja de cálculo. Este paquete de *software* fue desarrollado por Michael Middleton y está disponible como *shareware*. Visite su sitio *web* en http://www.treeplan.com. (Si le agrada el *software* y planea utilizarlo fuera de esta clase, deberá cubrir una cuota de registro nominal. Los detalles están disponibles en la "Ayuda en línea" de TreePlan.) La sección 10.7 examina la sensibilidad de la decisión óptima a los valores establecidos para las probabilidades. La sección 10.8 le muestra cómo se aplica el teorema de Bayes para incorporar información nueva al proceso, y la sección 10.9 analiza un modelo de decisión secuencial. Todo el análisis está motivado por el siguiente modelo de producción y mercadotecnia que enfrenta la administración de PROTRAC.

ESTRATEGIAS ALTERNATIVAS DE MERCADOTECNIA Y DE PRODUCCIÓN

Acaba de completarse la fase de diseño y prueba de producto para la nueva línea de tractores para jardín y uso doméstico de PROTRAC. La alta gerencia está tratando de decidir la estrategia de mercadotecnia y producción apropiadas para usarse con este producto. Se están considerando tres alternativas principales. Cada alternativa está identificada mediante una sola palabra.

1. ***Agresiva (A):*** Esta estrategia representa un compromiso importante por parte de la empresa con esta línea de producto. Se incurriría en importantes desembolsos de capital para una nueva y eficiente planta de producción. Se acumularían grandes inventarios para garantizar la entrega apropiada de todos los modelos. Se iniciaría una gran campaña de publicidad incluyendo un patrocinio a nivel nacional de comerciales en televisión y se arrancaría un programa de descuentos a distribuidores.
2. ***Básica (B):*** En este plan, la producción del E-4 (el tractor oruga pequeño) sería trasladada de Joliet a Moline. Este traslado eliminaría el problemático departamento de producción del pelícano ajustable y del excavador. Al mismo tiempo, la línea E-4 en Joliet sería modificada para producir el nuevo producto para jardín y uso doméstico. Se mantendrían inventarios sólo para los productos más populares. Las oficinas centrales pondrían fondos a disposición para apoyar esfuerzos locales o regionales de publicidad, pero no se haría una campaña publicitaria nacional.
3. ***Cautelosa (C):*** En este plan, la capacidad sobrante en varias de las líneas E-4 se utilizaría para manufacturar los nuevos productos. Se desarrollaría un mínimo de nuevo montaje. La producción se programaría para satisfacer la demanda y la publicidad correría a cargo del comerciante local.

La administración decide clasificar el estado del mercado (es decir, el nivel de la demanda) como fuerte (F) o débil (D')(se escribe D' para diferenciarla de D, que corresponde a "Desalentador"). En realidad, la demanda se caracteriza por un continuo de resultados posibles. En este ejemplo introductorio nos limitaremos a dos estados posibles (fuerte y débil) para simplificar las cosas. Para un análisis del tema sobre cómo tratar estados de la naturaleza infinitos, vea la sección 10.11. La hoja de cálculo que se muestra en la figura 10.11 (PROTRACDT.XLS) presenta la tabla de retribuciones y la mejor estimación sobre las probabilidades de un mercado fuerte o débil hecha por la administración. Las retribuciones en el cuerpo de la tabla son las utilidades netas medidas en millones de dólares. Fueron generadas calculando cuidadosamente las ventas, ingresos y costos asociados con cada combinación de decisión/estado de la naturaleza. Es interesante observar que una decisión cautelosa (C) reditúa una utilidad mayor con un mercado débil que con un mercado fuerte. Si el mercado es fuerte y PROTRAC cauteloso, los competidores no sólo capturarán el mercado de tractores pequeños, sino que, como resul-

D6 = =SUMAPRODUCTO(B6:C6,$B$1:$C$1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Probabilidades**	0.45	0.55							
2										
3		**Estados de la naturaleza**								
4	**DECISIÓN**	*Fuerte (*	*Débil (L*	**Rendimiento esperado**						
5	*Agresiva (A)*	30	-8	9.1						
6	*Básica (B)*	20	7	12.85						
7	*Cautelosa (C)*	5	15	10.5						
8										

FIGURA 10.11

Hoja de cálculo básica de mercadotecnia de PROTRAC

Celda	Fórmula	Cópiese a
D5	= SUMAPRODUCTO (B5:C5, $B$1:$C$1)	D6:D7

tado del efecto posterior a estas ventas, la competencia penetrará seriamente en la posición actual de mercado de PROTRAC de accesorios y otros productos domésticos.

Aquí nos estamos enfrentando con lo que hemos llamado decisiones bajo riesgo, además de que calcularemos el rendimiento esperado para cada decisión y seleccionaremos la mejor de ellas (como lo hicimos en la sección 10.2), excepto que aquí comenzaremos en una hoja de cálculo y nos saltaremos el procedimiento “manual”. La fórmula para el rendimiento esperado se muestra en la barra de ecuaciones de la figura 10.11, así como las retribuciones esperadas resultantes para cada una de las tres decisiones en la columna D. La decisión óptima, si usted es indiferente al riesgo, sería seleccionar (B), la estrategia básica de producción y mercadotecnia, que produce la más elevada retribución esperada de $12.85 millones.

CÓMO CREAR UN ÁRBOL DE DECISIONES

Este modelo de mercadotecnia también puede representarse mediante el árbol de decisiones que mostraremos abajo. En nuestra exposición de los árboles de decisión, un **nodo cuadrado** (nodo de decisión en TreePlan) representará un punto en el que debe tomarse una decisión, y cada línea que salga del cuadrado representará una posible decisión. Los **nodos circulares** (nodos de evento en TreePlan) representarán situaciones donde el resultado es incierto. Cada línea proveniente de un círculo representa un resultado posible. El término **ramas** se utilizará para las líneas que emanan de nodos, sean cuadrados o circulares. Los pasos para crear el árbol de decisiones para el modelo PROTRAC en TreePlan son los siguientes:

1. Coloque el cursor en la celda A10 y haga clic en Herramientas, y después en TreePlan. (Si no hay una opción TreePlan en su menú, necesitará agregarla. Para hacerlo, haga clic en Herramientas, después en Complementos. Más tarde haga clic en la opción Examinar y localice TREEPLAN.XLA en su computadora [ya sea en su disco duro o en la red]. Finalmente haga doble clic en TREEPLAN.XLA una vez que lo haya encontrado y entonces deberá estar disponible en su menú Herramientas.) *Nota*: aquí se utiliza la versión 1.61.
2. Haga clic en “Nuevo árbol” y se dibujará un árbol predeterminado con dos nodos de decisión.
3. Debido a que PROTRAC necesita tres nodos de decisión, hacemos clic en el nodo de decisión (la celda B14 en nuestro caso) y oprimimos Control. Esto hará aparecer el menú sensible al contexto de TreePlan.
4. Haga clic en “Agregar rama” (si no es la opción predeterminada), después haga clic en Aceptar.
5. Etiquete las tres ramas como Agresiva, Básica, y Cautelosa (en las celdas D11, D16, D21).
6. Ya que queremos remplazar el nodo terminal con un nodo de evento aleatorio, haga clic en el nodo terminal (la celda F12) como se muestra en la figura 10.12, y después oprima Control para hacer aparecer el menú.
7. Haga clic en “Cambiar a nodo de evento” e indique que queremos dos ramas, y después haga clic en Aceptar.
8. TreePlan dibujará el árbol resultante, como se muestra en la figura 10.13. Observe que asigna una probabilidad predeterminada de 0.5 para cada uno de los dos eventos aleatorios, así como nombres predeterminados (eventos 4 y 5).
9. Cambiamos las etiquetas de “Evento 4” y “Evento 5” predeterminados a mercados “Fuerte” y “Débil”, respectivamente.

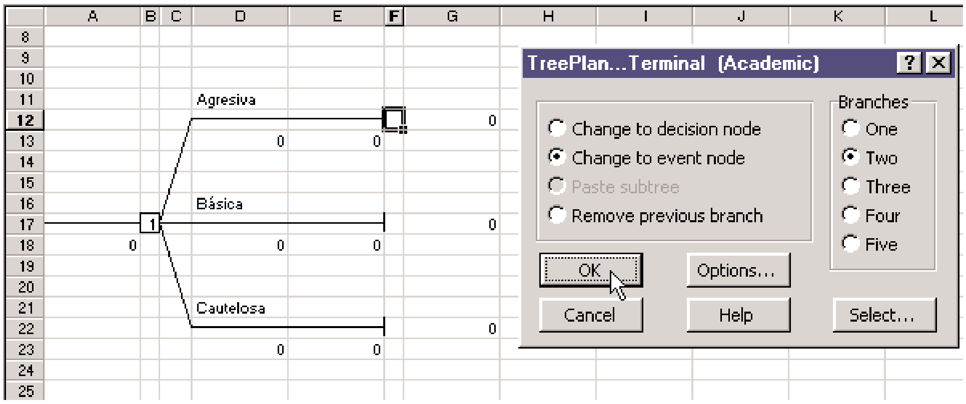


FIGURA 10.12

Adición de un nodo de evento al árbol de decisiones para el modelo del tractor para jardín y uso doméstico

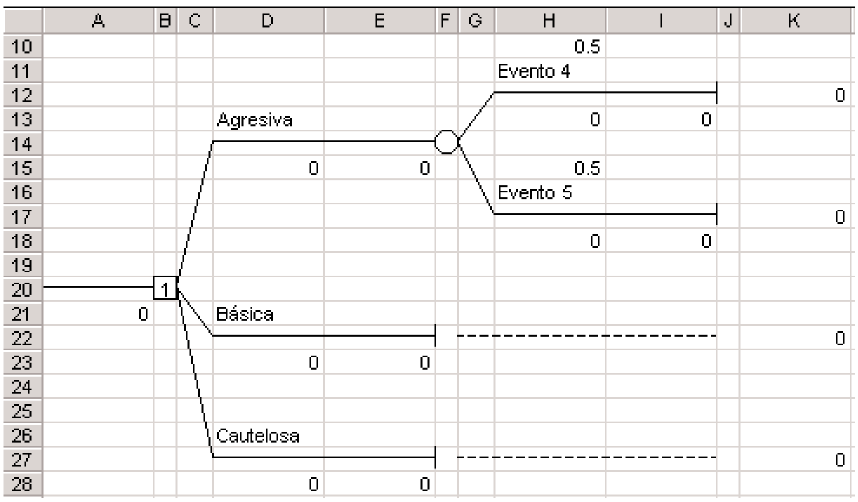


FIGURA 10.13

Árbol de decisiones parcialmente completo del tractor para jardín y uso doméstico

Nota: queremos repetir este proceso (pasos 6-9) para los otros dos nodos principales. Afortunadamente, TreePlan tiene la herramienta Copiar, la cual podemos aprovechar (como se muestra en los pasos del 10 al 12).

10. Para copiar un nodo (o cualquier subárbol), haga clic en la celda que desea copiar (celda F14) y oprima Control.

11. Haga clic en "Copiar subárbol" y después en Aceptar.

12. Haga clic en la celda a donde quiera copiar el nodo (celda F22), oprima Control, luego haga clic en "Pegar subárbol" y después en Aceptar.

13. Haremos lo mismo (pasos 10 al 12) para el último nodo terminal (celda F27 de la figura 10.13).

14. Dado que el árbol está empezando a crecer bastante, cambiamos la herramienta del Acercamiento/Distanciamiento (*zoom*) a 75% y entonces se verán todas las ramas del árbol como se muestra en la figura 10.14.

Observe que todavía necesitamos añadir los límites o valores terminales y las probabilidades, pero hemos hecho un gran avance. Para el modelo del tractor para jardín y uso doméstico, el árbol de decisiones de la figura 10.14 muestra el nodo inicial en la celda B24. Dado que es cuadrado, se deberá tomar una decisión. Por lo tanto, la administración debe elegir una de las estrategias: agresiva (A), básica (B) o cautelosa (C). Dependiendo de la decisión que se seleccione, se llegará a una nueva posición en el árbol. Por ejemplo, la selección de la estrategia A nos lleva de la celda B24 a la celda F14.

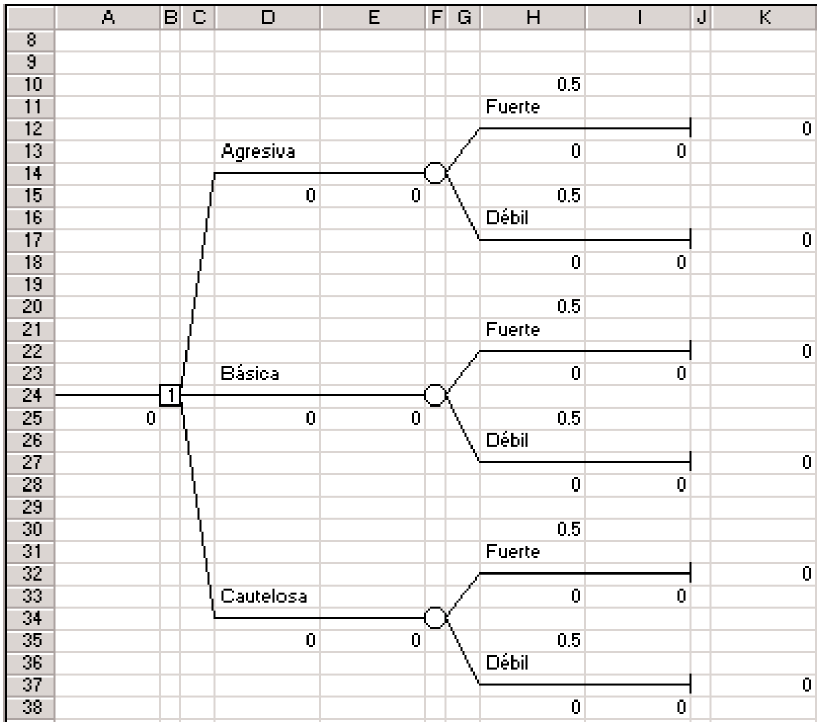


FIGURA 10.14

Todas las ramas del árbol de decisiones para el modelo del tractor para jardín y uso doméstico

Dado que este nuevo nodo es circular, la siguiente rama que ocurrirá no se conoce con seguridad. Si el mercado resulta ser fuerte, se obtendrá la celda J12. Si, en cambio, el mercado resulta ser débil, se llegará a la celda J17. Dado que representan el final del proceso de decisión, las celdas como la J12 y J17 se conocen como **posiciones terminales**. También, dado que a los nodos de las celdas F14, F24 y F34 no les siguen otros nodos, se les conoce como **nodos terminales**.

CÓMO ESTABLECER LAS PROBABILIDADES Y VALORES TERMINALES

El árbol de decisiones que se presenta en la figura 10.14 es una forma eficiente en que la administración puede visualizar la interacción entre decisiones y eventos no seguros. Sin embargo, si la administración desea utilizar el árbol de decisiones para seleccionar la decisión óptima, debe añadirse cierta información al diagrama. En particular, se debe asignar el rendimiento asociado con cada posición terminal. A esto se le llama **valor terminal**. También se debe asignar una probabilidad a cada rama proveniente de cada nodo circular. Para el modelo básico, ésta es una tarea relativamente simple, y se puede hacer como sigue:

1. Cambie las probabilidades predeterminadas en las celdas H10 y H15 de 0.5 y 0.5 por las fórmulas =B1 (que contiene el valor 0.45) y también =C1 (que contiene el valor 0.55), respectivamente. Haga lo mismo para las celdas H20, H25, H30 y H35. (Observe que si usted erróneamente escribe valores que no sumen exactamente 1.0, el valor esperado del nodo de evento [la celda a la izquierda] dará un valor de “#NA”, que es una señal para que usted regrese y revise sus probabilidades.)
2. Cambie los valores terminales para cada rama remplazando los valores predeterminados de cero. Por ejemplo, en la celda H13 (que representa la combinación de decisión Agresiva con el estado de la naturaleza “Mercado fuerte”) escriba la fórmula =B5 (que representa un rendimiento de $30 millones en la figura 10.11). De manera similar, en la celda H18 (que representa la combinación de decisión Agresiva con el estado de la naturaleza “Mercado débil”) escriba la fórmula =C5 (con un rendimiento de –8). Escriba fórmulas similares =B6, =C6, =B7, =C7 (con los valores de $20, $7, $5 y $15) en las celdas H23, H28, H33 y H38, respectivamente.

Estos pasos darán como resultado el árbol de decisiones que se presenta en la figura 10.15.

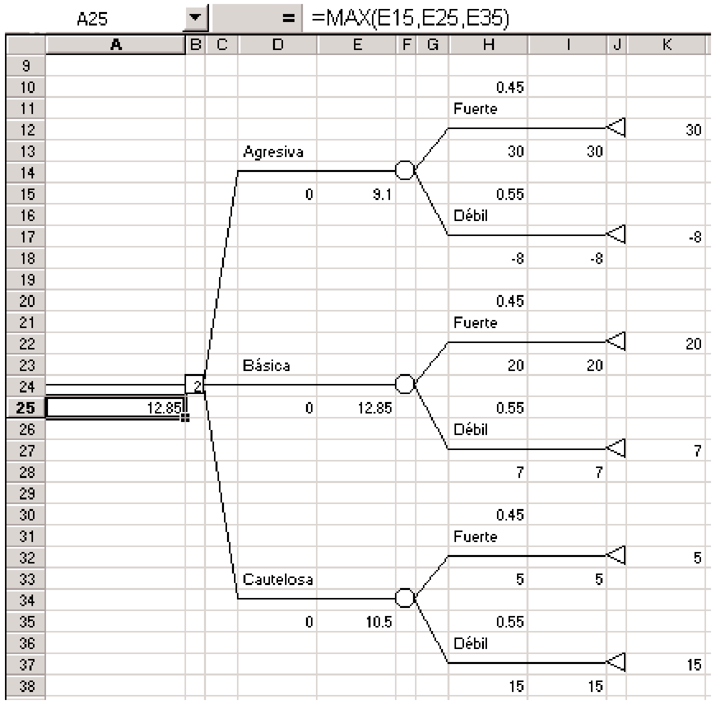


FIGURA 10.15

Árbol de decisiones completo para el modelo del tractor para jardín y uso doméstico

CÓMO PLEGAR EL ÁRBOL

Al empleo que se le da a un árbol de decisiones para encontrar la decisión óptima se le llama *resolver el árbol*. TreePlan hace esto por nosotros automáticamente. Para resolver un árbol de decisiones se trabaja de atrás hacia delante (es decir, de derecha a izquierda) o, en la jerga correspondiente, **plegando** el árbol. Primero, las ramas terminales se *pliegan* calculando el valor esperado de cada nodo terminal. Por ejemplo, observe el nodo de evento en la celda F14. El cálculo para obtener el valor esperado para este nodo es

$$\text{valor terminal esperado} = 30(0.45) + (-8)(0.55) = 9.10$$

En otras palabras, el valor esperado a obtenerse si se llega a la celda F14 es 9.10. Ahora las ramas provenientes de ese nodo en particular están plegadas (es decir, eliminadas), y el valor esperado de 9.10 es asignado al nodo, como se muestra en la celda E15 de la figura 10.15. Llevando a cabo los mismos cálculos para los nodos de las celdas F24 y F34 obtenemos sus valores esperados, como se muestra en las celdas E25 y E35 de la figura 10.15. Observe que los valores terminales esperados en cada uno de estos nodos son idénticos a los valores de rendimiento esperado calculados antes en esta sección (véase la figura 10.11) para las decisiones A, B y C, respectivamente. Ahora la administración sólo enfrenta el sencillo problema de elegir la alternativa que dé como resultado el valor terminal esperado más elevado. En este caso, como vimos anteriormente, la elección "óptima" es la estrategia básica (la alternativa B), y TreePlan lo indica en la celda B24 con un "2", lo que significa escoger la segunda rama o la estrategia básica.

TreePlan puede analizar árboles más complejos siguiendo los mismos procedimientos. En cada círculo el *software* determina la suma de los valores esperados de cada rama que proviene del mismo, mientras que en cada cuadrado elige la "mejor" rama (valor máximo), yendo de derecha a izquierda.

El análisis anterior nos da un ejemplo simple de cómo se puede analizar el modelo básico con un árbol de decisiones. En las secciones 10.8 y 10.9 usted verá el uso de árboles de decisión en escenarios más complejos. Sin embargo, este análisis de introducción ilustra un punto importante: *Para el modelo básico un árbol de decisiones simplemente proporciona otra manera más gráfica de ver el mismo modelo*. Se utiliza exactamente la misma información, y se realizan los mismos cálculos, ya sea que se utilicen los pasos descritos en la sección 10.2 o el árbol de decisiones para resolver el modelo.

CÁPSULA DE APLICACIÓN

Oglethorpe Power: ¿Invertir en un sistema de transmisión más grande?

En años recientes, se ha vuelto muy activo el mercado de energía eléctrica al mayoreo en el sureste de Estados Unidos. La población y las necesidades de energía de Florida han crecido más aprisa que la capacidad del estado para generar energía eléctrica. Al mismo tiempo, la disponibilidad de energía excedente en los estados vecinos, como Georgia, ha aumentado con la puesta en servicio de grandes plantas nucleares y de carbón. El resultado es que cantidades sustanciales de energía eléctrica fluyen desde Georgia y los estados cercanos (Alabama, Carolina del Sur) hacia Florida.

La Oglethorpe Power Corporation (OPC; Corporación de energía de Oglethorpe) es una cooperativa de generación y transmisión de energía. Produce aproximadamente 20% de la energía en el estado de Georgia. En 1990, la administración de OPC supo que la Florida Power Corporation (FPC; Corporación de energía de Florida) quería ampliar sus conexiones hacia Georgia con otra línea de 500 kilovoltios capaz de transmitir más de 1,000 MW. La pregunta clave que enfrentaba OPC era si debía añadir esta capacidad de transmisión adicional y, si lo hacía, en qué forma. Tenían tres opciones de decisión en el caso de añadir o no la línea: (1) hacerlo solos, (2) hacerlo conjuntamente con Georgia Power o (3) no hacerlo. Dependiendo de cómo estructurara OPC la inversión y operara la línea, la inversión podría ser de $100 millones o más y los ahorros anuales podrían llegar a $20 millones o más. La inversión sería una de las más elevadas de OPC y los ahorros anuales representarían varios puntos porcentuales de su presupuesto anual.

Los administradores de OPC se dieron cuenta de que se trataba de una decisión muy importante y por lo tanto utilizaron técnicas formales de análisis de decisiones. El análisis de decisiones se ha hecho bastante popular en la industria de la energía eléctrica en Estados Unidos, debido al gran apoyo que aporta el Electric Power Research Institute (Instituto de Investigación de Energía Eléctrica) de ese país. Conforme se estudiaba el tema, OPC se dio cuenta de que en realidad eran tres decisiones, no sólo una, como habían pensado en un principio. Se debería decidir la construcción de la línea de transmisión, la actualización de las instalaciones de transmisión asociadas y la naturaleza del control sobre las nuevas instalaciones.

Había cinco incertidumbres principales: el costo de construcción de las nuevas instalaciones, la demanda de energía en Florida, la situación de la competencia, el porcentaje de participación en el mercado de OPC y el precio "spot" de la electricidad. Estas incertidumbres, al combinarse con las decisiones, generaron casi 8,000 ramas en el árbol de decisiones. El reto era llegar a la decisión óptima que maximizara los ahorros esperados. Después de realizar algunos análisis de sensibilidad, OPC decidió que se debería saber más acerca de uno de los factores inciertos —la situación de la competencia— antes de comprometerse seriamente con la línea de transmisión.

Después de hacerlo, la recomendación que resultó del modelo era que OPC debería comenzar negociaciones independientes con FPC, lo cual llevaría a hacer el negocio ella sola o a no construir la línea. De manera interesante, la política que de entrada había parecido ser la más apropiada (hacerlo conjuntamente con Georgia Power) resultó ser la decisión menos atractiva (véase Borison).

10.7 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

EL RENDIMIENTO ESPERADO COMO UNA FUNCIÓN DE LA PROBABILIDAD EN UN MERCADO FUERTE

Antes de pasar al siguiente tema de importancia: un modelo en el cual se obtiene nueva información concerniente a la posibilidad de eventos inciertos, será útil considerar de nuevo el rendimiento esperado asociado con cada una de las decisiones en nuestro ejemplo anterior. Ya hemos observado que para calcular el rendimiento esperado de la estrategia A, se utiliza la relación

$$\text{RE(A)} = (30)P(\text{F}) + (-8)P(\text{D})$$

donde P(F) es la probabilidad de un mercado fuerte y P(D') es la probabilidad de un mercado débil. También sabemos que

$$P(\text{F}) + P(\text{D}) = 1, \text{ o } P(\text{D}) = 1 - P(\text{F})$$

Por tanto

$$\text{RE(A))} = 30P(\text{F}) - 8[1 - P(\text{F})] = -8 + 38P(\text{F})$$

Este rendimiento esperado es por eso una función lineal de la probabilidad de que la respuesta del mercado es fuerte. Se puede encontrar una función similar para las alternativas B y C, dado que

$$\text{RE(B))} = 20P(\text{F}) + 7[1 - P(\text{F})] = 7 + 13P(\text{F})$$

y

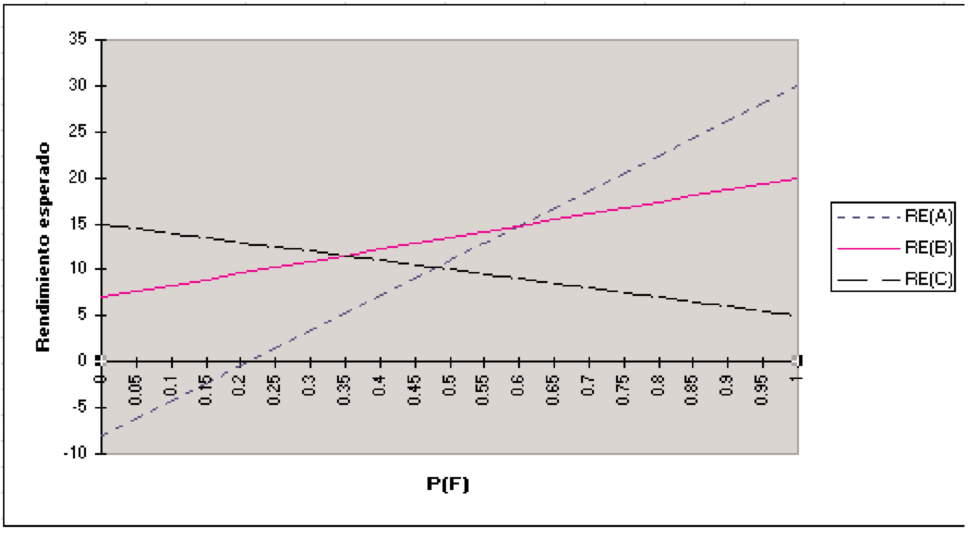


FIGURA 10.16

Rendimiento esperado como una función de P(F)

$$\text{RE(C)} = 5P(\text{F}) + 15[1 - P(\text{F})] = 15 - 10P(\text{F})$$

El trazo de cada una de estas tres funciones sobre un mismo juego de ejes se realiza fácilmente en Excel utilizando el comando Tabla de datos. Para hacerlo, simplemente:

1. Copie A1:D7 de la hoja de cálculo "Caso básico" a una nueva hoja de cálculo llamada "Rendimiento esperado comparado con *P*(F)". Cambie la entrada de la celda C1 de 0.55 a la fórmula (=1–B1). Esto lo hace más general y nos permite hacer una tabla de datos de un solo sentido.
2. En la celda A10, escriba un valor inicial de 0.
3. Haga clic de nuevo en A10, después en Editar, Llenar y en Series.
4. Haga clic en "Series en columnas" y escriba un valor inicial de 0.05 y un valor final de 1.0. Haga clic en Aceptar.
5. En las celdas B9:D9 escribimos las cantidades [RE(A), RE(B) y RE(C)] que queremos rastrear para cada valor de *P*(F) que hemos colocado en la columna A. Estas fórmulas son =D5, =D6 y =D7, respectivamente.
6. Seleccione el área A9:D30 y haga clic en Datos, después en Tabla.
7. Haga la celda de entrada de la columna B1 y después haga clic en Aceptar.
8. Excel calculará automáticamente los rendimientos esperados de las tres diferentes estrategias para los valores de *P*(F) entre 0 y 1.
9. Utilice el asistente de gráficas para producir una gráfica como la que se muestra en la figura 10.16.

Veamos más detenidamente la figura 10.16. El eje vertical es el rendimiento esperado y el horizontal es *P*(F), la probabilidad de que el mercado sea fuerte. Observe que cuando *P*(F) = 0, entonces RE(A) = −8. Para asegurarse de que esto tiene sentido, recuerde que cuando *P*(F) = 0 estamos seguros de que el mercado será débil; la figura 10.11 muestra que si el mercado es débil y tomamos la decisión A, el rendimiento será de −8. Un argumento similar muestra que RE(A) debe ser 30 cuando *P*(F) = 1, dado que en este caso estamos seguros de que el mercado es fuerte. El hecho de que una línea recta conecta estos dos puntos emana de que

$$\text{RE(A)} = -8 + 38P(\text{F})$$

que es una función lineal de *P*(F). Debido a que el criterio para tomar una decisión es seleccionar la decisión que tenga el rendimiento esperado más elevado, la figura 10.16 muestra cuál es la decisión óptima para cualquier valor particular de *P*(F). Por ejemplo, si como en la figura

10.11, el valor de P(F) es 0.45, entonces la figura 10.16 muestra que RE(B) > RE(C) > RE(A). Por lo tanto, como ya hemos calculado anteriormente, para este valor de P(F) la decisión óptima es B. Por otro lado, si P(F) = 0.8, vemos que RE(A) > RE(B) > RE(C), y por lo tanto, A es la decisión óptima.

En términos más generales, vemos que si P(F) es mayor que el valor P(F) en el cual se cruzan los trazos de RE(A) y RE(B), se debe seleccionar la estrategia A. El valor P(F) en el cual la estrategia A se vuelve óptima se puede encontrar haciendo RE(A) igual a RE(B) y resolviendo en función de P(F); esto es:

$$\begin{aligned} \text{RE(A)} &= \text{RE(B)} \\ -8 + 38P(\text{F}) &= 7 + 13P(\text{F}) \\ 25P(\text{F}) &= 15 \\ P(\text{F}) &= 0.6 \end{aligned}$$

De manera similar, se determina fácilmente que las gráficas de RE(C) y RE(B) se cruzan cuando P(F) = 0.348. (Debería intentar hacer este cálculo usted mismo.) Por tanto, la figura 10.16 indica que PROTRAC deberá seleccionar la producción y estrategia de mercadotecnia básica (es decir, la decisión B) si P(F) es mayor que 0.348 y menor que 0.6. Esto concuerda con lo que hemos calculado anteriormente bajo la suposición de P(F) = 0.45. Sin embargo, el análisis de la figura 10.16 nos proporciona mucha más información que la que teníamos anteriormente. Ahora está claro, por ejemplo, que la decisión óptima en este caso no es muy sensible a la precisión de nuestra estimación P(F). La misma estrategia, la B, sigue siendo la óptima para un incremento o decremento de más de 0.10 en la probabilidad previamente estimada de 0.45.

De manera similar, también sería importante considerar qué tan sensible es la decisión a las estimaciones de los rendimientos de flujo de efectivo. Por ejemplo, suponga que el rendimiento de la estrategia agresiva es superior a \$30 millones cuando el mercado es fuerte. Podríamos hacer un análisis similar para averiguar cuán sensible es nuestra decisión a la estimación de un rendimiento de \$30 millones cuando el mercado es fuerte.

Aunque un diagrama como el de la figura 10.16 sólo puede utilizarse cuando hay dos estados posibles de la naturaleza, resulta un dispositivo pedagógico útil para ilustrar la sensibilidad de la solución óptima a las estimaciones de probabilidades y rendimientos. Para proyectos más grandes, existen generalizaciones de este método, pero ese análisis iría mucho más allá del nivel introductorio de este capítulo.

10.8 ÁRBOLES DE DECISIÓN: CÓMO INCORPORAR NUEVA INFORMACIÓN

UN ESTUDIO DE INVESTIGACIÓN DE MERCADOS SOBRE TRACTORES PARA JARDÍN Y USO DOMÉSTICO

La administración de la división de tractores domésticos de PROTRAC estaba a punto de recomendar la estrategia de mercadotecnia y producción básica (B), cuando el consejo directivo insistió en que primero tendría que llevarse a cabo un estudio de investigación de mercados. Sólo después de dicho estudio el consejo estaría dispuesto a aprobar la selección de la estrategia de mercadotecnia y producción. Como resultado de la decisión del consejo, la administración consultó al grupo de investigación de mercados de la corporación en las oficinas centrales de PROTRAC. Se acordó que este grupo llevaría a cabo un estudio de investigación de mercados y prepararía un informe a más tardar en un mes, sobre si el estudio era alentador (A) o desalentador (D). Por lo tanto, en un plazo de un mes la gente que planea el nuevo producto tendría esta información adicional, la cual obviamente tendría que ser tomada en cuenta antes de tomar una decisión sobre la estrategia de mercadotecnia y producción.

La administración podría tratar la nueva información de manera informal; esto es, una vez que estuvieran disponibles los resultados de la prueba, la estimación de la administración de P(F), es decir la probabilidad de que el mercado fuera fuerte, sería actualizada. Si el estudio resultara ser alentador (A), la administración probablemente querría aumentar la estimación de P(F) de 0.45 a 0.50, 0.60 y quizá más. Si los resultados del estudio fueran desalentadores (D), entonces P(F) debería ser reducido. La pregunta es: ¿cómo deberá realizarse la actualización? Hay una manera formal de hacer esto, basada en el concepto de la *probabilidad condicional*. Las matemáticas de por qué funciona este método se explican con detalle en el apéndice 10.1. Aquí utilizaremos un método tabular, adecuado para usarse en un programa de hoja de cálculo.

CÓMO OBTENER PROBABILIDADES REVISADAS CON BASE EN NUEVA INFORMACIÓN

El grupo de investigación de mercados ha acordado hacer un informe con un plazo de un mes acerca de si, de acuerdo con su estudio, la prueba es alentadora (A) o desalentadora (D). Nosotros esperaríamos que su informe fuera por completo confiable; esto es, si su informe es alentador, entonces es totalmente seguro que el mercado será fuerte, y si su informe es desalentador entonces el mercado será definitivamente débil. Esto equivaldría a que su informe revelara siempre el estado verdadero de la naturaleza. Veremos, sin embargo, que un informe de mercadotecnia puede resultar útil a pesar de no ser totalmente confiable. Esto trae a colación el tema de cómo medir la "confiabilidad". Utilizaremos las probabilidades condicionales.

Probabilidad condicional Suponga que A y B son dos eventos. Una definición informal de **probabilidad condicional**, $P(A|B)$, es la probabilidad de que el evento A ocurra *dado* que el evento B ocurra. Por ejemplo, $P(A|F)$ sería la probabilidad condicional de que mercadotecnia proporcione un informe alentador *dado* que el mercado será de hecho fuerte. Si el informe de mercadotecnia fuera totalmente confiable, esta probabilidad condicional sería igual a 1; esto es, siempre daría un informe alentador cuando el mercado fuera de hecho fuerte. Sin embbargo, el registro histórico de la mercadotecnia no es perfecto. En el pasado, cuando el mercado ha sido fuerte, se han emitido informes alentadores sólo 60% de las veces. Por lo tanto, $P(A|F) = 0.6$. Dado que la mercadotecnia siempre emite un informe alentador o desalentador, el valor de $P(D|F)$ será $1 - 0.6$, o 0.4; esto es, emitieron un informe desalentador 40% de las veces en que en realidad el mercado era fuerte.

¿Qué sucede cuando el mercado es de hecho débil? La mercadotecnia es de alguna manera más acertada en la predicción de mercados débiles, pero aun así no es perfecta: $P(D|D') = 0.7$. Esto es, en el pasado, cuando el mercado de hecho ha sido débil, mercadotecnia ha emitido un informe desalentador 70% de las veces. Por supuesto, $P(E|D') = 0.3$.

Cómo calcular las probabilidades a posteriori Suponga que el grupo de mercadotecnia ha dado un informe alentador. ¿Cuál es la probabilidad de que el mercado sea en realidad fuerte? Es la probabilidad condicional $P(F|A)$. Observe que esta probabilidad en general *no* es igual a $P(A|F)$. Veremos que depende de la confiabilidad y de las estimaciones iniciales de las probabilidades de un mercado fuerte o débil. Estas estimaciones iniciales se llaman **probabilidades *a priori***, en tanto que las probabilidades condicionales tales como $P(F|A)$ se llaman **probabilidades *a posteriori***. La división de tractores domésticos ya ha estimado las probabilidades *a priori* (que se dieron en la figura 10.11) como $P(F) = 0.45$ y $P(D') = 0.55$.

La clave para obtener las probabilidades *a posteriori* es el teorema de Bayes. Utilizaremos un método de hoja de cálculo tabular justificado por el argumento que se da en el apéndice 10.1. Este proceso se lleva a cabo en una nueva hoja de cálculo de nombre "Probabilidades" en el mismo libro de trabajo (PROTRACDT.XLS) y aparece en la figura 10.17.[3] El procedimiento es como sigue:

1. Escriba las Confiabilidades (probabilidades condicionales) dadas como una tabla (A1:C4). *Nota*: la probabilidad condicional, $P(A|B)$, se encuentra en la intersección de la hilera A y la columna B. Observe también que la suma de las columnas debe dar 1, mientras que las sumas de las filas pueden ser mayores que, menores que o iguales a 1.
2. Cree una nueva tabla multiplicando cada columna de la tabla de confiabilidades por la probabilidad *a priori* correspondiente. Por ejemplo, multiplique cada entrada de la columna Fuerte de la figura 10.17 por $P(\text{Fuerte})$. Esta tabla es de *probabilidades conjuntas* (véase el apéndice 10.1).

[3]Observe que la tabla de probabilidades a posteriori en la figura 10.17 se lee de diferente manera que la tabla de confiabilidad. Por ejemplo, la probabilidad en la fila D y la columna D' de la tabla de probabilidades a posteriori es $P\{D'|D\}$, en tanto que la probabilidad en la fila D y la columna D' de la tabla de confiabilidad es $P\{D|D'\}$. En general, la probabilidad $P\{A|B\}$ en la tabla de probabilidades a posteriori se encuentra en la intersección de la *columna* A y la fila b. Esta regla convencional se emplea para simplificar el copiado de fórmulas en la hoja de cálculo que se utiliza para generar la probabilidad a posteriori. Si la regla convencional para la tabla de confiabilidad se tuviera que cumplir también en la tabla de probabilidades a posteriori, la primera *columna* de la tabla sería la primera fila en el paso 2, dividida entre la suma de sus filas; la segunda columna de la tabla sería la segunda fila en el paso 2 dividida entre la suma de sus filas, y así sucesivamente. Sería difícil llevar a cabo estas operaciones en un solo paso con la mayoría de los programas de hoja de cálculo.

B19 = =B12/$D12

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		*CONFIABILIDADES*						
2		**Fuerte**	**Débil**					
3	**Alentador**	0.6	0.3					
4	**Desalentador**	0.4	0.7	<--Probabilidad de D (desalentador) dado D (débil), p(D|D')				
5								
6		*PROBABILIDADES A PRIORI*						
7		**Fuerte**	**Débil**					
8		0.45	0.55					
9								
10		*PROBABILIDADES CONJUNTAS Y MARGINALES*						
11		**Fuerte**	**Débil**					
12	**Alentador**	0.27	0.165	0.435				
13	**Desalentador**	0.18	0.385	0.565	<--Probabilidad de D, p(D)			
14		0.45	0.55					
15					<--Probabilidad de D y D', p(D y D')			
16								
17		*PROBABILIDADES A POSTERIORI*						
18		**Fuerte**	**Débil**					
19	**Alentador**	0.621	0.379					
20	**Desalentador**	0.319	0.681	<--Probabilidad de D dado D', p(D|D')				
21								

Celda	Fórmula	Cópiese a
C8	=1 − B8	—
B12	= B3*B$8	B12:C13
D12	= SUMA (B12:C12)	D13
B14	= SUMA (B12:B13)	C14
B19	= B12/$D12	B19:C20

FIGURA 10.17

Cálculo de las probabilidades *a posteriori*

3. Para cada fila de esta nueva tabla, calcule la suma de las entradas. En el ejemplo a mano esto nos da las *probabilidades marginales*, *P*(A) y *P*(D), en las celdas D12 y D13.
4. Cree la tabla de "Probabilidades *a posteriori*" dividiendo cada entrada de fila de la tabla de probabilidades conjuntas entre la suma de fila que le corresponde (por ejemplo, B12 sería dividido entre D12).

En esta hoja de cálculo las tablas llamadas Confiabilidad y Probabilidades *a priori* están predeterminadas, y las tablas Probabilidades conjuntas y marginales y Probabilidades *a posteriori* se calculan de acuerdo con el procedimiento de cuatro pasos arriba mostrado. La hoja de cálculo facilita calcular la sensibilidad de las probabilidades *a posteriori* a la confiabilidad y a las probabilidades *a priori*. Por ejemplo, se puede utilizar el comando Tabla de datos para generar todas las probabilidades *a posteriori* de un mercado fuerte (*P*[F|A] y *P*[F|D]) para valores de la probabilidad *a priori* *P*(F) entre 0 y 1, en incrementos de 0.1. Los resultados se muestran en la figura 10.18. Los pasos para realizar esto en Excel son:

1. En la celda I3, escriba un valor inicial de 0.
2. Haga clic de nuevo en I3, después clic en Editar, Rellenar y después en Series.
3. Ahora haga clic en "Series en columnas" y escriba un valor inicial de 0.1 y un valor final de 1.0. Oprima el botón en Aceptar.
4. En las celdas J2:K2 escriba las fórmulas para las cantidades que queremos obtener (*P*[F|A] y *P*[F|D]) para cada uno de los valores de *P*(F) que indicamos en la columna I. Estas fórmulas son =B19 y =B20, respectivamente.
5. Resalte el área de I2:K13 y haga clic en Datos, después en Tabla.
6. Escriba la celda de entrada de columna como B8 y haga clic en Aceptar.
7. Excel calculará automáticamente las dos probabilidades condicionales para valores de *P*(F) entre 0 y 1.

I	J	K
	P(F|A)	*P(F|D)*
A priori, P(F)	**0.621**	**0.319**
0	0	0
0.1	0.182	0.060
0.2	0.333	0.125
0.3	0.462	0.197
0.4	0.571	0.276
0.5	0.667	0.364
0.6	0.750	0.462
0.7	0.824	0.571
0.8	0.889	0.696
0.9	0.947	0.837
1	1	1

FIGURA 10.18

Sensibilidad de las probabilidades a posteriori a las probabilidades a priori

Observe que cuando la probabilidad *a priori* de un mercado fuerte aumenta, también aumenta la probabilidad *a posteriori* de un mercado fuerte, ya sea en un resultado alentador o desalentador de la prueba. Observe también que la probabilidad *a posteriori* de un mercado fuerte es mayor que la probabilidad *a priori* si se da un resultado alentador de prueba, pero la probabilidad *a posteriori* es menor que la probabilidad *a priori*, si se da un resultado desalentador (excepto cuando *P*(F) = 0 o 1, en cuyo caso las probabilidades *a priori* y *a posteriori* son iguales).

CÓMO INCORPORAR PROBABILIDADES A POSTERIORI AL ÁRBOL DE DECISIÓN

Ahora representaremos el modelo de la administración con el árbol de decisiones presentado en la figura 10.19. El primer nodo (I) corresponde a la realización de la investigación de mercado. El nodo es circular, porque el resultado no es seguro. Hay dos posibles resultados. La prueba puede ser alentador (A) o desalentador (D); *P*(A) y *P*(D) representan las probabilidades de esos dos resultados y anteriormente se mostraron en las celdas D12 y D13 de la figura 10.17.

Si el resultado de la prueba es alentador, pasaremos al nodo II, que es cuadrado debido a que se debe tomar una decisión. La administración debe decidir la selección de una de las tres estrategias de mercadotecnia (A o B o C). Suponga que la administración selecciona A. Ahora llegamos al nodo IV, otra situación con dos resultados posibles, si el mercado es fuerte (F) o débil (D'). Si resulta ser fuerte, PROTRAC disfrutará de un rendimiento neto de 30, que es el valor terminal de la rama.

Es importante observar que el árbol se crea en el orden cronológico en el que se dispone de la información y se requieren las decisiones, esto es:

1. Resultado de la encuesta de investigación de mercados (alentador o desalentador).
2. Toma de decisión sobre cuál estrategia de mercadotecnia utilizar (agresiva, básica o cautelosa).
3. Estado del mercado (fuerte o débil).

Para resolver este árbol debemos asignar valores a *P*(F|A), *P*(D'|A), *P*(F|D), *P*(D'|D), *P*(A) y *P*(D). Las cuatro primeras probabilidades se encuentran en la tabla llamada Probabilidades *a posteriori* en la figura 10.17 (celdas B19:C20). Por ejemplo, la probabilidad *P*(D'|A) se encuentra en la *columna* D' y la *fila* A de la tabla (de nuevo, observe que esto es lo opuesto a la regla convencional utilizada para leer la tabla de Confiabilidad, pero resulta más conveniente para la representación en hoja de cálculo). Así, por ejemplo, *P*(D'|A) = 0.379.

Por lo tanto, el evento de un resultado de prueba alentador y el uso del teorema de Bayes nos permite actualizar el valor previo de *P*(F) de 0.45 a un valor mayor, *P*(F|A) = 0.621. Cálculos similares nos dan que *P*(F|D) = 0.319, y *P*(D'|D) = 0.681. Estas probabilidades son añadidas al árbol de decisiones. TreePlan pliega entonces el árbol de manera automática para resolver nuestro modelo de decisión. Para hacer esto en TreePlan básicamente seguimos los mismos pasos que antes.

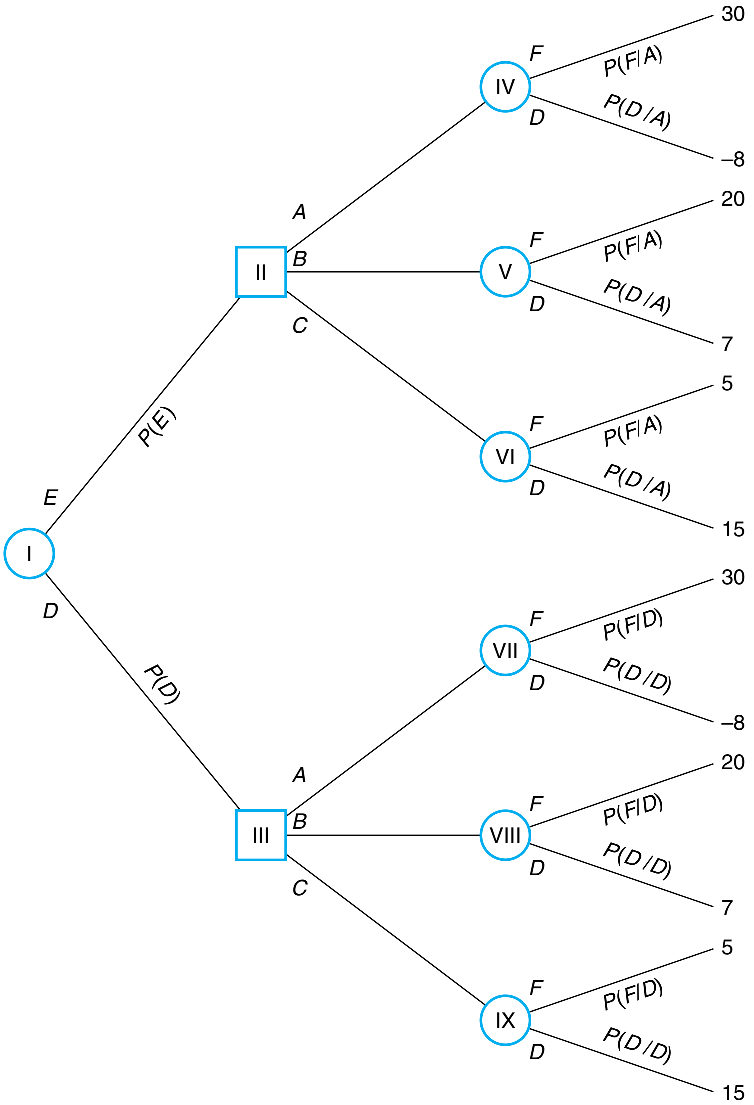


FIGURA 10.19

Árbol de decisiones con los resultados de la prueba

Los resultados se muestran en la figuras 10.20 y 10.21 (la parte superior e inferior del árbol). Los puntos más importantes se dan abajo:

1. Oprima Control para hacer aparecer el menú y seleccione “Nuevo árbol”. (*Nota*: TreePlan no puede tener más de un árbol en una hoja de cálculo, así que para este nuevo modelo creamos una nueva hoja de cálculo, llamada “PROTDT2.XLS”.)
2. Haga clic en el nodo de decisión predeterminado y oprima Control. Seleccione “Cambiar a evento” y haga clic en Aceptar.
3. En el nodo terminal, oprima Control y seleccione “Cambiar a decisión” con 3 ramas. Haga clic en Aceptar.
4. Repita el paso 3 para el otro nodo terminal.
5. Haga clic en el nuevo nodo terminal en la punta del árbol, oprima Control y seleccione “Cambiar a evento” con dos ramas. Haga clic en Aceptar.
6. Copie el nodo creado en el paso 5 en los otros 2 valores terminales más cercanos a él (utilice los comandos Copiar subárbol y Pegar subárbol de TreePlan, en vez de las herramientas normales Copiar y Pegar de Excel).
7. Una vez hecha la mitad superior del árbol (el Nodo II y todo a la derecha en la figura 10.19), podemos copiarlo y pegarlo en el Nodo III de manera efectiva.

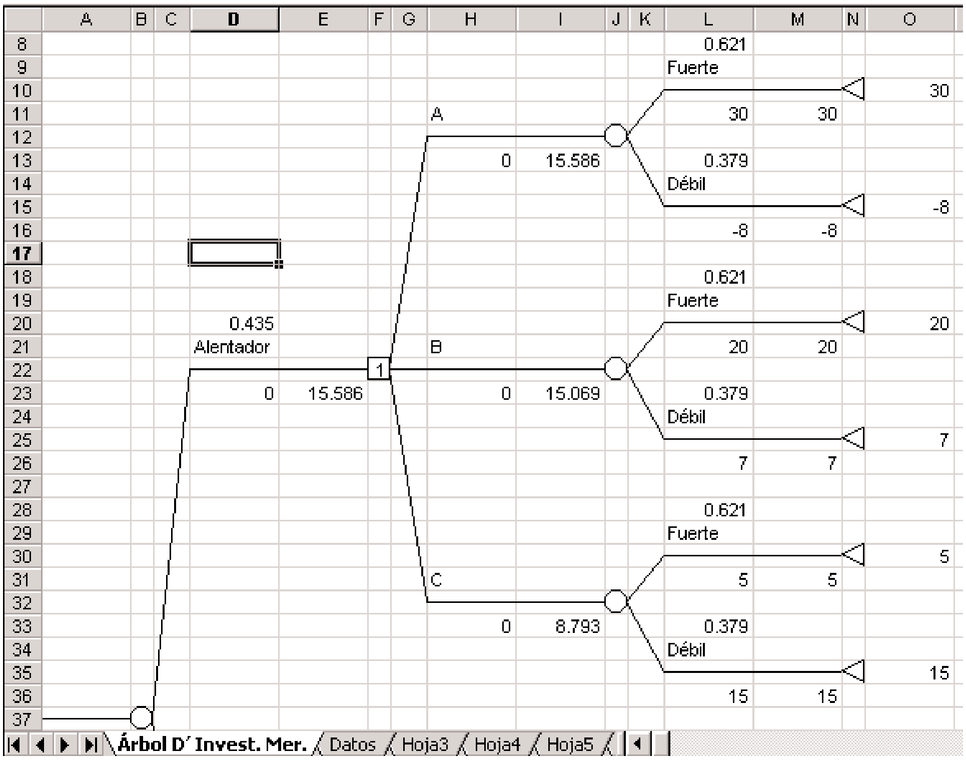


FIGURA 10.20

Mitad superior del árbol de decisiones con nueva información

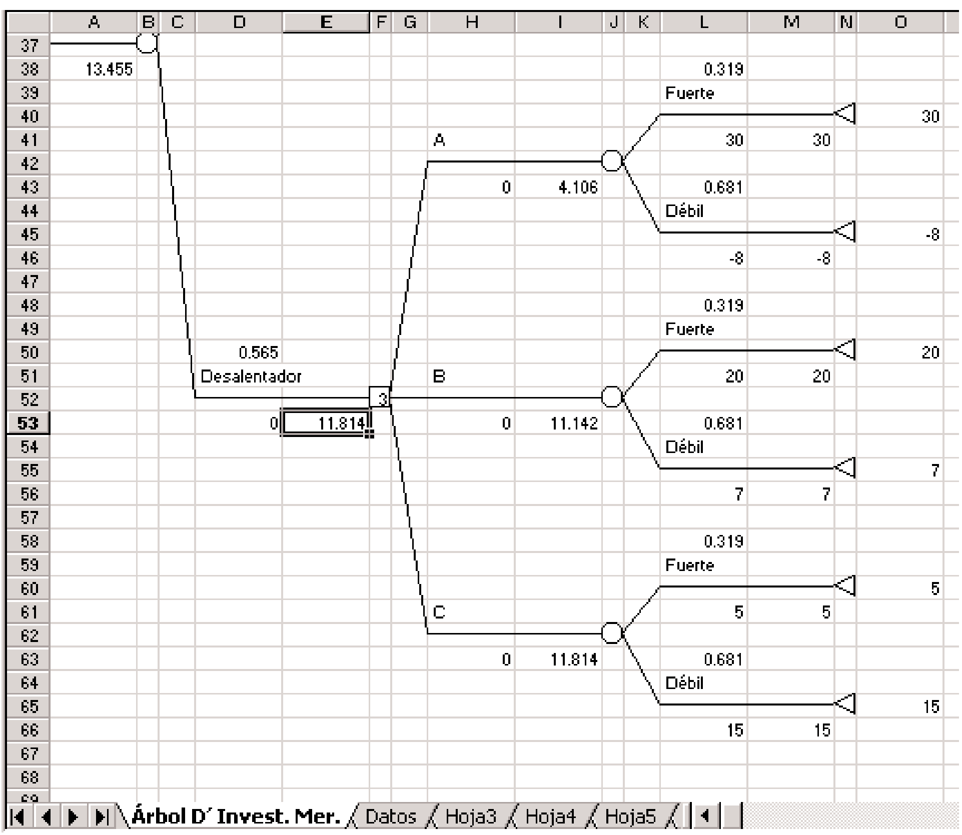


FIGURA 10.21

Mitad inferior del árbol de decisiones con nueva información

Estas figuras pueden utilizarse para determinar las decisiones óptimas. Podemos ver que si la prueba es Alentador, A (véase la figura 10.20), llegamos a la celda F22. Después, para maximizar el rendimiento esperado, debemos realizar la acción A (TreePlan indica esto con un "1" en la celda F22, lo cual significa que se debe tomar la primera rama); esto es, seguir la estrategia agresiva de producción y mercadotecnia. De manera similar, si el resultado de la prueba es Desalentador, D (véase la figura 10.21), debemos seguir la acción C. ¿Por qué? Porque 11.81 es el rendimiento esperado máximo cuando el resultado de la prueba es Desalentador.

EL VALOR ESPERADO DE LA INFORMACIÓN DE MUESTRA

Suponga que utilizamos las decisiones óptimas determinadas arriba para plegar un paso más el árbol de decisiones (que aparece en las figuras 10.20 y 10.21). La celda B37 (de la figura 10.21) nos muestra que el rendimiento esperado en el nodo de evento inicial es de

$$RE = 15.586(0.435) + 11.814(0.565) = 13.455$$

Este valor es el rendimiento esperado de llevar a cabo la prueba de mercado y tomar la decisión óptima después de determinar los resultados.

En la sección 10.6 vimos que si no se lleva a cabo la prueba de mercado, la decisión óptima es seleccionar B, la estrategia básica, y que esta decisión tiene un rendimiento esperado de 12.85. Claramente, entonces, la realización de la prueba de mercado aumenta el rendimiento esperado de PROTRAC en \$0.61 millones (=\$13.46 millones − \$12.85 millones). Aunque la prueba de mercado no es totalmente confiable, aun así tiene cierto valor (de \$0.61 millones, para ser precisos). De manera bastante apropiada, a esta cantidad se le llama **valor esperado de la información de muestra** (VEIM). En términos generales

$$\text{VEIM} = \begin{pmatrix} \text{máximo posible} \\ \text{rendimiento esperado} \\ \text{con información} \\ \text{información} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{máximo posible} \\ \text{rendimiento esperado} \\ \text{sin información} \\ \text{información} \end{pmatrix}$$

El VEIM es un límite superior en la cantidad que deberíamos estar dispuestos a pagar por esta información de muestra en particular.

Ahora calculemos el valor esperado de la información perfecta (VIEP). Recuerde de la sección 10.3 que ésta es la cantidad que la administración debe estar dispuesta a pagar por información perfecta. La tabla de retribuciones fue presentada originalmente en la figura 10.11. Si fuera seguro que el mercado será fuerte, la administración seleccionaría la decisión A y disfrutaría un rendimiento de 30. De manera similar, si fuera seguro que el mercado será débil, la administración seleccionaría la decisión C y obtendría un rendimiento de 15. ¿Cuánto debe pagar la administración por información perfecta? Dado que la información perfecta revelará que el mercado fuerte tiene una probabilidad de 0.45 y el mercado débil una probabilidad de 0.55, vemos que

$$\text{VEIP} = (30)(0.45) + (15)(0.55) - 12.85 = 8.90 \qquad \textbf{(10.2)}$$

La ecuación (10.2) nos dice que la información perfecta nos dará un aumento esperado de \$8.90 millones sobre el rendimiento esperado anterior. Éste es el máximo aumento posible en el rendimiento esperado que se puede obtener con nueva información. El valor esperado de la información de muestra es el incremento en el rendimiento esperado que se obtuvo con la información producida en la prueba de mercado. Dado que VEIP = 8.9 y VEIM = 0.61, podemos ver que la prueba de mercado no es muy eficiente. Si lo fuera, el valor de VEIM sería mucho más cercano al de VEIP. En otras palabras, conforme las probabilidades de una correcta información de muestra aumentan, VEIM se aproxima a VEIP. De hecho, cuando P(A|F) = 1.00 y P(D|D') = 1.00, entonces VEIM = VEIP.

10.9 DECISIONES SECUENCIALES: PROBAR O NO PROBAR

En la sección precedente, supusimos que el consejo directivo había decidido que se debería hacer un estudio de investigación de mercados. Entonces consideramos la pregunta de cómo debería utilizar la división de tractores domésticos de PROTRAC la información generada por el estudio, para actualizar el modelo de decisión. Retrocedamos un momento. Parece claro que la decisión de mandar hacer un estudio de mercado es básicamente similar a la decisión de adoptar una u otra estrategias de mercadotecnia y producción. La administración debe considerar cuidadosamente el costo de efectuar el estudio contra la ganancia que podría resultar de tener la información que el estudio proporcionaría. Suponga que la prueba de mercado tendrá un costo de $500,000 (o $0.5 millones). También es claro que la decisión de hacer o no hacer la prueba de investigación de mercados no es una decisión aislada. Si se realiza la prueba, la administración todavía deberá elegir entre una de las estrategias de mercadotecnia y producción. Por tanto, el valor de efectuar la prueba depende parcialmente de cómo PROTRAC utilice la información generada por la prueba. En otras palabras, el valor de una decisión inicial depende de una *secuencia* de decisiones y eventos inciertos que seguirán a la decisión inicial. Esto se llama un **modelo de decisión secuencial**.

ANÁLISIS DE DECISIONES SECUENCIALES

Éste es un modelo de administración extremadamente común, y en realidad es el tipo de situación para el que están diseñados los árboles de decisión. Es en situaciones donde hay una cantidad de decisiones y eventos interrelacionados, con más de un resultado posible, donde la capacidad de desplegar el modelo de manera gráfica es especialmente útil.

Las figuras 10.22 y 10.23 muestran el árbol de probar-no probar. En términos de estructura y de las probabilidades, usted puede ver que la rama superior (prueba) es el árbol de las figu-

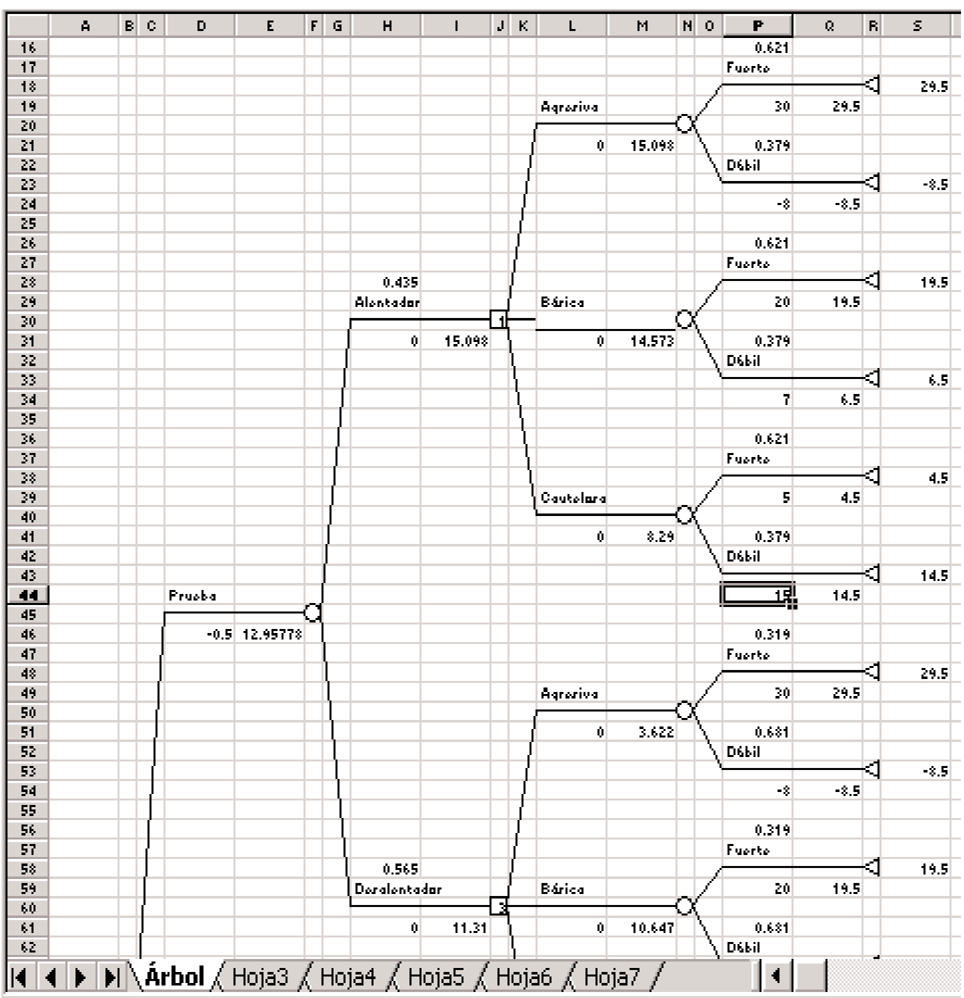


FIGURA 10.22

Mitad superior del árbol de decisiones con nueva información ras 10.20 y 10.21, con valores terminales ligeramente modificados que representan el costo de la prueba de mercado, y la rama inferior (no prueba) es el árbol de la figura 10.15. Para hacer esto en TreePlan seguimos básicamente los mismos pasos que antes. Creamos una nueva hoja de cálculo llamada "PROTDT3.XLS" para este nuevo modelo de decisión. Los puntos más importantes se dan abajo:

1. Oprima Control para hacer aparecer el menú y seleccione "Nuevo árbol".
2. En el primer nodo terminal (la celda F45 en la figura 10.22), oprima Control y seleccione "Cambiar a evento" con 2 ramas. Haga clic en Aceptar.
3. Haga clic en el nuevo nodo terminal en la parte superior del árbol (la celda J30 en la figura 10.22), oprima Control y seleccione "Cambiar a decisión" con 3 ramas. Haga clic en Aceptar.
4. Copie el nodo creado en el paso 3 al nodo terminal (la celda J60 en la figura 10.22) más cercano. (Utilice los comandos Copiar subárbol y Pegar subárbol de TreePlan, en vez de las herramientas Copiar y Pegar normales de Excel.)
5. Para terminar la mitad superior del árbol, haga clic en el nuevo nodo terminal que se encuentra en dicha parte (la celda N20 en la figura 10.22), oprima Control, y seleccione "Cambiar a evento" con 2 ramas. Haga clic en Aceptar.
6. Copie el nodo creado en el paso 5 a los otros cinco nodos terminales cercanos (celdas N30, N40, N50, N60, N70). Esto completará la parte superior del árbol.
7. Entonces podrá copiar el nodo de decisión con sus 3 ramas seguidas por nodos de evento de 2 ramas (celda J30 o J60) al nodo en la mitad inferior del árbol (celda F90 en la figura 10.23).

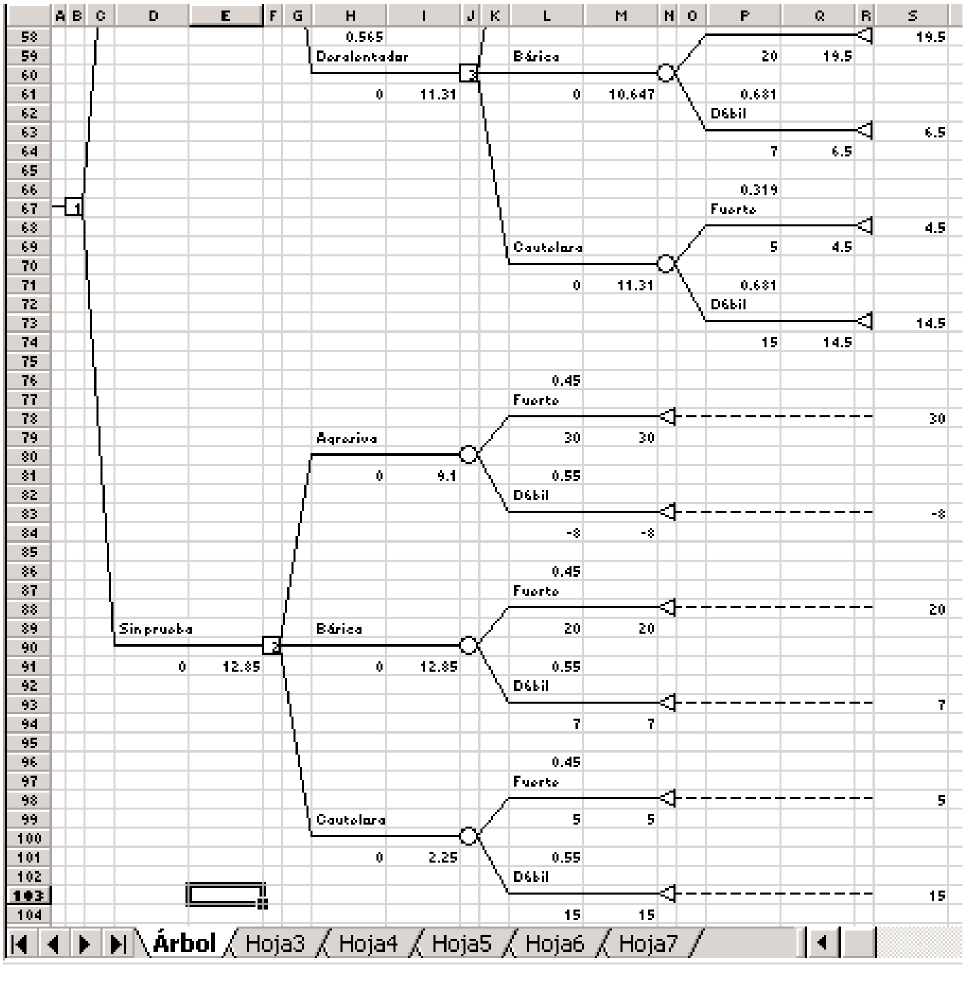


FIGURA 10.23

Mitad inferior del árbol de decisiones con nueva información

Los valores terminales ameritan cierto análisis. Se determinan en un proceso de dos pasos:

1. Asigne el flujo de efectivo apropiado a cada decisión y evento incierto. En este modelo hemos supuesto que la prueba de mercado cuesta $500,000. Dado que todos los costos y rendimientos están medidos en millones, se coloca una cifra de −0.5 en la rama de la prueba (celda D46 en la figura 10.23) y una cifra de 0 en la rama de sin prueba (celda D91 de la figura 10.23). De manera similar, se coloca una cifra de 30 en la rama superior (la celda P19 en la figura 10.22), debido a que ésta es la utilidad si PROTRAC selecciona A y el mercado es fuerte.
2. TreePlan determina los valores terminales sumando los flujos de efectivo en todas las ramas entre el primer nodo y la posición terminal. Por ejemplo, el número 29.5 en la posición terminal superior (celda S18 en la figura 10.22) viene de añadir los costos de la trayectoria Prueba-Alentador-Agresiva-Fuerte (es decir, la suma de $-0.5 + 0 + 0 + 30 = 29.5$).

De nueva cuenta, TreePlan resuelve este árbol plegándolo. Pliega un nodo circular (evento) calculando los rendimientos esperados. Pliega un nodo cuadrado (decisión) seleccionando la decisión que da el rendimiento esperado más elevado.

La *estrategia óptima* es un plan completo para todo el árbol. Especifica qué acción debe seguirse sin importar cuál de los eventos inciertos ocurrirá. Para determinar la estrategia óptima para el árbol de prueba-sin prueba, nos remitimos a las figuras 10.22 y 10.23. En el primer nodo de decisión (prueba-sin prueba), podemos ver que, dado que $12.96 > 12.85$, PROTRAC debería hacer la prueba de mercado. Si el resultado de la prueba es alentador (A), entonces la campaña Agresiva (A) es la mejor decisión, ya que es la que da el mayor rendimiento esperado (15.098). De manera similar, si el resultado de la prueba es desalentador (D), entonces la campaña Cautelosa (C) es la mejor decisión (con un rendimiento esperado de 11.31).

EL IMPACTO DE LAS UTILIDADES

Es sencillo incorporar utilidades a un árbol de decisiones. Suponga que las utilidades de todas las retribuciones posibles están dadas en la tabla 10.12 y fueron calculadas de manera similar a la mostrada en la sección 10.4.

TABLA 10.12 Utilidad de las retribuciones

RETRIBUCIÓN	UTILIDAD
−8.5	0.300
−8	0.320
4.5	0.695
5	0.709
6.5	0.748
7	0.760
14.5	0.910
15	0.914
19.5	0.941
20	0.943
29.5	0.962
30	0.963

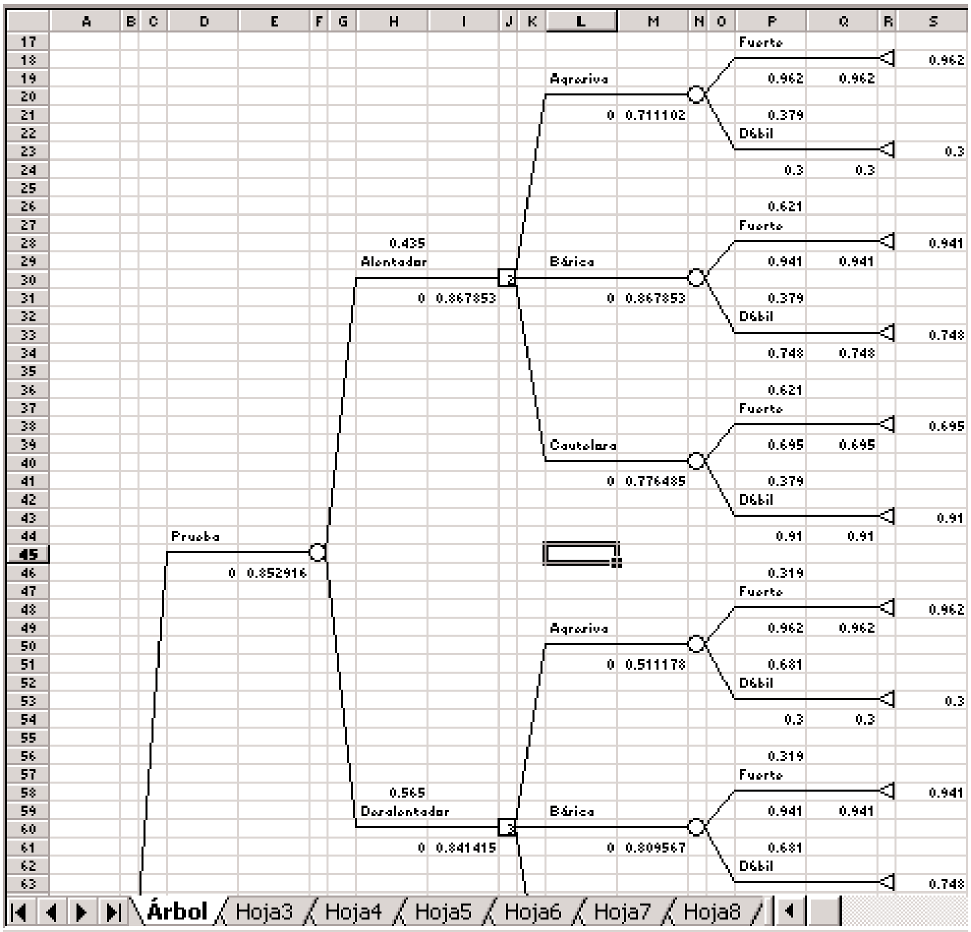


FIGURA 10.24

Mitad superior del árbol de prueba-sin prueba con las utilidades incorporadas

Una gráfica de "utilidad contra retribución" mostraría que PROTRAC es adversa al riesgo. Por ejemplo, la utilidad adicional de incrementar la retribución de 20 a 30 es de sólo 0.020(= 0.963 − 0.943), en tanto que la utilidad adicional de incrementar la retribución de 5 a 15 es de 0.205(= 0.914− 0.709).

Para incorporar las utilidades al árbol de decisiones, todo lo que necesita hacer es remplazar las retribuciones en las figuras 10.22 y 10.23 por sus utilidades y plegar el árbol como se hizo anteriormente. Esto se hace en una nueva hoja de cálculo (PROTDT4.XLS) y se muestra en las figuras 10.24 y 10.25.

Resulta que con estas utilidades la decisión óptima sigue siendo hacer la prueba. Sin embargo, si la prueba es alentadora, se prefiere ahora la alternativa B sobre la A, porque tiene una utilidad esperada mayor (0.868 en comparación con 0.711). A pesar de que la retribución máxima de A ($29.5) es mayor que la de B ($19.5), la retribución mínima de B es mayor que la de A ($6.5 en comparación con − $8.5). La combinación de la función de utilidad de PROTRAC y las probabilidades *a posteriori* dadas ahora causa una utilidad esperada de B mayor que la de A.

OTRAS CARACTERÍSTICAS DE TREEPLAN

Si usted hace clic en la característica llamada "Opciones", obtendrá el siguiente cuadro de diálogo (véase la figura 10.26), que muestra dos características adicionales de TreePlan. Primero observe que TreePlan tiene una función de utilidad exponencial predeterminada. Para activarla, haga clic en "Usar función de utilidad exponencial", y TreePlan utilizará una función de utilidad

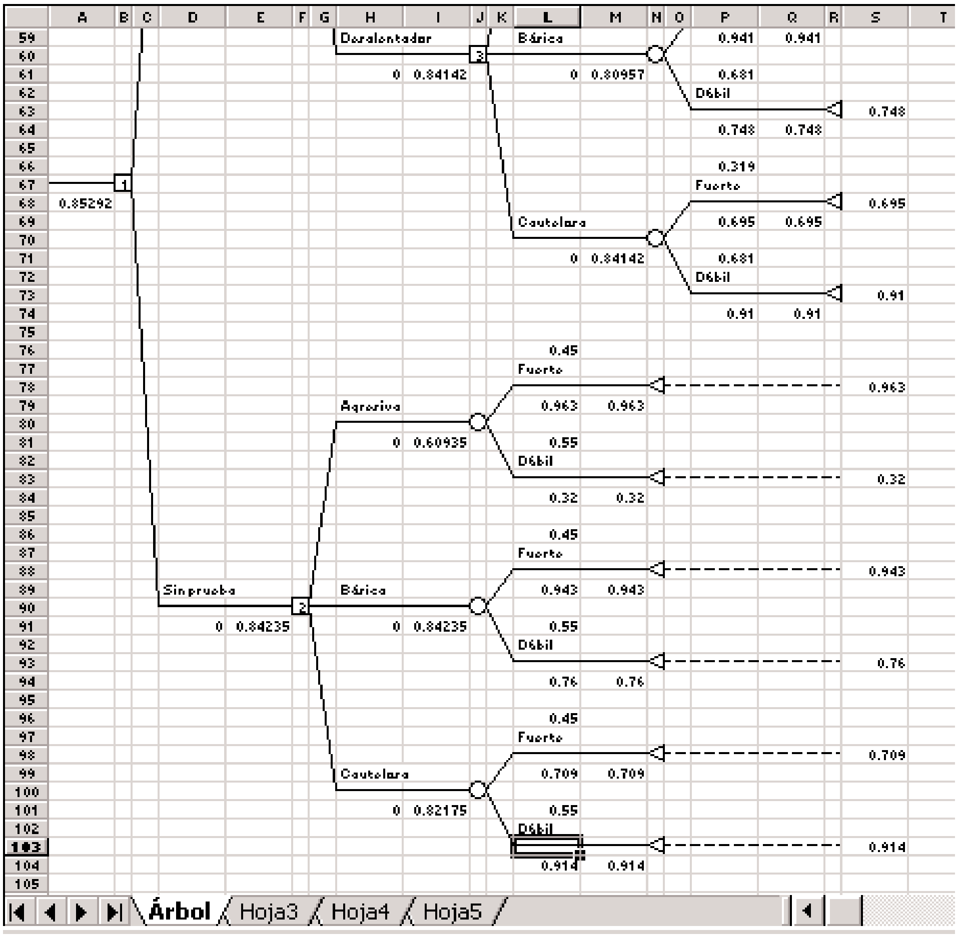


FIGURA 10.25

Mitad inferior del árbol de prueba-sin prueba con las utilidades incorporadas

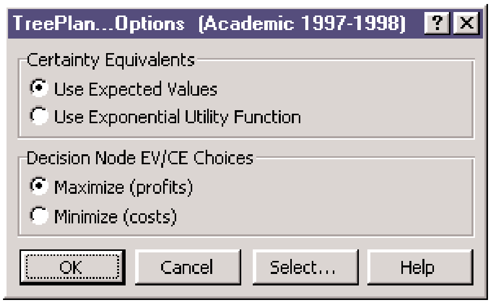
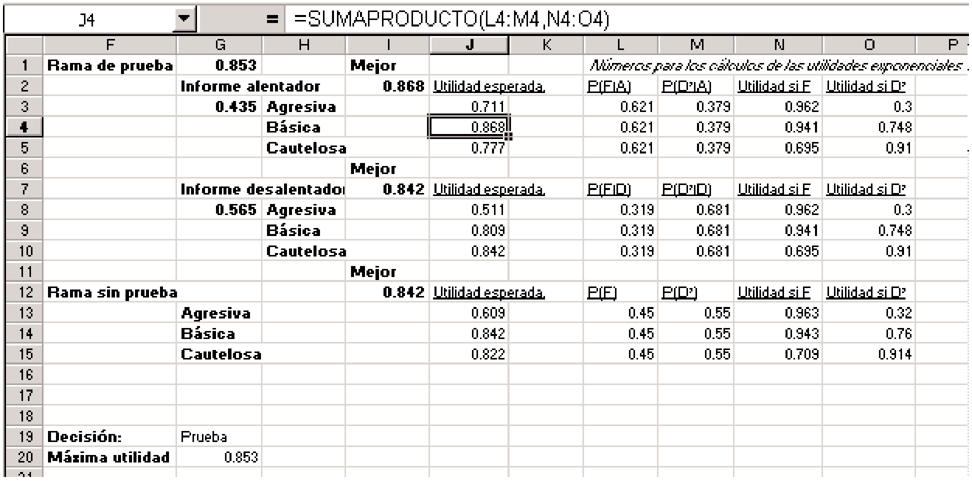


FIGURA 10.26

Cuadro de diálogo de opciones de TreePlan

adversa al riesgo para calcular la utilidad para los flujos de efectivo presentes de antemano en el árbol. La segunda característica es que TreePlan utiliza un método predeterminado de "Maximizar la utilidad" para plegar el árbol (es decir, en un nodo de decisión escoge la rama con la *mayor* retribución). Si usted quiere hacer un modelo de minimización de costos, deberá cambiar esto a "Minimizar costos", de tal forma que escoja la rama con la *menor* retribución en los nodos de decisión. También vale la pena mencionar que TreePlan tiene Ayuda en línea disponible para quien la necesite.



J4 = =SUMAPRODUCTO(L4:M4,N4:O4)

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	**Rama de prueba**	**0.853**		**Mejor**			*Números para los cálculos de las utilidades exponenciales*			
2		**Informe alentador**		**0.868**	Utilidad esperada.		P(F|A)	P(D'|A)	Utilidad si F	Utilidad si D'
3		**0.435**	**Agresiva**		0.711		0.621	0.379	0.962	0.3
4			**Básica**		0.868		0.621	0.379	0.941	0.748
5			**Cautelosa**		0.777		0.621	0.379	0.695	0.91
6				**Mejor**						
7		**Informe desalentador**		**0.842**	Utilidad esperada.		P(F|D)	P(D'|D)	Utilidad si F	Utilidad si D'
8		**0.565**	**Agresiva**		0.511		0.319	0.681	0.962	0.3
9			**Básica**		0.809		0.319	0.681	0.941	0.748
10			**Cautelosa**		0.842		0.319	0.681	0.695	0.91
11				**Mejor**						
12	**Rama sin prueba**			**0.842**	Utilidad esperada.		P(F)	P(D')	Utilidad si F	Utilidad si D'
13		**Agresiva**			0.609		0.45	0.55	0.963	0.32
14		**Básica**			0.842		0.45	0.55	0.943	0.76
15		**Cautelosa**			0.822		0.45	0.55	0.709	0.914
16										
17										
18										
19	**Decisión:**	Prueba								
20	**Máxima utilidad**	0.853								

Celda	Fórmula	Cópiese a
G1	= G3*I2+G8*I7	—
I2	= MAX(J3:J5)	I7, I12
G3	= D12	—
J3	= SUMAPRODUCTO(L3:M3, N3:03)	J4:J5, J8:J10, J13:J15
L3	= B$19	L3:M5
G8	= D13	—
L8	= B$20	L8:M10
L13	= B$8	L13:M15
G19	= ISI (G20=G1, “Prueba”, “Sin prueba”)	—
G20	= MAX(G1,I12)	—

FIGURA 10.27

Representación en hoja de cálculo del árbol de prueba-sin prueba

SENSIBILIDAD DE LA DECISIÓN ÓPTIMA PARA LAS PROBABILIDADES *A PRIORI*

Ya sea que se utilicen rendimientos en efectivo o utilidades en el árbol de decisiones, es importante ver qué tan sensible es la decisión óptima ante los diversos valores de los parámetros. Por ejemplo, ¿qué tan sensible es la decisión óptima a la estimación inicial de un mercado fuerte, la probabilidad *a priori* $P(\text{F})$? La hoja de cálculo que se muestra en la figura 10.27 (PROTDT5.XLS) reproduce el análisis gráfico mostrado en las figuras 10.24 y 10.25. El primer paso fue copiar la hoja de trabajo “Probabilidades” de PROTRACDT.XLS (véase figura 10.17) a las celdas A1:E20 (que no se muestran aquí). El resto de la hoja de cálculo se observa en la figura 10.27. La ventaja principal de la formulación de la hoja de cálculo es la facilidad con que se pueden cambiar los parámetros y recalcular el árbol de manera efectiva.

La gráfica de la figura 10.28 fue generada variando el valor de $P(\text{F})$ entre 0 y 1, en incrementos de 0.01. Esto se lleva a cabo fácilmente en Excel, utilizando la herramienta Tabla de datos como sigue:

1. En la celda A24, escriba un valor inicial de 0.
2. Haga clic de nuevo en A24, después en Editar, Rellenar y por último en Series.
3. Haga clic en “Series en columnas” y escriba un valor inicial de 0.01 y un valor final de 1.0. Haga clic en Aceptar.
4. En las celdas B23:C23 escriba las fórmulas para las cantidades que queremos obtener (Utilidad exp.[Prueba] y Utilidad exp.[Sin prueba]) para cada uno de los valores de $P(\text{F})$ que escribimos en la columna A. Estas fórmulas son =G1 e =I12, respectivamente.
5. Seleccione el área A23:C124 y haga clic en Datos, después en Tabla.
6. Escriba la celda de entrada de columna como B8 y haga clic en Aceptar.

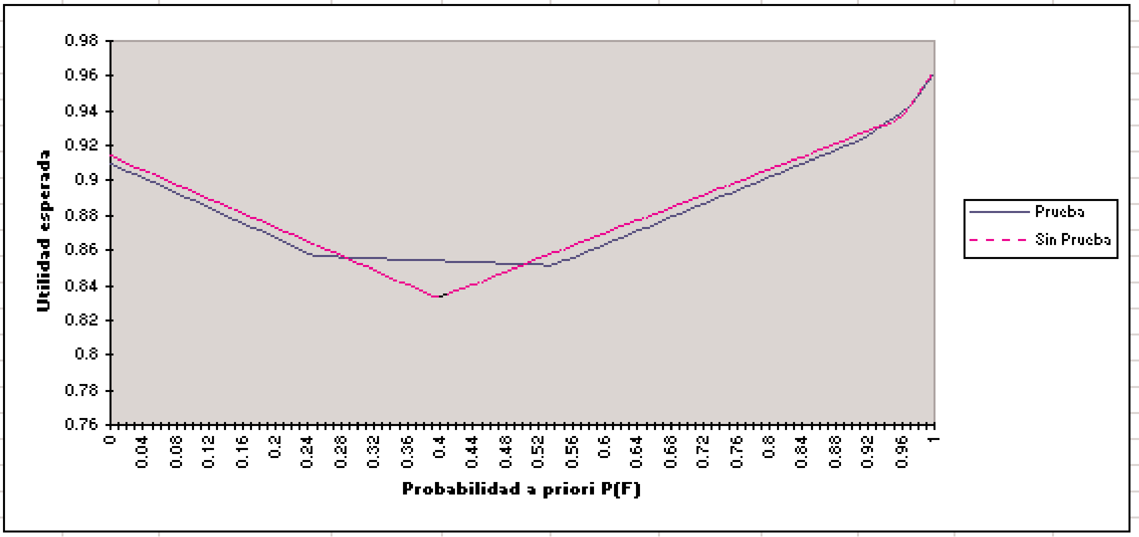


FIGURA 10.28

Utilidad esperada de prueba y sin prueba

7. Excel calculará automáticamente los dos valores de utilidad esperada para valores de *P*(F) entre 0 y 1.

La línea continua en la figura 10.28 representa la utilidad esperada en la decisión Prueba, mientras que la línea punteada representa la utilidad esperada de la decisión de Sin prueba. Dondequiera que las dos líneas se crucen, cambia la decisión óptima. Dado que las curvas se cruzan cuatro veces (a pesar de que la última vez resulta difícil de ver porque las líneas están muy juntas), la decisión óptima cambia cuatro veces: Sin prueba. Prueba, Sin prueba, Prueba, Sin prueba. Prueba es la decisión óptima para valores de *P*(F) entre 0.29 y 0.50 (aproximadamente) y entre 0.94 y 0.96. Sin prueba es óptima para valores de *P*(F) entre 0 y 0.29, entre 0.5 y 0.94 y entre 0.96 y 1.

10.10 ADMINISTRACIÓN Y TEORÍA DE LAS DECISIONES

Una decisión administrativa típica tiene las siguientes características:

1. Se hace una, y sólo una, vez (por ejemplo, ¿debo o no debo comprar 100 acciones de Intel hoy?).
2. El rendimiento depende de un evento incierto que ocurrirá en el futuro (por ejemplo, el precio de las acciones de Intel subirá o bajará), y no tenemos información histórica acerca de este evento futuro.

Tenemos conocimiento de eventos relacionados que pueden decirnos algo sobre la posibilidad de los diversos resultados (por ejemplo, el comportamiento del precio de las acciones de Intel la semana pasada o en las últimas 52 semanas). Pero no podemos llevar a cabo un experimento que nos proporcione una estimación buena, confiable, de las probabilidades reales (por ejemplo, no podemos llevar a cabo un experimento que nos diga el precio de las acciones de Intel la semana próxima).

¿De qué manera contribuye el material de este capítulo a nuestra comprensión sobre cómo enfrentar este modelo? En forma breve, este capítulo recomienda el siguiente marco conceptual:

1. Para cada decisión, determine la utilidad de cada resultado posible.
2. Determine la probabilidad de cada resultado posible.
3. Calcule la utilidad esperada de cada decisión.
4. Seleccione la decisión con la mayor utilidad esperada.

Una vez que se completan los primeros dos pasos, los siguientes dos son fáciles, por lo menos conceptualmente. Pero, ¿cómo puede usted *saber* las probabilidades y las utilidades?

La respuesta es que no hay valores *a saber*. No son entidades cuyo valor "real" pueda ser revelado por experimentación o análisis profundo. De hecho, estas dos cantidades, *probabilidades* y *utilidades*, son *subjetivas* y representan el *buen juicio y preferencias del administrador*. De seguro la evaluación por parte del administrador de estas dos cantidades puede ser influenciada por el estudio, pero no hay oportunidad de hacer un experimento directo con los fenómenos subyacentes, como lo habría, por ejemplo, en las ciencias físicas o biológicas.

Hay, sin embargo, una estructura a la cual aferrarse en este mar de subjetividad. La estructura es proporcionada por un dispositivo lógico llamado *lotería equivalente*. Este concepto le da a uno un *marco consistente* para cuantificar tanto probabilidades como utilidades. Vimos en la sección 10.4 cómo puede un administrador utilizar una lotería equivalente para crear una función de utilidad.

CÓMO VALORAR PROBABILIDADES SUBJETIVAS

El administrador puede utilizar este método para valorar una probabilidad subjetiva. Suponga, por ejemplo, que en estas fechas usted desea valorar la probabilidad de que Colin Powell sea el candidato republicano a la presidencia en el 2000. El primer paso es pensar en dos juegos. En el juego 1 usted recibe \$100 si Powell es el candidato y \$0 si no lo es. En el juego 2 usted recibe \$100 con la probabilidad p y \$0 con probabilidad de $1 - p$. Ahora usted ajusta el valor de p hasta que le sean indiferentes los dos juegos. El valor resultante de p es *su* probabilidad subjetiva de que Powell sea el candidato republicano en el 2000. Está muy claro que su estimación de las oportunidades de Powell puede diferir de la estimación de Colin Powell o para el caso de cualquier otro.

Hemos mencionado que la lotería equivalente le permite a uno cuantificar tanto la probabilidad como la utilidad subjetiva. Ahora queremos subrayar que los valores obtenidos a través de este proceso son personales y sujetos a juicio, y por tanto, por definición, variarán de una persona a otra. Por supuesto que entonces dos individuos, ambos enfrentándose a la misma decisión y utilizando el método recomendado, pueden llegar a decisiones diferentes. ¿Y por qué no? El método recomendado permite al administrador incorporar conocimientos (y experiencia) personales, y ciertamente no hay razón para creer que todos "sabrán" las mismas cosas en el momento de la decisión.

Sin embargo, un cínico podría preguntar: "¿Para qué molestarse con todo este mecanismo?" Si el juicio y el gusto juegan un papel tan importante en estas estimaciones, ¿no es mejor utilizar el juicio en un método holístico y seleccionar simplemente la alternativa que intuitivamente parezca ser la mejor? ¿Qué ganamos al estimar la probabilidad y la utilidad separadamente? La respuesta es que separar los dos juicios permite al administrador concentrar su atención en cada una de estas entidades (probabilidad y utilidad), una a la vez. El problema de un método intuitivo simple es que a los humanos se nos dificulta pensar en más de una cosa a la vez. Si se está pensando en retribuciones, es difícil estar considerando al mismo tiempo posibilidades y después combinarlas en la propia cabeza. En otras palabras, con el método simple e intuitivo es muy fácil enfatizar en exceso un resultado particularmente malo (o un resultado particularmente atractivo), y no tomar en cuenta el hecho que este resultado es en extremo improbable. Como ejemplo, piense en el número de personas que no viajan en avión, sino que lo hacen en automóvil, a pesar de que la probabilidad de morir en un accidente de automóvil es mucho mayor que la de morir en un accidente aéreo. (Probablemente, están influenciados por la creencia de que *pueden* sobrevivir a un accidente de automóvil, en tanto que sería improbable que sobrevivieran a un accidente aéreo.) *Al separar los juicios de probabilidad y utilidad se obliga al administrador a dar una consideración apropiada e independiente a cada uno, antes de combinarlos para determinar la decisión final.*

La revolución en la computación personal y la explosión de *software* que la acompaña ha tenido su impacto en el análisis de las decisiones. Hace 10 años, los programas de análisis de decisiones para uso general de los proveedores de *software* no estaban comercialmente disponibles. Algunas compañías crearon programas para sus propios fines, pero no estaban disponibles para el público en general. Hemos demostrado en este capítulo el uso de un complemento de hoja de cálculo muy popular, TreePlan, y también señalamos que existen otros paquetes de complemento para hojas de cálculo disponibles en el mercado (PrecisionTree de Palisade), así como paquetes individuales de *software* (DPL de Applied Decision Analysis, DATA, Arborist, Riskcalc y Supertree). Muchos de estos paquetes incluyen también la característica de trazar diagramas de influencia, que ayudan al administrador a estructurar todas las variables incluidas en el modelo, identificando cuáles variables influyen en las otras.

10.11 NOTAS SOBRE LA APLICACIÓN

Ralph Keeney, un connotado estudioso de este tema (véase Keeney y Reiffa; Keeney [B]), define el análisis de decisiones como "una formalización del sentido común para modelos de decisión demasiado complejos para el uso informal del sentido común". El análisis de decisiones, que se basa en axiomas enunciados originalmente por John von Neumann y Oskar Morgenstern, incluye la asignación de probabilidades y utilidades a resultados posibles y la maximización de la utilidad esperada. Este enfoque se aplica a modelos de gran complejidad que son típicamente secuenciales. Se puede considerar que consta de cuatro partes: (1) estructuración del modelo, (2) evaluación o juicio sobre las probabilidades de los resultados posibles, (3) determinación de la utilidad de los resultados posibles y (4) evaluación de las alternativas y selección de una estrategia.

La mayor parte del material de este capítulo se refiere al elemento (4), el proceso técnico de evaluación de las alternativas y selección de una estrategia. Esto resulta apropiado, ya que éste es el corazón conceptual del análisis de decisiones. En la práctica, sin embargo, ésta es la parte fácil del modelo. Una parte significativamente mayor del esfuerzo se invierte en las otras tres áreas. La estructuración del modelo, que incluye generar alternativas y especificar objetivos en términos numéricos medibles, es una tarea particularmente no estructurada. En algunas aplicaciones del mundo real se han cuantificado objetivos en las áreas de impacto ambiental, seguridad, salud pública, etcétera.

EL PAPEL QUE JUEGA EL JUICIO PERSONAL

Es importante comprender que el análisis de decisiones *no* proporciona un análisis totalmente objetivo de modelos complicados. Muchos aspectos del análisis de decisiones requieren del juicio personal (ya sea estructurando el modelo, estimando probabilidades o asignando utilidades). En muchos modelos complejos importantes simplemente no hay suficientes datos empíricos que sirvan de base para un análisis completo. A pesar de todo, la experiencia ha demostrado que el marco proporcionado por el análisis de decisiones ha resultado útil. Cierto, hay muchos factores cualitativos y no objetivos involucrados en cualquier toma de decisiones, pero el papel principal del análisis de decisiones consiste en hacerlo coherente, no sólo "objetivo" y libre de cualquier juicio subjetivo. Hay sitio para cierta subjetividad, pero no debe depender de cómo se "sienta" usted en ese momento.

En los primeros años de la década de los sesenta se empezó a aplicar exitosamente el análisis de decisiones a cierto número de modelos en el sector privado. Éstos incluían modelos de exploración petrolera, así como de inversiones de capital. A pesar de que el desarrollo ha continuado en modelos del sector privado, otras dos áreas generales de modelos han presenciado una gran variedad de aplicaciones del análisis de decisiones. En el campo del cuidado de la salud, el análisis de decisiones ha sido aplicado a modelos tan diferentes como la evaluación de nuevos fármacos, el análisis de estrategias para el tratamiento de las enfermedades, y la selección de tecnología médica para una instalación en particular. La segunda área de modelado corresponde a las aplicaciones en el gobierno. En particular, el análisis de decisiones ha sido aplicado en todos los aspectos, desde el origen de los huracanes, pasando por la negociación de estándares internacionales para buques tanque petroleros, hasta la elección entre la tecnología del carbón o la nuclear para plantas de energía eléctrica a gran escala (Keeney-A).

Una observación final: podemos ver que los árboles de decisiones pueden hacerse bastante grandes y engorrosos conforme el número de alternativas de decisión o estados de la naturaleza aleatorios se multiplica (≥ 3 a 5 decisiones o eventos aleatorios por nodo). En modelos de decisión donde la cantidad llega a ser muy grande, quizá tengamos que hacer suposiciones simplificantes de los resultados posibles, o limitar el número de alternativas de decisión a evaluar, si deseamos continuar con el análisis de decisiones. Por ejemplo, considere el resultado aleatorio de una demanda legal o la demanda aleatoria de un producto (uno puede darse cuenta fácilmente de que hay una escala continua de resultados posibles [es decir, un número infinito]) y que sería totalmente imposible modelar de una manera clara lo anterior en forma de árbol de decisiones. Hay dos opciones principales para manejar una situación como ésta: (1) aproximar los resultados continuos utilizando el enfoque Pearson-Tukey (se utilizan 3 ramas [que representan 0.05 , 0.5 y 0.95 cuantiles con coeficientes de ponderación "óptimos" de 0.185, 0.63 y 0.185, respectivamente] para aproximarse al número infinito de posibilidades), o (2) utilizar la técnica de simulación Monte Carlo que se presenta en el capítulo 11 y está diseñada para manejar distribuciones de probabilidad de naturaleza continua.

10.12 RESUMEN

La primera parte de este capítulo se ocupó de los fundamentos de la teoría de decisiones. Se hizo un resumen de ese material en la sección 10.5.

Las siguientes cuatro secciones del capítulo describieron el papel de los árboles de decisiones para facilitar el proceso de decisión. Un árbol de decisiones es un dispositivo gráfico para atacar un modelo en el cual se deben tomar decisiones secuenciales, y estas decisiones están entremezcladas con eventos que tienen varios resultados posibles. Es una regla convencional común que se utilicen nodos cuadrados para representar las decisiones y se usen nodos circulares para representar los eventos. Las ramas provenientes de un nodo cuadrado son las decisiones posibles, y las ramas provenientes de un nodo circular son los resultados posibles. Cuando un árbol de decisiones está completo, una trayectoria desde el principio del árbol hasta un nodo terminal representa un secuencia de decisiones y de eventos inciertos específicos. El árbol completo representa todas estas posibles secuencias.

La resolución de un árbol de decisiones es un proceso secuencial que comienza en los nodos de decisión y va hacia atrás hacia el principio del árbol en un proceso conocido como “plegar”. El proceso incluye dos pasos: las ramas provenientes de un nodo circular se pliegan asignando al nodo el valor esperado de los eventos inciertos, y la ramas que provienen de un nodo de decisión se pliegan seleccionando la alternativa con el rendimiento esperado máximo y asignando este valor al nodo de decisión. Este “plegado” ha sido en gran parte automatizado mediante el uso de complementos de hoja de cálculo como TreePlan. La solución del árbol de decisiones proporciona una estrategia óptima; esto es, define la secuencia de acciones que debería adoptarse para cualquiera de las secuencias posibles de eventos aleatorios.

El teorema de Bayes juega un papel importante en la elaboración de árboles de decisiones, porque éste es el dispositivo que hace posible la incorporación de nueva información al proceso de decisión de una manera formal. Este teorema está basado en el concepto de la probabilidad condicional, y por lo tanto se dedicó un espacio a este tema general.

El valor esperado de la información de muestra es una medida de valor para incorporar información de muestra en una decisión bajo condiciones de incertidumbre. El valor esperado de la información perfecta es un límite superior del valor esperado de la información de muestra.

Términos clave

Adverso al riesgo. La preferencia a evitar riesgos hacia abajo, reflejada precisamente en una función de utilidad cóncava.

Árbol de decisiones. Dispositivo gráfico para el análisis de decisiones bajo riesgo.

Arrepentimiento. Una medida de lo bien que pudo haber actuado quien toma la decisión si él o ella hubiera conocido el estado de la naturaleza (el costo de oportunidad de no tomar la mejor decisión para un estado de la naturaleza dado).

Criterio o enfoque maximax. Un criterio de decisión optimista para maximizar el rendimiento máximo.

Criterio o enfoque maximin. Un criterio de decisión conservador para maximizar el rendimiento mínimo.

Decisiones bajo certidumbre. Una decisión contra la naturaleza en la cual el estado de la misma se conoce con certeza.

Decisiones bajo incertidumbre. Una decisión contra la naturaleza en la cual no existen conocimientos sobre las posibilidades de los diversos estados de la naturaleza.

Decisiones bajo riesgo. Una decisión contra la naturaleza en la cual se conoce la distribución de probabilidades de los estados de la naturaleza.

Indiferente al riesgo. Se refleja en una función de utilidad lineal.

Lotería equivalente. Un dispositivo para crear funciones de utilidad.

Modelo de decisión secuencial. Un modelo en el cual el valor de la decisión inicial depende de decisiones subsecuentes y eventos inciertos.

Nodo circular. Indica un evento no determinístico en un árbol de decisiones.

Nodo cuadrado. Punto en el cual se debe tomar una decisión en los diagramas de árboles de decisiones.

Nodo terminal. Nodo en el árbol de decisiones al cual no le siguen otros nodos.

Perfil de riesgo. En una decisión dada el perfil muestra todos los resultados posibles con sus probabilidades asociadas; esto por lo general en un formato gráfico.

Plegar. El proceso de resolución de un árbol de decisiones calculando hacia atrás.

Posición terminal. El final de una rama proveniente de un nodo terminal.
Probabilidad a posteriori. Una probabilidad actualizada. La actualización combina las probabilidades a priori y la nueva información utilizando el teorema de Bayes.
Probabilidad a priori. Los valores evaluados originalmente para las probabilidades.
Probabilidad condicional. La probabilidad de un evento (digamos B) dado que otro evento (digamos A) ocurra; se representa mediante $P(B|A)$, y es definido como $P(B|A) = P(B \text{ y } A)/P(A)$.
Propenso al riesgo. La preferencia a rendimientos hacia arriba, reflejada de manera precisa en una función de utilidad convexa.
Ramas. Las líneas provenientes de nodos en un árbol de decisiones.
Tabla de retribuciones. Es una tabla que muestra los rendimientos para cada una de las combinaciones posibles de estado de la naturaleza-decisión en una decisión contra la naturaleza.
Utilidad. En este capítulo, una medida del "aspecto atractivo" que un resultado tiene para un individuo.
Valor esperado de la información de muestra (VEIM). La diferencia entre el rendimiento esperado máximo posible con y sin información de muestra.
Valor esperado de la información perfecta (VEIP). Un límite superior del valor de la nueva información.
Valor terminal. El rendimiento neto asociado con una posición terminal.

Ejercicios de repaso

Verdadero-Falso

1. **V F** Los árboles de decisión implican secuencias de decisiones y resultados aleatorios.
2. **V F** En la teoría de decisiones, los rendimientos dependen de las acciones de un adversario indiferente llamado "naturaleza".
3. **V F** Uno de los aspectos subyacentes de la teoría de las decisiones es que, independientemente de lo que supongamos respecto a la naturaleza en términos de si conocemos las probabilidades de los diferentes estados aleatorios, llegamos al mismo criterio para seleccionar la "mejor decisión".
4. **V F** Muchos modelos de optimización determinísticos pueden considerarse como decisiones tomadas bajo certidumbre, donde sólo hay un estado de la naturaleza y uno selecciona la decisión que maximice los rendimientos.
5. **V F** Una manera de tratar la toma de decisiones en el contexto de "incertidumbre" es tratar todos los estados de la naturaleza como igualmente posibles y maximizar el rendimiento esperado.
6. **V F** El cálculo del valor de la información perfecta se basa en el concepto de que toda la aleatoriedad ha sido eliminada.
7. **V F** La maximización del rendimiento neto esperado en dólares siempre lleva a la misma política óptima que la minimización del arrepentimiento esperado.
8. **V F** Una función de utilidad adversa al riesgo es convexa.
9. **V F** Los árboles de decisiones se resuelven plegando hacia delante.
10. **V F** El teorema de Bayes proporciona una fórmula sobre cómo utilizar nueva información para actualizar una estimación de probabilidad a priori.

Opción múltiple

11. La teoría de decisiones se ocupa de
    - **a.** la cantidad de información disponible
    - **b.** los criterios para medir la "bondad" de una decisión
    - **c.** seleccionar las decisiones óptimas en modelos secuenciales
    - **d.** todo lo anterior
12. Hablando de decisiones bajo riesgo, ¿cuál de los siguientes enunciados no es verdadero?
    - **a.** Suponemos que quien toma la decisión conoce la probabilidad de que cada estado de la naturaleza ocurrirá.
    - **b.** Utilizamos el criterio de maximizar el rendimiento.
    - **c.** Utilizamos el criterio de maximizar el rendimiento esperado.
    - **d.** Utilizamos el criterio de minimizar el arrepentimiento esperado.
13. ¿Cuál de los siguientes criterios *no* es aplicable en decisiones bajo incertidumbre?
    - **a.** rendimiento maximin
    - **b.** rendimiento maximax
    - **c.** arrepentimiento minimax
    - **d.** maximización del rendimiento esperado
14. El rendimiento maximin, el rendimiento maximax y el arrepentimiento minimax son criterios que
    - **a.** llevan a la misma decisión óptima
    - **b.** pueden utilizarse sin probabilidades
    - **c.** tanto a como b
15. El valor esperado de la información perfecta (VEIP)
    - **a.** coloca límites dobles (superior e inferior) sobre cuánto se debe pagar para reunir información
    - **b.** puede determinarse sin utilizar probabilidades
    - **c.** se refiere a la utilidad de la información adicional
    - **d.** es igual al arrepentimiento esperado de la decisión óptima bajo riesgo
16. El concepto de utilidad es una manera de
    - **a.** medir el aspecto atractivo del dinero
    - **b.** tomar en cuenta la aversión al riesgo
    - **c.** tomar en cuenta la inclinación al riesgo
    - **d.** tanto a como b
    - **e.** a, b y c
17. ¿Cuál de los siguientes enunciados no es aplicable a un árbol de decisiones?

a. Un nodo cuadrado es un punto en el cual se debe tomar una decisión.
b. Uno nodo circular representa un encuentro con la incertidumbre.
c. Uno escoge una secuencia de decisiones que tenga la mayor probabilidad de éxito.
d. Uno intenta maximizar el rendimiento esperado.

18. El valor esperado de la información perfecta (VEIP)
a. muestra el costo necesario para producir información perfecta sobre el futuro
b. muestra el aumento máximo posible en el rendimiento esperado con información de muestra
c. señala el aumento esperado en la información requerida para seleccionar la decisión óptima
d. todo lo anterior

19. Cuando se calcula el valor esperado de la información perfecta (VEIP), es importante que el pago se haga
a. antes de recibir la información
b. después de recibir la información
c. de manera irrevocable
d. tanto a como c

20. Cuando las decisiones se toman secuencialmente en el tiempo
a. no se pueden emplear los árboles de decisiones
b. se debe utilizar el teorema de Bayes
c. el valor terminal al final de cada secuencia de ramas es un flujo de efectivo neto
d. el valor terminal al final de cada secuencia de ramas es el flujo de efectivo esperado

Respuestas

1. V
2. V
3. F
4. V
5. V
6. F
7. V
8. F
9. F
10. V
11. d
12. b
13. d
14. b
15. d
16. e
17. c
18. b
19. d
20. c

Problemas

10-1. Observe la tabla de retribuciones 10.13, en la cual las entradas están en rendimientos netos en dólares. Suponga que ésta es una decisión sin ningún conocimiento de los estados de la naturaleza.
(a) ¿Cuál es la decisión óptima, si se utiliza el criterio de Laplace?
(b) ¿Cuál es la decisión óptima si se utiliza el criterio maximin?
(c) ¿Cuál es la decisión óptima si se utiliza el criterio maximax?
(d) Genere una tabla de retribuciones en la cual las entradas sean de arrepentimiento.
(e) ¿Cuál es la decisión óptima si se utiliza el criterio de arrepentimiento minimax?

TABLA 10.13

DECISIÓN	ESTADO DE LA NATURALEZA 1	2	3	4
1	35	22	25	12
2	27	25	20	18
3	22	25	25	28
4	20	25	28	33

10-2. Observe la tabla de retribuciones 10.14, en la cual las entradas son rendimientos netos en dólares. Suponga que ésta es una decisión sin conocimiento de los estados de la naturaleza.
(a) ¿Cuál es la decisión óptima si se utiliza el criterio de Laplace?
(b) ¿Cuál es la decisión óptima si se utiliza el criterio maximin?
(c) ¿Cuál es la decisión óptima si se utiliza el criterio maximax?
(d) Genere una tabla de retribuciones en la cual las entradas sean de arrepentimiento.
(e) ¿Cuál es la decisión óptima si se utiliza el criterio de arrepentimiento minimax?

TABLA 10.14

	ESTADO DE LA NATURALEZA		
DECISIÓN	1	2	3
1	5	7	8
2	6	6	6
3	3	9	1

10-3. Observe otra vez la tabla de retribuciones 10.13. Suponga que se especifican las siguientes probabilidades para los estados de la naturaleza:

$$P(1) = 0.1, P(2) = 0.4, P(3) = 0.3, P(4) = 0.2$$

(a) Encuentre la decisión que maximice el rendimiento neto esperado en dólares.
(b) Encuentre la decisión que minimice el arrepentimiento esperado.
(c) Haga un comentario sobre la relación entre las respuestas de los incisos (a) y (b).

•• **10-4.** Considere una vez más la tabla de retribuciones 10.14. Suponga que se asignan probabilidades a los estados de la naturaleza como sigue:

$$P(1) = 0.3, P(2) = 0.6, P(3) = 0.1$$

(a) Encuentre la decisión que maximice el rendimiento neto en dólares.
(b) Encuentre la decisión que minimice el arrepentimiento esperado.
(c) Suponga que no se conocen $P(1)$ y $P(2)$, pero se estima que $P(3)$ es 0.1. Trace el rendimiento neto en dólares en función de $P(2)$ para las tres decisiones en la misma gráfica, y encuentre el rango de $P(2)$ para el cual cada decisión es la óptima.
(d) Trace en una misma gráfica el arrepentimiento esperado en función de $P(2)$ para las tres decisiones, y encuentre el rango de $P(2)$ para la cual cada decisión es la óptima.
(e) ¿Qué fue lo que encontró en las dos respuestas de arriba?

10-5. Phil Johnson, de Johnson's Printing en Chicago, debe decidir si acepta un contrato de trabajo de impresión para el gobierno o volar a Los Ángeles para participar en la licitación para un folleto. Restricciones en la capacidad le impiden realizar los dos trabajos, y tiene que decidir sobre el contrato del gobierno antes de comenzar el proceso de licitación. Él estima la tabla de retribuciones en términos del rendimiento neto en dólares, como se muestra en la tabla 10.15.

TABLA 10.15

	ESTADO DE LA NATURALEZA	
DECISIÓN	No obtener el trabajo del folleto, NT	Obtener el trabajo del folleto, T
Aceptar el contrato del gobierno, G	1000	1000
Aceptar el trabajo del folleto, F	−1000	4000

(a) ¿Cuál es la decisión óptima basándose en el criterio maximin?
(b) Si la probabilidad de obtener el trabajo del folleto es de 1/3, ¿cuál decisión maximizará su rendimiento neto esperado en dólares?
(c) Haga que $P(T)$ sea la probabilidad de obtener el trabajo del folleto. Trace el rendimiento esperado para cada decisión como función de $P(T)$ en el mismo eje.
(d) ¿Cuál es el valor más pequeño de $P(T)$ para el que Phil Johnson debe decidir ir a Los Ángeles si desea maximizar su rendimiento neto esperado en dólares?
(e) ¿Cuál es la decisión óptima, si el criterio de decisión es el de arrepentimiento minimax?

TABLA 10.16

DECISIÓN	ESTADO DE LA NATURALEZA			
	Frío	Fresco	Cálido	Caliente
Pequeño	0	1000	2000	3000
Mediano	−1000	0	3000	6000
Grande	−3000	−1000	4000	8000

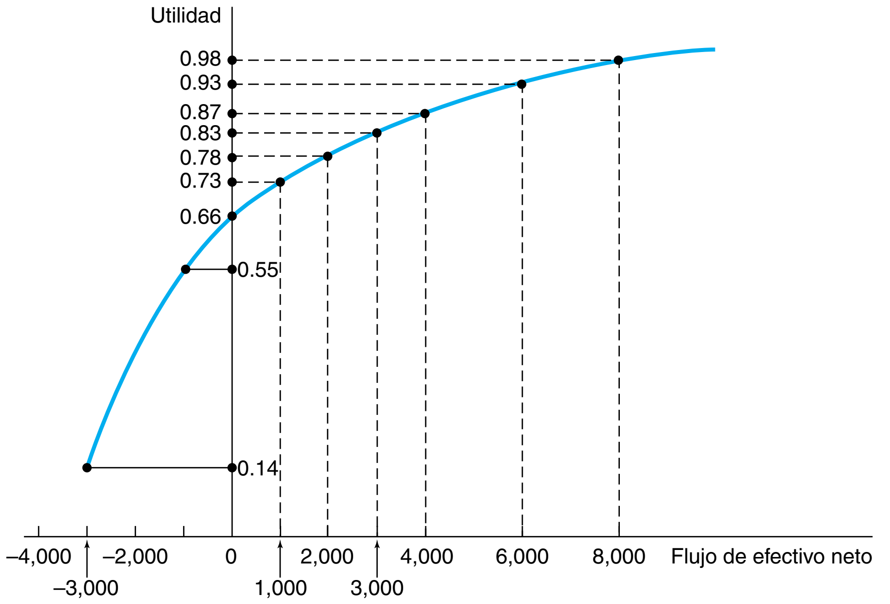


FIGURA 10.29
Función de utilidad

(f) ¿Cuál es la decisión óptima, si el criterio de decisión es el de minimizar el arrepentimiento esperado y $P(\mathrm{T}) = 1/3$?

(g) Suponga que el agente de compras del trabajo del folleto ya ha decidido a quién se le adjudicará la licitación, pero Phil no sabe el resultado. Si Phil piensa que $P(\mathrm{T}) = 1/3$, ¿cuál es la cantidad máxima que Phil debería pagar para obtener esta información?

(h) ¿Cómo llamaría usted a la cantidad calculada en el inciso (g)?

•• **10-6.** Un proveedor de *souvenirs* descubre que las ventas en julio dependen mucho del clima. Los productos deben ordenarse en enero. El mayorista ofrece paquetes surtidos pequeños, medianos y grandes a precios especiales, y el proveedor debe decidir la compra de uno de ellos. La tabla 10.16 muestra las retribuciones en términos de rendimiento neto en dólares. La función de utilidad del dinero se presenta en la figura 10.29. Si el proveedor cree que todos los estados de la naturaleza son igualmente posibles,

(a) ¿qué decisión maximiza el rendimiento neto esperado en dólares?

(b) ¿qué decisión maximiza la utilidad esperada?

(c) Explique la relación entre las respuestas a los incisos (a) y (b).

•• **10-7.** Phil Johnson de Johnson's Printing (véase el problema 10-5) ha decidido usar la función de utilidad que se muestra en la figura 10.29 para determinar si deberá hacer una oferta para el trabajo del folleto.

(a) ¿Cuál es la decisión óptima si el criterio de decisión es maximizar el rendimiento neto esperado en dólares y la probabilidad de obtener el trabajo del folleto es de 1/3? ¿Cuál es el rendimiento neto esperado en dólares de la decisión óptima?

(b) ¿Espera usted que cambie la decisión si se utiliza el criterio de decisión de maximizar la utilidad esperada? Analice su respuesta.

(c) ¿Cuál es la utilidad esperada de la decisión óptima?

(d) ¿Cuál es la utilidad esperada del rendimiento esperado en dólares al presentar una oferta para el folleto?

(e) ¿Cuál es la utilidad esperada de presentar una oferta para el folleto?

(f) ¿Son iguales las respuestas a los incisos (d) y (e)? ¿Deberían serlo?

•• **10-8.** Asigne una utilidad de 0 a un flujo de efectivo neto de -\$20,000 y una utilidad de 1 a un flujo de efectivo neto de \$50,000. Construya su propia función de utilidad siguiendo los siguientes pasos:

(a) Encuentre loterías equivalentes para flujos de efectivo netos de \$0 y \$20,000.

(b) Trace los cuatro puntos en su función de utilidad, y conéctelos con líneas rectas.

(c) Basándose en esta función de utilidad, ¿es usted adverso al riesgo, propenso al riesgo, indiferente al riesgo o nada de lo anterior?

••• **10-9.** Suponga que es adverso al riesgo y ha asignado los siguientes extremos a su función de utilidad:

$$U(-30) = 0$$
$$U(70) = 1$$

(a) ¿Cuál es un límite inferior en U(30)?

Suponga que usted es indiferente ante un pago seguro de 30 y una lotería con una probabilidad de 0.7 de ganar 70 con una probabilidad de 0.3 de perder 30.

(b) ¿Cuál es el límite inferior en su utilidad para un pago seguro de 50?

(c) ¿Cuál es el límite inferior más pequeño en su utilidad para un pago seguro de 10?

SUGERENCIA: Recuerde que una función de utilidad es no decreciente y, si quien toma la decisión es adverso al riesgo, entonces la función es cóncava.

••• **10-10.** Suponga que ha asignado los siguientes dos extremos a su función de utilidad:

$$U(-30) = 0$$
$$U(70) = 1$$

Suponga que usted es indiferente entre un pago seguro de 30 y una lotería con una probabilidad de 0.3 de ganar 70 con una probabilidad de 0.7 de perder 30. Además, usted siente que un pago seguro de 10 es equivalente a una apuesta con una probabilidad de 0.9 de perder 30 y una probabilidad de 0.1 de ganar 30.

(a) ¿Cómo describiría su función de utilidad? ¿Es usted "propenso al riesgo"?

(b) ¿Cuáles son los límites superiores e inferiores en U(50)?

(c) ¿Cuáles son los límites superiores e inferiores en U(25)?

•• **10-11.** El gerente de servicios al cliente de PROTRAC es responsable de acelerar los pedidos retrasados. Para realizar el trabajo de manera efectiva, cuando un pedido llega tarde el gerente debe determinar si la tardanza fue causada por un error en el pedido o un error en la entrega. Si un pedido está atrasado, debe haber ocurrido uno u otro de estos dos tipos de errores. Debido a la manera en la cual está diseñado este sistema, no pueden ocurrir los dos errores en un mismo pedido. Por su experiencia, el gerente sabe que un error en el pedido provocará que ocho de cada 20 pedidos se entreguen tarde, mientras que un error en la entrega hará que ocho de cada 10 pedidos se entreguen tarde. Históricamente, de 1,000 pedidos, han ocurrido 30 errores en el pedido y 10 errores en la entrega. Suponga que un pedido está atrasado. Si el gerente de servicios al cliente desea buscar primero el tipo de error que tiene la mayor probabilidad de ocurrir, ¿será un error de pedido o un error de entrega?

••• **10-12.** Scrub Professional Cleaning Service recibe contratos preliminares de ventas de dos fuentes: (1) sus propios representantes y (2) los administradores de edificios. Históricamente, 1/4 de los contratos han provenido de los representantes de Scrub y 3/4 de los administradores de edificios. Desafortunadamente, no todos los contratos preliminares terminan en contratos de venta reales. En realidad, sólo 3/8 de esos contratos preliminares que se reciben de administradores de edificios resultan en una venta, en tanto que 7/8 de aquellos que reciben los representantes de Scrub terminan en una venta. El rendimiento neto de Scrub por una venta es de \$1,000. El costo de procesar y dar seguimiento a un contrato preliminar que no termina en venta es de \$150.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un contrato preliminar termine en una venta? ¿Cuál es el rendimiento esperado asociado con un contrato de venta preliminar?

(b) ¿Cuál de las partes (los representantes o los administradores de edificios) contribuye más al rendimiento esperado?

Scrub archiva todas sus ventas según la fuente de referencia: esto es, tiene un archivo de las ventas resultantes de contratos preliminares obtenidos por los agentes de Scrub y otro para las ventas resultantes de contratos preliminares enviados por los administradores de edificios. Scrub sabe que John Jones tiene uno de sus contratos de venta, y desea tener más información sobre él.

(c) ¿En qué archivo debe buscar primero para tener la mayor probabilidad de encontrar su nombre?

••• **10-13.** La Clyde's Coal Company vende carbón en cargas de media tonelada, una tonelada, o dos toneladas. Existe una probabilidad de 0.20 de que el pedido provenga del pueblo A, 0.30 de que provenga del pueblo B y 0.50 de que sea del pueblo C. La frecuencia relativa del número de pedidos de cada tamaño y de cada pueblo aparece en la tabla 10.17.

TABLA 10.17 Frecuencia relativa del número de pedidos de cada pueblo

PUEBLO	TAMAÑO DE LA CARGA (TONELADAS) ½	1	2
A	0.50	0.00	0.50
B	0.00	0.50	0.50
C	0.25	0.75	0.00

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un pedido sea de media tonelada?
(b) Si un pedido es de media tonelada, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del pueblo A?
(c) Clyde obtiene una utilidad diferente en cada tipo de carga de carbón y en cada ciudad. Las cifras de la utilidad aparecen en la tabla 10.18. Encuentre la utilidad esperada por carga para Clyde.

TABLA 10.18 Utilidad en dólares por carga

PUEBLO	TAMAÑO DE LA CARGA (TONELADAS) ½	1	2
A	100	190	370
B	90	200	360
C	70	130	270

10-14. El Dog and Pony Show de Walter está programado para su presentación en Cedar Rapids el 10 de julio. La utilidad que obtengan depende en gran medida del clima. En particular, si el clima es lluvioso, el espectáculo pierde $15,000 y si es con sol, el espectáculo obtiene una utilidad de $10,000. (Suponemos que todos los días son lluviosos o soleados.) Walter puede decidir cancelar el espectáculo, pero si lo hace, perderá el depósito de $1,000 que hizo cuando aceptó la fecha. Los registros históricos muestran que en julio 10 llovió 1/4 de las veces que llovió en los últimos 100 años.
(a) ¿Qué decisión deberá tomar Walter para maximizar su rendimiento neto esperado en dólares?
(b) ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta?

10-15. Considere el modelo que enfrenta Walter en el problema 10-14. Walter tiene la opción de comprar un pronóstico de Victor's Weather Wonder. La exactitud del Victor's varía. En aquellas ocasiones en que ha llovido, ha acertado (es decir, predijo lluvia) el 90% de las veces. Por otro lado, cuando ha habido sol, ha estado acertado (es decir, predijo sol) sólo el 80% de las veces.
(a) Si Walter tuviera el pronóstico, ¿qué estrategia debería seguir para maximizar su rendimiento neto esperado en dólares?
(b) ¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar Walter por el pronóstico?

10-16. Un apostador tiene la oportunidad de jugar el siguiente juego en dos etapas: en la etapa 1 él paga $5 y saca una bola al azar de una urna, que contiene 5 bolas blancas y 5 rojas. Las bolas son idénticas, excepto por el color. El jugador puede ahora retirarse o pasar a la etapa 2, con un costo de $10 adicionales. En la etapa 2, si sacó una bola blanca en la etapa 1, el jugador saca una bola al azar de una urna blanca con 2 bolas azules y 8 verdes. Si en la etapa 1 sacó una bola roja, el jugador saca una bola al azar de una urna roja que contiene 6 bolas azules y 4 verdes. Si en la etapa 2 el jugador saca una bola azul, la casa le paga $35. Si saca una bola verde, la casa le paga $0. Utilice un árbol de decisiones para determinar la estrategia óptima para el jugador.

10-17. Cierta firma de ventas al menudeo divide a los solicitantes de crédito en dos categorías, riesgos malos y riesgos buenos. Las estadísticas indican que, según los estándares de la firma, el 10% de la población sería clasificada como un riesgo malo. La empresa utiliza un mecanismo de clasificación de riesgo para decidir si se debe conceder el crédito a un solicitante. La experiencia sugiere que si un riesgo bueno solicita crédito, el crédito se le otorgará 90% de las veces. Si solicita crédito un riesgo malo, se le otorgará crédito 20% de las veces. La administración cree que es razonable suponer que las personas que solicitan crédito se seleccionan al azar dentro de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona a la que se le otorgue el crédito resulte ser un mal riesgo? (Utilice el teorema de Bayes.)

10-18. Tres trabajadores producen cierto componente a la misma velocidad. Larry hace 3 piezas defectuosas de 100 en promedio, mientras que Moe y Curly promedian 6 y 9 piezas defectuosas de cada 100, respectivamente.

(a) ¿Cuántas piezas defectuosas esperaría usted en 1,000 producidas?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza defectuosa seleccionada al azar fuera producida por Curly?

10-19. Johnson's Metal (JM), un pequeño fabricante de piezas metálicas, está tratando de decidir si entra a competir para ser un proveedor de cajas de transmisión para PROTRAC. Para competir, la firma debe diseñar un dispositivo de prueba para el proceso de producción y producir 10 cajas que PROTRAC probará. El costo de desarrollo, esto es, del diseño y construcción del dispositivo y las cajas de prueba, es de $50,000. Si JM obtiene el pedido, un evento que se estima con una probabilidad de 0.4 de ocurrir, será posible vender 10,000 cajas a PROTRAC a $50 cada una. Si JM no obtiene el pedido, el costo de desarrollo se habrá perdido. Para producir las cajas, JM puede utilizar sus máquinas existentes o comprar una nueva forja. La reparación de las máquinas actuales costará $40,000 y el costo de producción por unidad es de $20. Sin embargo, si JM utiliza las máquinas actuales, corre el riesgo de incurrir en costos de tiempo extraordinario. La relación entre el costo del tiempo extraordinario y el estado de los otros negocios de JM aparece en la tabla 10.19. La nueva forja cuesta $260,000, incluyendo costos de montaje para las cajas de transmisión. Sin embargo, con la nueva forja, JM de seguro no incurriría en ningún costo por tiempo extraordinario, y el costo de producción sería de sólo $10 por unidad. Utilice un árbol de decisiones para determinar el conjunto de acciones óptimo para JM.

TABLA 10.19 Datos de costos y probabilidades para el modelo de Johnson's Metal

OTROS NEGOCIOS	PROBABILIDAD	COSTO DE TIEMPO EXTRAORDINARIO PARA JM
Pesado	0.2	$200,000
Normal	0.7	100,000
Ligero	0.1	0

••**10-20.** Es 1 de enero y Justin Case, el asesor legal de Chemgoo, se enfrenta a un reto difícil. Parece que la firma tiene dos demandas legales relacionadas con la violación de patentes. En cada demanda, la empresa tiene la opción de ir a juicio o buscar un arreglo fuera de la corte. La fecha del juicio para una de las demandas, que identificaremos inteligentemente como demanda 1, está programada para el 15 de julio y la segunda (la demanda 2, por supuesto) está programada para el 8 de enero del año siguiente. Los costos de preparación para cada uno de los juicios están estimados en $10,000. Sin embargo, si la empresa prepara ambos juicios, los costos de preparación para el segundo juicio serán de sólo $6,000. Estos costos pueden evitarse llegando a un acuerdo fuera de la corte. Si la firma gana la demanda 1, no paga multa alguna. Si pierde, pagará una multa de $200,000. Los abogados de la empresa estiman que la probabilidad de ganar la demanda 1 es de 0.5. La firma tiene la opción de arreglarse fuera de la corte por $100,000. La demanda 2 puede arreglarse fuera de la corte por un costo de $60,000. De otra manera, el juicio produciría uno de estos tres posibles resultados: (1) se declara inválida la demanda y la firma no paga multa; (2) la demanda es válida pero sin violación, y la empresa paga una multa de $50,000; o (3) se encuentra que es válida la demanda y con violación, y la firma paga una multa de $90,000. La posibilidad de estos resultados depende en gran medida del resultado de la demanda 1. El juez seguramente considerará la demanda 1 como un precedente importante. La evaluación por parte de los abogados de la probabilidad de los tres posibles resultados de la demanda 2 bajo tres conjuntos de condiciones posibles (relacionadas con la demanda 1) se presenta en la tabla 10.20.

TABLA 10.20

RESULTADOS	SIN INFORMACIÓN CONCERNIENTE A LA DEMANDA 1*	LA FIRMA GANA LA DEMANDA 1	LA FIRMA PIERDE LA DEMANDA 1
Inválida	0.3	0.7	0.1
Válida, sin violación	0.3	0.2	0.5
Válida, con violación	0.4	0.1	0.4

[a]Esto es, que la demanda 1 sea arreglada fuera de la corte.

(a) Represente el modelo de la firma con un árbol de decisiones.
(b) Resuelva el árbol de decisiones, y encuentre la estrategia óptima para la empresa.
(c) ¿Cuál es la pérdida esperada que tendrá la firma si sigue la estrategia óptima?
(d) ¿Cuáles son las decisiones que se tomarían si las demandas se analizaran de manera independiente, ignorando cualesquiera interacciones entre ambas? ¿Cuál es el ahorro esperado del análisis de decisión de este escenario?

SUGERENCIA: Dado que todas las cifras representan costos, puede que usted encuentre más sencillo trabajar con los costos y minimizar el costo esperado.

10-21. Jenny Lind es una escritora de novelas románticas. Tanto una compañía fílmica como una red televisiva quieren los derechos exclusivos de una de sus obras más populares. Si ella firma con la red recibirá una sola suma fija, pero si firma con la compañía fílmica la cifra que recibirá dependerá de la respuesta del mercado ante la película. Las retribuciones de Jenny están resumidas en la tabla 10.21.

TABLA 10.21

	ESTADO DE LA NATURALEZA		
DECISIÓN	Taquilla baja	Taquilla media	Taquilla alta
Firmar con la compañía fílmica	$200,000	$1,000,000	$3,000,000
Firmar con la red de TV	900,000	900,000	900,000

Si las estimaciones de probabilidad para los estados de la naturaleza son P(Pequeña) = 0.3, P(Media) = 0.6, P(Alta) = 0.1, ¿a quién deberá vender Jenny los derechos? ¿Cuánto es lo más que debe estar dispuesta a pagar para saber el monto de la taquilla, antes de decidir con quién firmar?

10-22. Kelly Construction desea entrar en el auge del negocio de la construcción de condominios para estudiantes. La compañía debe decidir la compra de suficiente terreno para la construcción de complejos de condominios de 100, 200 o 300 unidades. Muchos otros complejos están actualmente en construcción, así que Kelly no está segura de qué tan fuerte será la demanda para su complejo. Si la compañía es conservadora y construye sólo unas pocas unidades, pierde utilidades potenciales si la demanda resulta ser fuerte. Por otro lado, también le resultarían costosas muchas unidades sin vender. Se preparó la tabla 10.22, basada en tres niveles de demanda.

TABLA 10.22

	DEMANDA		
DECISIÓN	Baja	Media	Alta
Construir 50	$400,000	$400,000	$400,000
Construir 100	100,000	800,000	800,000
Construir 150	−200,000	500,000	1,200,000

(a) ¿Cuál es la decisión óptima si se utiliza el criterio maximin?
(b) ¿Cuál es la decisión óptima si se utiliza el criterio maximax?
(c) ¿Cuál es la decisión óptima si se utiliza el criterio de arrepentimiento minimax?
(d) Si P(Baja) = 0.3, P(Media) = 0.5, y P(Alta) = 0.2, ¿qué decisión maximizará el rendimiento neto esperado en dólares?
(e) ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta?

10-23. Marple Manufacturing está planeando la introducción de un nuevo producto. El costo de preparación para fabricar uno de los componentes del producto es muy elevado, así que Marple está pensando en comprar ese componente, en vez de fabricarlo. Sin embargo, una vez preparada para fabricar el componente, el costo variable por unidad de Marple sería bajo, en comparación con el precio de compra del componente. El gerente de materiales de Marple ha calculado en la tabla 10.23 la utilidad neta en miles de dólares para tres diferentes niveles de demanda. Los estados de la naturaleza tienen las probabilidades P(Baja) = 0.4, P(Media) = 0.3 y P(Alta) = 0.3. Dibuje un árbol de decisiones y utilícelo para decidir si Marple debe fabricar o comprar el componente.

TABLA 10.23

	DEMANDA		
DECISIÓN	Baja	Media	Alta
Fabricar componente	11	32	53
Comprar componente	15	30	45

10-24. Chuck conduce su automóvil hacia su trabajo (como asesor) en Palo Alto los miércoles. Regresa a San José el mismo día, justo a la hora pico de la tarde. Si toma la ruta 280 para ir a casa, él ha observado que su tiempo de viaje es muy variable de una semana a otra, pero si toma la ruta que se llama El Camino su tiempo de recorrido es relativamente constante. Basándose en esta experiencia, Chuck ha elaborado la tabla de retribuciones 10.24 que se muestra a continuación y que proporciona sus tiempos de viaje en minutos.

(a) Chuck calcula que más o menos 90% de las veces el tráfico será ligero. ¿Cuál es la ruta que debería tomar para minimizar su tiempo esperado de viaje?

(b) La esposa de Chuck, Boots, se preocupa mucho cuando él se retrasa, aunque sea sólo un poco. ¿Qué ruta recomendaría usted ahora? Explique por qué.

TABLA 10.24

	ESTADO DE LA NATURALEZA	
DECISIÓN	Tráfico ligero	Tráfico pesado
Tomar la ruta 280	25	55
Tomar El Camino	35	40

10-25. Un pequeño hospital en el condado rural de Albemarle compra mensualmente sangre de un banco distante. Cierto tipo raro de sangre debe ser reabastecido cada mes porque su vida en almacenamiento es precisamente de sólo un mes. Si se hace el pedido con un mes de adelanto, el costo para el hospital es de $10 por unidad. Si la demanda de este tipo raro de sangre durante el mes excede la provisión, debe ser ordenada especialmente con un costo de $100 la unidad. La demanda durante los últimos tres años se muestra en la tabla 10.25.

(a) Desarrolle una tabla de retribuciones para el hospital.

(b) ¿Cuántas unidades deberá pedir cada mes el hospital?

TABLA 10.25

DEMANDA	FRECUENCIA
0	24 meses
1	8
2	4
Total	36 meses

10-26. Lawrence Roberts, jefe de compras de Marple Manufacturing, debe decidir a qué proveedor comprarle un componente en particular. El proveedor A provee los componentes en lotes de 1,000 a $10 la unidad, en tanto que el proveedor B cobrará sólo $9.50 la unidad. Sin embargo, 20% del tiempo los lotes del proveedor B contienen 10% de componentes defectuosos y 80% del tiempo contienen 1% de componentes defectuosos, mientras que los lotes del proveedor A contienen 1% de defectuosos 99% de las veces y 3% de defectuosos 1% de las veces. El costo de un defecto para Marple Manufacturing es de $100, debido al elevado costo de desechar o retrabajar los ensambles que contienen componentes defectuosos

(a) Dibuje un árbol de decisiones para este modelo.

(b) Utilizando el criterio del costo esperado, ¿a cuál proveedor debe comprar Lawrence el componente?

10-27. Rick O'Shea es un camionero independiente que opera desde Tucson. Tiene la opción de llevar un cargamento a Denver o llevar un cargamento diferente a Salt Lake. Si elige el cargamento a Denver, tiene una probabilidad de 90% de encontrar ahí un cargamento de regreso a Tucson. Si no encuentra un cargamento de regreso, volverá a Tucson sin carga. Si elige el cargamento a Salt Lake, tiene una probabilidad de 50% de encontrar un cargamento de vuelta a Tucson. Sus retribuciones se muestran en la tabla 10.26.

TABLA 10.26

	CARGAMENTO DE REGRESO	SIN CARGAMENTO
Salt Lake	\$4000	\$3500
Denver	3850	3350

(a) Dibuje un árbol de decisiones para este modelo.
(b) Utilizando el criterio de rendimiento neto esperado en dólares, ¿a qué ciudad debe ir Rick?

•• **10-28.** La tabla de retribuciones de Jenny Lind (problema 10-21) se muestra en la tabla 10.27.

TABLA 10.27

	ESTADO DE LA NATURALEZA		
DECISIÓN	Taquilla baja	Taquilla media	Taquilla alta
Firmar con la compañía fílmica	\$200,000	\$1,000,000	\$3,000,000
Firmar con la red de TV	900,000	900,000	900,000
Probabilidad	0.3	0.6	0.1

Ella puede contratar a una empresa que se dedique a la investigación de mercados, para hacer una encuesta con un costo de \$100,000. El resultado de la encuesta consistirá en una respuesta del público favorable (F) o desfavorable (U) a la película. La capacidad de la firma para poner una tasa en el mercado medido mediante probabilidades condicionales es

$P(\text{F}|\text{Baja}) = .3$ $\quad$ $P(\text{U}|\text{Baja}) = .7$

$P(\text{F}|\text{Media}) = .6$ $\quad$ $P(\text{U}|\text{Media}) = .4$

$P(\text{F}|\text{Alta}) = .8$ $\quad$ $P(\text{U}|\text{Alta}) = .2$

(a) Dibuje un árbol de decisiones para este modelo.
(b) ¿Debe Jenny mandar a hacer la encuesta? ¿Cómo debe utilizar los resultados de la encuesta?
(c) ¿Cuál es el VEIM? ¿Cuánto es lo más que Jenny debería estar dispuesta a pagar por la encuesta?

••• **10-29.** Kelly Construction (problema 10-22) quiere reducir el grado de incertidumbre sobre el número de unidades que debe construir. Ha decidido llevar a cabo una encuesta, la cual dará por resultado una de las tres medidas de la demanda: M_1, débil; M_2, moderada; M_3, fuerte. La tabla de retribuciones aparece en la tabla 10.28. Las confiabilidades están dadas en la tabla 10.29.

TABLA 10.28

	DEMANDA		
DECISIÓN	Baja, D_1	Media, D_2	Alta, D_3
Construir 100, C_1	\$500,000	\$500,000	\$500,000
Construir 200, C_2	0	1,000,000	1,000,000
Construir 300, C_3	−700,000	400,000	1,500,000
Probabilidad	0.3	0.5	0.2

TABLA 10.29

	$P(M_j \mid D_i)$		
	D_1	D_2	D_3
M_1	.7	.3	.1
M_2	.2	.4	.3
M_3	.1	.3	.6

(a) Dibuje el árbol de decisiones para este modelo.
(b) ¿Cuál es la estrategia óptima para Kelly?
(c) ¿Cuál es el VEIM? Compárelo con el VEIP calculando la relación VEIM/VEIP y recordando que la relación no puede ser mayor que 1.

••• **10-30.** La tabla de retribuciones para el hospital del condado de Albemarle (problema 10-25) se presenta en la tabla 10.30.

TABLA 10.30

	DEMANDA		
CANTIDAD A ORDENAR	0, D_1	1, D_2	2, D_3
0, Q_1	0	100	200
1, Q_2	10	10	110
2, Q_3	20	20	20
Probabilidad	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

El administrador del hospital ha decidido revisar cada mes las cirugías programadas, para ver si habrá alguna operación que requiera del tipo raro de sangre. Puede encontrar que no hay cirugías programadas (C_1), una cirugía programada (C_2) o dos cirugías programadas (C_3), que requieran del tipo raro de sangre. Las probabilidades condicionales se dan en la tabla 10.31.

TABLA 10.31

	$P(F_j \mid D_i)$		
	D_1	D_2	D_3
C_1	.95	.05	.02
C_2	.04	.8	.08
C_3	.01	.15	.9

(a) Dibuje el árbol de decisiones para este modelo.
(b) ¿Cuál es el VEIM?
(c) ¿Qué ahorro puede esperar mensualmente el gerente al revisar el programa de cirugías?

Caso práctico Johnson's Metal

Shirley Johnson, presidenta de Johnson's Metal (JM), se enfrenta a la decisión que se presentó en el problema 10-19, pero un nuevo elemento se ha integrado al panorama. Shirley tiene la oportunidad de contratar a Compal, una firma de consultoría que realiza lo que califica como "análisis de la competencia". En esta situación en particular Compal ofrece hacer un estudio detallado de las otras firmas que competirán para proveer las cajas de transmisión a PROTRAC. Después del análisis, Compal informará a JM si las condiciones para que esta firma obtenga el contrato son alentadoras o desalentadoras.

Compal estableció que, de resultar las condiciones alentadoras, JM tendrá 0.5 de probabilidades de obtener el contrato de PROTRAC. Por otro lado, Compal estableció que, si las condiciones son desalentadoras, la probabilidad de que JM obtenga el contrato de PROTRAC es de sólo 0.35. En este momento Compal señala que las probabilidades de que las condiciones sean alentadoras o desalentadoras son igualmente posibles. Compal cobra $1,000 por sus servicios.

Shirley le pide a Linus Drawer, su asistente, que determine si JM debe contratar a Compal. De hecho, le pide a Linus que determine la estrategia óptima.

Linus construye el árbol de decisiones para el modelo y, trabajando de atrás hacia delante, determina que la estrategia óptima es

1. Contratar a Compal para que haga el estudio
2. Si las condiciones son alentadoras
   a. Construir el dispositivo de prueba
   b. Si JM obtiene el pedido, utilizar el montaje actual
3. Si las condiciones son desalentadoras
   a. Construir el dispositivo de prueba
   b. Si JM obtiene el pedido, utilizar el montaje actual

Hace una cita para analizar los resultados con Shirley. La junta transcurre como sigue:

Shirley: ¡Linus! Veo el árbol de decisiones y me deja muy impresionada, pero el resultado no tiene ningún sentido. ¿Por qué debo de pagarle a Compal $1,000 si seguimos el mismo curso de acción sin importar lo que diga?

Linus: Por supuesto, no por ello puedes decir que el análisis carezca de importancia, Shirley. Comprendo que tu comentario es válido ahora que el análisis está terminado, pero ¿cómo habrías sabido qué estrategia seguir sin el árbol de decisiones?

Shirley: ¡Linus! ¡No me entendiste! Independientemente de costos o probabilidades, yo digo que debemos construir el dispositivo de prueba, y utilizar nuestro montaje actual si conseguimos el pedido. Esto debe ser seguramente una mejor estrategia que emplear a Compal y luego hacer lo que ya teníamos decidido, sin importar lo que ellos digan.

Linus: Comprendo, pero sé que he elaborado el árbol de decisiones correctamente, así que no sé qué decirte.

Shirley: No tengo el tiempo ni el interés de revisar los detalles de tu análisis. Todo lo que sé es que quiero tomar una decisión sobre Compal mañana por la mañana y quiero tener una respuesta sensata. Tu trabajo es proporcionarme esa respuesta.

Preguntas

1. ¿Está Shirley en lo correcto? Es decir, ¿es imposible que la estrategia de Linus sea la óptima?
2. ¿Está Linus en lo correcto? Es decir, ¿es su análisis correcto dados los datos a su disposición?
3. Póngase en el papel de Linus; esto es, ahora su trabajo consiste en darle a Shirley una respuesta que tenga sentido.

Caso práctico — Perforar o no perforar

Terri Underhill ha sido asignada recientemente a la sección de análisis económico de Global Oil. Prescot Oil se ha ofrecido recientemente a comprar los derechos de Burns Flat a Global por $15,000 y Terri tiene la tarea de preparar la respuesta de Global. Los derechos de arrendamiento de Burns Flat le permiten a Global buscar petróleo en 320 acres de tierra al oeste de Oklahoma. Terri debe recomendar si se deben vender los derechos o perforar.

Si Global perfora, los resultados son inciertos. Con base en los registros de perforaciones en el oeste de Oklahoma y los precios del mercado actuales, Terri prepara una tabla que muestra los resultados posibles, la probabilidad de cada resultado y el rendimiento neto de Global (tabla 10.32).

Sin embargo, Terri sabe que no tiene que tomar la decisión basándose simplemente en registros históricos. DRI, Drilling Resource, Inc., llevará a cabo una prueba por $6,000 para determinar la formación subterránea del terreno de Burns Flat. La prueba determinará cuál de las tres clases (de placa, variada, ondulada) describe mejor la estructura subterránea. Las probabilidades condicionales de los resultados posibles varían según la estructura subterránea. La tabla 10.33 muestra los resultados de las últimas 50 pruebas.

Si se realiza la prueba, se abandona la oportunidad de vender los derechos. El mercado de derechos petroleros da por sabido que la decisión de vender después de llevar a cabo la prueba indicaría que la perforación no parece ser redituable.

TABLA 10.32

RESULTADOS POSIBLES	PROBABILIDAD	RENDIMIENTO NETO
Pozo seco	0.2	−100,000
Pozo de gas	0.4	40,000
Petróleo y gas	0.3	90,000
Pozo de petróleo	0.1	200,000

Preguntas

1. Con base en estos datos, ¿debe Global perforar o vender los derechos?
2. ¿Cuánto es lo más que Global debería pagar por adelantado para saber el resultado de la perforación?
3. Utilice un árbol de decisiones para determinar la estrategia óptima para Global.
4. ¿Cuál es el rendimiento esperado asociado con la política óptima?
5. ¿Cuál es la cifra máxima *adicional* que Global debería estar dispuesta a pagar a DRI por la prueba?

TABLA 10.33

RESULTADO DE LA PRUEBA/RESULTADO	PLACA	VARIADO	ONDULADO	TOTAL
Seco	8	2	0	10
Gas	2	16	2	20
Gas y petróleo	0	14	1	15
Petróleo	0	0	5	5
	10	32	8	50

Caso práctico Shumway, Horch, y Sager (A)[4]

Claire Christensen fue incluida en un nuevo proyecto en su segundo año con la firma asesora en administración de Shumway, Horch y Sager (SHS). Parecía ser otra situación en la que se esperaba que ella rápidamente se saltara la barda con el proyecto e hiciera algunas recomendaciones inteligentes para ahorrar dinero, y después le diera seguimiento al proyecto para sacar la renta del mes siguiente.

El cliente era una organización de editores de revistas que se había dado cuenta de la gran cantidad de dinero que se perdía al imprimir ejemplares que no se vendían. La política de la industria siempre había sido imprimir y entregar a los puestos de periódicos más revistas de las necesarias. Esta práctica aseguraba que todo cliente que pidiera un ejemplar en el puesto de periódicos la obtuviera, manteniendo así las ventas altas tanto para la circulación en puestos como para los ingresos por publicidad. Sin embargo, también producía un número fenomenal de ejemplares sin vender. Se contrató a SHS para que examinara esta práctica e hiciera algunas recomendaciones para mejorar los procedimientos.

Otro tema relacionado era el establecimiento de una tarifa base. Ésta es la cantidad de ejemplares que *Good Housekeeping* garantizaba vender cada mes y que se utilizaba para determinar las tarifas de publicidad. Si no alcanzaban la cifra base, devolverían una cantidad que fuera proporcional al faltante. Si se excedía el valor base, no podían regresar y pedir más por publicidad.

Christensen pensó que el ahorro de dinero en la producción quedaría asegurado si ella podía encontrar la manera de pronosticar las ventas de cada publicación. Comenzó esta tarea escogiendo la revista *Good Housekeeping* y probando si podría pronosticar las ventas de enero de 1988 utilizando datos históricos. Había obtenido los datos de circulación total de los últimos nueve años (de julio de 1979 a junio de 1988) del informe público de la Audit Bureau of Circulation (la Oficina de Verificación de Circulación) (véase SHSA.XLS). Sin revisar esta información, guardó los datos de los últimos seis meses, para utilizarlos más tarde para revisar sus métodos de pronóstico. Los primeros 8 1/2 años de datos (hasta diciembre de 1987) se muestran en la tabla 10.34. Ella estaba consciente de que por lo general se imprimían aproximadamente 10 millones de ejemplares de esta revista.

Christensen se preguntó cómo los patrones de tiempo de ventas pasadas podrían ayudarle a predecir las ventas de un ejemplar futuro. (Véase el anexo 1 para una gráfica de los datos de circulación.) *Good Housekeeping* no era una revista que ella leyera regularmente, pero la había hojeado mientras esperaba su turno con el dentista, y su tía también tenía una revista en casa. Sabía que el ejemplar de diciembre aumentaba en gran medida sus ventas en los puestos debido a las recetas para las festividades y los artículos sobre ingeniosas ideas para hacer y comprar regalos. El ejemplar de enero parecía tener ventas generalmente bajas, dado que la gente sentía, evidentemente, que había gastado y comido de más durante las vacaciones y trataba de economizar. Los cambios en el interés de los compradores y en el contenido de la revista eran también fuerzas importantes que podían mover gradualmente las ventas hacia arriba o hacia abajo a través del tiempo.

Una vez que Christensen tuvo el mejor pronóstico, la siguiente pregunta era si se debería producir la cifra pronosticada, una cifra mayor o una menor. Los ejemplares no vendidos esencialmente carecían de valor una vez que el ejemplar nuevo llegaba a los puestos de periódicos. Sabía que esta revista en particular se vendía a $1.95 en los puestos, pero sólo tenía una estimación de los costos variables para producir la revista ($.70), el precio al mayorista ($1.20) y el precio del distribuidor al operador del puesto ($1.50). El detallista y el mayorista no incurrían en ningún riesgo, ya que podían devolver todas las revistas no vendidas por su precio completo.

Justo cuando Christensen estaba a punto de sumergirse en los cálculos, la llamó un representante de *Good Housekeeping* para decirle que les acababan de dar la oportunidad de aumentar la base de su tarifa de publicidad de su nivel actual de 4.78 millones de ejemplares. El representante dijo que ya habían planeado utilizar un nuevo valor, que entraría en vigor a partir del 1 de agosto, pero deseaba saber si deberían elevarla un mes antes. La tarifa base se utilizaba como sigue:

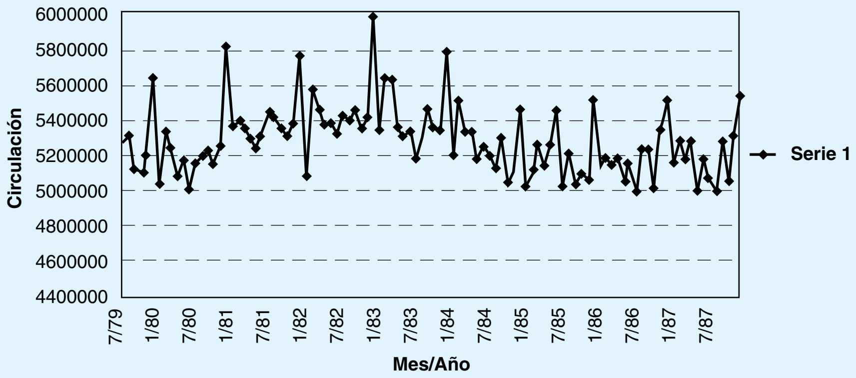
Los ingresos por publicidad eran iguales a $1* la tarifa base, pero con una multa contingente. Si la circulación era infe-

[4]Este caso debe utilizarse como base para un análisis de grupo, más que para ejemplificar un manejo eficiente o ineficiente de una situación administrativa. ”1990, Darden Graduate Business School Foundation.

TABLA 10.34 Cifras de circulación de *Good Housekeeping* (julio 1979-diciembre 1987)

FECHA	OBS.#	CIRCULACIÓN	FECHA	OBS.#	CIRCULACIÓN
Julio 79	1	5264165	Enero 84	55	5198585
	2	5313127		56	5501741
	3	5117969		57	5329592
	4	5098771		58	5322838
	5	5187708		59	5178815
	6	5645295		60	5247590
Enero 80	7	5023173	Julio 84	61	5194827
	8	5333352		62	5118408
	9	5224234		63	5291564
	10	5079207		64	5047946
	11	5167277		65	5105056
	12	5006445		66	5448542
Julio 80	13	5150974	Enero 85	67	5023818
	14	5180346		68	5099829
	15	5223467		69	5253739
	16	5153303		70	5138210
	17	5247109		71	5251664
	18	5789798		72	5450869
Enero 81	19	5350502	Julio 85	73	5022522
	20	5371371		74	5206132
	21	5327700		75	5042725
	22	5269993		76	5096277
	23	5240438		77	5067717
	24	5273266		78	5508198
Julio 81	25	5439920	Enero 86	79	5133963
	26	5378584		80	5180897
	27	5329516		81	5161222
	28	5292129		82	5174238
	29	5378127		83	5047775
	30	5736465		84	5152063
Enero 82	31	5073651	Julio 86	85	5001222
	32	5553245		86	5232314
	33	5439363		87	5235207
	34	5363948		88	5009584
	35	5367404		89	5352370
	36	5316957		90	5498755
Julio 82	37	5412745	Enero 87	91	5159840
	38	5387779		92	5274075
	39	5439224		93	5179002
	40	5341392		94	5269295
	41	5396853		95	5005048
	42	5961612		96	5166569
Enero 83	43	5335737	Julio 87	97	5068848
	44	5618540		98	5007388
	45	5604606		99	5265191
	46	5343116		100	5046595
	47	5294990		101	5300978
	48	5327995		102	5526153
	49	5177176			
Julio 83	50	5290109			
	51	5449099			
	52	5344570			
	53	5334053			
	54	5763516			

ANEXO 1 Gráfica de las ventas totales de *Good Housekeeping* a través del tiempo



rior a la tarifa base, debían compensar la publicidad en un monto igual a $1.25 por cada impresión faltante.

La nueva tarifa base analizada era de 5.1 millones, y de nuevo la decisión dependía de un pronóstico de la circulación. Christensen sabía que tendría que hallar rápidamente el mejor método de pronóstico con base en los 8.5 años de datos que tenía, después tendría que probar el método en los 6 meses de información que había retenido (véase la tabla 10.35), y por último, con un poco de suerte, aplicar el mismo método para julio de 1988.

Preguntas

1. Suponga que la distribución de la demanda (circulación) para julio de 1988 es como sigue:

Circulación	Probabilidad
4857K	0.2
4932K	0.2
4983K	0.2
5034K	0.2
5109K	0.2

¿Debe Claire recomendar que se eleve la tarifa base un mes antes? ¿Por qué?

2. Suponga que el pronóstico de la demanda para enero de 1988 es una distribución normal con una media de 5,082,329 y una desviación estándar de 98,324. ¿Cuántos ejemplares de la revista deberán imprimirse?

TABLA 10.35 Datos retenidos

OBS.#	CIRCULACIÓN
103	5012276
104	5056537
105	5061844
106	5005226
107	5000500
108	5030805

APÉNDICE 10.1 PROBABILIDAD CONDICIONAL Y TEOREMA DE BAYES

Aunque los dados y las urnas llenas de bolas no parecen ser muy relevantes en la toma de decisiones administrativas, es fácil asignarles probabilidades, y por lo tanto las utilizaremos (tal como le gusta hacerlo a los peritos en estadísticas) para explicar la probabilidad condicional y el teorema de Bayes. Suponga que sacamos una bola de una urna, de acuerdo con el siguiente proceso de dos etapas (que se muestra en la figura 10.30):

1. Se tira un dado.
2. El valor del dado se utiliza para determinar de cuál de las tres urnas sacaremos la bola.

Cada urna contiene 100 bolas, pero con un número diferente de bolas blancas (B) y negras (N). Si se saca un 1, se elegirá la urna 1, que contiene 28 bolas blancas y 72 negras. Si se tira 2 o 3, se elige la urna 2, con 40 bolas blancas y 60 negras. Si sale 4, 5 o 6, se elige la urna 3, con 92 bolas blancas y 8 negras.

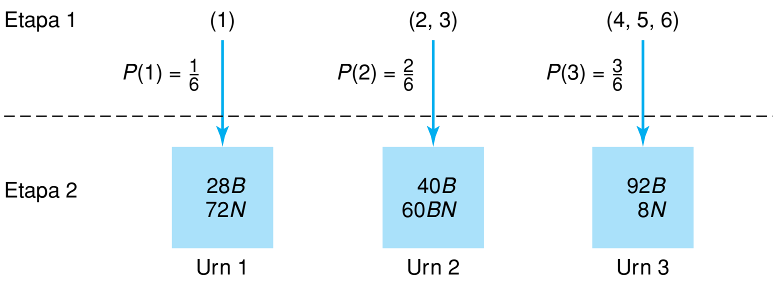


FIGURA 10.30

Proceso de dos etapas

Dado que estamos tirando un dado, la probabilidad de que se seleccione la urna 1 es de 1/6; esto es, $P(1) = 1/6$. De manera similar, si obtenemos 2 o 3, sacaremos la bola de la urna 2. Esto implica que $P(2) = 2/6$. Finalmente, si se saca 4, 5 o 6, sacaremos una bola de la urna 3, y por lo tanto $P(3) = 3/6$ (véase la figura 10.30). Si esto parece demasiado abstracto, puede resultar útil que en el siguiente análisis considere las diferentes urnas como la representación de tres diferentes estados de la naturaleza correspondientes a tres diferentes niveles de demanda del mercado, siendo el nivel más pequeño 1 y 3 el más alto. Considere los dos colores de las bolas como dos posibles resultados de una prueba de mercado para evaluar el estado real de la naturaleza, siendo Blanco (B) un resultado de prueba alentador y Negro (N) un resultado de prueba desalentador.

Probabilidades condicionales La notación $P(B|1)$ significa una *probabilidad condicional*. La línea vertical se lee como "dado". Por lo tanto, $P(B|1)$ se lee como "la probabilidad de B, dado 1". Significa la probabilidad de sacar una bola blanca (B) suponiendo que se saque de la urna 1 (o la probabilidad de un resultado de prueba alentador dado que la fuerza del mercado sea la menor, 1). Recuerde que una vez que se ha seleccionado una urna, se escoge la bola al azar, lo que significa que cada bola en la urna tiene iguales posibilidades de salir. Viendo la figura 10.30, vemos que

$$
\begin{array}{lcl}
P(B|1) = 0.28 & \text{y} & P(M|1) = 0.72 \\
P(B|2) = 0.40 & \text{y} & P(M|2) = 0.60 \\
P(B|3) = 0.92 & \text{y} & P(M|3) = 0.08
\end{array}
$$

En el ejemplo de la prueba de mercado estas probabilidades no se conocen con exactitud. Tendrían que estimarse a partir de pruebas de mercado anteriores para otros productos y se haría la suposición de que los resultados son válidos para este producto. Por ejemplo, si en las últimas 100 pruebas hubiera resultado que el mercado era débil en 28 la prueba fue alentadora, y en 72 fue desalentadora se obtendrían los mismos valores de $P(B/1)$ y $P(N/1)$.

En el ejemplo de la prueba de mercado también estaríamos interesados en probabilidades condicionales como $P(1|N)$, ya que ésta sería la probabilidad que la fuerza del mercado sea de 1 dado que la prueba de mercado fue desalentadora. En el ejemplo de dados y urnas, ésta es la probabilidad que la bola blanca fuera escogida de la urna 1, dado que sabemos que es negra. Para esclarecer esto, suponga que un amigo pasa por el proceso de dos etapas en el cuarto de al lado, después del cual entra e informa que la bola fue negra. Entonces pregunta, "¿cuál es la probabilidad de que viniera de la urna 1?".

Antes de responder esa pregunta, suponga que hubiera preguntado: "¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saqué viniera de la urna 1?", *sin* decirle el color de la bola. En este caso todo lo que usted sabe es que provendría de la urna 1 si hubiera sacado un 1 en el lanzamiento del dado. Por lo tanto, la *probabilidad no condicional* de que la bola venga de la Urna 1 es $P(1) = 1/6$. En el ejemplo del mercado, esto equivale a preguntar cuál es la probabilidad de un mercado de fuerza 1, antes de llevar a cabo la prueba de mercado.

Ahora que usted sabe que la bola es negra y que la urna 1 tiene el mayor porcentaje de bolas negras, su intuición probablemente le sugiere que la probabilidad de la urna 1 ha aumentado. Si es así, su intuición es correcta. Ahora utilizaremos las probabilidades condicionales para aportar alguna precisión a ese sentimiento intuitivo.

Probabilidad conjunta A fin de calcular $P(1|N)$, utilizaremos la siguiente relación que se desarrolla en cursos de probabilidad y estadística. Haga que X y Y identifiquen *cualesquiera* de los dos eventos aleatorios. Entonces

$$P(X \text{ y } Y) = P(X|Y)P(Y) \tag{A.1}$$

$$P(X \text{ y } Y) = P(Y \text{ y } X) \tag{A.2}$$

$$P(Y \text{ y } X) = P(Y|X)P(X) \tag{A.3}$$

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)} \tag{A.4}$$

La primera ecuación dice que la *probabilidad conjunta* de que ocurran *tanto X como Y* es igual a la probabilidad condicional de que X ocurra dado Y multiplicado por la *probabilidad marginal* de que Y ocurra. La segunda ecuación dice que la probabilidad de que X y Y ocurran es la misma de que Y y X ocurran. La tercera ecuación es simplemente otra manera de enunciar la primera ecuación, dado que X y Y representan cualesquiera de los dos eventos. La última ecuación está implícita en las primeras tres y da una fórmula para encontrar una probabilidad condicional dada, si se conoce la probabilidad condicional "inversa".

Para aplicar estos resultados generales al caso del ejemplo, hagamos $Y = 1$ y $X = \text{B}$. Entonces la ecuación (A.4) nos permite escribir inmediatamente que

$$P(1|N) = \frac{P(N|1)P(1)}{P(N)} \tag{A.5}$$

Conocemos $P(N|1)$ y $P(1)$, pero ¿qué es $P(N)$? Para averiguarlo, utilizaremos un truco común en la teoría de las probabilidades. El evento N ocurre (es decir, se saca una bola negra) si, y sólo si, se saca una bola de la urna 1 y es negra o cuando se saca una bola de la urna 2 y es negra o cuando se saca una bola de la urna 3 y es negra. Por tanto

$$\begin{aligned} P(N) &= P(1 \text{ y } N) + P(2 \text{ y } N) + P(3 \text{ y } N) \\ &= P(N \text{ y } 1) + P(N \text{ y } 2) + P(N \text{ y } 3) \\ &= P(N|1)P(1) + P(N|2)P(2) + P(N|3)P(3) \end{aligned} \tag{A.6}$$

El teorema de Bayes y el cálculo de las probabilidades a posteriori Si sustituimos esta expresión de $P(N)$ en la ecuación (A.5) obtendremos un ejemplo de la aplicación del *teorema de Bayes*.

$$P(1|N) = \frac{P(N|1)P(1)}{P(N|1)P(1) + P(N|2)P(2) + P(N|3)P(3)} \tag{A.7}$$

Dado que todos los términos del lado derecho de la ecuación (A.7) son conocidos, el teorema de Bayes nos da una manera de calcular $P(1|N)$.

$$P(1|N) = \frac{72/100 * 1/6}{72/100 * 1/6 + 60/100 * 2/6 + 8/100 * 3/6} = \frac{1}{3} \tag{A.8}$$

Recuerde que la probabilidad no condicional (es decir, sin información adicional) de que la bola saliera de la urna 1 es de 1/6. Una vez que se nos dice que la bola es negra, la probabilidad de que proviniera de la urna 1 aumenta. En este caso particular, se duplica. En términos del ejemplo de la prueba de mercado, con base en la información a la mano antes de la prueba, la probabilidad de un mercado de fuerza 1 (el mercado más débil) es de 1/6. Después de llevar a cabo la prueba y de obtener un resultado desalentador (N), la probabilidad aumenta a 1/3.

También quisiéramos calcular $P(1|B)$ y las otras probabilidades condicionales. Podríamos hacerlo con fórmulas similares a la (A.7), pero en cambio presentaremos un método tabular fácil de llevar a cabo en un programa de hoja de cálculo. Las tablas 10.36 y 10.37 contienen las probabilidades inicialmente conocidas —las que en el ejemplo de la prueba de mercado se podrían llamar *confiabilidades*, ya que están relacionadas con lo confiable que es la prueba— y las *probabilidades a priori* de los estados de la naturaleza. Las probabilidades conjuntas en la tabla 10.38 están calculadas a partir de esas tablas multiplicando cada columna i de la tabla 10.36 por

TABLA 10.36 Confiabilidades

	ESTADO DE LA NATURALEZA		
RESULTADO DE LA PRUEBA	**1**	**2**	**3**
N	$P(N\|1) = .72$	$P(N\|2) = .60$	$P(N\|3) = .08$
B	$P(B\|1) = .28$	$P(B\|2) = .40$	$P(B\|3) = .92$
Suma de columnas	1	1	1

TABLA 10.37 Probabilidades a priori

ESTADO DE LA NATURALEZA			
1	**2**	**3**	**SUMAS DE LAS FILAS**
$P(1) = 1/6$	$P(2) = 2/6$	$P(3) = 3/6$	1

TABLA 10.38 Probabilidades conjuntas y marginales

	ESTADO DE LA NATURALEZA			
RESULTADO DE LA PRUEBA	**1**	**2**	**3**	**SUMA DE LAS FILAS**
N	$P(N \text{ y } 1) = .12$	$P(N \text{ y } 2) = .20$	$P(N \text{ y } 3) = .04$	$P(N) = .36$
B	$P(B \text{ y } 1) = .0467$	$P(B \text{ y } 2) = .1333$	$P(B \text{ y } 3) = .46$	$P(B) = .64$
Suma de las columnas	$P(1) = .1667$	$P(2) = .3333$	$P(3) = .50$	1

TABLA 10.39 Probabilidades a posteriori

	RESULTADO DE LA PRUEBA			
RESULTADO DE LA PRUEBA	**1**	**2**	**3**	**SUMA DE LAS FILAS**
N	$P(1\|N) = .333$	$P(2\|N) = .556$	$P(3\|N) = .111$	1
W	$P(1\|W) = .073$	$P(2\|W) = .208$	$P(3\|W) = .719$	1

TABLA 10.40 Datos de 300 pruebas de mercado

	ESTADO DE LA NATURALEZA			
RESULTADO DE LA PRUEBA	**1**	**2**	**3**	**SUMA DE LAS FILAS**
N	72	60	8	140
B	28	40	92	160
Suma de las columnas	100	100	100	300

la probabilidad *a priori* hallada en la columna i correspondiente de la tabla 10.37. Las sumas de hileras y columnas de la tabla 10.38 nos dan las *probabilidades marginales*. Las *probabilidades a posteriori* de la tabla 10.39 fueron calculadas a partir de la tabla 10.38, dividiendo las probabilidades conjuntas de cada fila entre la suma de las filas.

Concluimos con un punto final que algunos encuentran confuso. Si en el ejemplo de la prueba de mercado las confiabilidades se estiman a partir de datos históricos, ¿por qué no podemos utilizar los mismos datos para estimar las probabilidades *a posteriori*? Por ejemplo, suponga que tenemos los datos que se muestran en la tabla 10.40 con los datos de 300 pruebas de mercado anteriores clasificadas de acuerdo al informe de la prueba de mercado, y al estado de la naturaleza que ocurrió en realidad.

Estimamos $P(N|1)$ en 72/100. ¿Por qué no podemos estimar $P(1|N)$ en 72/140?

Primero observe que esto nos da una respuesta diferente; 72/140 = 0.514 no es lo mismo que 0.333 calculado en la ecuación (A.8). La razón es que hemos utilizado implícitamente un conjunto diferente de probabilidades *a priori*. Si establecemos que $P(1) = 100/300$, $P(2) = 100/300$, y $P(3) = 100/300$ y aplicamos el teorema de Bayes, obtendremos entonces que $P(1|N) = 0.514$, porque hemos establecido las probabilidades *a priori* de forma que reflejen la frecuencia histórica de los estados 1, 2 y 3. Si creemos que las probabilidades *a priori* deben ser diferentes a las frecuencias históricas, obtenemos una respuesta diferente. Como un ejemplo extremo, suponga que tenemos información que nos lleva a creer poderosamente que la demanda del mercado para el producto debe ser muy fuerte; esto es, $P(3) = 1.0$. Aplicando entonces el teorema de Bayes, da $P(1|N) = 0$, $P(2|N) = 0$, y $P(3|N) = 1.0$; ni siquiera un informe desalentador de la prueba alterará nuestras probabilidades *a priori*. *El punto es que las probabilidades a posteriori dependen de las probabilidades a priori, y las probabilidades a priori pueden diferir de las frecuencias históricas.*

Referencias

Adam Borison, “Oglethorpe Power Corporation Decides about Investing in a Major Transmission System”, en *Interfaces*, 25, núm. 2 (1995), 25-36.

Robert Clemen, *Making Hard Decisions: An Introduction to Decision Analysis* (Boston: PWS-KENT Publishing Company, 1991).

Charles Feinstein, “Deciding Whether to Test Student Athletes for Drug Use”, en *Interfaces*, 20, núm. 3 (1990), 80-87.

Ron Howard, “Heathens, Heretics, and Cults: The Religious Spectrum of Decision Aiding”, en *Interfaces*, 22, núm. 6 (1992), 15-27.

Ralph Keeney (A), “Decision Analysis: An Overview”, en *Operations Research,* 30, núm. 5 (1982), 803-838.

Ralph Keeney (B), *Value-Focused Thinking* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1992).

Ralph Keeney y Howard Raiffa, *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs* (Nueva York: Wiley, 1976).

CAPÍTULO

11 Simulación Monte Carlo

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN — Simulador de AT&T para procesar llamadas

En los últimos años de la década de los setenta, hubo algunos cambios en la tecnología que facilitaron mucho el uso de servicios de número 1-800 con fines comerciales. Se convirtió en la manera de comprar en Estados Unidos; es la puerta de entrada de $200 mil millones de ventas, aproximadamente. Esto ha generado la industria de centros para llamadas de carácter comercial. Un centro de recepción de llamadas consiste en: líneas de telecomunicaciones que transmiten las llamadas telefónicas a un lugar específico, máquinas de conmutación para ordenar y asignar llamadas y personal que recibe las llamadas. El propósito principal del centro sería recibir las llamadas para ventas de catálogo o para reservaciones para hoteles o aviones, atender las preguntas de servicio de los clientes y otros asuntos. También hay centros de llamadas de despacho, como los que se utilizan en el telemercadeo.

El concepto de los centros de llamadas ha evolucionado hasta convertirse en una industria de servicio con valor de $8 mil millones que une a clientes, negocios y una empresa proveedora de larga distancia, como AT&T. En 1993, más de 350,000 empresas emplearon 6.5 millones de personas en centros de llamadas. Estos centros han tenido un crecimiento anual de 20% en la década de los noventa y se pronostica que continuarán con un crecimiento de dos dígitos hasta el año 2000. Varios factores han contribuido a este crecimiento: los clientes tienen menos tiempo para dedicarlo a las compras, existen más personas que viven solas y también más familias con dos ingresos, el costo cada vez más creciente de las ventas de persona a persona y la liberación de las leyes sobre la industria de las telecomunicaciones. Un reciente cambio legislativo, conocido como la movilidad 800, permite a las empresas mantener su mismo número 800 incluso si cambian de empresa de larga distancia. Esto ha aumentado en gran medida la competencia en este campo.

Los costos de mano de obra y de comunicaciones asociados con estos centros de llamadas ha aumentado, y las empresas están intentando mejorar la capacidad de sus centros de llamadas para servir a sus clientes. Por lo tanto, AT&T introdujo un modelo de simulación para estudiar varios escenarios de operación para sus clientes, tanto existentes como potenciales. Se deben considerar muchos factores en un modelo de este tipo, tales como el personal, la duración de las llamadas, el número de líneas 800, las horas de operación y las señales de ocupado. Otra realidad que debe modelarse es el comportamiento de quien llama. Si se pone a un cliente en espera, algunos colgarán de inmediato, otros esperarán un corto periodo y otros esperarán un tiempo largo para que algún representante los atienda. En el caso de aquellos que desisten, algunos intentarán llamar de nuevo, en tanto que otros llevarán su negocio a un competidor. El modelo inicial de simulación que desarrolló AT&T originalmente era para un gran centro de reservaciones de boletos de avión. Debido a su gran éxito, AT&T decidió desarrollar un modelo de simulación estándar, diseñado para la computadora personal y que pudiera utilizarse como herramienta de apoyo para las ventas.

Un ejemplo específico de una historia con un final feliz es la de Northwest Airlines, que llevó a cabo los resultados recomendados por un estudio de simulación de este tipo, con el fin de aumentar en 20% el número de llamadas contestadas, con 20% menos horas de agente y 27% menos tiempo extraordinario, con el resultado final de un incremento de 5% en ingresos por boletos para la aerolínea. Se realizaron más de 2,000 estudios de simulación en 1992, con el efecto acumulativo de que AT&T aumentó o volvió a ganar más de $1,000 millones de los $8,000 millones del mercado de la red 800. Además, los clientes comerciales que llevaron a cabo estos estudios aumentaron sus utilidades anuales en más de $750 millones (Brigandi *et al.*).

11.1 INTRODUCCIÓN

Mucha gente cree que "la experiencia es el mejor maestro". Desafortunadamente, a menudo es muy costoso (en tiempo o dinero) obtener experiencia real. Este dilema es una motivación importante para el uso de la simulación: encontrar una manera rápida y económica de adquirir un conocimiento que se obtiene usualmente a través de la experiencia.

La idea básica de la simulación es la construcción de un dispositivo experimental, o **simulador**, que "actuará como" (simulará) el sistema de interés en ciertos aspectos importantes, de una manera rápida y redituable.

El objetivo consiste en crear un entorno en el cual se pueda obtener información sobre posibles acciones alternativas a través de la experimentación. El uso de la simulación es fundamental para muchos experimentos aplicados; por ejemplo,

- Prueba de medicinas en animales de laboratorio. Aquí las respuestas del animal *simulan* las respuestas humanas.
- Manejar automóviles en pistas de prueba. Aquí la pista de prueba *simula* las condiciones que enfrentará el automóvil.
- Pruebas de diseño de alas de avión en túneles de viento. El túnel de viento *simula* las condiciones de vuelo.
- El entrenamiento de pilotos de aerolíneas en cabinas reales con despliegues *simulados* fuera de las ventanas bajo condiciones *simuladas.*

En el contexto del análisis cuantitativo, la simulación ha venido a significar la experimentación basada en un modelo matemático. A pesar de que tanto la simulación como la optimización (por ejemplo, mediante la programación lineal) utilizan modelos cuantitativos, se basan en conceptos muy diferentes. La diferencia fundamental estriba en el papel que toman las variables de decisión en los dos enfoques.

Simulación *versus* optimización

- En un modelo de optimización, los valores de las variables de decisión son *resultados*. Esto es, el modelo proporciona un conjunto de valores para las variables de decisión que maximiza (o minimiza) el valor de la función objetivo.
- En un **modelo de simulación**, los valores de las variables de decisión son *entradas*. El modelo evalúa la función objetivo en relación con un conjunto particular de valores.

Para comprender lo que esto significa, considere el siguiente ejemplo. Suponga que un supermercado quiere decidir cómo distribuir su personal de caja (cajeros y empacadores) durante el fin de semana. El objetivo es minimizar el costo de mano de obra, sujeto a las restricciones impuestas por el contrato de trabajo y la restricción de que los clientes no tengan que esperar demasiado.

Si tuviéramos un modelo de optimización, necesitaríamos dar los parámetros del modelo. Quizás éstos consistirían en cantidades, tales como la tasa de llegadas de los clientes, la distribución del tiempo necesario para despachar a un cliente con y sin empacador, y así sucesivamente. Cuando el modelo estuviera resuelto, la respuesta incluiría la mejor manera de distribuir el personal, el valor correspondiente de la función objetivo (el costo total), y una indicación de la holgura existente en las restricciones. Hemos visto este método muchas veces en las secciones de programación matemática de este texto.

En un modelo de simulación, las entradas incluirían los parámetros que describimos arriba (tasas de llegadas de clientes y demás), una expresión de la función objetivo (costos totales), y una *asignación posible del personal*. El modelo produciría un conjunto específico de resultados, que mostrarían qué tan bien se desempeñó la solución según varias medidas, tales como costo total, tiempo de espera de los clientes, utilización del personal, etc. En general, el modelo mide la *calidad* de la solución sugerida, así como cuánta variabilidad puede existir en las diferentes medidas de desempeño debido a lo aleatorio de las entradas. La simulación permite mucha experimentación e interacción con el constructor del modelo, pero no necesariamente optimiza el objetivo de interés. El simulador por lo general es una manera mucho más económica y rápida para experimentar con muchos factores de interés.

¿CUÁNDO SE DEBE UTILIZAR LA SIMULACIÓN?

Con esta breve descripción, parecería que nadie querría utilizar jamás un modelo de simulación. ¿Por qué no utilizar un modelo que siempre da la mejor respuesta, es decir, un modelo de optimización? De hecho, en el pasado la simulación a menudo se consideraba como una técnica de último recurso, para utilizarse únicamente cuando fallaban los métodos analíticos. Es cierto que si está disponible un modelo analítico, se pueden obtener resultados exactos rápidamente, y a menudo puede utilizarse algún procedimiento de optimización para determinar los resultados óptimos. Sin embargo, la simulación hoy en día es una de las herramientas más utilizadas del análisis cuantitativo. ¿Por qué son tan populares los modelos de simulación?

1. Primero, puede ser difícil o imposible obtener modelos analíticos, dependiendo de factores de complicación. Lo que es un factor de complicación depende del modelo específico. Entre los factores de complicación para modelos de presupuesto de capital se incluye la demanda aleatoria. Los factores de complicación para modelos de línea o cola de espera son variables aleatorias no exponenciales, mientras que los factores de complicación para modelos de inventarios son múltiples puntos o ubicaciones de almacenamiento.

2. Los modelos analíticos por lo general predicen solamente un comportamiento promedio o "de estado estable" (a largo plazo). En modelos de la vida real, sin embargo, a menudo es importante comprender la variabilidad posible en las medidas de desempeño, o la manera en que varían las medidas de desempeño a corto plazo.

3. La simulación puede llevarse a cabo utilizando una amplia variedad de programas, desde los de hoja de cálculo (Excel, Lotus), pasando por los complementos de hoja de cálculo (Crystal Ball, @Risk) y los lenguajes generales de programación para computadoras (PASCAL, C++), hasta los lenguajes especialmente diseñados para simulación (SIMAN). Puesto que hoy en día los modelos de simulación pueden crearse y ejecutarse en una PC o en una estación de trabajo, el nivel de conocimientos de computación y matemáticas requeridos para diseñar y correr un simulador útil se ha reducido considerablemente. Ahora resulta bastante razonable construir y utilizar un simulador, aun cuando esté claro que se podría elaborar un modelo analítico (de optimización) con más tiempo y esfuerzo.

La capacidad de los modelos de simulación para tratar con la complejidad, manejar la variabilidad de las medidas de desempeño y reproducir el comportamiento a corto plazo permite que la simulación sea una herramienta poderosa

SIMULACIÓN Y VARIABLES ALEATORIAS

Los modelos de simulación se utilizan a menudo para analizar una *decisión bajo riesgo*; esto es, un modelo en el cual el comportamiento de uno o más de los factores no se conoce con certeza. Existen muchos ejemplos de ello: la demanda por un producto durante el mes siguiente, el rendimiento de una inversión, el número de camiones que llegarán para ser descargados mañana entre 8:00 y 9:00 a.m., y así sucesivamente. En estos casos el factor que no se conoce con certeza se considera una **variable aleatoria**. El comportamiento de una variable aleatoria se describe mediante una **distribución de probabilidad**. (Quizás en este punto deberíamos recordarle que en esta sección del libro estamos dando por sentado que se cuenta con algunos conocimientos

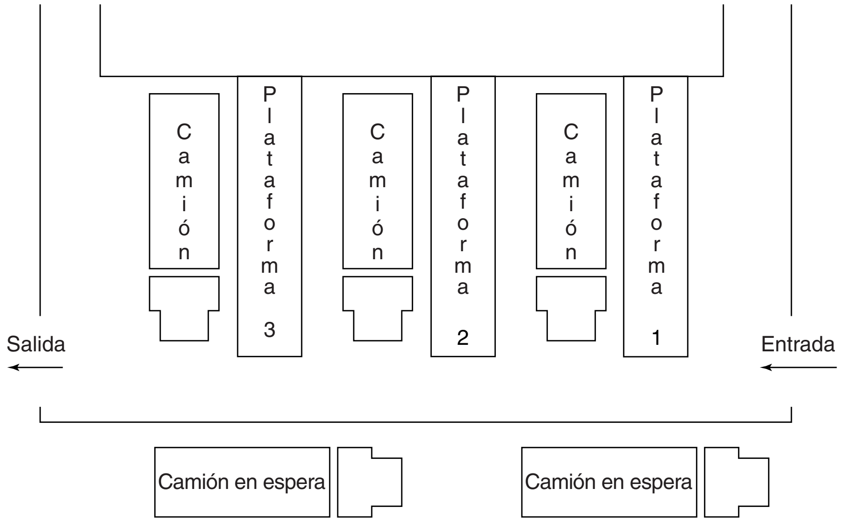


FIGURA 11.1
Modelo de zona de descarga de camiones

sobre la teoría de la probabilidad. La información básica que necesitará, incluyendo la definición de la distribución de probabilidad y algunos ejemplos, se encuentra en el Apéndice A.) Este tipo de simulación se conoce a veces como **método Monte Carlo**, a causa de las ruletas de Monte Carlo, que se pueden considerar como dispositivos para generar eventos inciertos o aleatorios. Vamos a examinar varios ejemplos de este enfoque.

Diseño de instalaciones para descarga En la figura 11.1 se ilustra un modelo típico. Aquí los camiones, quizás de diversos tamaños y con diferentes tipos de cargas, llegan a un almacén para ser descargados. Los eventos inciertos son: cuándo llegará un camión, qué tipo y tamaño de carga traerá y cuánto tiempo tomará descargarlo. Al modelar estos eventos inciertos, cada cantidad igualmente incierta sería una variable aleatoria, caracterizada por una distribución de probabilidad.

Aquí los diseñadores deben encarar una variedad de preguntas de diseño:

- ¿Cuántas plataformas se deben construir?
- ¿Qué tipo y cantidad de equipo para manejo del material se requiere?
- ¿Cuántos trabajadores se requieren y en qué periodos?

El diseño de la plataforma de descarga afectará su costo de construcción y operación. Este costo puede reducirse construyendo menos plataformas, comprando menos equipo para el manejo del material y contratando menos personal. Sin embargo, estas opciones incrementarán el tiempo necesario para descargar los camiones y el tiempo que tendrá que esperar un camión antes de empezar a ser descargado. La administración debe equilibrar el costo de la adquisición y utilización de los diferentes recursos con el costo de tener los camiones esperando para ser descargados.

Para las industrias petroleras es importante contar con un modelo similar para el diseño de instalaciones de descarga, debido al alto costo por tener un supercarguero lleno de petróleo esperando un muelle libre. Tales modelos son objeto formal de los “modelos de línea o cola de espera” que se describen en el capítulo 12. Sin embargo, para resolverlos según los métodos de ese capítulo, los modelos de líneas de espera deben cumplir ciertas hipótesis estrictas. Si los tiempos de llegada y de servicio pueden describirse con una *distribución exponencial*, los resultados analíticos del capítulo 12 pueden entonces utilizarse para predecir tiempos de espera y otras características del sistema. (La distribución exponencial se analiza más adelante en este capítulo, así como en el Apéndice A.) Pero, si esta distribución no coincide exactamente, o si hay otras complejidades en el modelo que no coinciden con las hipótesis estándar, puede resultar difícil o imposible obtener resultados analíticos. Entonces se tendría que utilizar la simulación.

Determinación de políticas de control de inventarios La simulación puede utilizarse y se está utilizando para estudiar una variedad de modelos en el área general de control de inventarios. Un modelo de este tipo se ilustra en la figura 11.2. En este sistema, la fábrica produce bienes que se envían al almacén para satisfacer la demanda de los clientes. Suponga que la demanda diaria en cada almacén es una variable aleatoria. Los tiempos de embarque de la

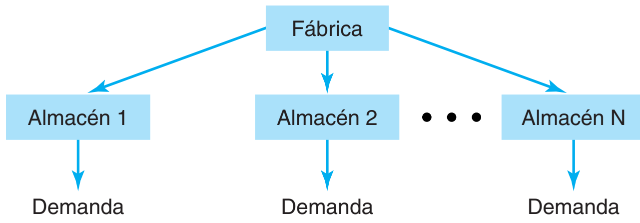


FIGURA 11.2

Sistema de distribución

fábrica al almacén también pueden ser aleatorios. Aquí, algunas de las preguntas de carácter operativo son:

- ¿Cuándo debe un almacén emitir una reorden a la fábrica, y por cuánto?
- ¿Qué existencias debe mantener la fábrica para satisfacer las órdenes de los almacenes?

Los costos principales aquí son el costo por mantener el inventario, el costo de embarque de bienes de la fábrica al almacén y el costo de la incapacidad de satisfacer la demanda del cliente en el almacén. Debido a que la demanda en los almacenes es incierta, a menos que el almacén mantenga un inventario irracionalmente alto, habrá ocasiones en que no será capaz de satisfacer toda la demanda del cliente. Una alternativa a los inventarios elevados sería hacer embarques frecuentes a los almacenes desde la fábrica. Esto mantendría reducido el inventario del almacén, pero el costo de los embarques sería alto. Igual que en los modelos de inventario con demanda conocida, el objetivo del administrador consiste en encontrar una política de almacenamiento y pedidos que mantenga bajo el costo de almacenamiento y de embarque, satisfaciendo al mismo tiempo la fracción deseada de la demanda de los clientes en los almacenes. Otra manera de utilizar la simulación en el área de inventarios es ver cuál sería el "peor caso" en términos de almacenamiento y desarrollar una política que pueda proteger a la compañía 99% del tiempo.

Este modelo entra en el dominio de la teoría de los inventarios. La mayor parte de los resultados analíticos en la teoría de inventarios es para un solo elemento almacenado en un solo sitio. Modelos con múltiples elementos y múltiples localizaciones, como el de arriba, son mucho más difíciles de analizar, y por eso se abordan frecuentemente por medio de la simulación. Este capítulo analizará la forma de realizar una simulación, ya sea utilizando la hoja de cálculo sola o por medio de los dos complementos de hoja de cálculo más populares (Crystal Ball y @Risk).

Para obtener una comprensión más completa de la naturaleza de la simulación, analizaremos a continuación la manera de generar las variables aleatorias (por ejemplo, la demanda), y después desarrollaremos una simulación Monte Carlo de un modelo de presupuesto de capital. Después de darnos cuenta de lo que significa esta simulación básica, analizaremos el modelo Foslins Housewares mediante la simulación. En Foslins podremos comparar el procedimiento de simulación y el procedimiento analítico. Finalmente estudiaremos un modelo de sobreboletaje en aerolíneas como se acostumbra en un escenario típico de la industria, y después lo haremos con un modelo de balanceo de la capacidad como se encuentra en un escenario típico de manufactura.

11.2 GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

En nuestra simulación de los modelos por considerar, será necesario generar valores para las variables aleatorias. En esta sección explicaremos cómo *extraer una muestra aleatoria* de una distribución de probabilidad dada, lo que consideraremos como un sinónimo de generar una variable aleatoria. Existen dos clases principales de variables aleatorias: discretas y continuas. Las variables aleatorias discretas pueden asumir sólo ciertos valores específicos (por ejemplo, enteros), y las variables aleatorias continuas pueden tener cualquier valor fraccionario (un número infinito de resultados posibles).

El tema de la generación de variables aleatorias se maneja en varios niveles. El primer nivel muestra cómo utilizar una hoja de cálculo para generar observaciones a partir de una distribución discreta arbitraria. Esto es suficiente para obtener un panorama general de cómo opera un simulador con elementos aleatorios. La siguiente sección muestra un método general de cómo generar variables aleatorias a partir de cualquier distribución continua. La sección utiliza las distribuciones exponenciales y normales para originar la presentación. Por último, se demuestra el método cuando se utilizan complementos de hoja de cálculo.

CÁPSULA DE APLICACIÓN

Acertijo de robots: La simulación ayuda a GM de Canadá a automatizar su ensamblaje de automóviles

General Motors de Canadá ha destinado más de $2,000 millones a automatizar sus instalaciones de producción. Un ejemplo de este enfoque es la planta de ensamblaje en Oshawa, Ontario. La planta está diseñada para producir cientos de automóviles por turno, utilizando más de 600 robots industriales para llevar a cabo varios trabajos de soldadura, carga, y ensamblaje. Además, se utilizarán 1,200 vehículos guiados automáticamente (VGA) para transportar automóviles y piezas a través de las diversas fases del ensamblaje.

Los VGA pueden manejar una gran variedad de cargas siguiendo una trayectoria seleccionada por el usuario. Son controlados por un microprocesador y reciben comandos a través de una red de antenas y receptores incrustados en el piso. El uso de los VGA en lugar de la banda transportadora tradicional ha permitido a GM dividir la línea de ensamblaje en pequeños grupos de trabajo, cada uno con capacidad para controlar su propia velocidad de trabajo.

La puesta en práctica de un sistema de ensamblaje integral automatizado como éste es muy compleja. Se debe probar primero cada componente aisladamente, y después como parte de una unidad de trabajo integrada. Cualesquiera cambios en una unidad como ésta tienden a ser costosos y a tomar mucho tiempo. Por lo tanto, es muy importante disponer de un procedimiento rápido y poco costoso para evaluar las diferentes configuraciones de trabajo. La simulación proporciona dicha herramienta.

GM llevó a cabo un estudio de simulación para analizar una sección importante de la planta: el sistema de los VGA para bastidores y carrocerías. La disposición básica de esta sección consta de 100 estaciones de trabajo, cada una de operación independiente. Sólo tres de las 28 estaciones de trabajo dedicadas al proceso en sí son operadas por seres humanos. Los VGA son utilizados para entregar piezas pesadas a las máquinas de cada estación. El producto terminado es una carrocería de automóvil completamente soldada, a la que sólo le faltan las puertas, el toldo, las salpicaderas delanteras y la tapa de la cajuela.

La simulación en computadora investigó preguntas como:

- ¿Cuál es la velocidad de producción máxima del sistema? ¿Podría lograrse un caudal confiable de 525 automóviles por turno?
- ¿Dónde podrían ubicarse con mayor eficiencia los lugares de "estacionamiento" para VGA ociosos, para evitar cuellos de botella?
- ¿Cuál es la sensibilidad del sistema ante un aumento de las fallas del equipo o ante un ciclo de máquinas más veloz?
- ¿Cuántos VGA se necesitan para cumplir las cuotas de producción?

Esta última pregunta era de particular importancia pues muy pocos transportadores crearían carencias en el sistema, en tanto que demasiados de ellos lo atascarían. Aún más, con un costo de $50,000 cada uno, los VGA son un importante elemento de costo.

Se modelaron 13 configuraciones para la línea de carrocería, con un rango de VGA entre 54 y 79. Cada configuración se utilizó en 20 simulaciones independientes con turnos de 8.5 horas (incluyendo descansos y almuerzo). Cada simulación ocupó sólo de 15 a 20 minutos en una PC. El estudio señaló que se obtendría un caudal máximo de 630 automóviles utilizando 74 VGA. Sin embargo, si el objetivo era simplemente cumplir la cifra objetivo de 525 automóviles, se podría realizar por lo menos en 99% de las veces utilizando sólo de 42 a 44 VGA.

El modelo de simulación se usó también para averiguar la sensibilidad del sistema de producción a un incremento de la tasa de fallas en las tres estaciones de trabajo más importantes y a cambios en el tiempo de ciclo del proceso automatizado. Ninguno de estos factores demostró tener un efecto muy marcado en el caudal de automóviles, lo que indica que el sistema era a la vez razonablemente estable y robusto.

Este estudio, que requirió pocos recursos, representó una información valiosa para ayudar a la administración con una importante decisión de presupuesto de capital. (Véase Bookbinder *et al.*)

Es fácil pensar en un dispositivo físico que se podría utilizar para generar la demanda en un modelo dado. La ruleta que se muestra en la figura 11.3 funcionaría bien para el siguiente ejemplo de sartenes para *omelette*, y es igualmente posible que señale a cualquier punto de la curvatura del círculo. Por tanto, la probabilidad de que la aguja giratoria caiga en un sector que abarca 30% de la circunferencia (o, lo que es lo mismo, 30% del área) es de 30%. Si las áreas de los sectores están hechas para corresponder a la probabilidad de diferentes demandas, la aguja puede utilizarse para simular la demanda. En este ejemplo de sartenes para *omelette*, hay una probabilidad de 10% de que la demanda sea de 8 sartenes, una probabilidad de 20% de que la demanda sea de 9 sartenes, una probabilidad de 30% de que la demanda sea de 10 $\times$ 100 sartenes, una probabilidad de 20% de que la demanda sea de 11 sartenes, una probabilidad de 10% de que la demanda sea de 12 sartenes y una probabilidad de 10% de que la demanda sea de 13 sartenes. Por ejemplo, si la aguja se detiene en el sector que se muestra en la figura 11.3, se generaría una demanda de 9. Para simular otro **ensayo**, o proceso de simulador, simplemente giraríamos de nuevo la aguja.

USO DE UN GENERADOR DE NÚMEROS ALEATORIOS EN UNA HOJA DE CÁLCULO

Aunque el ejemplo de la aguja giratoria es fácil de comprender, este método tiene un defecto obvio si se van a necesitar miles de ensayos o si el proceso se va a llevar a cabo por computadora. Por esta razón, se han desarrollado *generadores de números aleatorios (GNA)* en hojas de cálculo.

Para generar una demanda para un modelo en particular, primero necesitamos asignar un rango de números aleatorios a cada demanda posible. Esta asignación es arbitraria hasta cierto

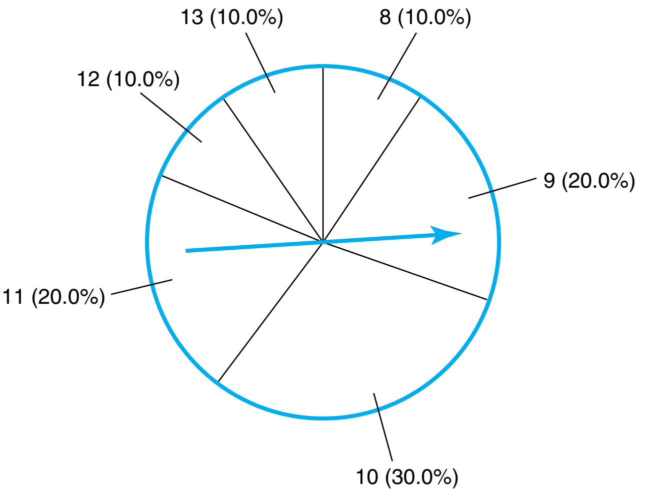


FIGURA 11.3

Aguja giratoria para la demanda de sartenes para *omelette*

Número aleatorio	Demanda
0.0-0.09999	8
0.1-0.29999	9
0.3-0.59999	10
0.6-0.79999	11
0.8-0.89999	12
0.9-0.99999	13

FIGURA 11.4

Asociación de los números aleatorios con la demanda

punto. El único requisito para una asignación correcta es que la proporción de números asignados a una demanda sea igual a la probabilidad de la misma. Asignaremos fracciones del intervalo de 0 a 1 a las demandas del ejemplo de sartenes para *omelette*. Una asignación posible se muestra en la figura 11.4. Observe que en este ejemplo se asigna 10% (.90 - .9999) de todo el intervalo (0 - .9999) a la demanda de 13. La probabilidad de sacar un número aleatorio en el rango de .90 - .9999 es de 1 de 10, o 0.1, que es exactamente la misma probabilidad de que la demanda sea de 13 $\times$ 100.

Por supuesto, ésta no es la única asignación correcta posible. Podríamos asignar una demanda de 13 a *cualquier* intervalo con valor de 10% (por ejemplo, 0.1 - 0.19999 o 0.45 - 0.5499) dado que la probabilidad de sacar un valor en cualquiera de esos intervalos de 10% es también de 0.1.

UN MÉTODO GENERAL

El método que acabamos de mostrar es útil para generar variables aleatorias discretas. Muchos modelos, sin embargo, involucran variables aleatorias *continuas*, lo que requiere una modificación al método GNA discreto. Afortunadamente, existe un método general que puede utilizarse para generar variables aleatorias tanto discretas como continuas. Vamos a desarrollar este método y lo ilustraremos con varios ejemplos.

Para generar una variable aleatoria discreta con la función ALEATORIO() en una hoja de cálculo, necesitamos dos cosas: (1) la capacidad de generar variables aleatorias uniformes discretas y (2) la distribución de las variables aleatorias discretas que serían generadas. De manera similar, para generar variables aleatorias continuas, necesitaremos (1) la capacidad de generar variables aleatorias continuas uniformes en el intervalo de 0 a 1, y (2) la distribución (en forma de *función de distribución acumulada*) de la variable aleatoria que será generada.

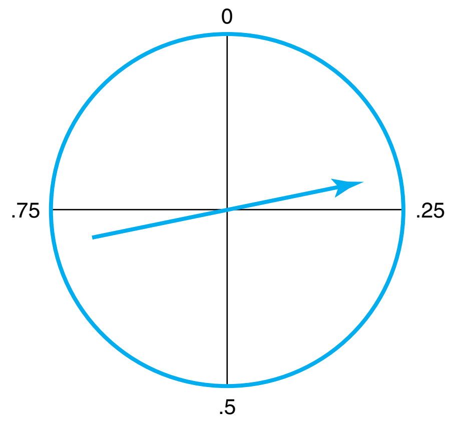


FIGURA 11.5

Aguja giratoria para variables aleatorias uniformes

Variables aleatorias uniformes continuas En lo que sigue, es importante hacer una distinción entre la variable aleatoria uniforme en el intervalo de 0 a 1, U, y una realización específica de dicha variable aleatoria, u. Una manera de generar una variable aleatoria uniforme continua sería utilizar la versión de la aguja giratoria presentada anteriormente. La figura 11.5 muestra una aguja giratoria que, conceptualmente al menos, puede utilizarse para generar valores de U. Cada punto de la circunferencia corresponde a un número situado entre 0 y 1. Por ejemplo, cuando el apuntador está en la posición de las 3 en punto, está apuntando al número 0.25.

Aunque este dispositivo es útil para tener una comprensión intuitiva de las variables aleatorias uniformes, es todavía más limitante en la práctica que la aguja del modelo de sartenes para *omelette*, ya que se requiere de que nosotros seamos capaces de leer el punto exacto en que cayó el indicador. (Por ejemplo, imagine tratar de discernir si el número indicado es 0.500000 o 0.499999.) Hemos visto, sin embargo, que en la práctica no tenemos que depender de aparatos "analógicos" como la aguja giratoria. Con el uso de ALEATORIO() en la hoja de cálculo, podemos aproximarnos a U con cualquier número de decimales que escojamos.

La función de distribución acumulada La segunda clave para generar una variable aleatoria continua es a través de la **función de distribución acumulada** (FDA) de la variable aleatoria. Considere que la variable aleatoria D es la demanda en nuestro ejemplo de la sartén para *omelette*. La FDA de D, que identificaremos con $F(x)$, se define entonces como la probabilidad de que D adquiera un valor menor que o igual a x —esto es, $F(x) = \text{Prob}\{D \le x\}$. Recuerde que si conocemos la distribución de probabilidad para D, como la conocíamos en el modelo de la sartén, podemos encontrar fácilmente la FDA. De hecho, la FDA para los valores clave de D es como sigue:

X	8	9	10	11	12	13
$F(x)$	0.1	0.3	0.6	0.8	0.9	1.0

Le mostraremos cómo utilizar el método general para producir observaciones de la variable aleatoria D. Usted verá que es tan sencillo como el método basado en la distribución de probabilidad, pero ciertamente no es más fácil. Así que, ¿por qué adoptar este método general? La respuesta es de tipo técnico. Con una variable aleatoria continua, la probabilidad de que cualquier valor *específico* ocurra es, estrictamente hablando, de 0. Por lo tanto, usted no puede utilizar un enfoque que se base en la distribución de probabilidad; De hecho, las variables aleatorias continuas no tienen distribuciones de probabilidad la función de densidad y la FDA son dos funciones que se utilizan para definir una variable aleatoria continua.

En la figura 11.6 se muestra una gráfica de la FDA. Para generar una demanda utilizando la gráfica, dibuje un valor particular de u de la variable aleatoria y coloque este valor en el eje vertical de la gráfica. Para obtener el valor de la demanda, d, dibuje una línea horizontal a partir de este valor en el eje vertical hacia el trazo de la FDA, y después abajo verticalmente hacia el eje horizontal. Por ejemplo, cuando $u = 0.5$, la demanda es 10 (véase la figura 11.6).

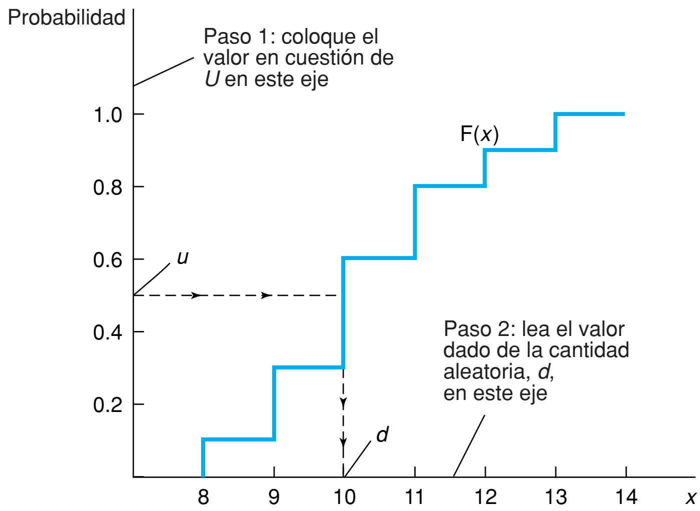


FIGURA 11.6

FDA de la demanda de sartenes para *omelette*

FIGURA 11.7

Cómo utilizar ALEATORIO() para generar la demanda discreta

Valores para ALEATORIO()	=ENTERO(8+5*ALEATORIO())
0 <=ALEATORIO() < 0.2	8
0.2 <=ALEATORIO() < 0.4	9
0.4 <=ALEATORIO() < 0.6	10
0.6 <=ALEATORIO() < 0.8	11
0.8 <=ALEATORIO() < 1.0	12

¿Por qué funciona este procedimiento? Funciona porque la probabilidad de generar una demanda en particular es igual a la probabilidad de que la demanda ocurra. Por ejemplo, queremos que la probabilidad de generar una demanda de 10 sea de 0.3. Se generará una demanda de 10 cuando *u* esté entre 0.3 y 0.6 del eje vertical en la figura 11.6. Pero dado que *U* es una variable aleatoria uniforme, esta probabilidad es de sólo el largo del intervalo, 0.6 – 0.3 = 0.3. De manera similar, queremos que la probabilidad de generar una demanda de 11 sea de 0.2. Se generará una demanda de 11 cuando el valor de *u* esté entre 0.6 y 0.8, lo que ocurrirá con una probabilidad de 0.8 – 0.6 = 0.2, y así sucesivamente. (Quizás usted se pregunte qué sucedería si el valor de *u* fuera de 0.6 exactamente. ¿Se generaría una demanda de 10 o de 11? La respuesta es que en realidad no importa, ya que la probabilidad de generar un valor de *u* de *exactamente* 0.6 es de 0. Una regla convencional común es tomar el valor más grande. Esto funciona excepto en el caso en que *u* es igual a 1 cuando el valor mayor no está definido. En ese caso, simplemente determine que la demanda sea de 13.)

La técnica que acabamos de ilustrar con el modelo de sartenes para *omelette* puede aplicarse a cualquier distribución discreta en general. Ahora, suponga que deseamos hacer un modelo de una **distribución discreta uniforme** de la demanda, donde los valores de 8 a 12 tienen la misma probabilidad (uniforme, ya que cada valor es igualmente posible) de ocurrir. Recuerde que la hoja de cálculo tiene una función, =ALEATORIO(), que devuelve un número aleatorio entre 0 y 1 cuando todos los valores son igualmente posibles. ALEATORIO() es un ejemplo de una **distribución uniforme continua**. La pregunta entonces es: ¿podemos utilizar una distribución uniforme continua para generar una distribución uniforme discreta? Se puede observar que 5*ALEATORIO() dará como resultado la creación de un número aleatorio continuo entre 0 y 5, así que 8 + 5*ALEATORIO() producirá un número continuo entre 8 y 13 (es decir, de hasta 12.99999...). Si entonces hacemos uso de la función ENTERO de Excel, que devuelve la parte entera del número, podemos generar una distribución discreta uniforme de los enteros entre 8 y 12 con la fórmula: ENTERO(8 + 5*ALEATORIO()). La figura 11.7 muestra lo que sería el valor de la fórmula para valores diferentes de ALEATORIO().

Debido a que los intervalos son todos de igual tamaño (1/5), es igualmente posible que ALEATORIO() llegue a cualquiera de ellos, y por lo tanto es igualmente posible que la fórmula

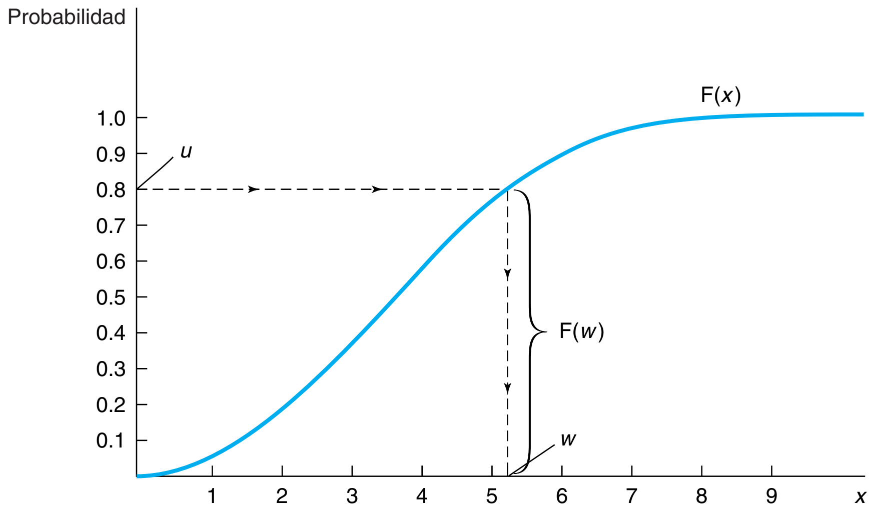


FIGURA 11.8

Generación de cantidades aleatorias

dé como resultado cualquiera de los cinco valores enteros. En general, si deseamos una distribución discreta uniforme de valores enteros entre x y y, podemos utilizar la fórmula:

$$\text{ENTERO}(x + (y - x + 1)*\text{ALEATORIO}())$$

Más adelante, en la sección 11.7, le mostraremos cómo generar una variable aleatoria binomial (que también es discreta). A continuación veremos cómo se puede utilizar el método general para generar cualquier variable aleatoria continua, con ejemplos específicos de las distribuciones exponenciales y normales.

APLICACIÓN DEL MÉTODO GENERAL A DISTRIBUCIONES CONTINUAS

El proceso de dos pasos para generar una variable aleatoria continua W se ilustra en la figura 11.8. Igual que antes, el elemento crucial de la gráfica es la función de distribución acumulada de W, $F(x) = \text{Prob}\{W \le x\}$. La figura muestra una función típica de esta clase, es decir, una que va de 0 a 1, es no decreciente y es *continua* (esto es, que a diferencia de la FDA de una distribución discreta, no tiene saltos en la curva). Exactamente como antes, el proceso comienza al extraer un valor particular de u de la variable aleatoria U y colocando este valor en el eje vertical (0.8 en la figura 11.8). Después, se lee horizontalmente en el trazo de la función de distribución y verticalmente en el eje horizontal para obtener el valor de la cantidad aleatoria (más o menos 5.1 en la figura 11.8). Debemos resaltar que la figura 11.8 ilustra el *concepto* subyacente de la técnica para generar una variable aleatoria continua arbitraria. En la práctica, por lo general el proceso se lleva a cabo por computadora con una representación ya sea analítica o tabular de una gráfica como la de la figura 11.8. Ilustraremos ambos procedimientos más adelante.

El procedimiento gráfico explicado arriba es equivalente a un procedimiento algebraico. Este procedimiento consiste en resolver la ecuación

$$u = F(w) = \text{Prob}\{W \le w\}$$

en términos de w. Esto se puede ver en la figura 11.8, donde la distancia vertical en el eje vertical es u y es igual a la distancia vertical desde w en el eje horizontal hasta el trazo de la FDA. Cuando la FDA tiene una expresión analítica lo suficientemente simple, es posible resolver w en función de u.

Generación a partir de la distribución exponencial Una distribución importante en la cual se dé el caso anterior es la **distribución exponencial**. Como veremos en la sección 12.2, la distribución exponencial se utiliza a menudo para hacer un modelo del tiempo entre llegadas en un modelo de línea de espera. Su FDA está dada por

$$F(w) = \text{Prob}\{W \le w\} = 1 - e^{-\lambda w}$$

donde $1/\lambda$, lo que es la media de la variable aleatoria exponencial, W. Por lo tanto, deseamos resolver la siguiente ecuación para w.

$$u = 1 - e^{-\lambda w} \tag{11.1}$$

La solución es

$$w = -1/\lambda \ln(1 - u) \tag{11.2}$$

Por ejemplo, suponga que queremos extraer una muestra de la distribución exponencial con una media de 20 utilizando esta ecuación y un generador de números aleatorios. Se haría lo siguiente:

1. Generar un número continuo uniforme con ALEATORIO(). Por ejemplo, suponga que obtenemos el número 0.75.
2. Entonces se tomaría el logaritmo natural de 1 – 0.75 = 0.25, que es –1.386, y lo multiplicaríamos por –20. La observación de la distribución exponencial es (–20)(–1.386) = 27.72.

Para resumir, pondríamos la expresión = -20*LN(1 - ALEATORIO()) en una celda de la hoja de cálculo, y ésta generaría números aleatorios distribuidos exponencialmente, con una media de 20.

Generación a partir de una distribución normal La **distribución normal** desempeña un papel importante en muchos modelos analíticos y de simulación. En la simulación, a menudo se da por sentado que las cantidades aleatorias están distribuidas normalmente. Por ejemplo, vamos a adelantarnos para observar el modelo de sartenes para *omelette* de Foslins de Marie Ford (sección 11.6). Encontraremos que Marie desarrolló la hipótesis de que una distribución normal con una media de 1,000 y una desviación estándar de 100 describe la demanda que ocurrirá.

Para utilizar la simulación para estimar el costo esperado de un tamaño de pedido dado, Marie tendría que extraer una demanda aleatoria a partir de una distribución normal con una media (μ) de 1,000 y una desviación estándar (σ) de 100 para cada una de las iteraciones. Resulta que si Z es una variable aleatoria normal unitaria (una normal con una media de 0 y una desviación estándar de 1), entonces $\mu + Z\sigma$ es una variable aleatoria normal con una media μ y una desviación estándar σ. Así que el problema se reduce a escoger de una distribución normal unitaria. La dificultad aquí es que la FDA de la normal unitaria es lo suficientemente complicada como para que no sea posible obtener una expresión analítica de z en términos de u. Por fortuna, Excel tiene un complemento que puede hacer esto por nosotros.

Así que, para generar una variable aleatoria normal con una media de 1,000 y una desviación estándar de 100 en Excel, Marie tendrá que utilizar esta sencilla fórmula: =DISTR.NORM.INV(ALEATORIO(),1000,100), en donde quizá usted la encuentre en inglés: NORMINV(RAND(),1000,100). Excel automáticamente devolverá un número aleatorio de distribución normal, con una media de 1,000, y una desviación estándar de 100.

CÓMO GENERAR VARIABLES ALEATORIAS UTILIZANDO COMPLEMENTOS

El tema de la generación de variables aleatorias se manejará ahora tanto para Crystal Ball como para @Risk. Estos paquetes de *software* tienen diferentes enfoques y aún no se encuentran traducidos al español. En Crystal Ball, se debe pasar por el menú "Define Assumption", seleccionar de una galería de distribuciones e indicar los parámetros de distribución apropiados para cada una de las celdas de la hoja de cálculo que represente una variable aleatoria. En @Risk, de hecho debemos colocar una fórmula para el generador de números aleatorios (GNA) en cada celda de la hoja de cálculo que represente una variable aleatoria. Ambos paquetes complementarios ofrecen un número de características que no están disponibles en Excel. Primero, los paquetes complementarios nos ofrecen numerosas distribuciones aleatorias que no están disponibles directamente en una hoja de cálculo (por ejemplo, Poisson, Binomial, Lognormal, etc.). Segundo, también ofrecen sencillos comandos para instalar y ejecutar muchas más iteraciones (sin límite en Crystal Ball; hasta 32,767 en @Risk) de las que podríamos encontrar en Excel. Por último, realizan automáticamente resúmenes estadísticos y gráficos a partir de nuestros resultados.

Para introducir la información para un GNA particular en Crystal Ball, se utilizan menús, los cuales se ilustran con ejemplos en las secciones 11.4, 11.5, 11.6 y 11.8. La tabla 11.1 contiene el formato @Risk (demostrado en la sección 11.7) para algunos de los GNA que usted utilizará más comúnmente para sus modelos de simulación.

TABLA 11.1

DISTRIBUCIÓN	FÓRMULA @RISK	DESCRIPCIÓN DEL GNA
Binomial	=RiskBinomial (n, p	Devuelve el número de "éxitos" en una muestra de n ensayos, donde p es la probabilidad de éxito en un ensayo en particular.
Chi cuadrada	=RiskChisq(λ)	Devuelve un valor de la distribución chi cuadrada con una media de λ. Es útil para sumar variables aleatorias de distribución normal.
Acumulativa	=RiskCumul($a,b,\{x_1, x_2,..., x_n\}, \{p_1, p_2,..., p_n\}$)	Devuelve un valor partiendo de una distrubución general donde a es el mínimo, b es el máximo y p_i representa la probabilidad de que se saque un valor de x_i o menor, de la distribución.
Discreta (General)	=RiskDiscrete ($\{x_1, x_2,..., x_n\}, \{p_1, p_2,..., p_n\}$)	Devuelve uno de los n valores de x_1 a x_n. Las probabilidades p_i representan la probabilidad de que x_i se escoja por el GNA.
Discreta (Uniforme)	=RiskDuniform ($\{x_1, x_2,..., x_n\}$)	Devuelve uno de los n valores de x_1 a x_n con igual probabilidad.
Exponencial	=RiskExp(β)	Devuelve un valor de la distribución exponencial con una media de β. Es útil para los modelos de líneas de espera (tiempo entre llegadas).
Lognormal	=RiskLognorm(μ,σ)	Devuelve un valor a partir de una distribución lognormal con una media μ y una desviación estándar σ. Es útil para cantidades tales como el tamaño de campos petroleros o de cuentas bancarias.
Normal	=RiskNormal(μ,σ)	Devuelve un valor a partir de una distribución normal con una media μ y una desviación estándar σ. Es útil para cantidades tales como la distribución de alturas o pesos o de resultados de pruebas.
Poisson	=RiskPoisson(λ)	Devuelve un valor a partir de una distribución Poisson con media λ. Es útil para la descripción del número de eventos que ocurrieron en un intervalo de tiempo dado.
Triangular	=RiskTriangular(a,b,c)	Devuelve un valor a partir de una distribución triangular con parámetros de (a = mínimo, b = más probable, c = máximo). Es útil cuando no se conoce demasiado acerca de la forma de la distribución además de los parámetros ya mencionados.
Uniforme (continua)	=RiskUniform(a,b)	Devuelve un valor a partir de un distribución uniforme con parámetros de (a = mínimo, b = máximo). Es útil cuando sólo se conoce el rango de incertidumbre y cada valor tiene la misma posibilidad de ocurrir.

@Risk también ofrece distribuciones truncadas para algunas de las distribuciones arriba mencionadas (por ejemplo, exponencial, lognormal, normal). Para utilizar la tabla 11.1, suponga que usted desea generar la demanda aleatoria en @Risk a partir de la siguiente distribución: una probabilidad de 10% de 8 ventas, una probabilidad de 20% de 9 ventas, una probabilidad de 30% de 10 ventas, una probabilidad de 20% de 11 ventas, una probabilidad de 10% de 12 ventas y una probabilidad de 10% de 13 ventas. Todo lo que necesita hacer es escribir=RiskDiscrete({8,9,10,11,12,13},{0.1,0.2,0.3,0.2,0.1,0.1}) en la celda de la hoja de cálculo que representa la demanda.

Para una gráfica de la forma general de estas distribuciones, adelántese a la galería de distribuciones de Crystal Ball que se muestra en la figura 11.17. Se dará cuenta de que algunas de las distribuciones mostradas en la tabla precedente están disponibles directamente en Crystal Ball (por ejemplo, Poisson, normal, uniforme continua), mientras que se accede a otras a través de la distribución "Custom" (por ejemplo, discreta, acumulativa), y algunas no están disponibles en absoluto (por ejemplo, chi cuadrada).

Las siguientes dos secciones tratan el tema de llevar a cabo una simulación en una hoja de cálculo, dependiendo de qué *software* tiene a su disposición. Si no cuenta con algún complemento de software para simulación, continúe a la sección 11.3, que le enseñará los fundamentos para hacer un modelo de simulación solamente con la herramienta de hoja de cálculo de Excel, y después omita la sección 11.4. De otra manera (es decir, si usted sí tiene un paquete complementario a su disposición), omita la sección 11.3 y vaya directamente a la 11.4.

11.3 SIMULACIÓN CON HOJA DE CÁLCULO

La mayor parte de las simulaciones se llevan a cabo en hojas de cálculo, debido a que el número de cálculos requeridos sobrepasa pronto las capacidades humanas. Las simulaciones se pueden llevar a cabo con la hoja de cálculo sola (sin la ayuda de *software* complementario especial), como se demostrará en esta sección. Aquí presentaremos un ejemplo del presupuesto de capital para mostrar el uso de una hoja de cálculo en la simulación y para establecer algunos puntos importantes sobre los resultados de una simulación en hoja de cálculo.

EJEMPLO DE PRESUPUESTO DE CAPITAL: ADICIÓN DE UN NUEVO PRODUCTO A LA LÍNEA DE PROTRAC

June Wilson es la administradora de desarrollo de nuevos productos y está considerando las implicaciones financieras de una posible adición a la línea de equipo pesado de PROTRAC. Los costos de la puesta en marcha para el modelo G-9 propuesto (que incluyen la compra de nuevo equipo, capacitación del personal, etc.) están estimados en $150,000. El nuevo producto será vendido a un precio de $35,000 la unidad. Los costos fijos están estimados en $15,000 al año, mientras que el costo variable sería de aproximadamente 75% de los ingresos de cada año. La depreciación fiscal[1] sobre el nuevo equipo sería de $10,000 por año durante los cuatro años de vida productiva del G-9. El valor de salvamento del equipo al final de los cuatro años es incierto, de modo que June lo estima de manera conservadora en cero. El costo de capital de PROTRAC es de 10% y su tasa de impuestos es de 34%.

El aspecto más incierto de la propuesta es la demanda por el nuevo producto. Si June conociera la demanda, calcularía fácilmente el *valor neto actual* (VNA; también conocido como el *valor neto presente*) de la propuesta utilizando un programa de hoja de cálculo. Por ejemplo, si June supone la demanda de los G-9 en 10 unidades en cada uno de los siguientes cuatro años, la hoja de cálculo en la figura 11.9 (WILSON.XLS) muestra que el VNA sería de $12,455.60.

EL MODELO CON DEMANDA ALEATORIA

Sin embargo, es poco probable que la demanda sea exactamente igual cada año. June siente que sería más realista modelar la demanda cada año no como un valor constante común, sino como una secuencia de variables aleatorias. Este modelo de la demanda es apropiado cuando hay un nivel constante básico de demanda que está sujeta a fluctuaciones aleatorias de un año a otro. Cuando el nivel básico de demanda es de 10 unidades, la demanda real para los siguientes cuatro años puede resultar que sea de 12, 9, 8 y 10, debido a los factores aleatorios que afectan la demanda.

Cómo hacer una muestra de la demanda con una hoja de cálculo June decide generar la demanda aleatoria para cada uno de los cuatro años para ver cuál es el efecto que tiene la variabilidad de la demanda en el VNA. Ella supuso inicialmente que la demanda en un año será de 8, 9, 10, 11 o 12 unidades con una misma posibilidad de que ocurra cada valor. Éste es un ejemplo de una distribución discreta uniforme. Mediante su nuevo conocimiento de la sección 11.2, ella utiliza la fórmula =ENTERO(8+5*ALEATORIO()) para hacer una muestra de la distribución discreta uniforme de los cinco enteros 8, 9, 10, 11, 12. Debido a que el valor de ALEATORIO() cambiará cada vez que se recalcule la hoja de cálculo, June puede llevar a cabo fácilmente **ensayos múltiples**; esto es, obtener una nueva muestra de la demanda oprimiendo simplemente la tecla de recálculo de su hoja de cálculo (F9 por lo general). Después de hacer esto varias veces, se sorprendió de encontrar que en algunos ensayos obtenía un VNA negativo.

La figura 11.10 muestra que el VNA correspondiente a una secuencia aleatoria de demandas es de $2,515.71, aproximadamente 80% menos que el VNA si la demanda fuera constante en 10 por año. Si June volviera a presionar la tecla F9, obtendría una muestra diferente de la demanda, y por lo tanto la posibilidad de un VNA diferente. Debido a que la demanda puede variar de una muestra a otra, también puede variar el VNA. Dicho de manera más técnica, la demanda consiste en variables aleatorias, por lo tanto el VNA también es una variable aleatoria.

[1]La depreciación se sustrae primero para determinar la utilidad antes de impuestos, y después se añade nuevamente para determinar el flujo de efectivo neto.

B19 = =VNA($D$3,C17:F17)+B17

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Hipótesis**							
2	Costos de puesta en marcha	$ 150,000	Costos variables	75%	de los ingresos			
3	Precio de venta	$ 35,000	Costo del capital	10%				
4	Costos fijos	$ 15,000	Tasa fiscal	34%				
5	Depreciación anual	$ 10,000						
6			Demanda anual	10.0	unidades			
7								
8		**Año 0**	**1**	**2**	**3**	**4**		
9	*Demanda*		10.0	10.0	10.0	10.0		
10	*Ingresos*		350,000	350,000	350,000	350,000		
11	*Costo fijo*		15,000	15,000	15,000	15,000		
12	*Costo variable*		262,500	262,500	262,500	262,500		
13	*Depreciación*		10,000	10,000	10,000	10,000		
14	*Utilidad antes de impuestos*		62,500	62,500	62,500	62,500		
15	*Impuestos*		21,250	21,250	21,250	21,250		
16	*Utilidad después de impuestos*		41,250	41,250	41,250	41,250		
17	*Flujo neto de efectivo*	(150,000)	51,250	51,250	51,250	51,250		
18								
19	*Valor neto actual*	$12,455.60						
20								
21								
22								

Inicial / DemandaAleatoria / DistribucióndelVNA / 100

Celda	Fórmula	Cópiese a
C10	=C9*$B$3	D10:F10
C11	=$B$4	D11:F11
C12	=C10*$D$2	D12:F12
C13	=$B$5	D13:F13
C14	=C10−SUMA(C11:C13)	D14:F14
C15	=$D$4*C14	D15:F15
C16	=C14−C15	D16:F16
B17	=−$B$2	—
C17	=C16+C13	D17:F17
B19	=VNA($D$3,C17:F17)+B17	—

FIGURA 11.9

Hoja de cálculo inicial de Wilson

C9 = =ENTERO(8+5* ALEATORIO())

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Hipótesis**								
2	Costos de puesta en marcha	$ 150,000	Costos variables	75%	de los ingresos				
3	Precio de venta	$ 35,000	Costo del capital	10%					
4	Costos fijos	$ 15,000	Tasa fiscal	34%					
5	Depreciación anual	$ 10,000							
6			Demanda anual	10.0	unidades				
7									
8		**Año 0**	**1**	**2**	**3**	**4**			
9	*Demanda*		10.0	8.0	9.0	11.0			
10	*Ingresos*		350,000	280,000	315,000	385,000			
11	*Costo fijo*		15,000	15,000	15,000	15,000			
12	*Costo variable*		262,500	210,000	236,250	200,750			
13	*Doprociación*		10,000	10,000	10,000	10,000			
14	*Utilidad antes de impuestos*		62,500	45,000	53,750	71,250			
15	*Impuestos*		21,250	15,300	18,275	24,225			
16	*Utilidad después de impuestos*		41,250	29,700	35,475	47,025			
17	*Flujo neto de efectivo*	(150,000)	51,250	39,700	45,475	57,025			
18									
19	*Valor neto actual*	$2,515.71							
20									
21									
22									
23									
24									
25									

Inicial / **DemandaAleatoria** / DistribucióndelVNA / 100 iteraciones / Hoja4 / Hoja5

Celda	Fórmula	Cópiese a
C9	=ENTERO(8+5*ALEATORIO())	D9:F9

FIGURA 11.10

Hoja de cálculo de Wilson, con demandas seleccionadas aleatoriamente

EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA

June se da cuenta de que necesita elaborar un modelo de simulación para que le ayude a responder dos preguntas acerca de la distribución del VNA: (1) ¿cuál es la *media* o el **valor esperado** del VNA? y (2) ¿cuál es la probabilidad de que el VNA asuma un valor negativo? Entre más grande sea el valor de VNA y —quizás más importante— entre menos posible sea que el VNA logre ser negativo, más atractiva será la propuesta de añadir el G-9 a la línea de producción de PROTRAC.

Así que el siguiente paso es ejecutar automáticamente la simulación cierto número de veces y capturar el VNA resultante en una hoja de cálculo por separado. Esto se puede hacer con bastante facilidad con el comando Tabla de datos de la hoja de cálculo, como sigue:

1. Haga clic en el menú Insertar.
2. Seleccione Hoja de trabajo.
3. Haga doble clic en la ceja de la parte inferior que tenga el nombre de la hoja de cálculo (por lo general un nombre predeterminado como "Hoja3") y déle el nombre de "100 iteraciones".
4. Escriba el valor de comienzo (1) en la celda A2 y oprima Intro.
5. Haga clic de nuevo en la celda A2.
6. Haga clic en el menú Edición, seleccione Rellenar, después Series.
7. Seleccione la opción Series en columnas y escriba un valor final de 100.
8. Haga clic en Aceptar.

Excel llenará automáticamente la columna de la celda seleccionada (A2) con valores ascendentes en 1 (el valor inicial) hasta que alcance el valor final de 100. A fin de encontrar el VNA, escribimos la siguiente fórmula en la celda B2 de la nueva hoja de cálculo: =Demanda aleatoria!B19. También escribiremos etiquetas en las celdas A1 y B1 por motivos de claridad. Ahora utilizaremos el comando Tabla de datos. Esto se hace como sigue:

1. Seleccione el rango A2:B101.
2. Haga clic en el menú Datos y después en Tabla.
3. En el cuadro de diálogo Tabla, determine que la celda C1 sea la celda columna de entrada.
4. Haga clic en Aceptar.

Excel entonces sustituirá cada valor en el rango de A2 a A101 en la celda C1 (que no tiene ningún efecto real), recalculará la hoja de cálculo y guardará los VNA resultantes en las celdas adyacentes de la columna B. Después de hacer esto, usted deberá tener una lista de los valores en la columna B representando 100 valores posibles del VNA, similares a los que se muestran en la figura 11.11. Los números que usted genere no correspoderán con los que aparecen en la figura 11.11. Recuerde que este procedimiento produce una muestra aleatoria de 100 ensayos a partir de un número infinito de posibles resultados. Con un poco de suerte, las características generales de su muestra deberían ser similares a las que aparecen aquí.

A fin de enfocarnos en estas 100 observaciones, vamos a convertir las fórmulas en valores siguiendo un procedimiento simple:

1. Seleccione el rango B2:B101.
2. Haga clic en el menú Edición y después en Copiar.
3. Haga clic en el menú Edición de nuevo, después en Pegado especial.
4. Seleccione la opción Valores, después haga clic en Aceptar.

A fin de obtener un resumen de nuestras 100 iteraciones, podemos utilizar la herramienta de análisis de datos predeterminada de Excel. (Si no aparece la opción Análisis de datos en su menú Herramientas, seleccione la opción Complementos del menú Herramientas, después seleccione la opción Herramienta de análisis. Esta herramienta genera numerosas estadísticas descriptivas (por ejemplo, la media, la desviación estándar, el mínimo, el máximo, etc.) automáticamente. Para utilizarlo, haga lo siguiente:

1. Haga clic en el menú Herramientas, después en Análisis de datos.
2. Haga clic en Estadísticas descriptivas, y complete el cuadro de diálogo que aparece en la figura 11.12.
3. Haga clic en Aceptar.

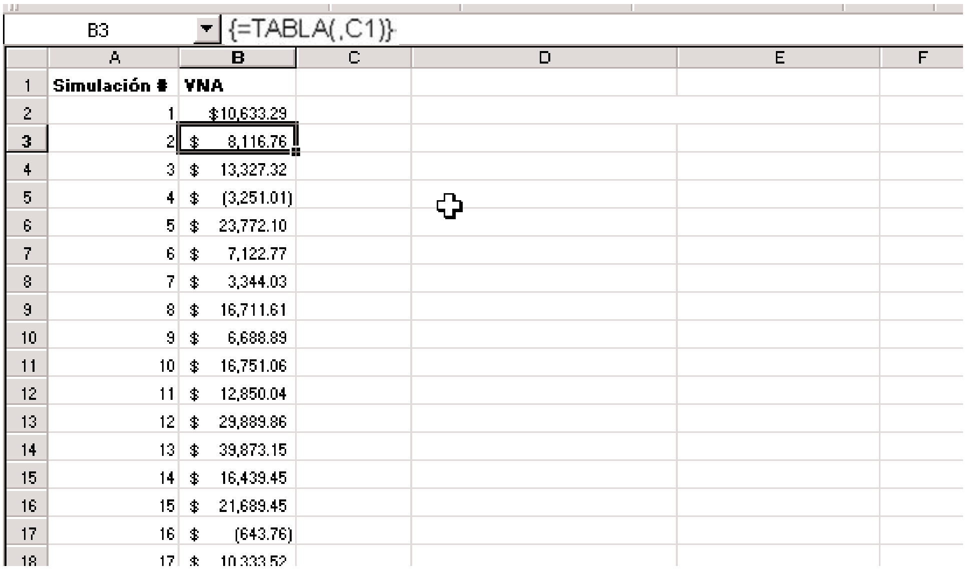


FIGURA 11.11

Resultados de la simulación de Wilson

FIGURA 11.12

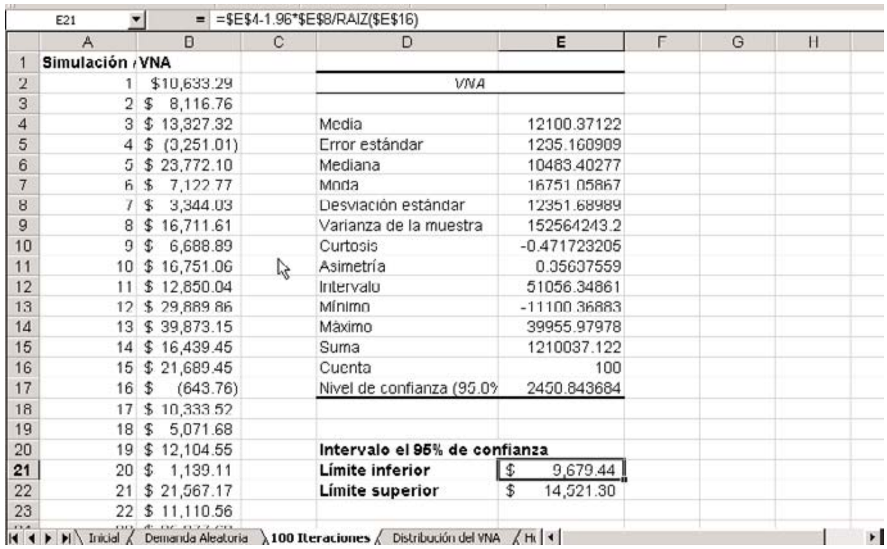
Cuadro de diálogo Estadísticas descriptivas

Con base en esta muestra limitada, los resultados aparecen en la figura 11.13, e indican que la media estimada de VNA es de $12,100.37 y la desviación estándar es más bien grande, de $12,351.69.

Riesgo hacia abajo y riesgo hacia arriba June también desea saber cuál es el mejor y el peor resultado posible. En esta muestra, podemos ver en la figura 11.13 que el VNA más grande es de $39,955.98 y el menor es de –$11,100.37. Esto le da una mejor idea del rango del VNA posible que pueden ocurrir.

Distribución de resultados Aunque los datos de la figura 11.13 ofrecen más información que el caso básico VNA, existen otros factores que debemos considerar. ¿Qué tan posible es que ocurran estos resultados extremos (mejor caso, peor caso)? A fin de responder a esta pregunta, necesitamos saber algo acerca de la forma de la distribución del VNA. Afortunadamente, Excel también tiene algunas características predeterminadas para ayudarnos. Para generar un histograma (una distribución gráfica de los VNA) así como una tabla de frecuencia numérica, sólo siga estos pasos:

1. Haga clic en el menú Herramientas, después en Análisis de datos.
2. Escoja Histograma y complete su cuadro de diálogo como se muestra en la figura 11.14.
3. Haga clic en Aceptar.



E21 = =$E$4-1.96*$E$8/RAIZ($E$16)

	A	B	C	D	E
1	Simulación	VNA			
2	1	$10,633.29		VNA	
3	2	$ 8,116.76			
4	3	$ 13,327.32		Media	12100.37122
5	4	$ (3,251.01)		Error estándar	1235.160909
6	5	$ 23,772.10		Mediana	10483.40277
7	6	$ 7,122.77		Moda	16751.05867
8	7	$ 3,344.03		Desviación estándar	12351.68989
9	8	$ 16,711.61		Varianza de la muestra	152564243.2
10	9	$ 6,688.89		Curtosis	-0.471723205
11	10	$ 16,751.06		Asimetría	0.35637559
12	11	$ 12,850.04		Intervalo	51056.34861
13	12	$ 29,889.86		Mínimo	-11100.36883
14	13	$ 39,873.15		Máximo	39955.97978
15	14	$ 16,439.45		Suma	1210037.122
16	15	$ 21,689.45		Cuenta	100
17	16	$ (643.76)		Nivel de confianza (95.0%	2450.843684
18	17	$ 10,333.52			
19	18	$ 5,071.68			
20	19	$ 12,104.55		**Intervalo el 95% de confianza**	
21	20	$ 1,139.11		**Límite inferior**	$ 9,679.44
22	21	$ 21,567.17		**Límite superior**	$ 14,521.30
23	22	$ 11,110.56			

FIGURA 11.13

Resumen de las estadísticas descriptivas

Celda	Fórmula
E21	=\$E\$4−1.96*\$E\$8/RAÍZ(\$E\$16)
E22	=\$E\$4+1.96*\$E\$8/RAÍZ(\$E\$16)

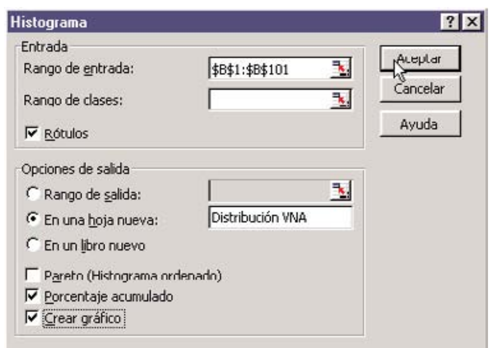


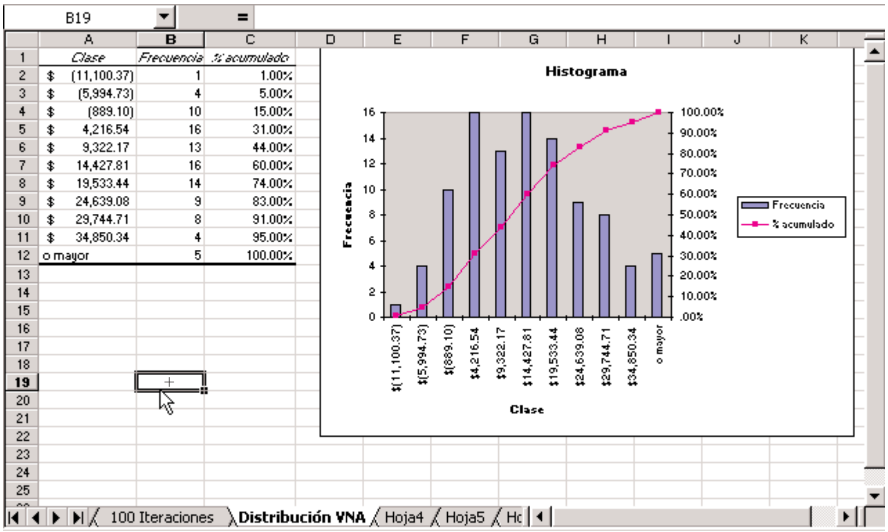
FIGURA 11.14

Cuadro de diálogo Histograma

En este caso, hemos guardado los resultados en una hoja de cálculo llamada "Distribución del VNA". Ésta (que se refiere al *valor neto presente*) aparece en la figura 11.15. La columna Frecuencia mostrada en la columna B indica el número de nuestros 100 ensayos que cayeron dentro de los parámetros definidos por Excel en la columna A. Por ejemplo, una observación fue menor que o igual a ($11,100.37); 10 observaciones fueron mayores que ($5,994.73) y menores que o iguales a ($889.10). El mayor número de observaciones (16) ocurrió en el intervalo de mayores que $9,322.17 y menores que o iguales a $14,427.81. El histograma que se muestra a la derecha de la figura 11.15 da una representación visual de los resultados posibles para el VNA. Tiene una forma más o menos de campana.

La columna % acumulado que se muestra (la columna C) indica que más de 15% de las observaciones VNA fueron negativas (menores que 0). Estos datos pueden resultar útiles para responder a otras preguntas que podría formular June o su jefe financiero.

¿Qué tan confiable es la simulación? June ahora tiene las respuestas a sus dos preguntas acerca de la distribución del VNA: (1) ¿cuál es el valor *medio* del VNA? (A:$12,100), y (2) ¿cuál es la probabilidad de que el VNA asuma un valor negativo? (A: > 15%). Ahora haremos más preguntas: ¿cuánta confianza tenemos en las respuestas que obtuvo June? ¿Tendríamos más confianza si ella hiciera más ensayos?



Clase	Frecuencia	% acumulado
$ (11,100.37)	1	1.00%
$ (5,994.73)	4	5.00%
$ (889.10)	10	15.00%
$ 4,216.54	16	31.00%
$ 9,322.17	13	44.00%
$ 14,427.81	16	60.00%
$ 19,533.44	14	74.00%
$ 24,639.08	9	83.00%
$ 29,744.71	8	91.00%
$ 34,850.34	4	95.00%
o mayor	5	100.00%

FIGURA 11.15

Histograma y tabla de frecuencias

Con certeza, se piensa que entre más ensayos hagamos, más confianza tendremos en nuestras respuestas. Pero ¿qué tanta confianza podemos tener en las 100 iteraciones que ya hicimos? Desde el mundo de la estadística, recordamos que podemos construir intervalos de confianza con base en los resultados obtenidos. Por ejemplo, podemos tener 95% de confianza en que el verdadero valor medio VNA está dentro del intervalo de ±1.96 desviaciones estándar de la media estimada. En este caso, la desviación estándar de la media es la desviación estándar reportada, dividida entre la raíz cuadrada del número de ensayos. Este intervalo de 95% de confianza en la media fue calculado por June y dado a conocer en la figura 11.13 como ($9,679.44; $14,521.30). Dicho de otra manera, podemos tener 95% de confianza en que la verdadera media del VNA está en algún punto entre $9,679 y $14,521, siendo nuestra mejor aproximación $12,100.

¡Debemos tener cuidado con *no* caer en la trampa del "valor esperado"! Muchos estudiantes creen que la media real del VNA puede calcularse siempre estableciendo todas las variables aleatorias por sus valores medios (establecer todas las demandas en 10, en este ejemplo). Esto es lo que June tenía en su hoja de cálculo inicial (véase la figura 11.9), pero no hay garantía alguna de que el VNA obtenido en esta manera sea también la media simulada verdadera. Aunque pueda parecer lógico, hay algunas debilidades potenciales en este razonamiento. Primero, la manera en que se utilizan los valores de la demanda para calcular los flujos de efectivo anuales para después convertirlos en un solo número de VNA (o cualquier otra medida de desempeño) puede ser altamente no lineal. Existen otras sutilezas que no se mencionarán aquí, pero esté prevenido: ¡no caiga en la trampa del "valor esperado"!

Existen casos donde este razonamiento "intuitivo" funcionará, pero esto no ocurrirá siempre. Un simple ejemplo de una de las experiencias de la vida diaria debería convencerlo de que el VNA (o cualquier otra medida de desempeño) calculado con el valor esperado de las variables aleatorias no es necesariamente igual al VNA esperado. Considere una fila o cola de espera en la tienda de comestibles. Suponga que el tiempo esperado para atender a un cliente es de 0.9 minutos y que el tiempo promedio entre la llegada de los clientes es de 1 minuto. Al examinar la situación utilizando los valores esperados, usted predeciría que el tiempo de espera promedio será de 0 minutos (debido a que los clientes son atendidos más rápido de lo que llegan), pero todos sabemos que el tiempo de espera *promedio* es mayor que 0 minutos, a pesar de que a veces somos afortunados y no tenemos que esperar.

En resumen, June necesita más de 100 ensayos si desea respuestas más precisas a sus preguntas. ¿Qué es lo que hemos aprendido?

1. Aumentar el número de ensayos puede dar una mejor estimación del rendimiento esperado, pero incluso con un mayor número de ensayos puede haber alguna diferencia entre el *promedio* simulado y el rendimiento esperado real. Observe que el VNA esperado real en el ejemplo de June resulta ser de $12,455; el VNA promedio con 100 muestras fue de $12,100 (un error de 2.85%).

2. Las simulaciones pueden proporcionar información útil sobre la distribución de resultados. Incluso con una muestra pequeña de 100 ensayos hubo una indicación (una probabilidad de mayor que 0.15) de que el proyecto puede resultar en un VNA negativo. Ésta es información valiosa y es algo que no se podría haber determinado con sólo el análisis del caso básico, o incluso con un análisis de riesgo hacia arriba/hacia abajo.

3. Los resultados de la simulación son sensibles a las hipótesis que afectan los parámetros de entrada. La sección siguiente muestra que si June cambiara sus suposiciones acerca de la distribución de la demanda (a una **distribución de Poisson** con la misma media de 10), habría un impacto importante en la probabilidad de que se produjera un VNA negativo (se incrementa de aproximadamente .15 a cerca de .27).

Quizás el impacto más importante de la simulación ocurre en el proceso de toma de decisiones. Si June no hubiera llevado a cabo algún análisis de simulación, habría dado una entusiasta recomendación a la propuesta de adición a la línea de equipo pesado, con base en la media del VNA. Sin embargo, después de llevar a cabo la simulación, ella piensa que el proyecto es muy arriesgado como para recomendarlo. Si bien éste es un juicio cualitativo de su parte, ella puede apoyarlo con los resultados cuantitativos del modelo de simulación. Como hemos observado anteriormente, los modelos no liberan a los administradores de la responsabilidad de tomar decisiones, pero sí proporcionan información adicional para tomar esas decisiones de una manera bien informada.

11.4 SIMULACIÓN CON COMPLEMENTOS DE HOJA DE CÁLCULO

Los complementos de hoja de cálculo, como Crystal Ball y @Risk, hacen mucho más sencilla la tarea de simulación que cuando ésta se hace con una hoja de cálculo sola. En particular, estos programas simplifican en gran medida el proceso de generación de variables aleatorias y el ensamblaje de los resultados estadísticos. Como veremos, ambos complementos también facilitan en gran medida la captura y despliegue del resultado de la simulación. En esta sección presentamos un ejemplo de presupuesto de capital para mostrarle el uso de Crystal Ball [versión para estudiantes 4.0c] para la simulación y para establecer algunos hechos importantes sobre el resultado de una simulación de hoja de cálculo. En otras secciones con sus ejemplos, continuaremos la demostración del uso de Crystal Ball, que se distribuye gratis con este libro de texto en la versión para estudiantes. También demostraremos @Risk [versión 3.5e] en la sección 11.7.

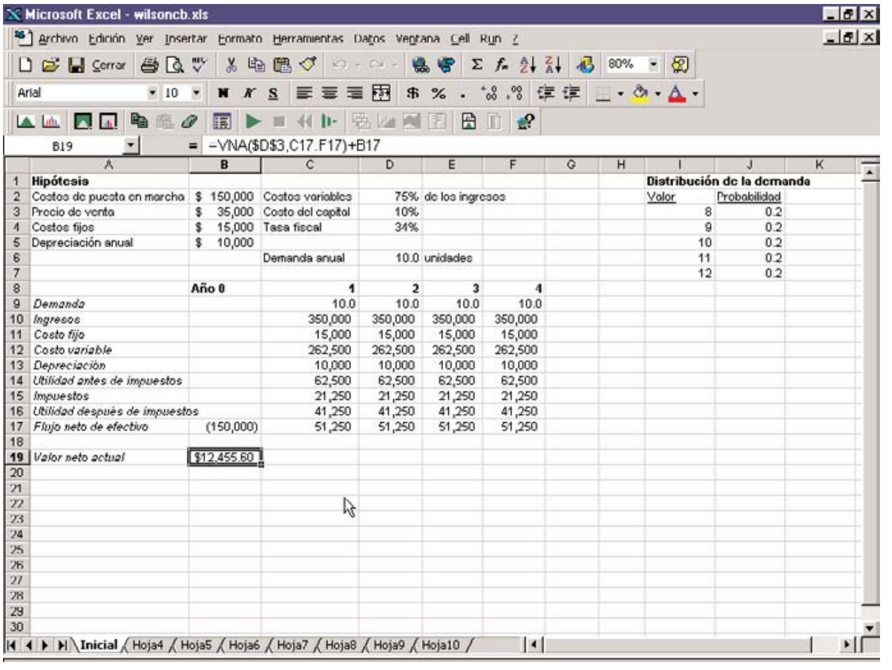
La simulación en hoja de cálculo sin la ayuda de los paquetes complementarios puede ser una tarea lenta y tediosa (por decirlo de una manera amable), incluso para modelos simples. Para modelos más complicados, para distribuciones más complejas o para un mayor número de iteraciones, estos inconvenientes se acentúan. Afortunadamente, las computadoras pueden programarse fácilmente para que generen cantidades aleatorias a partir de cualquier distribución específica en grandes cantidades, de manera rápida y precisa. Como hemos visto, los paquetes complementarios tienen una cantidad de diferentes funciones preprogramadas, que producirán variables aleatorias automáticamente. Por todas estas razones, casi todas las simulaciones de hoja de cálculo se llevan a cabo con la ayuda de paquetes complementarios.

UN EJEMPLO DE PRESUPUESTO DE CAPITAL: LA ADICIÓN DE UN NUEVO PRODUCTO A LA LÍNEA DE PROTRAC

June Wilson es la administradora de desarrollo de nuevos productos y está considerando las implicaciones financieras de una posible adición a la línea de equipo pesado de PROTRAC. Los costos de entrada para el modelo G-9 propuesto (que incluyen la compra de nuevo equipo, capacitación del personal, etc.) están estimados en $150,000. El nuevo producto será vendido a un precio de $35,000 por unidad. Los costos fijos están estimados en $15,000 por año, mientras que el costo variable sería de aproximadamente 75% del ingreso cada año. La depreciación fiscal[2] sobre el nuevo equipo sería de $10,000 por año durante la vida productiva de cuatro años del G-9. El valor de salvamento del equipo, al final de los cuatro años, es incierto, así que June lo estima de manera conservadora en cero. El costo del capital de PROTRAC es de 10% y su tasa de impuestos es de 34%.

El aspecto más incierto de la propuesta es la demanda por el nuevo producto. Si June conociera la demanda, calcularía fácilmente el *valor neto actual* de la propuesta utilizando un programa de hoja de cálculo. Por ejemplo, si June supone la demanda de los G-9 en 10 unidades

[2]La depreciación se resta primero para determinar las ganancias antes de impuestos y después se suma nuevamente para determinar el flujo neto de efectivo.



Celda	Fórmula	Cópiese a
C9	=$D$6	—
C10	=C9*$B$3	D10:F10
C11	=$B$4	D11:F11
C12	=C10*$D$2	D12:F12
C13	=$B$5	D13:F13
C14	=C10−SUMA(C11:C13)	D14:F14
C15	=C14*$D$4	D15:F15
C16	=C14−C15	D16:F16
B17	=−B2	—
C17	=C16+C13	D17:F17
B19	=VNA($D$3,C17:F17)+B17	—

FIGURA 11.16

Hoja de cálculo inicial de Wilson

en cada uno de los siguientes cuatro años, la hoja de cálculo en la figura 11.16 (WILSNCB1.XLS) muestra que el VNA sería de $12,455.60.

EL MODELO CON DEMANDA ALEATORIA

Sin embargo, es poco probable que la demanda sea exactamente igual cada año. June siente que sería más realista hacer el modelo de la demanda no como un valor constante común, sino como una secuencia de variables aleatorias. Este modelo de la demanda es apropiado cuando hay un nivel constante básico de demanda que está sujeta a fluctuaciones aleatorias de un año a otro. Cuando el nivel básico de demanda es de 10 unidades, la demanda real para los siguientes cuatro años puede resultar de 12, 9, 8 y 10, debido a los factores aleatorios que afectan la demanda.

Cómo hacer una muestra de la demanda con una hoja de cálculo June ha decidido generar valores aleatorios de la demanda para los cuatro años para ver el efecto que tendrá la variabilidad de la demanda sobre el VNA. Ella supone inicialmente que la demanda en un año será de 8, 9, 10, 11 o 12 unidades, cada valor con iguales posibilidades de ocurrir. Éste es un ejemplo de una distribución discreta uniforme. Para "generar una demanda aleatoria" para esta distribución de probabilidad en Crystal Ball, June tiene que escribir esta distribución discreta en un formato de dos columnas, para que Crystal Ball sea capaz de utilizarla. Esto se muestra en las columnas

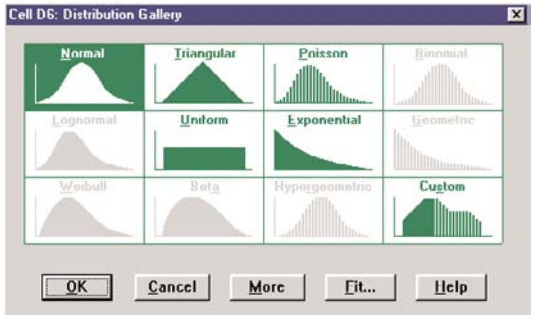


FIGURA 11.17

Distribution Gallery del programa Crystal Ball

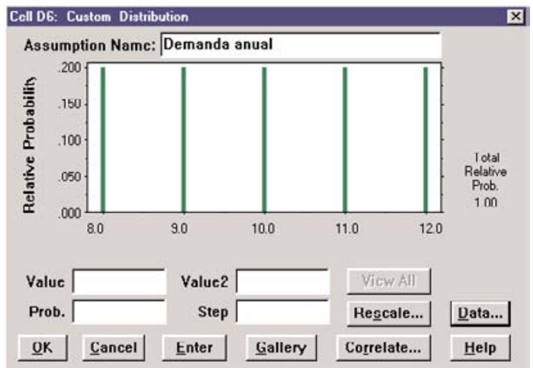


FIGURA 11.18

Generador de números aleatorios personalizados de PROTRAC

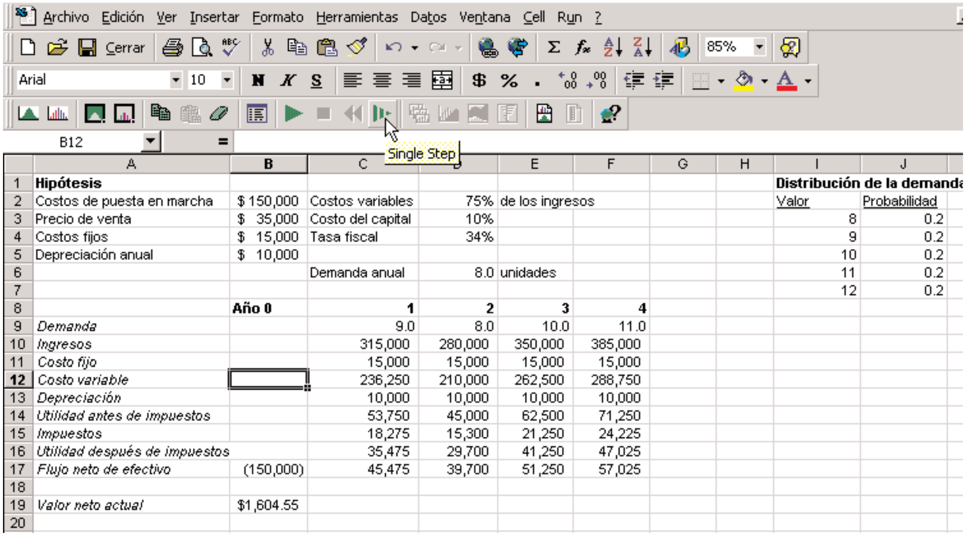
I y J de la figura 11.16. Para lograr introducir toda esta información de distribución de probabilidades en Crystal Ball, June realiza lo siguiente:

1. Hace clic en la celda D6, que es la celda en la cual Crystal Ball generará los valores aleatorios para la demanda.
2. Hace clic en el primer icono de Crystal Ball (Define Assumption).
3. Hace clic en la distribución "Custom" de la Gallery Distribution que aparece en la figura 11.17, después hace clic en OK (o, de manera alterna, podría usted hacer doble clic en la distribución "Custom").
4. Hace clic en el botón "Data" y escribe el rango de las celdas donde puso la información sobre esta distribución discreta (I3:J7); después hace clic en OK.
5. Crystal Ball mostrará la distribución de nuevo como usted la escribió (véase la figura 11.18).

Para hacer que Crystal Ball seleccione una nueva muestra aleatoria de la demanda, simplemente haga clic en el duodécimo icono (Single Step), que se muestra en la figura 11.19. Después de realizar esto varias veces, June se sorprende de encontrar que en algunos ensayos se obtiene un VNA negativo. La figura 11.19 muestra que el VNA que corresponde a una secuencia aleatoria de demandas es de \$1,604.55, aproximadamente 87% menos que el VNA, en el caso de que la demanda fuera constante en 10 por año. Si June oprimiera de nuevo el icono Single Step, obtendría una muestra diferente de la demanda, y por lo tanto probablemente un VNA distinto. Debido a que la demanda puede variar de una muestra a la otra, el VNA puede variar también. De manera más técnica, la demanda consiste en variables aleatorias, por lo que el VNA también es una variable aleatoria.

EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA

June se ha dado cuenta de que necesita construir un modelo de simulación para ayudarla a responder dos preguntas acerca de la distribución del VNA: (1) ¿cuál es la media o el **valor es-**



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Hipótesis**								**Distribución de la demanda**	
2	Costos de puesta en marcha	$ 150,000	Costos variables	75%	de los ingresos				Valor	Probabilidad
3	Precio de venta	$ 35,000	Costo del capital	10%					8	0.2
4	Costos fijos	$ 15,000	Tasa fiscal	34%					9	0.2
5	Depreciación anual	$ 10,000							10	0.2
6			Demanda anual	8.0	unidades				11	0.2
7									12	0.2
8		**Año 0**	**1**	**2**	**3**	**4**				
9	*Demanda*		9.0	8.0	10.0	11.0				
10	*Ingresos*		315,000	280,000	350,000	385,000				
11	*Costo fijo*		15,000	15,000	15,000	15,000				
12	*Costo variable*		236,250	210,000	262,500	288,750				
13	*Depreciación*		10,000	10,000	10,000	10,000				
14	*Utilidad antes de impuestos*		53,750	45,000	62,500	71,250				
15	*Impuestos*		18,275	15,300	21,250	24,225				
16	*Utilidad después de impuestos*		35,475	29,700	41,250	47,025				
17	*Flujo neto de efectivo*	(150,000)	45,475	39,700	51,250	57,025				
18										
19	*Valor neto actual*	$1,604.55								
20										

FIGURA 11.19

Hoja de cálculo de Wilson, con demandas seleccionadas aleatoriamente

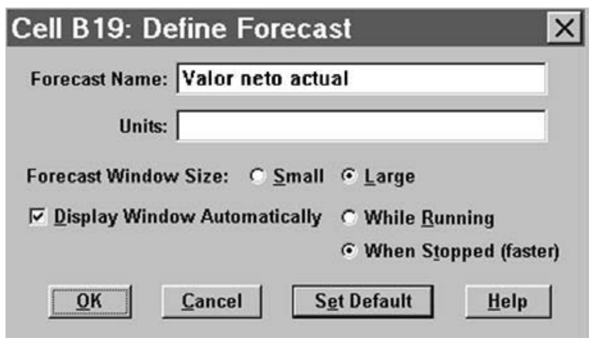


FIGURA 11.20

Cuadro de diálogo "Define Forecast" de Crystal Ball

perado del VNA? y (2) ¿cuál es la probabilidad de que el VNA asuma un valor negativo? Entre mayor sea la media de VNA y —quizás más importante— entre menos probable sea que el VNA asuma un valor negativo, más atractiva será la propuesta de añadir el G-9 a la línea de producción de PROTRAC.

Así que el siguiente paso es ejecutar automáticamente el modelo cierta cantidad de veces y capturar los VNA resultantes. Esto se puede realizar con mucha más facilidad con Crystal Ball que con la hoja de cálculo sola. Después de establecer el modelo del caso básico como lo hemos hecho, y después de escribir los GNA en las celdas apropiadas (C9:F9), todo lo que tiene que hacer es:

1. Clic en la celda B19 (la celda del VNA).
2. Clic en el segundo icono de Crystal Ball (Define Forecast), lo que hará aparecer un cuadro de diálogo.
3. Cambiar el tamaño de la ventana a "Large" y cambiar el despliegue a "When Stopped (faster)" en el cuadro de diálogo como se muestra en la figura 11.20. También haga clic en "Set Default" si usted desea que ésta sea la opción predeterminada en el futuro.
4. Click en OK.
5. Click en el octavo icono (Run Preferences) y cambiar el "Maximum Number of trials" a 500, como se muestra en la figura 11.21.
6. Click en OK.

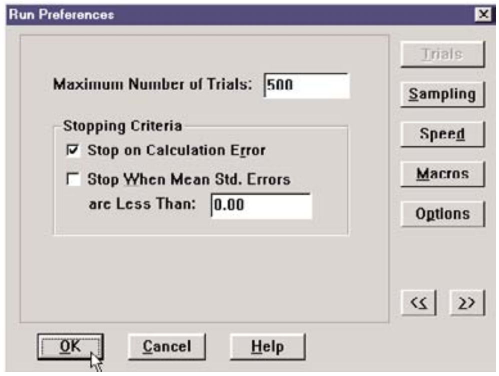


FIGURA 11.21

Cuadro de diálogo “Run Preferences” de Crystal Ball

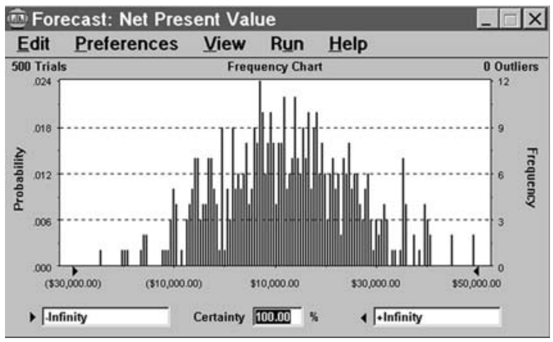
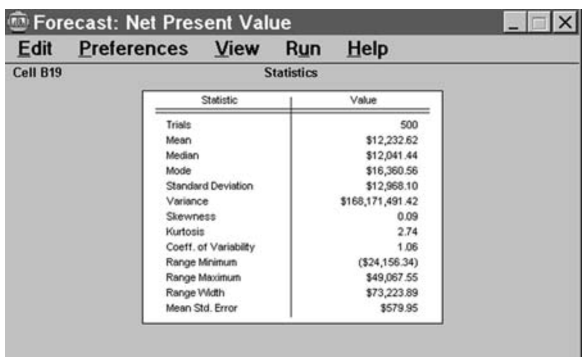


FIGURA 11.22

Histograma del VNA de la simulación para PROTRAC



Statistic	Value
Trials	500
Mean	$12,232.62
Median	$12,041.44
Mode	$16,360.56
Standard Deviation	$12,968.10
Variance	$168,171,491.42
Skewness	0.09
Kurtosis	2.74
Coeff. of Variability	1.06
Range Minimum	($24,156.34)
Range Maximum	$49,067.55
Range Width	$73,223.89
Mean Std. Error	$579.95

FIGURA 11.23

Estadísticas de la simulación para PROTRAC

7. Clic en el noveno icono (Start Simulation) y cuando Crystal Ball haya ejecutado los 500 ensayos, le indicará que se ha alcanzado el “Maximum number of trials reached”. Después de hacer clic en OK, producirá automáticamente el histograma que se muestra en la figura 11.22.
8. Para ver las estadísticas de la simulación, haga clic en View, después en Statistics, y Crystal Ball desplegará la tabla como se muestra en la figura 11.23.

Observe lo rápido y fácil que fue ejecutar 500 iteraciones en Crystal Ball, en comparación con 20 o 100 en una hoja de cálculo sola (si usted estudió la sección 11.3), y sin ocupar 500 filas (o renglones) en la hoja de cálculo. Después de hacer esto, usted debe tener resultados similares a los que se muestran en la figura 11.23 (que representan 500 resultados del VNA). Las cantidades que usted genere no serán exactamente iguales a las que se muestran en la figura 11.23. Recuerde que el procedimiento que enseñamos genera una muestra aleatoria de 500 ensayos a partir de un número infinito de resultados posibles. Con suerte, las características generales de su muestra deberían ser similares a las que aparecen aquí. Con base en esta muestra, los resultados indican que el VNA medio estimado es de $12,232.62 y que la desviación estándar es más

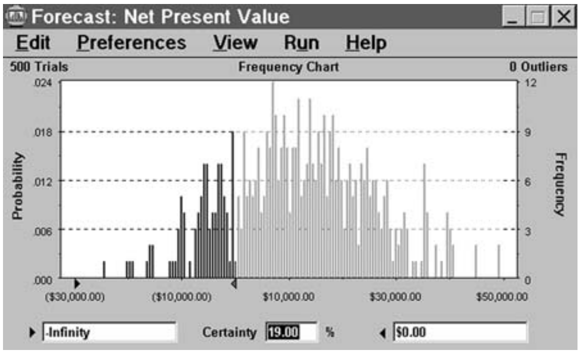


FIGURA 11.24

Percentiles de Wilson en Crystal Ball

bien grande, de $12,968.10. Observe que esto está mucho más cerca de la media VNA real que lo que generalmente obtendríamos con un número limitado de ensayos ejecutados con la hoja de cálculo sola.

Riesgo hacia abajo y riesgo hacia arriba June también desea saber cuál es el mejor y el peor de los resultados posibles. En este mismo despliegue, podemos ver en la figura 11.23 que el VNA más elevado fue de $49,067.55 y que el menor fue de –$24,156.34. Esto le da a ella una mejor idea acerca del rango de los VNA posibles que pudieran ocurrir (casi $75,000).

Distribución de los resultados Aunque esta información ofrece más detalles que el caso básico VNA, existen otros factores que debemos considerar. ¿Qué tan probable es que esos casos extremos (mejor caso, peor caso) ocurran? A fin de responder a esta pregunta, necesitamos saber algo acerca de la forma de la distribución del VNA. Afortunadamente, Crystal Ball tiene algunas características predeterminadas para ayudarnos. Ya hemos generado un histograma (una distribución gráfica del VNA) en la figura 11.22, lo que nos da una representación visual de los resultados posibles para el VNA. Tiene una forma de campana bien definida. Una de las características atractivas de Crystal Ball es que ya tiene tabulada una enorme cantidad de información estadística y gráfica. Cierta parte de la información es desplegada automáticamente; para obtener otras partes de la información debemos pedirlas al programa. Como un ejemplo de algo de la información que tenemos que pedir, suponga que deseamos determinar la probabilidad exacta de que el VNA sea no positivo (≤ 0). Podemos escribir simplemente 0 en la celda "◀" mostrada en la esquina inferior derecha de la figura 11.24 (lo que significa: todos los valores a la izquierda de 0) y oprimir Enter, y Crystal Ball devolverá inmediatamente el número porcentual en la celda del percentil correspondiente con la etiqueta "Certainty _____%." En este caso, devuelve 19.0%, lo que significa que 19.0% de los valores VNA observados fueron menores que o iguales a 0. De manera similar, podemos averiguar qué porcentaje está por encima o por debajo de cualquier cantidad de dólares arbitraria. Asimismo, haciendo clic en "View, Percentiles", Crystal Ball desplegará automáticamente los 10, 20, 30,..., 90 percentiles de la distribución VNA. Podemos observar que ésta es una información más precisa que la que podríamos obtener con la característica Histograma de Excel o la característica Estadísticas descriptivas (que se mostró en la sección 11.3). Estos datos pueden resultar útiles para responder otras preguntas que podría hacerse June o su jefe financiero.

¿Qué tan confiable es la simulación? June tiene ahora las respuestas a sus dos preguntas sobre la distribución VNA: (1) ¿cuál es el valor *medio* del VNA? (A: $12,232.62), y (2) ¿cuál es la probabilidad de que el VNA asuma un valor negativo? (A: 19.0%). Ahora haremos otras preguntas: ¿cuánta confianza tenemos en las respuestas que obtuvo June? ¿Tendríamos más confianza si hiciéramos más ensayos?

Ciertamente, se intuye que entre más ensayos hagamos, más confianza podemos tener en nuestras respuestas. Pero ¿cuánta confianza podemos tener en las 500 iteraciones que ya hicimos? Desde el mundo de la estadística, recordamos que podemos construir los intervalos de confianza con base en los resultados que hemos obtenido. Por ejemplo, podemos tener una confianza de 95%

B9 = =B3-1.96*B4/RAIZ(B5)

	A	B	C	D
1	**Resultados Crystal Ball**			
2				
3	Media	$ 12,232.62		
4	Desviación estándar	$ 12,968.10		
5	# Iteraciones	500		
6				
7	**Intervalo de confianza al 95%**			
8	Límite superior	$ 13,369.32		
9	Límite inferior	$ 11,095.92		
10				

Celda	Fórmula
B8	=B3+1.96*B4/RAÍZ(B5)
B9	=B3−1.96*B4/RAÍZ(B5)

FIGURA 11.25

Intervalo de confianza de Wilson para el valor medio del VNA

que el valor medio real del VNA está dentro de un intervalo de desviación estándar de ±1.96 alrededor de la media estimada. En este caso, la desviación estándar de la media es la desviación estándar obtenida en la muestra dividida entre la raíz cuadrada del número de ensayos. Este intervalo de confianza de 95% para la media fue calculado por June y se muestra en la figura 11.25 como ($11,095.92; $13,369.32). Dicho de otra manera, podemos tener una confianza de 95% de que la media real del VNA se encuentra en algún punto entre $11,096 y 13,369, con nuestra mejor aproximación en $12,232.62. Observe que este intervalo es más preciso que el que habríamos desarrollado generalmente con una hoja de cálculo sola, donde se utilizarían por lo general menos iteraciones. La hoja de cálculo WILSCB1C.XLS (contenida en el CD distribuido con este libro) contiene toda esta información completa, por si usted no la ha creado conforme leía.

¡Debemos tener cuidado de *no* caer en la trampa del "valor esperado"! Muchos estudiantes creen que el valor real del VNA puede calcularse siempre estableciendo todas las variables aleatorias según sus medias (establecer todas las demandas en 10 en este ejemplo). Esto es lo que tenía June en su hoja de cálculo inicial (observe la figura 11.16), pero no hay alguna garantía de que el VNA obtenido de esta manera será siempre la media simulada verdadera. Aunque pueda parecer lógico, existen algunas debilidades potenciales en este razonamiento. Primero, la manera en que se utilizan los valores aleatorios de la demanda para calcular los flujos de efectivo anuales para después convertirlos en una sola cifra del VNA (o en cualquier otra medida de desempeño) podría ser altamente no lineal. Existen otras sutilezas que no se mencionarán aquí, pero esté usted prevenido: ¡no caiga en la trampa del "valor esperado"!

Existen casos, como este modelo, donde el razonamiento "intuitivo" funciona, pero no ocurrirá así siempre. Un simple ejemplo de una de las experiencias comunes de la vida real debería convencerlo de que el VNA (o cualquier otra medida de desempeño subyacente) calculado con el valor esperado de las variables aleatorias no es necesariamente igual que el VNA esperado. Considere una cola de espera en la tienda de comestibles. Suponga que el tiempo esperado para atender a un cliente es de 0.9 minutos y que el tiempo promedio entre llegada de clientes es de 1 minuto. Al examinar la situación utilizando los valores esperados, usted predeciría que el tiempo de espera promedio sería de 0 minutos (debido a que los clientes son atendidos más rápidamente de lo que llegan), pero todos sabemos que el tiempo de espera *promedio* resultará ser mayor que 0 minutos, aunque a veces tenemos suerte y no tenemos que esperar.

OTRAS DISTRIBUCIONES DE LA DEMANDA

June está preocupada por las estimaciones de la demanda que utilizó en la simulación anterior. En ese modelo ella supuso que la media de la demanda en cada periodo sería de 10 unidades, y después realizó una variación aleatoria de la demanda alrededor de esa media (entre 8 y 12 unidades). Ella está bastante segura de que la media de la demanda permanecerá, de hecho, esencialmente igual en cada uno de los siguientes cuatro años, pero no está del todo segura de que necesariamente será de 10. Si la economía es lenta, podría ser de 8; si el Congreso aprueba el programa de reparación de puentes federales, podría ser de 13. Después de pensarlo un tiempo,

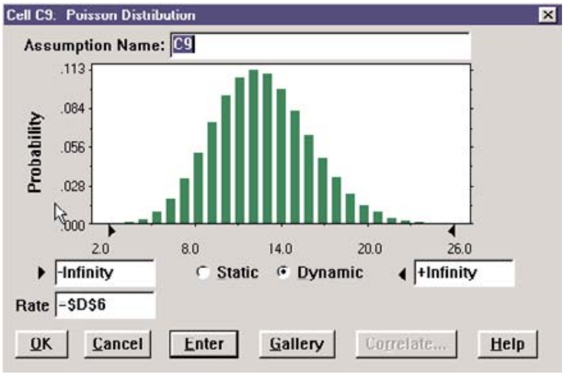


FIGURA 11.26

Cuadro de diálogo de la distribución modificada de Wilson

June decide que la demanda media podría estar en cualquier parte entre 6 y 14 unidades al año, con igual posibilidad de ocurrir todos los valores. Para expresar esta incertidumbre ella decide hacer un modelo de la demanda media como una distribución continua uniforme entre 6 y 14.

A ella también le gustaría explorar el impacto de las diferentes distribuciones de la demanda en el VNA. Ha leído en un texto de probabilidad y estadística que cuando la demanda media es relativamente pequeña, a menudo es una buena elección una distribución conocida como la **distribución de Poisson**. La de Poisson es una distribución de *un parámetro*, debido a que, especificando un solo parámetro, el valor medio de la variable aleatoria queda determinada por completo. La Poisson también es una distribución discreta, ya que una variable aleatoria Poisson sólo puede asumir valores enteros no negativos. June colocará esta nueva información en una nueva hoja de cálculo llamada WILSNCB2.XLS. Para hacer una muestra a partir de una distribución de Poisson con una media de 10, June sólo tiene que hacer aparecer la Gallery of Distributions de Crystal Ball e indicar que desea una distribución de Poisson con una media de 10. Para hacer una muestra de una distribución continua uniforme entre 6 y 14, ella también tiene que hacer aparecer la Gallery of Distributions de Crystal Ball e indicar que desea una distribución uniforme con un valor "min" de 6 y un valor "max" de 14. Por lo tanto, los únicos cambios que tiene que hacer June en su hoja de cálculo son los siguientes: indicar a Crystal Ball que la celda D6 tendrá un valor de distribución uniforme analizado anteriormente, y que las celdas C9 a F9 contendrán una distribución de Poisson con un valor medio originado por el valor en la celda D6. Para realizar este último paso en Crystal Ball, haga clic en la celda C9, después haga clic en "Define Assumption" para hacer aparecer el cuadro de diálogo de la Gallery of Distributions de Crystal Ball y escriba la información como se muestra en la figura 11.26 (asegúrese de cambiar al botón "Dynamic"). Para obtener la misma información en las celdas C9 a D9:F9, podemos utilizar las características "Copy Data" y "Paste Data" de Crystal Ball (el quinto y sexto iconos) para ahorrarnos tiempo, o podemos escribir simplemente la misma información como lo hicimos para la celda C9 a las celdas D9, E9 y F9 de manera individual.

June decide hacer una muestra de 1,000 ensayos de la distribución del VNA y basar sus estimaciones en los 1,000 valores que obtenga. Simplemente le indica a Crystal Ball que lleve a cabo 1,000 iteraciones en el cuadro de diálogo "Run Preferences" y que capture el VNA en la celda B19 para cada una de las iteraciones (utilizando el icono "Define Forecast"). También debe indicarle a Crystal Ball "Reset Simulation" (el undécimo icono), de tal forma que elimine los resultados de la simulación anterior. Después de que se llevan a cabo las 1,000 iteraciones, June puede ver un histograma de los resultados. El histograma se muestra en la figura 11.27, y las estadísticas relacionadas revelan que el VNA promedio de las 1,000 iteraciones es $9,816.11 y que hay una gran probabilidad de un VNA negativo (27.5%). La media del VNA es menor que la que se obtuvo de la distribución anterior, y la probabilidad de un resultado negativo ha aumentado considerablemente (de 19% a 27.5%).

La gráfica ofrece una impresión cualitativa de la distribución, pero se puede obtener información más detallada. Algunas de las otras estadísticas de simulación que June podría ver son: el mayor valor observado, $44,729; el menor valor observado, –$19,817 (un rango de aproximadamente $65,000). El modelo completo se encuentra en el CD como WILSCB2C.XLS.

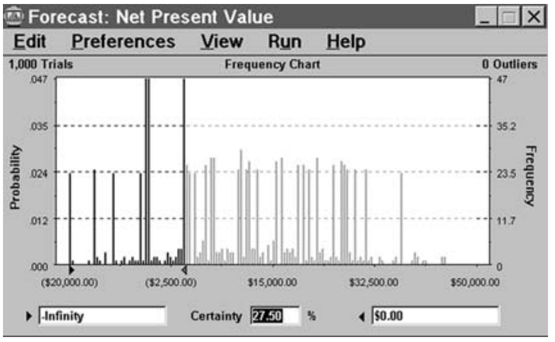


FIGURA 11.27

Histograma del VNA de Wilson utilizando una distribución modificada

Ahora ya hemos visto tres evaluaciones del problema de presupuesto de capital de los G-9 de June: (1) un modelo determinístico (figura 11.6), (2) una simulación con 500 ensayos, con hipótesis limitadas sobre la demanda (figura 11.19) y (3) un simulación con 1,000 ensayos (figura 11.27), con base en lo que June considera que es la representación más realista de la demanda. ¿Qué hemos aprendido?

1. Que incrementar el número de ensayos puede dar una mejor estimación del rendimiento esperado, pero incluso con una gran cantidad de ensayos puede existir a veces una diferencia entre el *promedio* simulado y el rendimiento esperado real.
2. Que las simulaciones pueden proporcionar información útil sobre la distribución de resultados. Con una muestra de 500 ensayos e hipótesis limitadas sobre la demanda, hubo una indicación (una probabilidad de 0.19) de que este proyecto pudiera devolver un VNA negativo. Ésta es información valiosa y es algo que no se podría haber determinado con un simple análisis del caso básico, o incluso con un análisis de riesgo hacia arriba/hacia abajo.
3. Que los resultados de la simulación son sensibles a las suposiciones que afectan los parámetros de entrada. Pudimos ver que si June modificara sus hipótesis sobre la distribución de la demanda (de una distribución discreta uniforme a una distribución de Poisson con la misma media de 10), habría un impacto considerable en la probabilidad de un VNA negativo (aumenta aproximadamente de 19% a 27.5%).

Quizás el impacto más importante en la simulación ocurre en el proceso de tomar la decisión. Si June no hubiera llevado a cabo algún análisis de simulación, hubiera dado una recomendación entusiasta a la propuesta de adición a la línea de equipo pesado con base en el VNA medio. Sin embargo, después de llevar a cabo cualquiera de las simulaciones, ella siente que el proyecto es muy arriesgado como para recomendarlo. Aunque éste es un juicio cualitativo de su parte, puede apoyarlo con los resultados cuantitativos del modelo de simulación. Como hemos observado anteriormente, los modelos no liberan a los administradores de la responsabilidad de tomar decisiones, pero sí proporcionan información adicional para tomar esas decisiones de manera bien informada.

11.5 UN EJEMPLO DEL CONTROL DE INVENTARIOS: FOSLINS HOUSEWARES

El modelo de presupuesto de capital de June Wilson nos dio un ejemplo del uso de la simulación en una situación de "sí o no": June tenía que decidir entre aceptar o no aceptar el proyecto. Existen otras situaciones, sin embargo, en las cuales la pregunta es, "¿Qué tanto de todo esto debemos hacer?". La simulación también puede utilizarse para modelos de este tipo. No obstante, existen algunas nuevas preocupaciones (o quizás variaciones de viejas preocupaciones) a considerar cuando se utiliza la simulación en esta manera. Esta sección utiliza un modelo de control de inventarios para dar otro ejemplo de simulación. También servirá para originar un análisis de la interpretación adecuada de los resultados.

LA PROMOCIÓN DEL SARTÉN PARA *OMELETTES*: ¿CUÁNTOS SARTENES PEDIR?

Marie Ford es la compradora en jefe de artículos del hogar en Foslins, uno de los detallistas principales de Denver. El papel del jefe de compras es importante en una organización de ventas al menudeo como Foslins. Marie es responsable de diseñar la estrategia general de ventas al menudeo y los procedimientos de operación de su área. También supervisa a un grupo de compradores que toman decisiones específicas de compra.

Algunas secciones del departamento de artículos para el hogar acaban de sufrir su segundo mal año consecutivo. Las tiendas competidoras, como Box and Barrel, que se especializan en artículos importados para cocina y comedor, han abierto importantes brechas en la posición que alguna vez fue segura de Foslins. Las secciones de cocina *gourmet*, cristalería, artículos de cocina de acero inoxidable y vajillas modernas de Foslins no generan suficientes ingresos como para justificar el espacio de planta que actualmente tienen asignado.

Marie planea afrontar este reto de frente. Ha reorganizado las secciones problemáticas para crear una tienda dentro de la tienda. Para lograr el mismo ambiente que sus competidores, ha adoptado técnicas de exhibición de madera natural e iluminación modernas. Básicamente, ha creado una tienda de especialidades, como las de sus competidores, dentro del departamento de artículos para el hogar. Con estos cambios, sumados a la reputación de la tienda en términos de calidad y servicio, ella piensa que Foslins puede competir de manera efectiva.

Para presentar la nueva instalación de Foslins, Marie decide convertir el mes de octubre en el "Mes de la comida internacional". Esta promoción encabezará la venta de cinco artículos especiales, cada uno de un país diferente. Estos artículos serán fabricados especialmente para Foslins e incluyen una sartén de cobre para *omelettes* proveniente de Francia, un juego español de 12 copas de pie largo para vino, y así sucesivamente. Cada artículo ha sido seleccionado por un comprador del equipo de Marie. Ya hay un acuerdo sobre el diseño y el precio. Los artículos tienen que ser pedidos con al menos seis meses de anticipación, y no formarán parte de la línea normal de productos de Foslins. Toda la existencia no vendida al final de octubre será rematada a una cadena de descuento a un precio reducido. Además, Foslins ha adoptado la política de que si se termina la existencia de algún artículo de la venta especial, será sustituido por un producto más costoso de la línea normal de productos al mismo precio de la venta. Todo es parte de la promoción "Una vez en la vida".

En el caso de las sartenes para *omelette*, Foslins comprará las sartenes especiales a \$22 y las venderá a \$35. Si sobran sartenes al final de la promoción, serán vendidas a la cadena de descuento Clampton a \$15 la pieza. Si a Foslins se le terminan las sartenes especiales, serán sustituidas por sartenes de cobre comunes para *omelette*, que serán vendidas al precio de oferta a \$35. Las sartenes comunes, que normalmente se venden a \$65, cuestan \$32 cada una.

El problema de Marie es que debe decidir cuántas sartenes especiales debe pedir, sin saber por adelantado cuál será la demanda correspondiente. Por ejemplo, suponga que ordena 1,000 sartenes y la demanda resulta ser de 1,100. Entonces ella tendría que comprar 100 sartenes (1,100 − 1,000) a \$32 por sartén después de comprar 1,000 sartenes a \$22 por sartén, y vendería 1,100 sartenes a \$35 la pieza. Por lo tanto, su utilidad neta sería

$$\$35(1100) - \$32(100) - \$22(1000) = \$13,300$$

En general, sea y = número de las sartenes pedidas y D = demanda. Entonces para $D > y$,

$$\text{Utilidad} = 35D - 32(D - y) - 22y = 3D + 10y$$

Si, por otro lado, ella ordenara 1,000 sartenes y la demanda resultara ser de sólo 200, entonces venderá 200 sartenes a \$35 y 800 sartenes (1,000 − 200) a \$15 a Clampton's. Su utilidad neta sería

$$\$35(200) + \$15(800) - \$22(1000) = -\$3000$$

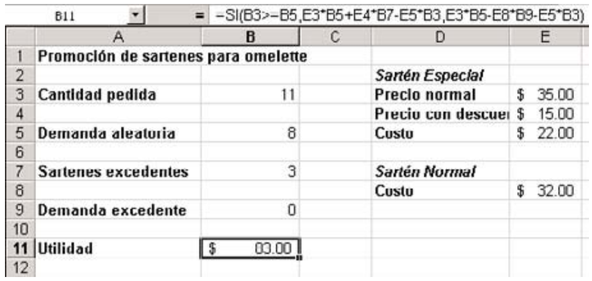
En general, para $D < y$,

$$\text{Utilidad} = 35D + 15(y - D) - 22y = 20D - 7y$$

(Usted podrá ver que cuando $D = y$, las dos ecuaciones son idénticas.)

Observe que los cálculos de Marie suponen que usar sartenes normales para satisfacer la demanda de promoción *no* creará una demanda normal insatisfecha. Debido a la localización del proveedor respecto a sus sartenes normales, el suministro es lo suficientemente grande como para que no sea necesario tomar en consideración esta complicación.

Marie ha hecho un modelo de esto en Excel con el nombre de FOSLNCB1.XLS, y se muestra en la figura 11.28. La hoja de cálculo supone que Marie decide ordenar 11 sartenes para *omelette* (es decir, $y = 11$). La demanda aleatoria resulta ser de 8 (es decir, $D = 8$), y la cantidad pedida es mayor que la demanda ($y > D$). Esto significa que tenemos 3 sartenes sobrantes. Por lo tanto la utilidad de esta única simulación de la promoción es de \$35(8) + \$15(3) − \$22(11) = \$83.



Celda	Fórmula
B7	=MAX(0,B3−B5)
B9	=MAX(0,B5−B3)
B11	=SI(B3≥B5,E3*B5+E4*B7−E5*B3,E3*B5−E8*B9−E5*B3)

FIGURA 11.28
Caso base de Foslins

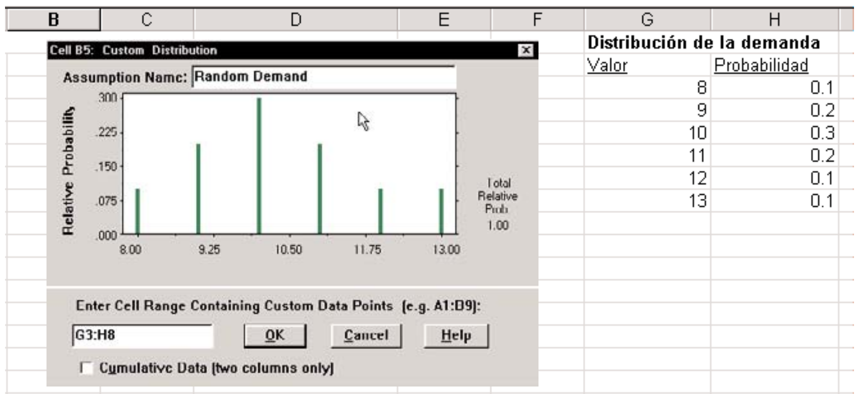


FIGURA 11.29
Generador de demanda aleatoria de Foslins

UTILIDAD *VERSUS* TAMAÑO DEL PEDIDO

Marie naturalmente está interesada en determinar de qué manera el número de sartenes que ordene afectará la utilidad esperada de la promoción, y la posibilidad de que la promoción pierda dinero. Veremos cómo atacar esta pregunta con una simulación, comenzando con un simple ejemplo ilustrativo. Más adelante, en la sección 11.6, utilizaremos una hipótesis más realista de una *distribución normal de la demanda* ($\mu = 1000$, $\sigma = 100$). Por ahora, supongamos que la demanda tiene la siguiente distribución de probabilidad.

$$\begin{aligned}
\text{Prob }\{\text{demanda} = 8\} &= 0.1\\
\text{Prob }\{\text{demanda} = 9\} &= 0.2\\
\text{Prob }\{\text{demanda} = 10\} &= 0.3\\
\text{Prob }\{\text{demanda} = 11\} &= 0.2\\
\text{Prob }\{\text{demanda} = 12\} &= 0.1\\
\text{Prob }\{\text{demanda} = 13\} &= 0.1
\end{aligned}$$

Estas demandas se han escogido artificialmente pequeñas a fin de simplificar el ejemplo. Para generar en Crystal Ball la demanda aleatoria para esta distribución de probabilidad, Marie tiene que escribir esta distribución discreta en un formato de dos columnas, como se mostró en la sección anterior. Esto aparece en las columnas G y H de la figura 11.29.

Para lograr escribir toda esta información de la distribución de probabilidad en Crystal Ball, Marie sigue los siguientes pasos:

1. Hace clic en la celda B5, que es la celda donde Crystal Ball generará los valores aleatorios de la demanda.
2. Hace clic en el primer icono de Crystal Ball (Define Assumption).

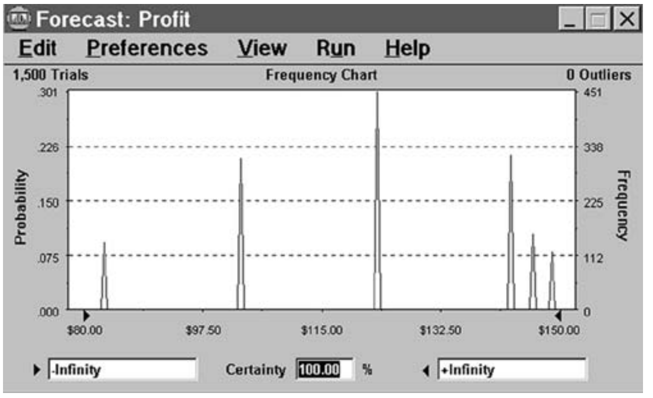


FIGURA 11.30

Histograma de simulación de utilidades de Foslins

3. Hace clic en la distribución "Custom" de la Gallery of Distributions (que se vio anteriormente en la figura 11.17); después hace clic en OK (o de manera alternativa podría hacer doble clic en la distribución "Custom").
4. Hace clic en el botón "Data" y escribe el rango de celdas donde quiere insertar la información de esta distribución discreta (G3:H8 como se muestra en la figura 11.29); después hace clic en OK.
5. Crystal Ball mostrará de nuevo la distribución según fue escrita (véase la figura 11.29).

Ahora estamos preparados para llevar a cabo la simulación para calcular la utilidad promedio. Para hacerlo, debemos hacer un cierto número de ensayos, haciendo que $y = 11$ y generando una nueva demanda en cada ensayo. La utilidad que resulte de cualquier ensayo dado dependerá, por supuesto, del valor de la demanda generado para ese ensayo en particular. La *utilidad promedio* de todos los ensayos, entonces, será una estimación de la utilidad esperada. Una vez más, esto se puede realizar fácilmente con Crystal Ball, como se señala a continuación:

1. Haga clic en la celda B11 (la celda Profit).
2. Haga clic en el segundo icono Crystal Ball (Define Forecast), lo que hará aparecer un cuadro de diálogo.
3. Cambie el tamaño de la ventana a "Large" y cambie el despliegue a "When Stopped (faster)" en el cuadro de diálogo en caso de que éstas no sean las opciones predeterminadas (mostradas previamente en la figura 11.20). También haga clic en "Set Default" si desea que ésta sea la opción predeterminada en el futuro.
4. Haga clic en OK.
5. Haga clic en el octavo icono (Run Preferences) y cambie "Maximum Number of trials" a 500 (mostrado previamente en la figura 11.21).
6. Haga clic en OK.
7. Haga clic en el noveno icono (Start Simulation), y después de que Crystal Ball haya llevado a cabo las 500 iteraciones, le indicará "Maximum number of trials reached". Después de hacer clic en OK, producirá automáticamente el histograma que se muestra en la figura 11.30.
8. Para examinar las estadísticas de la simulación, haga clic en View, después en Statistics, y Crystal Ball desplegará una tabla, como se muestra en la figura 11.31.

Los números que usted genere no coincidirán exactamente con los que se muestran en la figura 11.31. Recuerde que el procedimiento mostrado aquí genera una muestra aleatoria de 500 ensayos a partir de un número infinito de posibles resultados. Con suerte, las características generales de su muestra serían iguales a las que se presentan aquí. De acuerdo con la figura 11.31, la utilidad promedio de los 500 ensayos es \$124.30. Por lo tanto, con base en estos 500 ensayos,

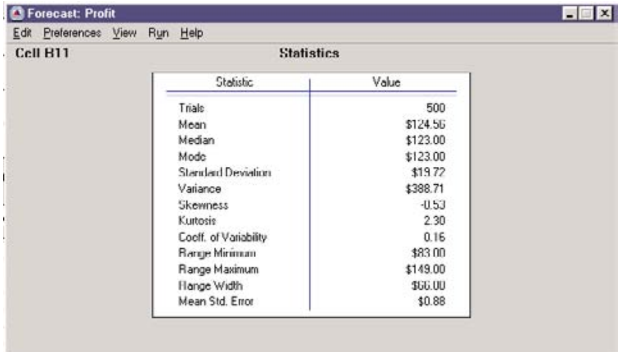


FIGURA 11.31

Estadísticas de la simulación de Foslins

la mejor estimación de la utilidad esperada de Marie al pedir 11 sartenes es de $124.30. La hoja de cálculo completa se encuentra en el CD como FOSLCB1C.XLS.

Marie puede utilizar el mismo método para calcular la utilidad promedio asociada con cualquier otra cantidad. Sólo necesita escribir un tamaño de pedido diferente en la celda B3 de la hoja de cálculo “Caso básico” y volver a hacer la simulación.

Pero observe que, debido a que la demanda es aleatoria, la utilidad promedio también será aleatoria. Esto significa que si Marie hiciera otro conjunto de 500 ensayos con el mismo tamaño de pedido de 11 sartenes, el simulador podría generar una serie de demandas diferente, y por lo tanto lo más probable es que obtuviera una utilidad promedio diferente.

Valor esperado versus tamaño de pedido Con este simple ejemplo, Marie puede calcular fácilmente la utilidad *esperada* real asociada con cualquier cantidad ordenada, en vez de confiar en su estimación de la utilidad a partir de 500 ensayos (por lo general éste no es el caso para ejemplos más realistas y sólo se lleva a cabo aquí por razones pedagógicas). Esto se puede hacer utilizando la hoja de cálculo mostrada en la figura 11.28 para calcular la utilidad resultante de cada uno de los seis niveles de demanda posibles (8, 9,..., 13). Todo lo que Marie hace es colocar seis posibles valores de demanda distintos en la celda B5 (uno por uno) y anotar la utilidad producida. Cada uno de estos valores de utilidad es entonces multiplicado por la probabilidad de que esa demanda ocurra (por ejemplo, la utilidad producida cuando la demanda = 10 es multiplicada por 0.3, es decir la probabilidad de que la demanda será, de hecho, de 10). Finalmente, los términos resultantes se suman. Los cálculos se muestran en la tabla 11.2.

Utilidad simulada versus utilidad esperada Suponiendo que el riesgo no sea un factor, a Marie le gustaría seleccionar la cantidad de pedido que reditúe la mayor utilidad esperada. Para hacerlo, ella calcularía la utilidad esperada para todas las cantidades de pedido posibles (8, 9, 10,..., 13), igual a como se hizo para una cantidad de pedido de 11, y seleccionaría la cantidad a ordenar que tuviera la mayor utilidad. Si fuera a utilizar la simulación, ella usaría el mismo procedimiento que utilizó para determinar la *utilidad promedio* con una cantidad de pedido de 11 para los otros posibles tamaños de pedido (8, 9, 10, 12, 13) y después seleccionaría la cantidad de pedido que diera la mayor utilidad promedio.

No es ninguna sorpresa que para cualquier tamaño de pedido, la utilidad promedio generada por el simulador de hoja de cálculo no iguale la utilidad esperada real, pues ya hemos visto que en diferentes ensayos se producirán distintos valores de la utilidad promedio. La implicación de este hecho en el proceso de tomar la decisión es interesante. Las utilidades esperadas calculadas y las utilidades promedio simuladas para tamaños de pedido de 9, 10, 11 y 12 sartenes se muestran en la tabla 11.3.

Sólo hemos mostrado el trabajo correspondiente a la utilidad simulada y a la utilidad esperada real para un pedido de 11 sartenes. Dejaremos como ejercicio para el estudiante verificar las otras entradas de la tabla (véanse los problemas 11-9 a 11-11).

TABLA 11.2 Utilidad esperada cuando se ordenan 11 sartenes

(A) TAMAÑO DEL PEDIDO	(B) DEMANDA	(C) UTILIDAD	(D) PROBABILIDAD DE LA DEMANDA	(E) COLUMNA (C) * (D)
11	8	$ 83	.10	8.3
11	9	$103	.20	20.6
11	10	$123	.30	36.9
11	11	$143	.20	28.6
11	12	$146	.10	14.6
11	13	$149	.10	14.9
			Utilidad esperada =	*$123.9*

TABLA 11.3

CANTIDAD ORDENADA	UTILIDAD ESPERADA REAL	UTILIDAD PROMEDIO SIMULADA (500 ENSAYOS)
9	$119.2	$118.88
10	**$124.1**	$124.18
11	$123.9	**$124.30**
12	$120.3	$118.81

Aquí podemos ver que, si Marie tuviera que basar su decisión en la utilidad promedio simulada en este conjunto particular de ensayos, la decisión para maximizar las utilidades consistiría en pedir 11 sartenes. Para maximizar la utilidad esperada real, sin embargo, ella pediría 10 sartenes. Esto es, por supuesto, un ejemplo deliberadamente simplificado, pero es un ejemplo excelente del hecho de que la *simulación*, *en general*, *no es garantía para obtener la optimalidad.*

En el caso de Marie, la decisión de ordenar 11 sartenes en vez de 10 no es crítica, ya que reduce su utilidad esperada real en menos de 0.2%. En algunos casos, sin embargo, la simulación puede llevar a resultados que están lejos de ser óptimos. Marie puede por lo tanto preguntarse si hay algo que pueda hacer para mejorar la exactitud de su simulación. ¿Puede ella aumentar la posibilidad de que una simulación producirá en verdad una decisión óptima?

Aunque la naturaleza de la simulación hace imposible *garantizar* que se identificará una decisión óptima, existe una forma muy simple de incrementar la posibilidad de este resultado: *aumentar el número de ensayos*. Mientras más grande sea el número de ensayos, los resultados tenderán a ser más confiables (igual a lo que ocurre cuando se lanza al aire una moneda: mientras más veces la arroje usted, más cerca estará la proporción de las caras a 50%). Este hecho nos lleva a la siguiente observación importante:

> Suponga que, en una decisión bajo condiciones de riesgo, la administración deseará tomar la decisión que minimice el costo esperado o que maximice la utilidad esperada. Con la simulación, la decisión podría obtenerse erróneamente si no se tiene cuidado en simular una cantidad suficiente de ensayos.

Deberíamos volver a enfatizar que en un problema real usted no haría *al mismo tiempo* el cálculo de la utilidad esperada real y el uso de la simulación para calcular la utilidad promedio. La simulación se utiliza cuando no es práctico o incluso es imposible calcular la utilidad esperada asociada con decisiones alternativas, o cuando es importante estimar la variabilidad de la medida de desempeño para varias soluciones. Este simple ejemplo sirve para ilustrar la relación entre la simulación y los modelos analíticos.

RECAPITULACIÓN

Vamos a resumir y comentar varios aspectos de lo que hemos visto hasta ahora:

1. Un simulador de hoja de cálculo toma los parámetros y decisiones como entradas y devuelve una medida (o medidas) de desempeño como resultado.

2. Cada iteración del simulador de hoja de cálculo (con los mismos parámetros y decisiones) generalmente devolverá un valor diferente para la medida del desempeño.

3. En el modelo de Marie, la medida del desempeño (para un pedido de 100) fue la utilidad. Los 500 ensayos se combinaron para producir otra medida de la bondad del tamaño de pedido dado: *la utilidad promedio*.

Observe que hay todavía más información disponible. Si quisiéramos saber qué tan frecuentemente ocurrió un faltante (que la demanda excediera la cantidad ordenada), necesitaríamos hacer clic en la celda B9, añadirla como celda de "Pronóstico", y volver a hacer la simulación. La figura 11.32 muestra que hubo un faltante en 95 de los 500 ensayos (19%). Éstos son datos adicionales, con lo cuales se mide la "bondad" de ordenar 11 sartenes, y muestra cómo, por medio de la simulación, se pueden producir numerosas "medidas del desempeño".

Incluso se ilustra otra propiedad importante de la simulación en la figura anterior (figura 11.31). Los 500 ensayos han producido una distribución de la utilidad: varía desde $83 hasta $149, con una media de $124.30. También hemos generado anteriormente el histograma que se muestra en la figura 11.30. Esto da un indicativo de la **variabilidad** asociada con la política que está siendo evaluada (ordenar 11 sartenes). Los indicadores de variabilidad son un producto importante en los estudios de simulación. *Por lo general, la administración busca políticas en las cuales el resultado potencial sea altamente predecible, lo que significa una baja variabilidad.*

4. Incrementar el número de iteraciones del simulador de hoja de cálculo (con los mismos parámetros y decisiones) por lo general mejorará la precisión de la estimación del valor esperado de la medida de desempeño. En otras palabras, si Marie hubiera utilizado 1,000 o 5,000 ensayos en su simulación, la utilidad promedio de cada cantidad de pedido casi seguramente hubiera estado más cerca del valor de la utilidad esperada real correspondiente.

5. En una simulación nunca podemos estar seguros de que hemos encontrado la decisión óptima, aunque podemos utilizar el conocimiento de nuestro intervalo de confianza a partir de la estadística, para estar seguros de que hemos llevado a cabo los suficientes ensayos en los que alcanzamos una confianza de 95 o 99%. Esta imposibilidad de alcanzar 100% se debe a que una simulación puede producir sólo una estimación de la efectividad esperada y no un valor exacto cuando hay eventos aleatorios presentes.

6. La administración debe juzgar cuatro factores principales en un estudio de simulación:
   - **a.** ¿Captura el modelo la esencia del problema real? (Véase la sección 11.9 para un análisis posterior acerca de este punto.)
   - **b.** ¿Se toma en cuenta apropiadamente la influencia de las condiciones de inicio y de final de la simulación? (Véase la sección 11.8 para un ejemplo específico.)

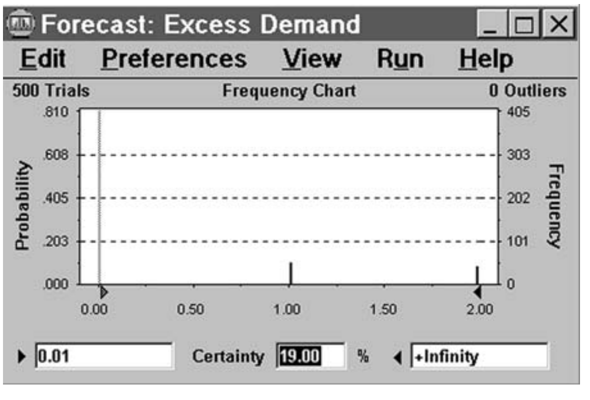


FIGURA 11.32
Resultados de los faltantes en Foslins

c. ¿Se han llevado a cabo suficientes ensayos para cada decisión, de forma que el valor promedio de la medida (o medidas) de desempeño sea un buen indicador del valor esperado real?

d. ¿Se han evaluado las decisiones suficientes (y correctas) para que podamos creer que la mejor respuesta encontrada está "lo suficientemente cerca" a lo óptimo?

11.6 SIMULACIÓN DEL MODELO DE FOSLINS CON UNA HIPÓTESIS MÁS REALISTA DE LA DEMANDA

Aunque ya hemos analizado el modelo de Artículos para el hogar de Foslins en la sección 11.5, recuerde que habíamos supuesto una distribución de demanda simplificada, cuando en realidad una distribución normal, con una media de 1,000 y una desviación estándar de 100 sería un modelo más realista de la demanda. En esta sección utilizaremos una distribución normal de la demanda, llevaremos a cabo 1,000 ensayos (el máximo permitido en la versión para estudiantes de Crystal Ball) y determinaremos la cantidad óptima del pedido.

En el desarrollo de este ejemplo practicaremos la manera de generar una variable aleatoria normal, con una media y una desviación estándar específicas. También veremos cómo puede reducirse la variabilidad en una simulación, lo que permitirá una mejor estimación de la diferencia en utilidades entre dos decisiones. Además, el ejemplo nos da la oportunidad de examinar la diferencia entre utilidad promedio y utilidad esperada real, así como un ejemplo posterior de qué es lo que significa la distribución de utilidades para una cantidad de pedido específica.

LA HOJA DE CÁLCULO DE FOSLINS: SIMULACIÓN MÁS REALISTA DE UNA DEMANDA

Vuelva a nuestra hoja de cálculo (FOSLNCB1.XLS) de la figura 11.28. Para modificar el modelo, comenzaremos con una hoja de cálculo (FOSLNCB2.XLS) y después cambiaremos la cantidad ordenada a 1,020 y le indicaremos a Crystal Ball que queremos cambiar la distribución aleatoria de la demanda de una distribución personalizada (discreta, general) a una distribución normal, con un valor medio de 1,000 y una desviación estándar de 100, como se muestra en la figura 11.33. (*Nota*: para hacer esto únicamente con Excel, todo lo que tiene que hacer es escribir lo siguiente en la celda B5: DISTR.NORM.INV(ALEATORIO(),1000,100), o puede remplazar el 1,000 y el 100 mediante las referencias de celda adecuadas).

Para simular 1,000 ensayos, seguimos el mismo procedimiento que en la sección 11.5, donde ejecutamos 500 ensayos modificando el cuadro de diálogo Run Preferences para indicar una cantidad de iteraciones mayor. El otro cambio que haremos es indicar que deseamos utilizar los mismos 1,000 valores aleatorios para la demanda en cada una de las siguientes simulaciones (para las diferentes cantidades de pedido que compararemos). Esto se conoce como establecer el valor simiente. El procedimiento para hacer esto es como sigue:

1. Haga clic en "Sampling" en el cuadro de diálogo Run Preferences.
2. Coloque una marca en el cuadro que dice "Use Same Sequence of Random Numbers".
3. Escriba un "Initial Seed Value" de 422 (o cualquier número que desee), como se muestra en la figura 11.34.
4. Haga clic en OK.

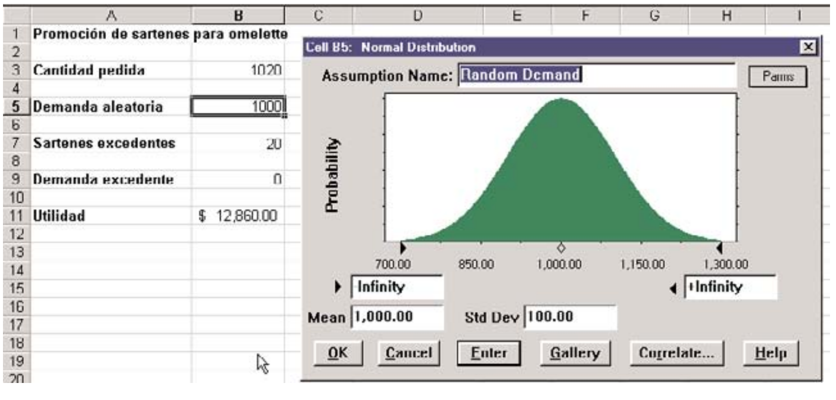


FIGURA 11.33
Hoja de cálculo de Foslins suponiendo una demanda normal

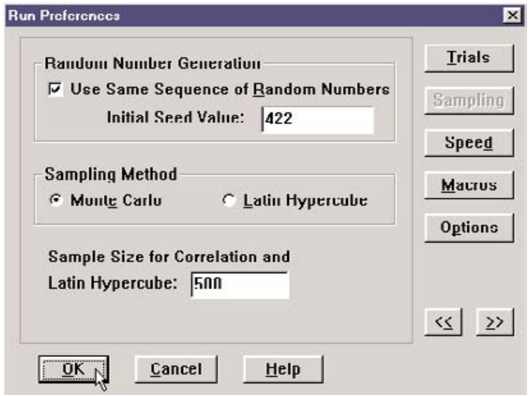


FIGURA 11.34

Nuevo cuadro de diálogo "Run Preferences" de Foslins

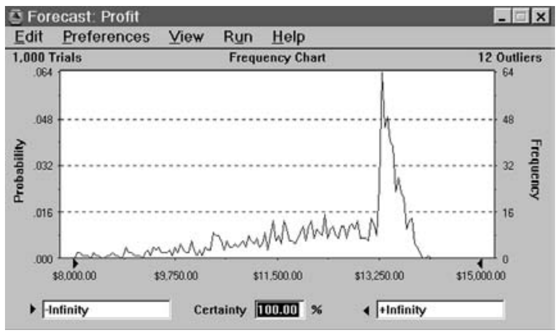


FIGURA 11.35

Histograma de utilidades de Foslins al ordenar 1,020 sartenes

Es importante que la demanda no cambie, dado que queremos comparar la utilidad promedio para cantidades de pedido *diferentes* con el *mismo* conjunto de demandas aleatorias. Entonces la utilidad diferirá solamente debido a las diferentes cantidades ordenadas y no porque se haya presentado una muestra de un conjunto diferente de valores de demanda.

Este proceso para reducir la variabilidad en los resultados de la simulación se llama *reducción de la varianza*, y es una técnica importante para reducir el número de cálculos necesarios para obtener resultados de simulación válidos. De hecho, la capacidad de utilizar el *mismo* conjunto de variables aleatorias para evaluar alternativas en competencia es una ventaja experimental única de la simulación. Todas las ramas de la ciencia intentan en sus experimentos reducir la variabilidad exógena. Por ejemplo, los agrónomos plantan diferentes variedades de maíz en el mismo campo, para asegurar que las condiciones de suelo y clima no varíen. En la simulación, la utilización de una misma secuencia de variables aleatorias nos da un control completo de los elementos aleatorios.

EL EFECTO DEL TAMAÑO DE LA ORDEN O PEDIDO

La figura 11.35 muestra un histograma de los valores de utilidad generados para las 1,000 iteraciones bajo la hipótesis de ordenar 1,020 sartenes. La utilidad promedio de $12,270.44 se muestra en la figura 11.36, junto con algunas otras estadísticas. Al introducir diferentes cantidades de pedido en la celda B3 de la hoja de cálculo y ejecutar de nuevo la simulación, podemos tener una idea de cómo varía la utilidad promedio en un rango de cantidades de pedido y un conjunto de demandas *dado*. Para restablecer la simulación:

1. Coloque un nuevo tamaño de pedido en la celda B3.
2. Haga clic en el undécimo icono (Reset Simulation), y haga clic en OK en respuesta a la pregunta que se le haga.
3. Haga clic en el séptimo icono (Start Simulation). Esta simulación podría tomar unos cuantos minutos, dependiendo de la velocidad de su computadora.

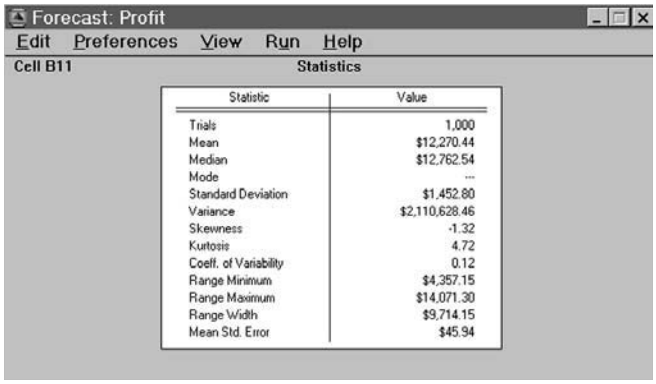


FIGURA 11.36

Resultado estadístico de Foslins cuando se ordenan 1,020 sartenes

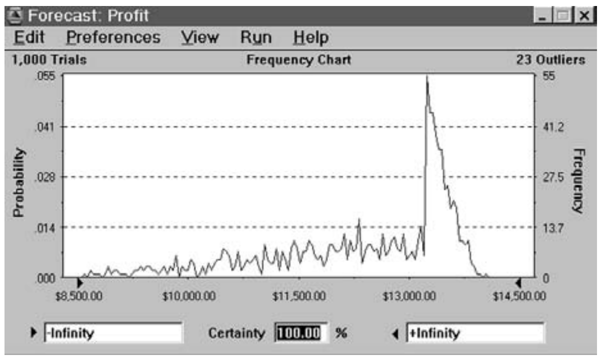


FIGURA 11.37

Histograma de utilidad de Foslins al ordenar 1,017 sartenes

La búsqueda de un tamaño de pedido óptimo es un proceso iterativo. Después de ejecutar la simulación con una cantidad de pedido de 1,020, Marie puede verificar a continuación cantidades de pedido de 1,010 y 1,030. Después de llevar a cabo 1,000 iteraciones de cada nueva cantidad pedida, Marie encuentra que las utilidades esperadas son de $12,268.95 y $12,264.60, respectivamente. Debido a que la utilidad esperada para un tamaño de pedido de 1,020 es la mejor hasta ahora, Marie decide entonces revisar los tamaños de pedido en ambos extremos (por ejemplo, 1,015 y 1,025). Encuentra que las utilidades esperadas son $12,270.70 y $12,268.34. En este punto, una cantidad pedida de 1,015 parece ser la que da la mayor utilidad esperada, así que ella analiza algunos tamaños de pedido a ambos lados (por ejemplo, 1,013 y 1,017) de la mejor cantidad de pedido hasta ahora (es decir, 1,015). Marie encuentra que las utilidades esperadas son $12,270.90 y $12,270.77, respectivamente. Ahora parece ser que el tamaño de pedido de 1,017 es el que proporciona la mayor utilidad esperada. Sin embargo, sólo para asegurarse Marie vuelve a hacer la simulación e intenta con las cantidades de 1,016 y 1,018. Encuentra que sus utilidades esperadas son de $12,270.76 y $12,270.71, respectivamente, y ahora ya tiene bastante confianza en que la cantidad pedida de 1,017 es realmente la mejor decisión, si bien apenas por unos cuantos centavos. La hoja de cálculo completa se encuentra en el CD como FOSLCB2C.XLS.

Como resultado del proceso iterativo, Marie ha encontrado que aunque la cantidad de pedido de 1,017 sartenes maximiza la utilidad *promedio* para un *conjunto dado de 1,000 demandas*, puede que no maximice la utilidad *esperada* real. Como ya hemos dicho anteriormente, es casi imposible garantizar que se encontrará la solución óptima utilizando la simulación. Pero recuerde, una solución óptima es teórica, en contraposición con un hecho de la vida real. En el mejor de los casos, una solución óptima representa una "buena decisión" para un problema de la vida real. En este caso, la utilidad promedio para los tamaños de pedido entre 1,015 y 1,018 solamente varió en un par de centavos y, por lo tanto, incluso si no obtuvimos la cantidad de pedido óptima exacta, sí tenemos la confianza de estar "lo suficientemente cerca" de ella.

La distribución de probabilidad de la utilidad Sin embargo, podríamos desear saber más acerca de la solución sugerida por la simulación (pedir 1,017 sartenes). Por ejemplo, ¿cuánta variabilidad podemos esperar alrededor de la utilidad promedio de $12,270.77? ¿Podríamos lograr mucho más o mucho menos que el promedio? ¿Podría esta decisión *perder* dinero? La respuesta definitiva a estas preguntas se da en la forma de una distribución de probabilidad (o histograma) de la utilidad, como se muestra en la figura 11.37.

La figura 11.37 muestra la distribución de la utilidad para una cantidad de pedido de 1,017, con base en una muestra de 1,000 ensayos. Esto nos da una buena imagen visual del rango de riesgo que correrá Foslins al pedir 1,017 sartenes, y puede que tenga un mayor impacto en Marie y su jefe que sólo números y promedios. La distribución parece tener una forma general de campana, con una cola izquierda larga. La distribución en pico a la derecha del valor esperado ($12,271) significa que hay una probabilidad definida de que la utilidad excederá a la utilidad media. La cola larga a la izquierda de la utilidad esperada significa que hay alguna probabilidad de obtener un resultado varios miles de dólares por debajo de la utilidad esperada. Sin embargo, hay muy poca probabilidad de perder dinero en esta promoción: en 1,000 ensayos, ninguna utilidad fue inferior a $4,370.

11.7 MIDWEST EXPRESS: MODELO DE SOBREBOLETAJE EN UNA AEROLÍNEA

La mayor parte de los modelos que hemos analizado hasta ahora en este capítulo han correspondido al área de la manufactura (PROTRAC y Foslins). Ahora que más de la mitad del producto interno bruto de Estados Unidos proviene del sector servicios, este capítulo no estaría completo sin un ejemplo de ese sector. La industria de los viajes y hoteles es una enorme industria multimillonaria. Muchas de las diferentes empresas (por ejemplo, aerolíneas, hoteles, renta de autos, cruceros, etc.) dentro de este enorme grupo usan un conjunto de herramientas cuantitativas llamadas *administración de ingresos*. Las aerolíneas fueron pioneras en el uso de estas herramientas, y American Airlines se considera el líder. Por ejemplo, American Airlines comenzó la práctica de subastar el valor de un asiento en un vuelo en particular cuando se presentaban más clientes que asientos disponibles. Ésta fue una manera muy innovadora de tratar el problema potencial que se presenta cuando las aerolíneas venden un exceso de boletos para sus vuelos. American Airlines estima que el sobreboletaje añade más de $200 millones anuales a su resultado final (véase Smith *et al.*). Otras cuestiones, además del sobreboletaje, que son practicadas en esta administración de ingresos incluyen los pronósticos, la asignación de asientos entre las diferentes clases de tarifas y el control de la red completa de escalas de vuelo.

Este ejemplo se enfocará en una línea regional de mucho éxito: Midwest Express Airlines. Esta empresa tiene sus oficinas centrales en Milwaukee, Wisconsin, y fue incorporada por la gran compañía de productos de consumo Kimberly Clark, que tiene un gran centro de operaciones en la cercana Appleton, Wisconsin. Laura Sorensen es la gerenta de administración de ingresos. Ha estado revisando los datos históricos del porcentaje de clientes que no se presentan en muchos de los vuelos de Midwest Express. Ella está particularmente interesada en el vuelo 227 de Milwaukee a San Francisco. Ha encontrado que el promedio de la tasa de ausencia de los pasajeros en este vuelo es de 15%. La aeronave (MD88) tiene capacidad para 112 asientos en una sola cabina. No hay ninguna distinción entre la primera clase y la clase turista en Midwest Express. Todo el servicio se considera de primera. Usted lo creería si tuviera la oportunidad de oler las galletas con chispas de chocolate que se están horneando mientras vuela.

La pregunta que Laura quiere contestar es hasta qué nivel debe sobrevender los lugares de esta aeronave. La demanda es fuerte para esta ruta, la cual es predominantemente de negocios. La tarifa promedio en este vuelo es de $400. Si Laura acepta solamente 112 reservaciones en este vuelo, es casi seguro que el avión despegará con asientos vacíos, debido a clientes que no se presentan, lo cual representa un costo de oportunidad para Midwest Express, ya que pudo haber aceptado en cada asiento a otro cliente, y obtenido $400 adicionales. Por otro lado, si ella acepta más reservaciones que asientos, corre el riesgo de que, incluso contando a los que no se presentan, haya más clientes que asientos disponibles. El procedimiento normal en caso de que se deba negar el abordaje a un cliente es ponerlo en el siguiente vuelo disponible, darle alguna compensación respecto a un viaje futuro y probablemente un vale para hotel y una comida. Todo esto se hace para mitigar el malestar potencial del cliente “rechazado”. Laura calcula que esta compensación por lo general le cuesta a Midwest Express aproximadamente $600 en promedio.

Para resolver este modelo desafiante, Laura construyó la hoja de cálculo que se muestra en la figura 11.38 (MIDWSTRK.XLS). Demostraremos el uso de @Risk con este ejemplo.

En la celda B12, hemos modelado una variable aleatoria binomial utilizando @Risk. Para cada una de las reservaciones que Midwest Express escoge aceptar, el modelo genera de manera aleatoria el número de pasajeros que realmente se presentarán. Entonces se realizan algunos

B18 = =B12*B5-B14*B6

	A	B	C
1	**Modelo de sobreboletaje del vuelo 227**		
2			
3	**Asientos disponibles**	112	
4			
5	**Tarif. prom/asiento**	$ 400.00	
6	**Costo de rechazo**	$ 600.00	
7	**Probabilidad de ausencias**	15%	
8			
9	**Decisión:**		
10	**Reservaciones que se aceptarán**	112	
11			
12	**Número de pasajeros a bordo**	95	
13			
14	**Número de pasajeros rechazados**	0	
15			
16	**Número de asientos vacíos**	17	
17			
18	**Utilidad**	$ 38,000.00	
19			

Celda	Fórmula
B10	=RiskSimtable ({112,114,116,118,120, . . . , 144,146})
B12	=RiskBinomial (B10,1−B7)
B14	=MAX (0,B12−B3)
B16	=MAX (0,B3−B12)
B18	=B12*B5−B14*B6

FIGURA 11.38

Modelo de sobreboletaje de Midwest

cálculos simples para determinar ya sea el número de asientos vacíos (celda B16) o el número de clientes a los que se les negará el abordaje (celda B14). Esto es, esencialmente, lo que está haciendo Laura. Entre más reservaciones acepte, menor posibilidad habrá de que haya asientos vacíos, pero se incrementa la posibilidad de tener que negar el abordaje a un cliente. Ella busca encontrar el nivel de sobreboletaje óptimo que maximice la utilidad. La fórmula de utilidad (celda B18) se muestra en la línea de ecuaciones de Excel en la figura 11.38, y es el número de personas que se presenta multiplicado por la tarifa promedio y se le resta el costo de abordajes negados (el número de clientes a quienes se les niega el abordaje, multiplicado por el costo de rechazar a un pasajero). El modelo supone que las tarifas son totalmente rembolsables, debido al elevado porcentaje de viajeros de negocios de esta ruta. Esto es, si un cliente no se presenta, ella no tiene que pagar.

Dado que el valor devuelto por @Risk cambiará cada vez que se recalcule la hoja, Laura puede llevar a cabo fácilmente múltiples ensayos; esto es, escoger una nueva muestra de demanda presionando simplemente la tecla de recálculo de su hoja (F9 por lo general). Después de hacer esto varias veces, se sorprende al encontrar que en varios ensayos se obtiene una utilidad que es varios miles de dólares inferior a su caso básico. A fin de ver esto con @Risk, usted debe revisar que el despliegue de @Risk esté en “Monte Carlo”, en vez de en “Expected Value”, para ver los diferentes valores aleatorios devueltos por cada iteración. Para activar esta característica, simplemente:

1. Haga clic en el tercer icono de @Risk (características de la simulación), después en la segunda ceja (Sampling).
2. Indique en la sección “Standard Recale” que usted desea Monte Carlo (no Expected Value), como se muestra en la figura 11.39.

El siguiente paso es utilizar la simulación para que Laura determine el nivel de sobreboletaje óptimo. Ella sabe que si acepta sólo 112 reservaciones, no tendrá nunca que preocuparse de clientes enojados porque se les haya negado el abordaje, pero también perderá mucha utilidad potencial bajo la forma de “asientos vacíos”. Ella decide analizar el rango de 112 a 146 reservaciones (en incrementos de 2) y ver cuál es el valor que maximiza la utilidad esperada de Midwest Express. Esta capacidad de comprobar múltiples decisiones en una simulación grande es una de las fortalezas de @Risk. Todo lo que Laura necesita hacer es:

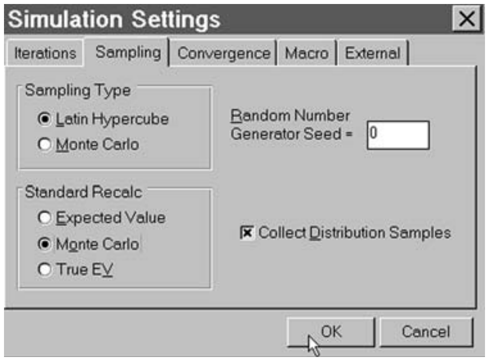


FIGURA 11.39

Característica de despliegue Monte Carlo de @Risk

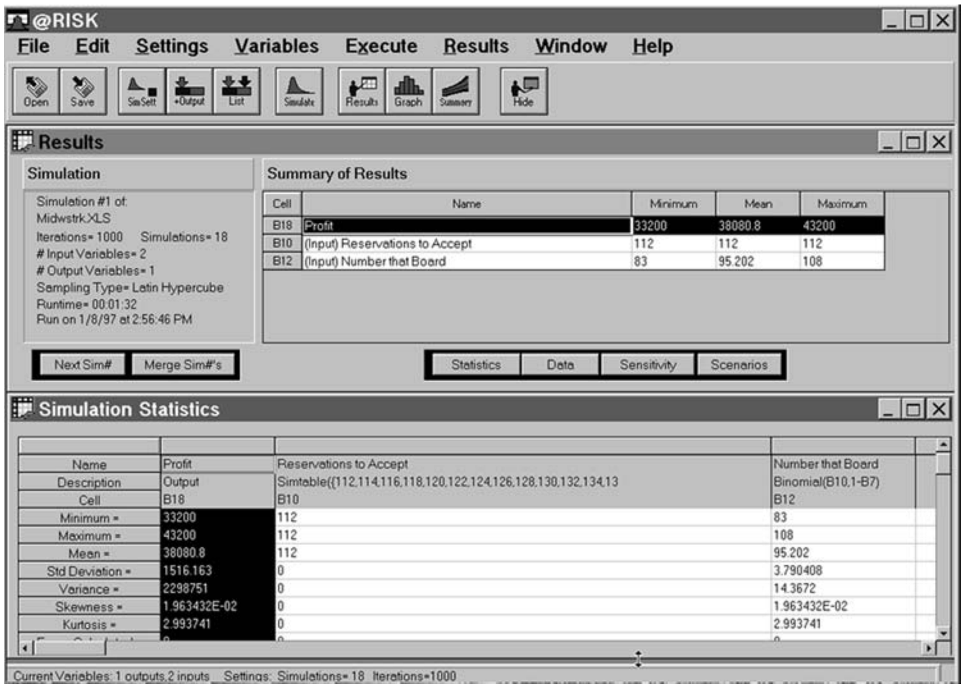


FIGURA 11.40

Despliegue inicial de simulación de @Risk

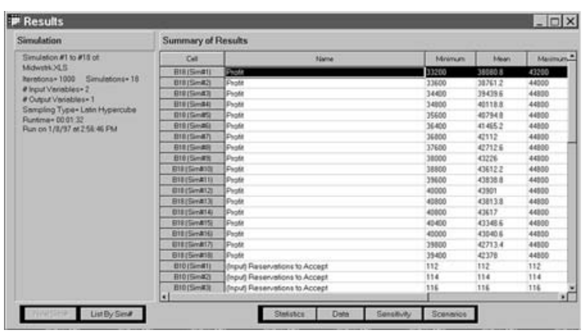


FIGURA 11.41

Despliegue de @Risk de las 18 simulaciones

1. Escriba =RiskSimtable({112, 114, 116,..., 142, 144, 146}) en la celda B10.
2. Haga clic en el tercer icono @Risk (Simulation Settings), después en la ceja “Iterations” e indique que son 18 simulaciones, con 1,000 iteraciones cada una.
3. Haga clic en la celda B19 y después clic en el cuarto icono @Risk (Add Output Cell).

@Risk desplegará automáticamente los resultados de estas 18 simulaciones, como se muestra en la figura 11.40. Es mucho más útil hacer clic en el botón “Merge Sim#’s” como se ilustra en la figura 11.40 para obtener el despliegue que se presenta en la figura 11.41.

Es obligatorio un comentario sobre la característica de monitoreo de convergencia de @Risk. Ésta es una característica muy útil que nos indica cuando hemos llevado a cabo suficientes iteraciones para que las celdas de resultado (medidas de desempeño) no estén cambiando ya de manera apreciable. Una cara "ceñuda" indica que no hemos hecho suficientes iteraciones, en tanto que una cara "sonriente" indica que los resultados parecen ser satisfactorios y que probablemente ya hemos hecho suficientes iteraciones. Si usted desea desactivar esta característica a fin de apresurar la simulación, simplemente haga clic en el tercer icono (Simulation Settings) y después en la ceja "Convergence". Finalmente, haga clic en el cuadro que dice "monitor convergence" de forma que la "X" desaparezca.

Examinando este resultado de @Risk, Laura puede ver que si aceptara solamente 112 reservaciones (la capacidad del avión), su utilidad promedio sería de $38,080 (indicado como Sim#1). Conforme ella aumenta el número de reservaciones aceptadas, la utilidad promedio sube lentamente por un tiempo. Por ejemplo, la Sim#4 (aceptar 118 reservaciones) genera una utilidad promedio de $40,118.8. Ella encuentra que un valor de 134 reservaciones (Sim#12) maximiza la utilidad promedio a $43,901, ¡un aumento de 15.3% en la utilidad! Esto representaría un sobreboletaje de 22 reservaciones, o 19.6% de su capacidad. Más allá de 134 reservaciones, la utilidad promedio comienza a descender conforme el costo de negar el abordaje empieza a sobrepasar el costo de oportunidad de un asiento vacío. Laura siente confianza en su respuesta recién hallada de 134 reservaciones.

Si ampliamos la mitad inferior del resultado estadístico que se muestra en la figura 11.40, podemos ver las diferentes fracciones de la distribución del VNA (por ejemplo, 10, 20,..., 90). Exploraremos una ampliación de este modelo en el problema 11-22 tomando en consideración una demanda aleatoria. En este modelo, Laura ha supuesto que, cualquiera que sea el número de reservaciones que ella ponga a disposición de sus clientes, éstos realmente las solicitarán. En realidad, existe una distribución de probabilidad que describe esta demanda y, de hecho, en ocasiones la demanda puede ser menor que el nivel de sobreboletaje que Laura elija.

CÁPSULA DE APLICACIÓN

Cheques y saldos: un banco de Ohio utiliza la simulación para modernizar sus operaciones

En 1984, BancOhio National Bank tenía 266 sucursales por todo el estado. Los cheques se consolidaban en 31 de estas sucursales para ser codificados y enviados después a Columbus o a Cleveland para procesarlos, clasificarlos y prepararlos para su liquidación por computadora. Al darse cuenta de que mejorando la eficiencia de estas actividades reduciría los costos y mejoraría el caudal de operaciones, la administración buscó resolver las siguientes cuestiones:

- ¿Cuántos sitios de codificación se necesitarían para servir a la red de sucursales, y en qué sucursales se deberían ubicar?
- ¿A cuántas sucursales deberá servir cada sitio?
- ¿Qué recursos y costos deberán considerarse en la evaluación de las alternativas?

Para ayudar a encontrar respuestas, BanOhio empleó a una empresa asesora que había desarrollado un paquete de simulación llamado CHECKSIM. Este programa genera rutas eficientes para los mensajeros que recogen los cheques en las sucursales y los entregan en los centros de procesamiento. El resultado de la simulación informa el volumen de cheques entregado al centro de procesamiento según la hora del día, dando por lo tanto la información necesaria para tomar decisiones de personal. Debido a que el modelo puede simular solamente un centro de procesamiento a la vez, se utilizó el siguiente procedimiento.

- Primero, los encargados de la planeación seleccionarían un escenario particular, es decir, un conjunto de sucursales para que funcionaran como centros de procesamiento.
- A continuación, se evaluó por medio del simulador una cantidad de esquemas posibles para asignar las sucursales que cada centro debería servir.
- Finalmente, una vez determinada la asignación del esquema más económico para cada escenario, se compararon los costos de los diferentes escenarios, usando la interfaz del programa con Lotus 1-2-3.

En total, la administración evaluó cinco escenarios diferentes, implicando 31, 22, 16, 12 y 7 centros de procesamiento. Se encontró que los dos mejores escenarios fueron aquellos con 22 y 7 centros. El escenario de 22 centros tenía el menor costo de transporte. Sin embargo, el escenario de 7 centros hacía un uso más eficaz de las instalaciones, dando como resultado un costo de codificación menor. En consecuencia, era menos costoso en casi $288,000 por año.

Estos resultados sugirieron a la administración que considerara las posibles ventajas de consolidar funciones adicionales en los centros de procesamiento propuestos. Por lo tanto el proyecto se amplió para incorporar la administración de operaciones, rendimientos, consultas de clientes y balance de efectivo en los mismos centros. El resultado fue un ahorro adicional en costos indirectos de operación de $1.38 millones al año. (Véase Davis *et al.*)

FIGURA 11.42

Celda de trabajo de Michaelson

11.8 BALANCEO DE LA CAPACIDAD

La simulación es una herramienta poderosa para obtener mayor discernimiento de la planeación y operación de una fábrica. En esta sección exploraremos la afirmación de que la capacidad debería estar "balanceada" a todo lo largo de una planta de fabricación. Veremos que la variación en los tiempos de proceso puede llevar a resultados inesperados. Este ejemplo es ilustrativo en varios sentidos: (1) Muestra cómo utilizar una hoja de cálculo para modelar un problema multiperiodo en el cual los resultados de un periodo se trasladan al siguiente. En este modelo, como en muchas situaciones reales, se trasladan inventarios de un periodo al siguiente. (2) Nos da una lección gráfica del riesgo de sacar conclusiones con base en la ejecución de simulaciones relativamente pequeñas. (3) Nos da una comprensión intuitiva útil acerca de las consecuencias de equilibrar las tasas de producción en una operación de fabricación en serie.

CÓMO HACER EL MODELO DE UNA CELDA DE TRABAJO

Paul Michaelson, ingeniero industrial de PROTRAC, está tratando de decidir cuál es la capacidad apropiada que se debe instalar en la pequeña celda de trabajo mostrada en la figura 11.42. Esta celda recibe una materia prima, la procesa en la primera estación de trabajo (WS1; work station 1), la guarda en una área de almacenaje temporal si la segunda estación de trabajo (WS2; work station 2) está ocupada, y después la procesa en la misma WS2. La pieza terminada se utiliza en una de las líneas de ensamblaje de PROTRAC a razón de tres por hora. ¡Considere lo caro que sería instalar una fábrica para poner en práctica y probar la celda de trabajo durante varios días, comparado con el costo de una simulación en una hoja de cálculo!

Paul tiene varios objetivos al diseñar esta celda de trabajo. Quiere satisfacer la demanda de esta pieza en la línea de ensamblaje, mantener reducido el trabajo en proceso (WIP; work in process) entre estaciones de trabajo y (a fin de mantener los costos bajos) minimizar la capacidad de las estaciones de trabajo que cumplan con los dos primeros objetivos. Decide llevar a cabo una simulación para ayudarse a tomar una decisión sobre la capacidad.

SIMULACIÓN DE LA CAPACIDAD BALANCEADA

Dado que el área de ensamblaje requiere la pieza a una tasa de tres por hora, Paul decide inicialmente establecer la capacidad de ambas estaciones de trabajo en tres por hora. Esto es, las capacidades de WS1 y WS2 están *balanceadas*. Sin embargo, debido a la variabilidad en el tiempo de proceso, una estación de trabajo puede ser capaz de producir cualquier cantidad desde una hasta cinco unidades en una hora. Suponga que durante cualquier periodo dado de una hora, una estación de trabajo tendrá la capacidad de procesar 1, 2, 3, 4 o 5 unidades con igual probabilidad (distribución discreta uniforme). Entonces el resultado *promedio* de esa estación de trabajo será de tres unidades por hora *a condición de que tenga siempre algo en qué trabajar*. Paul supone que siempre habrá disponible materia prima suficiente para WS1 de forma que nunca esté *desocupada*. Sin embargo, debido a que en WS1 los tiempos de proceso son variables, habrá ocasiones en que WS2 esté ociosa por falta de material.

Las condiciones iniciales La figura 11.43 es una imagen de la hoja de cálculo (MICHCB1.XLS) que muestra las primeras 16 horas simuladas de operación de la celda de trabajo. Las *condiciones iniciales* al principio de la primera hora de simulación eran de cero trabajo en proceso (WIP), y WS1 y WS2 ociosas. A continuación, Paul necesita escribir los GNA discretos uniformes en la celda C10 (Resultado WS1) y la celda D10 (Resultado WS2 potencial) para producir uno de cinco valores posibles (1, 2,..., 5) con igual probabilidad. Esto se hace escribiendo los datos en un bonito formato tabular para Crystal Ball. Paul escribió los siguientes valores en las celdas C1:D6 para WS1 y WS2 (que no aparecen aquí):

F10 = =B10+C10-E10

	A	B	C	D	E	F	G
8				Potencial	Real		
9	Hora	TEP inicial	Resultado ET1	Resultado ET2	Resultado ET2	TEP final	TEP promedio
10	1	0	3	3	0	3	3
11	2	3	3	3	3	3	3.00
12	3	3	3	3	3	3	3.00
13	4	3	3	3	3	3	3.00
14	5	3	3	3	3	3	3.00
15	6	3	3	3	3	3	3.00
16	7	3	3	3	3	3	3.00
17	8	3	3	3	3	3	3.00
18	9	3	3	3	3	3	3.00
19	10	3	3	3	3	3	3.00
20	11	3	3	3	3	3	3.00
21	12	3	3	3	3	3	3.00
22	13	3	3	3	3	3	3.00
23	14	3	3	3	3	3	3.00
24	15	3	3	3	3	3	3.00
25	16	3	3	3	3	3	3.00

Celda	Fórmula	Cópiese a
E10	=MIN(B10,D10)	E11:E25
F10	=B10+C10−E10	F11:F25
G10	=PROMEDIO($F$10:F10)	G11:G25
B11	=F10	B12:B25

FIGURA 11.43

Hoja de cálculo de Michaelson

TASA DE RESULTADOS	PROBABILIDAD
1	0.2
2	0.2
3	0.2
4	0.2
5	0.2

La celda E10 (Resultado WS2 real) contiene la fórmula =MIN(B10,D10). Por ejemplo, si el resultado real de WS2 durante la segunda hora es 1, aunque haya 5 unidades disponibles para trabajar, sería debido a que la variable aleatoria extraída para representar el Resultado WS2 potencial resultó ser de 1 unidad durante esa hora. El WIP final (celda F10) se calcula sumando el WIP inicial (celda B10) al Resultado WS1 (celda C10) y sustrayendo el Resultado WS2 real (celda E10). El WIP inicial para una hora subsiguiente es simplemente el WIP final de la hora anterior. El WIP promedio al final de cualquier hora dada se define como el promedio de los valores de WIP final de todas las horas observadas hasta ese punto. A fin de escribir los GNA discretos uniformes para el Resultado WS1 y el Resultado WS2 potencial en Crystal Ball, Paul debe:

1. Hacer clic en la celda C10, que es la primera celda donde Crystal Ball generará valores aleatorios para la tasa de resultado. NOTA: debido a que la versión para estudiantes de Crystal Ball limita el número de celdas Assumption a seis y el número de celdas Forecast a seis, tenemos un problema potencial con este modelo (que tiene 32 celdas de hipótesis y 16 celdas de pronóstico). Para salvar este obstáculo, utilizaremos un truco en las celdas de hipótesis (analice el paso #2) y limitaremos el número de celdas de pronóstico a seis de las 16 horas que podríamos observar.

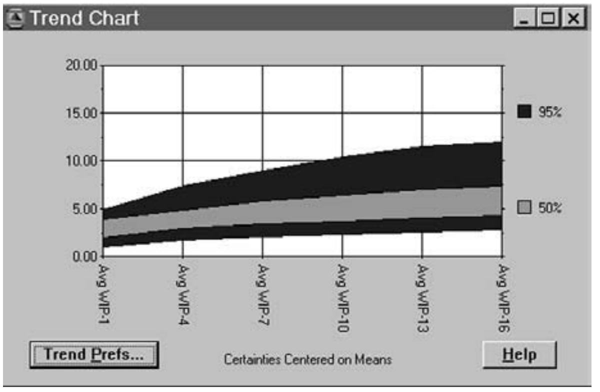


FIGURA 11.44

Gráfica de tendencias de Michaelson del WIP promedio

2. Escribir =CB.Custom($C$2:$D$6) en la celda. Esto es exactamente igual que:
   a. Hacer clic en el primer icono Crystal Ball (Define Assumption).
   b. Hacer clic en la distribución "Custom" de la Gallery of Distributions; después hacer clic en OK.
   c. Hacer clic en el botón "Data" y escribir el rango de celdas donde puso la información de esta distribución discreta ($C$2:$D$6), después hacer clic en OK.

   Lo cual nos permite desligarnos de la limitación de las seis celdas de hipótesis.
3. Crystal Ball mostrará la forma de la distribución que usted ha escrito. Haga clic en OK.
4. Con el cursor todavía en la celda C10, haga clic en el icono "Copy" de Excel.
5. Resalte el rango C10:D25 y después haga clic en el icono "Paste" de Excel. Esto copiará exactamente la misma distribución discreta en las 32 celdas.
6. Idealmente, desearíamos resaltar las 16 celdas que registran el WIP promedio al final de cada hora (G10:G25), pero puesto que estamos limitados a seis celdas de la versión para estudiantes, sólo elegiremos las celdas G10, G13, G16, G19, G22 y G25.
7. Después de hacer clic en cada una de las celdas mencionadas en el paso 6, haga clic en el segundo icono Crystal Ball (Define Forecast), lo que hará aparecer un cuadro de diálogo.
8. Cambie el tamaño de la ventana a "Large", y cambie su despliegue a "When Stopped (faster)" en el cuadro de diálogo, si éstas no son las opciones predeterminadas (como se mostró anteriormente). También puede usted modificar el nombre para reflejar cuál de las 16 horas representa. Haga clic en OK.
9. Repita el paso 8 en cada una de las 6 celdas de Pronóstico que le presentará Crystal Ball automáticamente (o de manera alterna, puede utilizar Copy/Paste en las celdas de Pronóstico para evitar hacerlo seis veces).
10. Haga clic en el octavo icono (Run Preferences) y modifique el "Maximum Number of trials" a 1,000.
11. Haga clic en OK.
12. Haga clic en el noveno icono (Start Simulation) y después de que Crystal Ball haya llevado a cabo las 1,000 iteraciones, producirá automáticamente un histograma individual para cada una de las seis celdas de pronóstico.
13. Si encuentra esto demasiado lleno de números, haga clic en Run, después en "Open Trend Chart", y obtendrá un resumen más sucinto como el que se muestra en la figura 11.44.

Aquí, Crystal Ball traza por nosotros la distribución del WIP promedio de las primeras 16 horas utilizando las seis horas seleccionadas que indicamos. La franja clara central indica el valor medio del WIP promedio ±25% (o un intervalo de confianza de 50%); y la siguiente franja más oscura es un intervalo de confianza de 95% similar. Podemos ver en esto que el WIP promedio parece aumentar ligeramente a través de estas primeras 16 horas y ciertamente la distribución se amplía conforme pasa el tiempo. La hoja de cálculo terminada se encuentra en el CD como MICHCB1C.XLS.

Más allá de las condiciones iniciales Paul se da cuenta que ejecutar la simulación para sólo 16 horas puede desorientar un poco, así que copia las fórmulas durante otras 184 horas (en una nueva hoja de cálculo llamada MICHCB2.XLS). Vuelve a ejecutar Crystal Ball utilizando los mis-

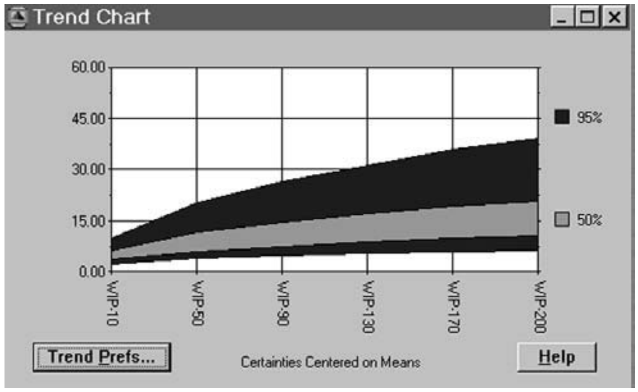


FIGURA 11.45

Trabajo en proceso promedio, capacidad balanceada

mos pasos básicos que en la simulación de 16 horas. Paul se sorprende bastante cuando hace una gráfica del WIP promedio *versus* el tiempo para las 200 primeras horas de operación (véase la figura 11.45). Él sabe que la condición inicial de 0 WIP llevaría a valores bajos de WIP promedio al principio. Él esperaba que el WIP creciera, pero que después se nivelara alrededor de algún valor de *estado estable*. Lo que no se esperaba era el crecimiento continuo del WIP promedio. Parece que entre más tiempo esté la celda en operación, mayor es el número de WIP que se acumula. Esto puede parecer un contrasentido desde el momento en que dos estaciones de trabajo operan con una tasa promedio de tres unidades por hora, lo cual muestra que no existe una tendencia de crecimiento para el WIP. La hoja de cálculo completa se encuentra en el CD como MICHCB2C.XLS.

Un modelo de fila de espera simple, sin embargo, predeciría este crecimiento inesperado. Como veremos en el capítulo 12, cuando la tasa de llegadas promedio en una fila es igual a la tasa de servicio promedio, el número de clientes en la fila crecerá sin límite. En este modelo, los "clientes" son las piezas que abandonan la WS1, y la fila es el área de almacenamiento temporal antes de WS2. Debido a que la materia prima está disponible libremente, la tasa de resultado de WS1, y por lo tanto la velocidad promedio de llegada a la fila, es de tres unidades por hora. La tasa de servicio promedio, la velocidad a la cual WS2 puede procesar el WIP, también es de tres unidades por hora. Por lo tanto, la velocidad de llegada promedio y la velocidad de servicio promedio son iguales cuando la capacidad de las dos estaciones de trabajo está balanceada. De ahí el crecimiento continuo del WIP promedio.

SIMULACIÓN DE LA CAPACIDAD NO BALANCEADA

Con base en estas consideraciones, Paul decide agregar capacidad a WS2, de forma que su tasa de producción promedio sea ahora de 3.5 unidades por hora (utilizando una distribución discreta uniforme entre 2 y 5 unidades). Él modela esto en una nueva hoja de cálculo llamada "Unbal. 200 hrs" (en MICHCB3.XLS). Primero copia la hoja de cálculo MICHCB2.XLS completa a la nueva hoja de cálculo y después añade la distribución del resultado potencial de la estación de trabajo 2 en las celdas G1:H5 como sigue:

TASA DE RESULTADOS	PROBABILIDAD
2	0.25
3	0.25
4	0.25
5	0.25

Entonces tiene que cambiar las fórmulas de las celdas D10:D209 a: =CB.Custom($G$2:$H$5). Selecciona seis celdas de pronóstico, distribuidas uniformemente a través de las 200 horas, y después ejecuta 1,000 iteraciones. La nueva gráfica del WIP promedio a través del tiempo (figura 11.46) muestra ahora un WIP promedio mucho menor. Estos resultados sugieren que no hay crecimiento a largo plazo en el WIP promedio, con un valor de estado estable residiendo en algún punto entre 5 y 7 unidades.

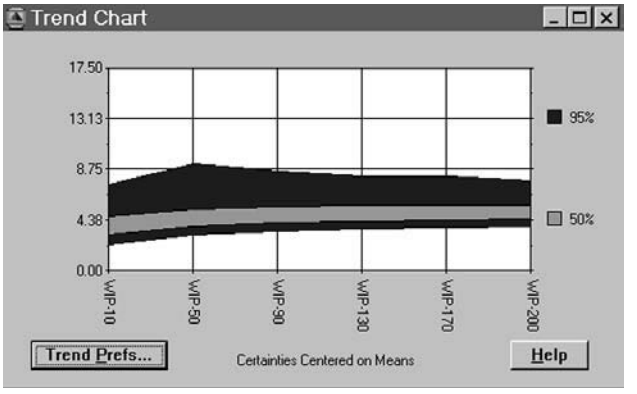


FIGURA 11.46

Trabajo en proceso promedio, capacidad no balanceada

La conclusión de Paul es que la capacidad de las dos estaciones de trabajo no debe estar balanceada (con iguales tasas de resultado). Si el WIP se debe mantener en niveles razonables, entonces la estación de trabajo con ritmo en descenso (WS2) deberá tener una capacidad algo mayor. Si Paul hubiera simulado menos de 200 horas de operación, se hubiera visto seriamente engañado sobre el comportamiento a largo plazo del WIP en el diseño balanceado. Realizando una simulación durante un periodo mayor, se superó el efecto de las condiciones iniciales, y se pudo discernir el verdadero comportamiento a largo plazo. Se puede obtener una observación general de este ejemplo:

Los resultados de la simulación son útiles solamente cuando se tiene cuidado en el diseño experimental para eliminar efectos externos, como lo son las condiciones iniciales o finales. Las simulaciones muy cortas pueden llevar a resultados muy engañosos.

11.9 NOTAS SOBRE LA APLICACIÓN

La simulación es una herramienta analítica poderosa y flexible que puede utilizarse para el estudio de una gran variedad de modelos administrativos. Se usa generalmente en casos donde no existe un buen modelo analítico o, cuando existe, resulta demasiado complicado de resolver. La simulación también puede mostrar los efectos de la variabilidad y las condiciones iniciales, así como el tiempo necesario para llegar al estado estable. Esta descripción abarca un gran segmento de los modelos del mundo real y, como resultado, cuando se habla de técnicas de las ciencias de la administración se pone a la simulación en primer término. Sin embargo, existe una cantidad de factores importantes que la administración debe considerar antes de comprometerse a un estudio de simulación.

Simulación versus modelos analíticos Como se dijo anteriormente, la simulación se utiliza con frecuencia cuando no hay un modelo analítico conveniente disponible. En un modelo analítico se pueden utilizar las leyes de las matemáticas, a menudo para obtener decisiones óptimas y algunas veces datos de sensibilidad (por supuesto, siempre y cuando el análisis no sea tan complejo que resulte prohibitivo). En una simulación con eventos aleatorios, en contraste, no se garantiza la optimalidad, e inclusive puede ser difícil obtener una solución óptima aproximada. A menudo se requiere cierta cantidad de iteraciones sólo para obtener una buena estimación de la “bondad” de una decisión en particular. Sin embargo, los modelos de simulación pueden dar información que los modelos analíticos encuentran difícil o imposible de proporcionar, como el impacto de la variabilidad, el comportamiento antes de alcanzar el estado estable, y así sucesivamente.

Diseño de un simulador en hoja de cálculo El acrónimo KISS, de “Keep It Simple, Stupid (Manténgalo sencillo, tonto)” es muy popular entre los profesionales estadounidenses del área de modelos de decisión de los negocios. El principio se aplica con especial énfasis en la simulación. Un error común y a menudo fatal en el diseño de los modelos de simulación consiste en hacerlos demasiado complicados. Esto puede ser una reacción exagerada a la libertad obtenida al pasar de modelos analíticos a modelos de simulación. Los modelos analíticos son a menudo bastante restrictivos en sus hipótesis. Una vez que empecemos a alejarnos de funciones lineales o de hipótesis muy simplistas, las matemáticas se van dificultando en orden de magnitud. El resultado es que muchos de los modelos analíticos populares tienen una aplicabilidad limitada. La simulación puede ser mucho más tolerante. Dado que típicamente sólo estamos generando una observación a partir de una función (en vez de resolver un conjunto de ecuaciones), en la simulación las funciones lineales no facilitan tanto el análisis como en los modelos analíticos.

Cualquiera que sea el motivo, por lo general existe una poderosa urgencia de incluir muchos factores en un modelo de simulación. Por ejemplo, puede no parecer difícil agregar un factor de devoluciones de los clientes a un modelo de control de inventarios. Esencialmente, todo lo que se requiere es cierto modelado adicional en la hoja de cálculo para generar esta característica e incorporarla en el modelo. "No hay alguna, barrera teórica así que ¿por qué no hacerlo?" Esta impresión puede estar bastante equivocada.

Las simulaciones grandes, complicadas, que incorporan gran cantidad de características "reales" son a primera vista atractivas para los administradores. Sin embargo, adolecen de por lo menos dos grandes problemas:

1. A menudo es costoso modelarlas y documentarlas.
2. Los modelos complejos de simulación a menudo producen tantos datos que los resultados son difíciles de interpretar.

Los modelos simples, abstractos, que capturan la esencia del problema real y dejan a un lado los detalles estorbosos son tan importantes para los modelos de simulación exitosos como lo son para los modelos analíticos. Una observación casual sugiere que más proyectos de modelos de simulación han fallecido debido a una concepción demasiado grandiosa y original que a causa de cualquier otra enfermedad.

Software complementario de simulación La importancia y el amplio uso de la simulación han propiciado la creación de un *software* complementario especial. Dos guías de acción, útiles en cualquier estudio cuantitativo, son especialmente importantes en análisis de simulación:

Documentación. Insista en una buena documentación. Un nuevo administrador debe ser capaz de comprender las entradas necesarias, las hipótesis del modelo y el significado del resultado con sólo un esfuerzo normal. Esto requiere una clara documentación. Muy a menudo la utilidad de un modelo de simulación termina efectivamente al desaparecer quien lo originó. El único remedio razonable para este problema es una buena documentación.

Dinámicas de grupo. Todos los esfuerzos de modelado cuantitativo requieren una intensa interacción y comunicación entre quien construye el modelo y el usuario final. Esto es particularmente cierto en los proyectos de simulación. El usuario final debe comprender cómo introducir decisiones y parámetros y cómo analizar el resultado. El conocimiento de primera mano por parte del usuario es fundamental para asegurar que la simulación capture la esencia del problema real. Asimismo, el hecho de que el usuario tenga un conocimiento personal del problema real puede ser un factor importante en la búsqueda de una buena solución.

Una buena documentación y las dinámicas de grupo están íntimamente relacionadas y son parte importante de la administración de cualquier proyecto basado en el modelado y el análisis cuantitativos.

11.10 RESUMEN

La sección 11.1 señaló que el uso de la experimentación para la evaluación de alternativas es una parte importante de la ciencia aplicada, y que una simulación basada en hoja de cálculo es el método experimental más común para modelos de decisiones administrativos. También se analiza el uso de la simulación en decisiones bajo riesgo; esto es, en modelos en los cuales el comportamiento de uno o más factores puede representarse por una distribución de probabilidad.

Los números aleatorios son la base de la técnica de simulación de eventos aleatorios. La sección 11.2 presentó el procedimiento utilizado para generar variables aleatorias a partir de varias distribuciones de probabilidades diferentes, tanto con Crystal Ball como con @Risk. Se presentaron las distribuciones tanto discreta como continua.

La sección 11.3 presentó un ejemplo que trataba de presupuesto de capital, el cual incluía un elemento impredecible (la demanda). Se mostró cómo una simulación básica podía ser llevada a cabo utilizando solamente la hoja de cálculo. La sección 11.4 fue una repetición de la sección 11.3, con la ventaja de que se pudo utilizar *software* complementario de simulación (Crystal Ball).

La sección 11.5 presentó un ejemplo que trataba de un control de inventarios, el cual también involucraba el elemento impredecible de la demanda. Todos estos modelos se utilizaron para ilustrar cómo se incorporan eventos aleatorios en un modelo de simulación. Los ejemplos mostraron que los resultados de una simulación no llevarían necesariamente a la misma decisión a la que se llegaría si se utilizaran los criterios analíticos de maximizar la utilidad esperada. Por su naturaleza misma, los resultados de una simulación con componentes aleatorios son aleatorios ellos también. Generalmente el uso de una gran cantidad de ensayos acercará la utilidad promedio simulada a la utilidad esperada teórica. Los ejemplos también demostraron cómo se pueden producir diferentes medidas de desempeño y, aún más importante, cómo una simulación con múltiples ensayos proporciona una indicación de la variabilidad de una decisión o política dada.

La sección 11.6 regresó al modelo de inventarios analizado en la sección 11.5 para mostrar cómo se puede modelar una distribución de la demanda mucho más realista (es decir, normal). También se explicó el tema de la reducción de la varianza.

La sección 11.7 dirigió la atención al sector de servicios de la economía, con un ejemplo sobre la industria de las aerolíneas. El ejemplo buscaba determinar el nivel de sobreboletaje óptimo para una aerolínea muy exitosa, Midwest Express. Se presentó una nueva distribución de la probabilidad discreta (binomial).

La sección 11.8 volvió al ejemplo de fabricación para explorar la cuestión de si el balanceo de la capacidad de producción en todas las estaciones de trabajo lleva necesariamente a un resultado óptimo. El ejemplo ilustró la importancia de diseñar una simulación de forma que se eliminen los efectos externos, como los asociados con las condiciones iniciales o finales.

La sección final estuvo dedicada al tema de la aplicación. El análisis adoptó un punto de vista administrativo general y consideró temas como el diseño de una simulación, la buena documentación y las dinámicas de grupo.

Términos clave

Distribución continua uniforme. Una distribución de probabilidad que asigna igual posibilidad a cada miembro de un intervalo de números reales. (Véase el apéndice A para conocer la forma matemática de esta función.)

Distribución de la probabilidad. Una manera de especificar la posibilidad de una cantidad incierta.

Distribución de Poisson. Distribución de probabilidad utilizada a menudo para describir el número de llegadas a un sistema de cola de espera durante un intervalo de tiempo específico. (Véase el apéndice A para conocer la forma matemática de esta función.)

Distribución discreta uniforme. Una distribución de probabilidad que asigna igual probabilidad a cada miembro de un conjunto finito de enteros consecutivos.

Distribución exponencial. Una distribución de probabilidad utilizada típicamente para describir el tiempo entre llegadas en un sistema de fila o cola de espera. (Véase el apéndice A para conocer la forma matemática de esta función.)

Distribución normal. Distribución de probabilidad que es un buen modelo para muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza y en los negocios, como precios y demanda fluctuantes; también, la distribución de la media de la muestra calculada, para cualquier variable aleatoria. (Véase el apéndice A para conocer los detalles.)

Ensayo. Una sola ejecución de un modelo de simulación (es decir, una sola pasada por el simulador).

Función de distribución acumulada. La probabilidad de que una variable aleatoria adopte un valor menor que o igual a un número específico.

Método Monte Carlo. Un tipo de simulación que utiliza distribuciones de probabilidad para determinar cuándo ocurrirán eventos aleatorios.

Modelo de simulación. Una serie de operaciones lógicas y matemáticas que dan una medida de la efectividad de un conjunto particular de valores de los parámetros y decisiones.

Múltiples ensayos. Múltiples ejecuciones del simulador, utilizando en cada ensayo los mismos valores para decisiones y parámetros, pero con diferentes series de cantidades aleatorias y por lo tanto, diferentes resultados posibles para los eventos aleatorios.

Simulador. Dispositivo experimental que en aspectos importantes actúa como el sistema de interés.

Valor esperado. Concepto estadístico que se refiere al promedio, o media, de alguna cantidad aleatoria con una distribución de probabilidad específica.

Variabilidad. En la simulación, una referencia al monto de fluctuación en las medidas de desempeño cuando se llevan a cabo múltiples ensayos.

Variable aleatoria. Entidad que adoptará un valor numérico; la posibilidad de que asuma cualquier valor particular está dada por una función de probabilidad.

Ejercicios de repaso

Verdadero-Falso

1. **V F** El concepto básico de la simulación es construir un dispositivo experimental que "actuará como" el sistema de interés en aspectos importantes.
2. **V F** Un modelo determinista (uno sin elementos aleatorios) puede utilizarse como modelo de simulación.
3. **V F** Si una simulación incluye elementos aleatorios, dos ensayos exitosos con los mismos valores de parámetros producirán el mismo valor de la medida de desempeño.
4. **V F** En una simulación con elementos aleatorios es imposible garantizar que se haya seleccionado la decisión que maximice la utilidad esperada.
5. **V F** En problemas del mundo real, es práctica común comparar el costo esperado asociado con una decisión con el costo promedio para esa misma decisión producido por una simulación.
6. **V F** En una simulación con varios resultados aleatorios distintos, una correcta asociación de números y eventos aleatorios implica que cada cantidad aleatoria debe representar uno de los resultados.
7. **V F** Con pequeños tamaños de muestra, los resultados de una simulación pueden ser muy sensibles a las condiciones iniciales.
8. **V F** La simulación es a veces descrita como una técnica de último recurso, ya que generalmente no se utiliza sino hasta que los métodos analíticos han sido examinados y rechazados.
9. **V F** Un error común en el diseño de una simulación es utilizar hipótesis tan restrictivas que el modelo no puede capturar la esencia del problema.
10. **V F** La suma de factores adicionales en un modelo de simulación seguramente aumentará el costo de la simulación, pero también puede mejorar la calidad de la solución.

Opción múltiple

11. En un modelo de simulación típico, la entrada aportada por el administrador incluye
    - **a.** valores para los parámetros
    - **b.** valores para las variables de decisión
    - **c.** un valor para la medida de desempeño
    - **d.** todo lo anterior
    - **e.** tanto a como b
12. Una ventaja de la simulación, que no tiene la optimización, es que
    - **a.** a menudo se pueden examinar varias medidas de bondad
    - **b.** se puede obtener cierta apreciación de la variabilidad de los resultados de interés
    - **c.** se pueden estudiar escenarios más complejos
    - **d.** todo lo anterior
13. Considere un simulador con elementos aleatorios que llevan a cabo las utilidades como medida de efectividad. Para una asignación específica de valores de los parámetros
    - **a.** la utilidad promedio de una cantidad de ensayos se utiliza como estimación de la utilidad esperada asociada con la decisión.
    - **b.** la utilidad promedio estará siempre cada vez más cerca de la utilidad esperada conforme aumenta el número de ensayos
    - **c.** la utilidad promedio de 10 ensayos es siempre la misma
    - **d.** ninguna de las anteriores
14. Un número aleatorio se refiere a
    - **a.** una observación a partir de un conjunto de números (digamos, los números reales de 0 a 1), cada uno de los cuales es igualmente posible
    - **b.** una observación seleccionada al azar a partir de una distribución normal
    - **c.** una observación seleccionada al azar a partir de cualquier distribución dada por el administrador
    - **d.** ninguna de las anteriores
15. Se ha seleccionado el número aleatorio 0.63. La observación correspondiente, v, a partir de una distribución *normal* se determina por la relación:
    - **a.** v es "la probabilidad de que la cantidad normalmente distribuida sea ≤ 0.63"
    - **b.** v es la cantidad tal que "la probabilidad de que la cantidad normalmente distribuida sea $\leq v$" es igual a 0.63
    - **c.** v es el número tal que "la probabilidad de que la cantidad normalmente distribuida igual a v" es de 0.63.
    - **d.** nada de lo anterior
16. A menudo se utilizan resultados analíticos antes de un estudio de simulación
    - **a.** para identificar los "valores buenos" de los parámetros del sistema
    - **b.** para determinar la decisión óptima
    - **c.** para identificar los "valores buenos" de las variables de decisión
    - **d.** todo lo anterior
17. Para reducir el efecto de las condiciones iniciales en un estudio de simulación, uno puede
    - **a.** variar los valores de los parámetros del sistema
    - **b.** aumentar el número de decisiones alternativas estudiadas
    - **c.** aumentar el tamaño de la muestra e ignorar los datos de los primeros ensayos para cada conjunto de parámetros y decisiones
    - **d.** todo lo anterior
18. Si se puede utilizar tanto un modelo analítico como un modelo de simulación para estudiar un problema que incluye eventos aleatorios, el modelo analítico es a menudo el preferido porque
    - **a.** el simulador generalmente requiere de cierta cantidad de ejecuciones sólo para obtener una buena estimación del valor objetivo (como el costo esperado) para una decisión particular.
    - **b.** el modelo analítico puede producir una decisión óptima

c. el estudio de simulación puede requerir la evaluación de grandes cantidades de posibles decisiones
d. todo lo anterior

19. Los complejos modelos de simulación presentan los siguientes problemas:
a. los costos promedio no están bien definidos
b. es difícil crear los eventos aleatorios apropiados
c. puede ser costoso modelarlos
d. todo lo anterior

20. Al llevar a cabo una simulación es aconsejable
a. utilizar los resultados de decisiones anteriores para sugerir la siguiente decisión a tratar
b. utilizar el mismo número de ensayos para cada decisión
c. simular todas las posibles decisiones
d. nada de lo anterior

Respuestas

1.	V	**6.**	F	**11.**	e	**16.**	c
2.	V	**7.**	V	**12.**	d	**17.**	c
3.	F	**8.**	V	**13.**	a	**18.**	d
4.	V	**9.**	F	**14.**	a	**19.**	c
5.	F	**10.**	V	**15.**	b	**20.**	a

Problemas

En los siguientes problemas se le pedirá que lleve a cabo una cantidad de iteraciones. Recuerde que debido a la naturaleza de las cantidades aleatorias, sus respuestas pueden diferir ligeramente de las que se dan en el apéndice D.

11-1. Cite ejemplos del uso de la simulación (en sentido amplio) en la milicia.

11-2. Cite ejemplos del uso de la simulación (en sentido amplio) en los deportes profesionales.

•• **11-3.** Considere el siguiente modelo con formulación de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Max } 20A + 30C \\ &\text{sujeto a} \\ &\quad A \leq 70 \\ &\quad C \leq 50 \\ &A + 2C \leq 120 \\ &\quad A, C \geq 0 \end{aligned}$$

a. Elabore un diagrama de flujo que muestre cómo hacer una simulación de este problema.
b. Utilice el diagrama de flujo para evaluar las dos soluciones potenciales: ($A = 40$, $C = 30$) y ($A = 50$, $C = 30$).

11-4. En la siguiente tabla aparecen 50 semanas de ventas históricas de automóviles en Sally's Solar Car Co.

NÚMERO DE VENTAS/SEMANA	NÚMERO DE SEMANAS
0	2
1	5
2	12
3	16
4	8
5	7

a. ¿Qué distribución de probabilidad asignaría usted a la demanda, de forma que la probabilidad de una demanda particular en la simulación sea igual a la frecuencia relativa de esa demanda en las últimas 50 semanas?
b. Simule 120 semanas de demanda, si está utilizando un complemento de hoja de cálculo (simule 12 semanas si sólo está utilizando Excel).

•• **11-5.** Haga un comentario sobre el siguiente enunciado: el algoritmo símplex es una clase de simulación, dado que tiene que evaluar una cantidad de soluciones alternativas para llegar a encontrar la solución óptima.

•• **11-6.** Jerry Tate es responsable del mantenimiento de una flotilla de vehículos que utiliza la compañía eléctrica para la construcción y reparación de líneas de transmisión eléctrica. Jerry está especialmente preocupado por las proyecciones del costo que significa remplazar una grúa grande en estos vehículos. Le gustaría simular el número de fallas de la grúa en cada año, durante los 20 años siguientes. Jerry ha buscado los datos de los últimos 10 años y ha compilado la siguiente tabla:

NÚMERO DE FALLAS DE LA GRÚA	NÚMERO DE AÑOS
0	4
1	3
2	1
3	1
4	1

Decide hacer una simulación del periodo de 20 años. Lleve a cabo la simulación en lugar de Jerry. ¿Qué tan común es que el número total de fallas exceda de tres durante tres años consecutivos?

11-7. PROTRAC tiene un problema de administración de efectivo. En este modelo el saldo de efectivo de PROTRAC se determina todas las mañanas. El cambio en el saldo de efectivo de una mañana a la siguiente es una variable aleatoria. En particular, aumenta $10,000 con probabilidad de 0.3, decrece $10,000 con probabilidad de 0.2, y permanece igual con probabilidad de 0.5. ¿Qué distribución de probabilidad asignaría usted a estos eventos, a fin de reflejar precisamente la probabilidad correcta en una simulación?

•• **11-8.** Considere el siguiente modelo de lealtad a la marca. En este modelo las probabilidades se utilizan para describir el comportamiento de un cliente que compra cerveza. En el modelo están incorporadas tres cervezas en particular (A, B y C). El comportamiento del cliente está resumido en la tabla que acompaña a este problema. Por lo tanto, podemos ver en la primera fila que un cliente que compra la cerveza A en la semana 1 comprará la misma cerveza en la semana 2 con una probabilidad de 0.90, la cerveza B con probabilidad de 0.06 y la cerveza C con probabilidad de 0.04. Se hace una interpretación similar para las demás filas. Considere un cliente que compra la cerveza A en la semana 1. Suponga que usted desea simular este comportamiento para las siguientes 10 semanas. Sabemos que en la semana 2 él comprará las cervezas A, B y C con probabilidades de 0.90, 0.06 y 0.04. Si en la semana 2 él comprara la cerveza B, compraría las cervezas A, B y C con probabilidades de 0.12, 0.78 y 0.10, respectivamente. Defina los eventos aleatorios que necesitaría incluir en el modelo y el número apropiado de generadores de números aleatorios para estos eventos, de forma que reflejen con precisión las probabilidades correctas.

TABLA 11.4

	PROBABILIDAD DE COMPRAR EN LA SEMANA $i + 1$		
CERVEZA COMPRADA EN LA SEMANA *i*	A	B	C
A	0.90	0.06	0.04
B	0.12	0.78	0.10
C	0.09	0.07	0.84

11-9. En el modelo que sirvió como ejemplo en la sección 11.5, calculamos la utilidad real esperada y la utilidad simulada promedio usando 500 ensayos, suponiendo que ordenábamos 11 sartenes para *omelette*. Verifique las mismas dos medidas de desempeño (utilidad real esperada, utilidad simulada promedio usando 500 ensayos), bajo la suposición de ordenar 9 sartenes.

11-10. En el modelo que sirvió como ejemplo en la sección 11.5, calculamos la utilidad real esperada y la utilidad simulada promedio haciendo 500 ensayos, suponiendo que ordenábamos 11 sartenes para *omelette*. Verifique las mismas dos medidas de desempeño (utilidad real esperada, utilidad simulada promedio mediante 500 ensayos), bajo la suposición de ordenar 10 sartenes.

11-11. En el modelo que sirvió como ejemplo en la sección 11.5, calculamos la utilidad real esperada y la utilidad simulada promedio haciendo 500 ensayos, suponiendo que ordenábamos 11 sartenes para *omelette*. Verifique las mismas dos medidas de desempeño (utilidad real esperada, utilidad simulada promedio haciendo 500 ensayos), bajo la suposición de ordenar 10 sartenes.

•• **11-12.** La función de probabilidad de masa de la distribución de Poisson está dada por

$$p = (x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \ x = 0, 1, \ldots$$

Sea $\lambda = 2$, calcule la probabilidad que observe a x, para $x = 0, 1, \ldots, 5$.

•• **11-13.** Simule una muestra de 50 periodos para el modelo de sartén para *omelette* descrito en la sección 11.5 (haga 10 periodos si utiliza sólo Excel). Suponga que usted tiene 10 sartenes al principio de cada periodo. Desarrolle la distribución de probabilidad apropiada para la demanda proporcionada en la sección 11.5.

a. Calcule la utilidad promedio por periodo.

b. Registre el número de faltantes (cuente con que ocurre un faltante cuando la demanda > 10).

•• **11-14.** La demanda semanal de leche de las últimas 50 semanas en la tienda All-Ways-Open aparece en la siguiente tabla.

a. Asigne la distribución de probabilidad apropiada a la demanda, de manera que la probabilidad de una demanda particular en la simulación sea igual a la frecuencia relativa de esa demanda en las últimas 50 semanas.

b. La tienda ordena 42 cajas todas las semanas. ¿Cuál es el faltante promedio y el sobrante promedio en los inventarios de 100 semanas simuladas? (*Sugerencia:* simule 10 semanas si sólo está utilizando Excel.)

c. ¿Cuáles son los faltantes y los excedentes esperados de inventarios?

TABLA 11.5

VENTAS (CAJAS)	NÚMERO DE SEMANAS
40	4
41	10
42	12
43	9
44	8
45	7
Total	50

•• **11-15.** El número de trabajos de frenos de disco llevados a cabo por el departamento de servicio de Green Cab Company durante cada una de las últimas 30 semanas se muestra en la siguiente tabla.

a. Asigne la distribución de probabilidad apropiada al número de trabajos en frenos llevados a cabo, de tal forma que la probabilidad de un número particular de trabajos en la simulación sea igual a la frecuencia relativa de ese número de trabajos en las últimas 30 semanas.

b. Simule 100 semanas de demanda (10 semanas si utiliza sólo Excel). ¿Cuál es el número de trabajos de freno por semana promedio?

TABLA 11.6

NÚMERO DE TRABAJOS DE FRENOS	NÚMERO DE SEMANAS
5	3
6	8
7	9
8	6
9	4
Total	30

•• **11-16.** Actualmente STECO mantiene inventarios de láminas de acero inoxidable en dos ciudades cercanas, Los Gatos (L), y Alameda (A). La demanda semanal (en camiones) y las probabilidades para cada ciudad aparecen en la tabla que acompaña al problema. Suponga que las demandas son independientes.

TABLA 11.7

	PROBABILIDAD	
DEMANDA	L	A
1	0.2	
2	0.3	
3	0.3	0.1
4	0.1	0.1
5	0.1	0.3
6		0.3
7		0.2

Los Gatos comienza cada semana con cuatro camiones de inventario a la mano. Alameda comienza cada semana con seis camiones de inventario a la mano.

a. Simule 500 semanas de demanda en Los Gatos (20 semanas si está utilizando sólo Excel) y registre el número de faltantes.

b. Simule 500 semanas de demanda en Alameda (20 semanas si está utilizando únicamente Excel) y registre el número de faltantes.

Suponga que STECO centraliza su inventario de láminas de acero inoxidable y satisface toda la demanda de Los Gatos y Alameda desde un almacén nuevo (llamémoslo LA).

c. Si LA empezara cada semana con un inventario de 10 camiones, ¿esperaría usted que la cantidad almacenada aumentara, se redujera o permaneciera igual, en comparación con el periodo en que L y A operaban independientemente? ¿Por qué?

d. Utilice la misma secuencia aleatoria de demanda que utilizó en los incisos (a) y (b) para simular 500 semanas de operación de la nueva bodega, LA (haga 20 semanas si utiliza únicamente Excel). Registre la cantidad de sobrantes. ¿Coincide este resultado con su respuesta al inciso (c)?

•• **11-17.** El tiempo entre llegadas a la ventanilla para automóviles de Slippery Savings and Loan se muestra en la siguiente tabla. Todos los clientes de una sola fila son atendidos según su orden de llegada. Suponga que toma exactamente ocho minutos atender a cada cliente. También suponga que nadie está siendo atendido o que está esperando cuando llega el primer cliente. Simule la llegada de 800 clientes (80 si utiliza únicamente Excel), y registre la cantidad de clientes que tienen que esperar.

TABLA 11.8

TIEMPO ENTRE LLEGADAS (MIN)	PROBABILIDAD
5	0.25
10	0.50
15	0.25

•• **11-18.** El departamento de bomberos voluntarios de Homeburg hace una colecta anual de fondos de puerta en puerta. Existen 3,000 hogares en los cuales se hará la colecta. El departamento pide a los hogares que se le apoye (con un donativo de $10) o patrocine (con un donativo de $25). Un análisis de los datos de los años anteriores indica que

1. No hay nadie en casa en 15% de las casas visitadas. Si no hay nadie en casa, no se vuelve a visitar, y por lo tanto no se obtiene donativo. Cuando hay alguien en casa, 80% de las veces abre la puerta una mujer y 20% de las veces la abre un hombre.
2. De las mujeres, 40% contribuye; 70% como apoyos, y 30% como patrocinadores.
3. De los hombres, 70% contribuye; 25% como apoyos, 75% como patrocinadores..
   - **a.** ¿Cuál es el valor esperado del dinero que se recibe en la colecta anual?
   - **b.** Haga un diagrama de flujo para este proceso. El resultado debe ser la contribución que resulta de llamar a una casa.
   - **c.** Utilice el diagrama de flujo del inciso (b) para simular 200 visitas (20 visitas si utiliza sólo Excel), y registre la contribución total de esas 200 visitas. ¿Cuál es su estimación del rendimiento de la colecta anual con base en esta simulación?
   - **d.** Simule 1,000 visitas (100 visitas si utiliza sólo Excel) para responder a la misma pregunta que en el inciso (c).

••• **11-19.** Laura Lene posee un puesto de flores cerca del nuevo y hermoso Aeropuerto Internacional de Denver. Ella compra sus flores a un mayorista a $0.25 la flor y las vende a $0.50 cada una. Laura se pregunta cuál es la cantidad óptima de flores que debe ordenar o pedir cada día. Basándose en la observación de sus tres años de experiencia, ha encontrado que la demanda puede aproximarse a una distribución normal, con una media de 100 y una desviación estándar de 20. Cuando termina el día con más flores que clientes, ella puede vender las sobrantes a $0.05 la flor. Por otra parte, cuando tiene más clientes que flores, estima que incurre en una pérdida de crédito mercantil (o de la buena reputación del nombre), además de la utilidad de $0.25 perdida por la venta potencial. Laura estima que la pérdida del crédito mercantil le cuesta las próximas dos oportunidades de ventas (es decir, clientes insatisfechos que irán con la competencia las siguientes dos veces que quieran adquirir flores, pero después volverán con Laura).

a. Utilice un modelo de simulación de hoja de cálculo con 1,000 iteraciones (100 iteraciones si utiliza sólo Excel) para determinar la cantidad óptima de flores a pedir cada día. Utilice la función ENTERO de Excel para cambiar las variables aleatorias normales a un valor entero.

b. Elabore un intervalo de confianza de 95% para la utilidad esperada de la decisión de pedido óptima.

••• **11-20.** No deseando abandonar su adorada *alma mater*, usted ha tramado un plan para quedarse en los alrededores durante cinco años más: ha decidido entrar en la licitación para las concesiones de derechos de comida rápida en el estadio de futbol. Usted está seguro de que una oferta de $30,000 ganará la concesión, lo que le da el derecho a vender comidas durante los juegos de futbol en los siguientes cinco años. Estima que los costos de operación anuales serán de 40% de las ventas y las ventas anuales promediarán $50,000. Su tío Ned ha accedido a prestarle los $30,000 para asegurar su concesión. Usted le pagará $7,700 al final de cada año. Su nivel de impuestos es de 28%.

a. Utilice un modelo de hoja de cálculo para contestar la siguiente pregunta: ¿cuál es su utilidad anual después de impuestos? Suponga que los pagos anuales de $7,700 son deducibles de impuestos.

b. Usted se da cuenta de que las ventas probablemente variarán de un año a otro. Suponga que las ventas pueden variar en más o menos 40% sobre el promedio de $50,000. A usted le preocupa la utilidad mínima después de impuestos que pueda obtener en un año. Puede sobrevivir si es de al menos $7,000. Haga un modelo de las ventas anuales para los cinco años, con cinco variables aleatorias uniformes continuas. Con base en una muestra de 4,000 periodos de cinco años (400 periodos si utiliza sólo Excel), estime la probabilidad de que en cualquier periodo de cinco años la utilidad mínima después de impuestos de un año sea de por lo menos $7,000. ¿Entrará usted en la licitación?

••• **11-21.** Usted es el administrador de Tex Electronics y está planeando una promoción de un modelo descontinuado de TV de 27". La promoción durará 10 días, al final de los cuales todas las unidades que usted haya pedido pero que no haya vendido serán rematadas a otro distribuidor por $250 cada una. Usted debe pedir los televisores al fabricante, antes de saber cuál será la demanda durante la promoción. Su costo es de $350 por unidad y usted las venderá a $600. Estima que en 20% de los días usted venderá 2 unidades, 30% de los días venderá 1 unidad, y 50% de los días no venderá ninguna unidad.

a. ¿Cuál es la demanda esperada durante la promoción? ¿Debería usted necesariamente ordenar la demanda esperada?

b. Estime la cantidad óptima de TV a ordenar. Simule cantidades de pedido de 7, 8, 9, 10 y 11. En las 10 celdas que contengan la demanda diaria, utilice una distribución general discreta. Aparte una celda para que contenga la utilidad neta total de la promoción. Con base en 1,000 ensayos (100 ensayos si utiliza sólo Excel), ¿qué cantidad de pedido maximiza la utilidad neta promedio? ¿Cuál es la utilidad neta simulada promedio?

••• **11-22.** En el ejemplo de sobreboletaje de la aerolínea Midwest Express en la sección 11.7, se supuso que la demanda se materializaría para cualquier número de reservaciones que decidiera dejar disponibles Laura Sorensen. En este modelo, intentaremos hacerlo más realista, permitiendo que la demanda sea aleatoria de acuerdo con la siguiente distribución general discreta:

Demanda:	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145
Probabilidad:	0.03	0.05	0.08	0.12	0.18	0.20	0.12	0.10	0.08	0.05

Modifique el archivo MIDWSTRK.XLS en su disquete de datos para el estudiante para que acepte esta nueva hipótesis.

a. *A priori*, ¿esperaría usted que el nivel óptimo de sobreboletaje cambiara con esta nueva hipótesis?

b. ¿Cuál es el nuevo nivel de sobreboletaje óptimo? ¿Cuál es la utilidad esperada asociada con este nivel?

••• **11-23.** Les Izmore, el director de finanzas de Exxaco Oil, tiene un problema bastante difícil. Quiere entrar a la licitación para una franja costera en la costa norte de Alaska. Aunque el valor exacto de la franja es desconocido, los geólogos de Estados Unidos informan que pueden esperar que sea de $20 millones. Sin embargo, en sus estimaciones hay cierta incertidumbre, y la desviación estándar es de $3 millones. Suponga una distribución normal para el valor de la franja costera. Les sabe que su competidor, Texon, también hará una oferta por el atractivo sitio. Ambas empresas contratarán sus propios estudios individuales sobre el valor de la franja. Suponga que las estimaciones obtenidas de estos estudios tendrán los errores de medición normales, con una media de $0 y una desviación estándar de $2 millones. Modifique ya sea el archivo EXXACOCB.XLS (si desea utilizar Crystal Ball) o el EXXACORK.XLS (si prefiere @Risk) en su disquete de datos para el estudiante, a fin de responder lo siguiente:

a. ¿Cuántas iteraciones debería llevar a cabo Les para tener confianza en su respuesta?

b. ¿Cuánto deberá ofrecer Les a fin de maximizar la utilidad esperada de Exxaco? ¿Cuál es la utilidad esperada asociada con esta oferta?

Caso práctico CyberLab (A)

CyberLab fue un negocio nuevo en el campo de los robots de laboratorio. La compañía tenía una patente pendiente respecto al sistema CyberLab y había terminado la construcción de una pequeña fábrica en New Milford, Connecticut. También tenía prototipos operacionales de todos sus productos, pero ahora necesitaba una infusión de capital para desarrollar una importante instalación para fábrica y obtener capital de trabajo para las operaciones aumentadas. CyberLab ha ofrecido 30% del capital de la empresa a Precision Instrument Corporation (PRICO) a cambio de $1 millón en capital y un convenio mediante el cual PRICO vendería los productos CyberLab a través de su sistema de distribución internacional. PRICO era un fabricante importante de equipo para laboratorio. Algunos aspectos de la propuesta de CyberLab resultaron atractivos a James Campbell, presidente de PRICO, pero otros eran simplemente alarmantes. Se podría cosechar un nuevo y considerable mercado para su empresa, o la inversión de $1 millón de dólares se desvanecería, yéndose al caño. Campbell necesitaba comprender la viabilidad financiera de esta oportunidad para PRICO.

El inicio de CyberLab

CyberLab fue creado en 1985 como resultado de la frustración del doctor H. Meltzer, un bioquímico que trabajaba en el Instituto Psiquiátrico de Nueva York. El doctor Meltzer estaba preparando y probando enzimas humanas[1] en bioensayos.[2] La preparación de las muestras estaba tomando una cantidad de tiempo y gasto inaceptable; las enzimas humanas eran extremadamente caras, y la preparación manual de la prueba tendía a desperdiciarlas. Meltzer estaba buscando un sistema automatizado que pudiera preparar sus muestras, pero no existía ninguno con la precisión y confiabilidad que él necesitaba para sus experimentos. Cuando le explicó sus necesidades a su hijo, Walter Meltzer, éste pensó que se podría desarrollar un sistema y fue entonces que el proyecto arrancó.

Dos años después, el sistema de prototipos de CyberLab estaba terminado. Walter diseñó el prototipo con la idea de que, eventualmente, todos los componentes que requirieran maquinaria serían subcontratados, y las partes sobrantes podrián ser vendidas sin dificultad para las partes originales disponibles.

Robots de laboratorio

Francis Zenie, presidente de una importante empresa de desarrollo y fabricación de robots de laboratorio (Zymark Corporation), resumió la necesidad de automatización en los laboratorios: "Tenemos un avance de 10 o 20 años en mediciones de datos instrumentales y reducción de datos, pero nuestras entrevistas revelaron que la gente todavía prepara sus muestras como lo hacían en la Edad Media". El personal de Zymark pasó seis meses entrevistando al personal químico de laboratorios e industrias, preguntándoles: "¿cuál es su mayor problema?". La respuesta más común fue: la preparación de muestras antes del análisis. Zymark identificó correctamente la necesidad de una nueva tecnología, y creó el primer robot de laboratorio en 1982.

Los técnicos de laboratorio trabajaron en un ambiente de 2-D: *d*esganado y *d*emandante. La preparación de muestras de laboratorio era tediosa y requería de un alto nivel de concentración. Los humanos podrían trabajar tan velozmente como los robots, pero los robots podían mantener su paso de trabajo indefinidamente (sin contar el tiempo de mantenimiento y cuando estaban fuera de servicio) y no eran propensos a cometer errores tales como mezclar muestras. La ventaja de los robots residía en una mayor producción, más consistencia en las preparaciones y menores costos de mano de obra. La mayor parte de los robots operaba actualmente en el mercado bajo el principio de "estación de trabajo", con la estación diseñada en círculo en torno a un brazo colocado en el centro. El brazo movía la muestra a las estaciones para las diferentes preparaciones y muestras. El CyberLab 800, sin embargo, trabajaba en tres dimensiones y el brazo era controlado por una computadora del tipo PC de IBM. La programación incluía numerosos comandos para controlar cada movimiento. Un factor crítico era arrancar y parar el brazo en el mismo lugar. Permitía al brazo "encontrar" la muestra y moverla a la siguiente estación. La programación era esencialmente específica a cada aplicación y por lo tanto tomaba tiempo ponerla en práctica y verificarla.

Productos CyberLab

El sistema CyberLab 800 era un robot, aunque ciertamente no tenía la apariencia futurística de los más publicitados de su clase (véase el anexo 1). Dicho de manera sencilla, el CyberLab 800 era un dispositivo de pipeta o de transferencia de líquidos. Era capaz de llevar a cabo cualquier procedimiento repetitivo de preparación de líquidos en laboratorio que hasta entonces sólo se hacían a mano. El sistema consistía en tres componentes independientes y una computadora que ejecutaba las funciones. A continuación una breve descripción de cada componente:

CyberLab 800. Un dispositivo de transporte de pipetas que funcionaba en tres dimensiones, utilizando ocho sondas (o canales) independientes para transferir líquidos de o hacia los tubos de ensayo. Las sondas podían aceptar cuatro tamaños de puntas de pipeta desechables. (Su naturaleza desechable fue esencial para evitar la contaminación de las muestras.) El "800" tenía una mesa vibratoria que mezclaba las muestras dentro de los tubos. El sistema permitía también que fluyera agua fría o caliente alrededor de los tubos controlando la temperatura y por lo tanto las reacciones que ocurrían. El "800" era extremadamente preciso: operaba con un rango de precisión de 1% con volúmenes tan bajos como 10 microlitros (un microlitro es una millonésima parte de un litro).

CyberPump 300. Una bomba de jeringa de precisión con tres canales. Cada canal era simplemente una bomba de sifón de jeringa individual que entregaba el líquido al sistema de pipetas (CyberLab 800). Una instalación típica del sistema tenía dos de esas unidades "300".

CyberPump 200. Esta bomba también entregaba líquidos al sistema "800". Difería del "300" en que sólo tenía dos canales y era una bomba reversible. La ventaja principal de esta bomba comparada con la "300" era su capacidad para mover volúmenes

[1] Las enzimas son sustancias proteínicas complejas esenciales para la vida. Actúan como catalizadores para acelerar reacciones a temperaturas de la célula, sin sufrir ninguna destrucción en el proceso.

[2] Un bioensayo es la determinación de la fuerza efectiva relativa de una nueva sustancia, comparando su efecto en un organismo de prueba con el de una sustancia estándar.

Este caso debe utilizarse como base para un análisis de grupo, en vez de ilustrar un manejo eficiente o ineficiente de una situación administrativa. Revise extractos del caso Darden en la World Wide Web en: www.darden.virginia.edu/dems.

grandes a una velocidad mayor, sin pérdida de precisión. La característica reversible permitía que las muestras terminadas fueran extraídas de los tubos de ensayo y transferidas a otro equipo analítico para pruebas posteriores.

Para fines del verano de 1987, un sistema completo de CyberLab ya estaba en operación en el Instituto Psiquiátrico de Nueva York. El doctor Meltzer utilizó un subsidio federal para pagar el aparato. La máquina remplazó a dos técnicos de laboratorio dedicados a la preparación de muestras, ahorrando más de $70,000 el primer año. La revisión del doctor Meltzer respecto al desempeño del sistema demostró que se desperdiciaban menos enzimas y que las muestras preparadas eran más exactas.

Las noticias sobre el sistema se difundieron tanto dentro de la comunidad psiquiátrica como fuera, debido a la precisión del sistema, los ahorros asociados en material desperdiciado y su costo relativamente bajo. Para fines de julio de 1988, CyberLab había vendido cuatro unidades, y tenía clientes interesados en 25 más.

Competencia en la industria de los robots de laboratorio

Se estimaba que el sistema CyberLab se podía utilizar en 18,000 sitios en Estados Unidos. Además, Zymark había indicado que el mercado mundial alcanzaba de 30,000 a 50,000 unidades. Al final del segundo trimestre de 1988, sólo 3,050 de esos sitios potenciales tenían robots de laboratorio instalados. Zymark, el primero en entrar en la industria de los robots de laboratorio en 1982, había efectuado 42% de las instalaciones a la fecha. Otros dos competidores, Cetus y Micromedic, entraron en 1983 y cubrían 15 y 17% de las instalaciones, respectivamente. Cetus fue adquirido en 1986 por Perkin-Elmer, una gran corporación en el campo de los instrumentos analíticos, con ventas por $1,300 millones durante el ejercicio fiscal de 1987. Tres organizaciones más entraron en 1985, una de las cuales era Beckman Instruments, una subsidiaria de SmithKline Beckman, enorme corporación en la industria de los cuidados para la salud y las ciencias de la vida, con $4,300 millones en ventas durante el ejercicio de 1987. En 1987, Hewlett Packard y Dynatech entraron en el mercado. Vea el anexo 2 para una descripción más completa de los competidores más importantes.

A pesar de las otras ocho empresas fabricantes de robots de laboratorio, CyberLab creía que su presencia era necesaria porque ninguno de los participantes existentes ofrecía una máquina similar al sistema "800" a un costo semejante. Un sistema CyberLab costaba $32,470 y podía remplazar a un químico (con salario promedio de $41,800 al año en 1987). Por lo tanto, CyberLab tenía un periodo de recuperación de la inversión de 0.78 años.

Las negociaciones actuales

A fin de obtener el financiamiento necesario, Tom Friedlander, director general de CyberLab, había buscado la ayuda de Dean Witter y Salomon Brothers, sin suerte. Entonces contrató a un asesor de tiempo completo de una gran empresa de inversiones de capital para ayudarle a encontrar el dinero necesario. Este asesor había interesado a uno de los socios de la empresa (PRICO) con la propuesta de CyberLab. Los términos del trato posible estaban a punto de ser negociados entre PRICO y CyberLab. CyberLab había ofrecido 30% de su capital contable y los derechos de comercialización de los productos de CyberLab a través del sistema de distribución internacional de PRICO, a cambio de $1 millón en capital. Según este convenio, PRICO se convertiría en el único comprador y comercializador de los sistemas CyberLab. CyberLab fabricaría las máquinas y las vendería a un precio de transferencia prestablecido a PRICO. El anexo 3 presenta la hoja de cálculo (CYBER.XLS), desarrollada por CyberLab para evaluar este proyecto de sólo fabricación siguiendo este convenio. *Nota:* las hipótesis utilizadas para los anexos 3 y 4 aparecen en el anexo 5.

La propuesta actual requería que PRICO analizara el proyecto como un paquete que contuviera tanto la oportunidad de comercialización como la inversión de capital. Con base en los costos y márgenes relevantes, ¿valía $1,000,000 la comercialización y el obtener 30% del capital, o sería necesario un mayor porcentaje de la utilidad y/o un mayor margen (es decir, precio de transferencia menor) para hacer que el trato fuera atractivo?

En lo referente a la comercialización, PRICO daría su nombre establecido, su fuerza de ventas y publicidad, a cambio de un margen de 23%. La empresa había estado en el negocio de equipos de laboratorio por más de 50 años, y actualmente tenía 100 oficinas de ventas y de servicio en Estados Unidos y 220 oficinas similares en 60 países del mundo. Ciertamente le parecía razonable a Campbell que si la patente valía los $700,000 que él estaba pagando en efectivo y por adelantado a CyberLab, entonces la comercialización de su empresa valía por lo menos los $262,258 que había calculado como el valor neto actual (VNA) del convenio de comercialización (véase el anexo 4).

Dicho en dólares, PRICO en realidad incurriría en gastos iniciales de $150,000 en un seminario único y folletos nuevos para capacitar a los vendedores sobre el nuevo producto, así como gastos normales de $51,000 en el primer año y aproximadamente $60,000 por año del segundo y tercer años en publicidad. Los gastos adicionales incluían una comisión de $600 por cada sistema CyberLab vendido.

Otro gasto posible era la fuerza de ventas. Frank Adams, el vicepresidente de ventas, argumentaba que había un costo de "oportunidad" asociado con el uso de la fuerza de ventas. Él estimaba que el nuevo producto necesitaría aproximadamente de 1% del tiempo disponible de cada vendedor el primer año y de 1.5% para los años dos y tres. El gasto total en ventas del año anterior en PRICO era de $12 millones, lo que hacía el costo de oportunidad igual a $120,000 (.01 * 12,000,000). Debido a que el salario promedio de un vendedor era de $24,000 al año además de gastos por $36,000 al año, este "costo" era equivalente a dos vendedores de tiempo completo el primer año y tres en los años dos y tres.

PRICO no tendría realmente que contratar más personal de ventas, pero la adición de los productos CyberLab reduciría algo del tiempo de la fuerza de ventas ocupado en los productos existentes. En una llamada de ventas "típica" al director de un laboratorio, parte del tiempo se ocupaba en los pedidos de suministro rutinarios (probetas graduadas, cilindros, tubos de ensayo, pipetas, etc.), mientras que el tiempo restante se utilizaba en hablar acerca de productos nuevos y existentes que no eran los cotidianos. Campbell no creía que se provocara una merma significativa en las ventas de suministros estándar; el señor Adams y su personal estuvieron de acuerdo. Incluso, si existía alguna merma, probablemente se debería al aumento en las ventas de las puntas desechables para pipeta, que acompañarían seguramente las ventas del sistema CyberLab. Ya que PRICO no tendría que pagar dinero de su bolsillo, Vince Pauli, el analista financiero de nuevos proyectos en PRICO, había argumentado que el tiempo de la fuerza de ventas no debería estar incluido como un gasto en el análisis.

Los flujos de efectivo netos proyectados desde el punto de vista de PRICO, solamente para el aspecto de la comercialización, se muestran en el anexo 4. (*Nota*: este anexo incluye el costo de oportunidad correspondiente al tiempo de la fuerza de ventas en la línea de "gastos de ventas"). El rendimiento promedio de las ventas (con base en la utilidad antes de impuestos) de la industria de fabricación de instrumentos de laboratorio fue de 5.1%. Otras grandes corporaciones en esta industria tenían valores de rendimiento sobre el capital de 12 a 13%. En general, por la inversión de un millón de dólares, PRICO obtendría 30% del valor de CyberLab, o $342,327 (.3*$1,141,090) más el valor del convenio de comercialización, $262,258 para un valor neto de −$395,415.

Campbell pensó que tenía espacio de negociación, a pesar de que CyberLab había dejado claro que buscaba tanto el arreglo de comercialización como la inversión. Friedlander había llamado poco tiempo antes para decir que había recibido una oferta de una empresa privada, Sperling Equipment Co., para comprar una cantidad fija de unidades al año durante los primeros tres años y comercializarlos a cambio de 30% de descuento sobre el precio al menudeo. Esto planteaba la posibilidad de que PRICO pudiera desear hacerse cargo de la comercialización solamente, sobre una base de no exclusividad, sin la inversión de 30% en el capital, si CyberLab lo permitía.

Ésta era una pregunta interesante, pero la tarea inmediata era evaluar la oferta que estaba sobre la mesa. ¿Es atractiva la oferta de comercialización/inversión? Si vale la pena seguir adelante, ¿debe Campbell exigir un porcentaje mayor en el capital contable, a cambio de esa infusión de capital de $1 millón? ¿O simplemente deben retirarse de todo este asunto?

Preguntas

1. Utilizando la información de las cantidades inciertas dadas en el anexo que sigue, ¿cómo utilizaría la simulación para evaluar la oportunidad de comercialización/inversión, desde el punto de vista de PRICO?
2. Haga cinco ensayos evaluando la oportunidad.
3. Suponga que usted tuviera a su disposición los resultados de muchos ensayos (piense en cuántos necesita). ¿Cómo podría utilizar estos resultados para decidir si PRICO debe aprovechar esta oportunidad?
4. ¿Cómo podría utilizar la simulación para evaluar las contrapropuestas que quizás deseara presentar en la negociación con CyberLab?

Anexo de CyberLab

La siguiente información se proporciona para las mayores incertidumbres de cada variable, incluyendo el rango de valores posibles, junto con sus probabilidades apropiadas.

Crecimiento del mercado de robots de laboratorio

Los robots de laboratorio son eminentemente adecuados para cualquier área que requiera la preparación y prueba de muestras repetitivas a gran escala. Estas áreas incluyen industrias de la biotecnología como la farmacéutica, productos agrícolas, ingeniería genética y tecnología médica, además de las áreas de investigación y desarrollo de casi cualquier empresa. El mercado de la biotecnología esperaba ventas por $1,200 millones en 1988 y se esperaba que crecieran a $25 mil millones para el año 2000, lo que representaría un crecimiento anual del 28.8%. Predicasts pronosticaba que los gastos de investigación y desarrollo crecerían de 7 a 9% anualmente en el futuro cercano. El pronóstico era que las ventas de equipo de laboratorio y equipo analítico pasarían de $1,650 millones en 1985 a $2,350 millones en 1990 (una tasa de crecimiento anual de 7.3%). En los últimos dos años, las ventas han crecido en 5 y 9%. Los expertos creyeron que el crecimiento anual futuro tenía tantas posibilidades de estar entre 6 y 8% como de salirse del rango, pero tasas de crecimiento tan elevadas como 10% o tan bajas como 0 fueron posibles a lo largo de varios años. Las tasas generalmente se centraban alrededor de 7%. La retención de 20% de crédito fiscal por investigación y desarrollo garantizaba un continuo incentivo a la inversión.

Tamaño del mercado en el año actual

Con base en las ventas reales de 1987 de Zymark por $15 millones y el costo de su sistema de $50,000 a $70,000, Zymark vendió aproximadamente 250 unidades (15,000,000/$60,000) en 1987. Cuando CyberLab combinó esta estimación con una participación estimada de 42% en las instalaciones a la fecha realizada por Zymark, el resultado era una estimación del mercado anual de 595 unidades (250/0.42).

Se hizo una estimación del mercado en el lado alto utilizando el costo promedio de Zymark de $50,000 y suponiendo que su intervención en el mercado hubiera bajado de 42% de participación de las instalaciones totales de 1982 a 1987 a aproximadamente 35% en 1987. Este método dio un tamaño de mercado estimado de 809 unidades. De manera similar, una estimación del lado bajo señaló 510 unidades, utilizando un costo promedio de $70,000 y suponiendo que la participación en el mercado del año actual fuera igual a la participación acumulada.

Participación en el mercado de CyberLab

Walter Meltzer estimaba que la participación en el mercado durante el primer año podría ser tan baja como 0 si el producto faltara completamente, o tan elevada como 7%, con una media de 5%. En su mente, la participación en el mercado tenía tantas posibilidades de estar entre 4 y 6%, como fuera de este rango. En el segundo año y sucesivos, calculaba que CyberLab podría ganar 2.5% adicional del mercado sobre la participación durante el primer año.

Costo de los materiales y mano de obra

Meltzer, el inventor del sistema CyberLab, llevó un registro del tiempo que le tomó maquinar las 80 piezas que compró y después ensambló, así como el costo de comprar las otras 75 piezas que utilizó sin modificación al crear el sistema. Para estimar el costo total, sumó el costo de las 75 piezas adquiridas y su estimación del costo de mano de obra y de material para las 80 piezas maquinadas. La porción de mano de obra en el costo de las piezas trabajadas se calculó multiplicando el tiempo que le tomó, por el precio de mano de obra que cobraban los talleres de maquinado locales en Nueva Inglaterra ($100/hora). Su estimación conservadora del costo total resultó ser de $8,651.

Tanto el tiempo de maquinado como el costo en horas de mano de obra por piezas maquinadas podrían variar significativamente de las estimaciones anteriores. Por lo tanto, debido a que Meltzer fue muy conservador al asignar los costos generales, estimó que podrían variar en 5% por arriba de su estimación o en 9% por debajo.

Tasa de impuestos

Se utilizó una tasa de impuestos estimada de 35% (la tasa federal más alta era de 33%, la tasa más alta de Connecticut era de 7%), pero si a la empresa no le iba bien, la tasa de impuestos sería mucho menor. Otro factor que podría cambiar la tasa de impuestos era la naturaleza voluble tanto del Congreso como del presidente.

De todas estas variables que se habían estimado, las tres que se creía tendrían el mayor impacto en la última fila de resultados serían las siguientes:

La primera cantidad era la *participación en el mercado del primer año* de CyberLab. Podría ser tan baja como 0% y tan alta como 7%, siendo igualmente posible que fuera mayor o menor que 5%. Para una gráfica de la función de distribución acumulada, vea el anexo 6.

La siguiente cantidad fue el *costo de materiales y mano de obra directa para el sistema*. El costo total podría variar tanto como 9% por debajo de la predicción del ingeniero de $8,651 o 5% por encima de la predicción, y cualquier porcentaje dentro de este intervalo era posible. Se desarrolló la siguiente tabla de riesgo.

Varianza del costo (Porcentaje)	Probabilidad del valor (o incluso menor)
−9	0
−5	0.25
−2	0.50
0	0.75
+5	1.0

La última cantidad es el *crecimiento total del mercado*. Lo más rápido que podría crecer el mercado de los robots de laboratorio era 10% y lo más lento 0%. En su mente era igualmente posible que el crecimiento real fuera mayor o menor que 7%. También sentía que había 50% de probabilidades de que el crecimiento estuviera entre 6 y 8%; el otro 50% representaba tasas de crecimiento fuera de este rango.

ANEXO 1

ANEXO 2

Nombre de la empresa	Años en el negocio	# Inst. a la fecha	% Inst. a la fecha	Descripción general de la empresa	Ventas de la Empresa ($MM)	Ventas de la div.de Instr. de lab.($MM)	Descripción del producto competidor
Zymark	6	1000	42	Primero en el mercado, inversión privada	15	15	Lento, costo de 50 a 70K
Micromedic	5	400	17	Subsidiario de ICN Biomedicals, contrato con el gobierno, ventas internacionales	43	17	Sólo diluye y despacha, cuesta 5K
Perkin-Elmer/Cetus	5	350	15	Diseño y manufactura de equipo analítico de alta tecnología. Ventas inter.	1334	416	Sin computadora, brazo de robot, costo 50K
Tecan	3	300	13	Subsidiario de la corporación suiza; ha estado en Estados Unidos 4 años	?	??	Uso y garantía limitados, costo 20K
Beckman	2.5	175	7	Empresa de tecnología intensiva en los cuidados para la salud y ciencias de la vida, ventas internacionales	4329	693	Mueve las muestras a la sonda, costo 26K
Hamilton	3	100	4	Ha estado en el negocio de equipos de laboratorio por 30 años, ventas internacionales	25	25	Una sonda con 5 puntas de acero, costo 20K
HP/Genenchem	1	50	2	Prestigio establecido en computadoras, está comenzando en equipo científico	8090	405	Lento, de uso general, sólo trabaja con computadora HP, cuesta 40-55K
Dynatech	1	4	0.2	Planean iniciar a nivel nacional	305	13	Costo 6K

Fuentes: Informes anuales, S&POTC reports, *Million Dollar Directory*

ANEXO 3

C37 = =C33-C36

	A	B	C	D	E	F	G
26	ESTADO DE RESULTADOS PROFORMA DE CYBERLAB: SÓLO MANUFACTURA						
27							
28	ANO		1	2	3		
29	Precio de venta / Unidad		$25,000	$25,000	$25,000		
30	Material y Mano de Obra / Unidad		$8,651	$8,651	$8,651		
31	Unidades vendidas		29	47	51		
32							
33	Ingresos por ventas		$725,000	$1,175,000	$1,275,000		
34	Materias primas y mano de obra directa		250,879	406,597	441,201		
35	Gastos generales		138,000	196,430	207,641		
36	Costo de ventas		$388,879	$603,027	$648,842		
37	Margen bruto		$336,121	$571,973	$626,158		
38	Ventas, general y administración		$258,044	$343,047	$344,908		
39	Depreciación		16,000	9,600	5,760		
40	Utilidad antes de impuestos		$62,077	$219,326	$275,490		
41	Impuestos		$24,831	$87,730	$110,196		
42	Utilidad después de impuestos		$37,246	$131,596	$165,294		
43							
44	RENDIMIENTO SOBRE VENTAS		5.14%	11.20%	12.96%		
45	CAPITAL AL PRINCIPIO DEL AÑO		$1,000,000	$1,037,246	$1,168,842		
46							
47	RENDIMIENTO SOBRE EL CAPITAL		3.72%	12.69%	14.14%		
48							
49	*AÑO*		*1*	*2*	*3*	*VALOR FINAL*	
50	UTILIDAD DESPUES DE IMPTOS.		37,246	131,596	165,294		
51	SUMA DE DEPRECIACIÓN		16,000	9,600	5,760		
52	CAMBIO EN CAPITAL DE TRABAJO		(47,176)	(58,841)	(72,912)		
53	FLUJO DE EFECTIVO POR LA OPERACIÓN		6,070	82,355	98,142	1,635,700	
54							
55		VNA	$1,141,090				
56		TRI	16.99%				
57							

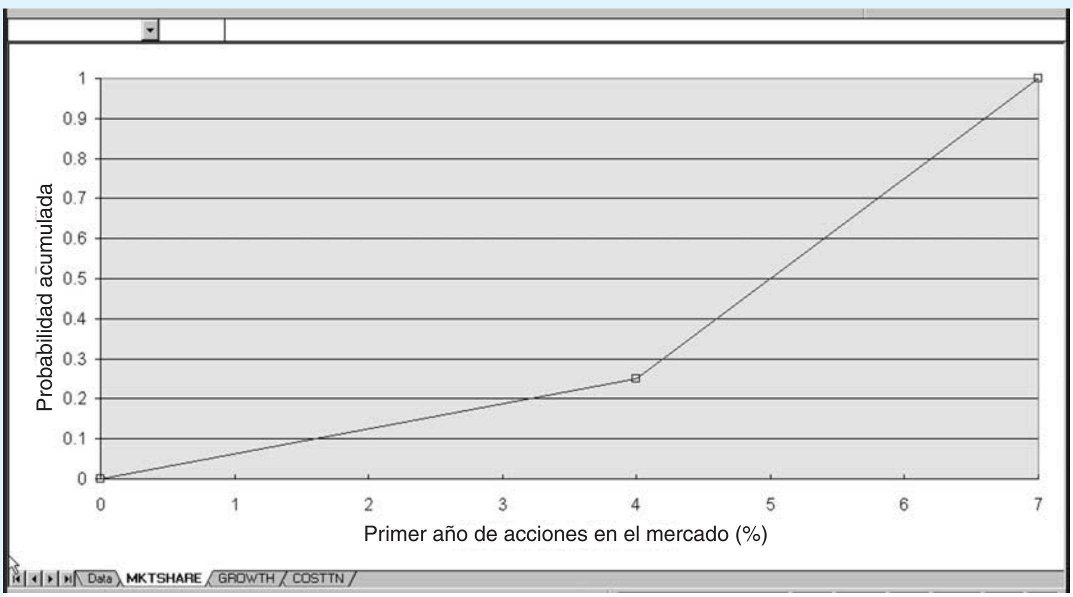
ANEXO 4

	H	I	J	K	L
15					
16			CYBERLAB (A)		
17					
18	ESTADO DE RESULTADOS PROFORMA DE PRICO: SÓLO MARKETING				
19					
20					
21	AÑO	1	2	3	
22	Precio de venta/ Unidad	$32,470	$32,470	$32,470	
23	Precio de transferencia/ Unidad	$25,000	$25,000	$25,000	
24	Margen/ Unidad	$7,470	$7,470	$7,470	
25	Margen de PRICO (%)	23.0%	23.0%	23.0%	
26	Unidades vendidas	29	47	51	
27					
28	Ingresos por ventas	$941,630	$1,526,090	$1,655,970	
29	Costo de ventas	725,000	1,175,000	1,275,000	
30	Margen bruto	$216,630	$351,090	$380,970	
31	Publicidad	$51,000	$60,000	$60,000	
32	Gastos de ventas	$137,400	$208,200	$210,600	
33	Total de ventas, general y administración	$188,400	$268,200	$270,600	
34	Utilidad antes de impuestos	$28,230	$82,890	$110,370	
35	Impuestos	$11,292	$33,156	$44,148	
36	Utilidad después de impuestos	$16,938	$49,734	$66,222	
37					
38	RENDIMIENTO SOBRE VENTAS	1.80%	3.26%	4.00%	
39	RENDIMIENTO SOBRE LA INVERSIÓN	11.29%	33.16%	44.15%	
40					
41	*AÑO*	*1*	*2*	*3*	*VALOR FINAL*
42	UTILIDAD DESPUÉS DE IMPUESTOS	16,938	49,734	66,222	
43	SUMA DE DEPRECIACIÓN	0	0	0	
44	FLUJO DE EFECTIVO	16,938	49,734	66,222	509,400
45					
46	VNA	$282,258			
47	TRI	51.07%			

ANEXO 5

H	I
HIPÓTESIS	
TAMAÑO TOTAL DEL MERCADO- AÑO 1	595
PENETRACIÓN DE CYBERLAB EN EL MERCADO-AÑO 1	5.00%
CRECIMIENTO TOTAL DEL MERCADO-AÑO 2+	7.00%
PENETRACIÓN DE CYBERLAB EN EL MERCADO AÑO 2+	7.50%
TASA DE DESCUENTO	13.00%
TARIFA FISCAL	40.00%
INVERSIÓN INICIAL	$150,000
MATERIAS PRIMAS Y MANO DE OBRA/UNIDAD	$8,651

ANEXO 6



El 19 de mayo de 1988 fue un hermoso día en Charlottesville, Virginia. Desde su ventana Tom Dingledine alcanzaba a ver algunas vacas pastando en la colina cercana. Estaba agradecido por el paisaje bucólico que había hecho posible que a él le fuera bien con los proyectos que manejaba, uno de los cuales ahora requería algo de concentración. Tom era el presidente de Sprigg Lane Natural Resources, subsidiaria de Sprigg Lane Investment Corporation (SLIC). La decisión que tenía que tomar era si debían invertir en la oportunidad de gas natural de Bailey Prospect.

La empresa

Sprigg Lane es una corporación de inversión privada fundada en 1961. Se había convertido en una corporación diversificada compuesta por dos grupos principales. El primero estaba dedicado a la fabricación de mobiliario de alta calidad para el hogar. La empresa principal era Virginia Metalcrafters, que producía regalos de latón trabajados a mano. Otros negocios del grupo incluían una empresa de iluminación exterior en Maine y una empresa de reproducción de muebles antiguos en Maryland. Con la creación de National Legal Research Group en 1970, otro grupo grande —The Research Group— se creó. Desde entonces otras cuatro empresas de investigación se han agregado a los campos de mercadeo de productos de consumo, programas de cómputo y análisis financiero de inversiones.

La formación más reciente del grupo era Sprigg Lane Development Corporation, que se ocupaba de la compra y desarrollo de bienes raíces, haciendo que el número total de subsidiarias de la empresa ascendiera a nueve. Las ventas de SLIC en 1987 se acercaron a los $30 millones y empleó a más de 525 personas.

Perforación y desarrollo de un pozo[1]

El equipo de perforación más común en operación en 1988 era el equipo rotativo, formado por cinco componentes principales: el cable y el barreno de perforar, el sistema de circulación de fluido, el sistema de guías, la planta de energía y el sistema para la prevención de explosiones. Para facilitar el proceso de perforación, generalmente se circulaba un fluido conocido como *lodo de perforación* (compuesto por agua y productos químicos especiales) alrededor del hoyo en perforación. En algunos casos, como en el Bailey Prospect, se utilizaba aire a manera de "lodo de perforación". El propósito principal del lodo de perforación es lubricar el barreno y traer a la superficie los desechos que de otra manera permanecerían en el hoyo y lo taparían.

Después de perforado el pozo, si se encontraba gas, el pozo tenía que ser terminado y preparado para la producción. Una tubería de metal de 8.627 pulgadas de diámetro, llamada carcaza, por lo general se insertaba a aproximadamente 400 metros dentro del terreno. Después, un tubo de 4 1/2 pulgadas de diámetro, llamado carcaza de producción, se insertaba en el hoyo ya recubierto hasta la zona de producción (aproximadamente 1,650 metros) y se tapaba con cemento. Después de que el cemento se endurecía, se perforaba la carcaza de producción para que el gas fluyera a la superficie a través de ella.

El costo de perforar un pozo "promedio" en Doddridge County, West Virginia, donde se ubicaba Bailey Prospect, era de $160,000. Sin embargo, había cierta incertidumbre en el costo de un pozo a otro, debido a factores tales como las diferentes profundidades de los pozos y los diferentes tipos de terreno que tenían que ser perforados. Los expertos en el área local dijeron que había una probabilidad de 95% de que el costo de cualquier pozo particular estuviera dentro de $5,400 del costo promedio, asumiendo una distribución normal.

Entrada de SLIC a la industria del gas natural

En enero de 1987, Tom, que había estado trabajando como director general de una empresa privada de exploración y desarrollo en petróleo y gas, conoció al presidente de SLIC y se unió a la compañía para encontrar algunas oportunidades de inversión. Tom se convenció de que la empresa podría disfrutar rendimientos potenciales mayores (30-40% después de impuestos) gracias a la explotación de recursos naturales, más que a otras oportunidades de inversión, incluyendo los bienes raíces, que estaban redituando 15-20%. Aunque la exploración de recursos naturales era claramente más riesgosa, Tom sentía que el riesgo se podía manejar perforando solamente en sitios que estuvieran rodeados por tres o cuatro lados por pozos ya existentes. A través de una investigación adicional, encontró otros dos factores que ayudaban a reducir el riesgo: primero, los contratos con los distribuidores de gasoductos se fijaban a los precios de venta del gas durante cuatro años, y segundo, los gastos de operación del pozo estaban cubiertos por contratos que permitían aumentos sólo cada cuatro años, con el aumento limitado a 15% por periodo de tres años. Tom pensaba que el aumento anual en el costo total del pozo sería equivalente a la mitad de la tasa de inflación.

El presidente de SLIC estuvo tan impresionado con la presentación de todo el tema de Tom que le ofreció el trabajo como presidente en una nueva división que se iba a llamar Sprigg Lane Natural Resources (SLNR). Tom aceptó la oferta, y en su primer año en el trabajo (1987), SLNR había perforado cuatro pozos. En el aspecto de las operaciones no había sido difícil perforar los cuatro pozos, pero ha sido un reto encontrar suficientes oportunidades de inversión de alta calidad. Tom consideraba los pozos como "buenos" si cumplían con cada uno de los siguientes criterios: (1) recuperación de la inversión inicial en 42 meses o menos, (2) obtener por lo menos 25% de la tasa interna de rendimiento (TIR) después de impuestos, y (3) conseguir por lo menos 15% de la TIR antes de impuestos.

En los primeros cinco meses de producción, uno de los pozos ya había recuperado 52% de su inversión inicial (muy por delante de su retribución objetivo a 28 meses). Los otros pozos también estaban desempeñándose bien, y todos ellos estaban por lo menos dentro del programa para cumplir con su meta de recuperación de la inversión. A pesar de que las cosas habían sido favorables para Tom hasta ahora, él sabía que todavía había presión sobre él para tomar buenas decisiones, debido a que SLNR estaba planeando perforar 20 pozos más en 1988.

Estrategia de inversión

SLNR actuaba como socio general administrativo en los proyectos de perforación de gas que formaba, lo que le dio la completa res-

[1] U.S. Department of Energy, *The Oil and Gas Drilling Industry*, 1981, pp. 13-16.

ponsabilidad de escoger los sitios y administrar el pozo si se encontraba gas. SLNR reunió información del estado de West Virginia y de otras empresas que estuvieran perforando en las cercanías de un pozo (si estaban de acuerdo en "intercambiar información"). Tom entonces preparaba un paquete de 10 pozos, que consideraba como buena inversión, con base en toda la información que hubiera reunido. La inversión total inicial para un paquete típico sería de aproximadamente $1.6 millones. SLNR retendría aproximadamente 25% de la propiedad y vendería el resto a otros socios generales.

Como socio general y administrador, SLNR era responsable de buscar a una empresa contratista, la cual se ocuparía de emplear una empresa que hiciera la perforación, y el geólogo de SLNR, Brad Thomas, determinaría si efectivamente había suficiente gas para que valiera la pena completar un pozo. Si la decisión era seguir adelante, la empresa contratista también quedaría a cargo de la operación diaria del pozo. SLNR había formado una sociedad de inversión con Excel Energy of Bridgeport, de West Virgina, por la cual estuvieron de acuerdo en que Excel fungiría como empresa contratista para todos aquellos pozos en los que SLNR actuara como socio general administrativo.

El nivel de producción del primer año varió significativamente de un pozo a otro. Tom encontró que la incertidumbre se podía describir con una distribución de probabilidad lognormal, con una media de 33 millones de pies cúbicos y una desviación estándar de 4.93 millones de pies cúbicos.

El Bailey Prospect

El anexo 1 es una copia de la hoja de cálculo (SPRIGG.XLS) que Tom había desarrollado para analizar un pozo, llamado Bailey Prospect, como miembro posible del paquete de 10 pozos que está reuniendo actualmente (los años 13-25 no se muestran). De acuerdo con lo que Tom pensaba sobre la realización de este pozo en particular, sabía que Bailey Prospect estaba rodeado por pozos productivos de la formación objetivo productora de gas. Era virtualmente seguro, por lo tanto, que SLNR llegaría a la formación y decidiría completar el pozo, pero había una probabilidad de 10% de que, o una falla de operación provocara una producción de cero, o que la formación de gas se encontrara agotada debido a los pozos que la rodeaban, dando como resultado esencialmente una producción de cero. En cualquiera de los casos, la pérdida antes de impuestos sería de $160,000. En el caso más probable, habría producción de gas y Tom podría averiguar entonces cuánto produciría el pozo durante el primer año y los subsiguientes. También sabría cuál es el contenido en BTU (observe el anexo 2 para una explicación de la abreviación de uso común y los términos en el negocio de la perforación de pozos) en el gas, lo que afectaría los ingresos totales generados por el pozo.

Ingresos y gastos. La hoja de cálculo era básicamente un estado de ingresos durante la vida del pozo. El precio por millón de pies cúbicos se calculó multiplicando el precio contratado por MMBTU por el contenido en BTU dividido entre 1,000. La producción en millones de pies cúbicos fue entonces estimada para el primer año y calculada para el año subsiguiente con base en valores de porcentaje de declinacion dados en las hipótesis. El ingreso bruto era solamente el producto del precio por millón de pies cúbicos multiplicado por los millones de pies cúbicos de gas producidos en un año particular. De los ingresos brutos se extraía un pago de 15.23% de pago de regalías al propietario de los derechos minerales, dejando un ingreso neto. Varios gastos fueron deducidos del ingreso neto para llegar a la utilidad antes de impuestos:

1. Los costos de operación mensual de $300 fueron pagados a Excel Energy, en adición a un monto determinado en el presupuesto de $3,000 por otros gastos de operación que podrían ocurrir sobre una base anual. Estos costos fueron incrementándose anualmente con base en el factor de inflación de gastos del pozo.
2. Los impuestos locales de 4.5% multiplicados por el ingreso bruto se pagaron al condado, y un impuesto de producción (lea el anexo 2) de 3.4% multiplicado por el ingreso bruto se pagó al estado de West Virginia.
3. El gasto de depreciación para el año 0 correspondía al costo intangible de perforación, es decir, 72.5% del costo total del pozo. El resto del costo inicial de perforación se depreció en línea recta durante siete años.

Para calcular la utilidad después de impuestos, se aplicaron las siguientes ecuaciones:

Utilidad después de impuestos = Utilidad antes de impuestos − Agotamiento del pozo − Impuesto sobre la renta estatal − Impuesto sobre la renta federal

Donde Agotamiento del pozo = mínimo 0.5 * (Utilidad antes de impuestos) *o* .15 * (Ingresos netos)

Impuesto sobre la renta estatal = Tasa de impuesto estatal * (Utilidad antes de impuestos − Agotamiento) − 1/2 * (Impuesto de producción)

Impuesto sobre la renta federal = Tasa de impuestos federal * (Utilidad antes de impuestos − Agotamiento − Impuesto sobre la renta estatal) − crédito según Sección 29

La sección 29 del código fiscal federal estadounidense había sido aprobada por el Congreso en 1978, a fin de estimular la perforación que buscara una clase particular de gas que fuera bastante difícil de extraer del suelo, es decir, que se encontraba en una roca llamada esquisto devónico, de la que estaba compuesta el Bailey Prospect. Esta roca consta de muchas pequeñas oquedades donde reside el gas hasta que se le extrae. Se concedió, en 1988, un crédito fiscal igual a $0.76 por decatermo. Esta tasa de crédito fiscal fue aumentada cada año según la inflación, pero su valor futuro estaba en manos del Congreso y por lo tanto estaba lejos de ser segura.

Resultados iniciales y consideraciones de inversión. Para encontrar el valor neto actual (VNA), Tom volvió a sumar la depreciación y el agotamiento a la utilidad después de impuestos, para llegar a los flujos de efectivo anuales. Estos flujos fueron entonces descontados a la tasa tope de la empresa de 15% para proyectos con este riesgo (observe el anexo 3 para una lista de las tasas de rendimiento para inversiones con varios vencimientos y grados de riesgo), para calcular el VNA hasta cualquier año en particular en la vida del pozo. Su análisis proforma indicó que el proyecto tenía un rendimiento interno de 41.1% y un valor neto actual de $110,263.

Tom se sentía bien con el proyecto Bailey Prospect, a pesar de que sabía que había hecho muchas suposiciones. Había utilizado 1155 BTU/FT^3 para estimar el contenido calorífico del gas, ya que era el valor esperado (medio), cuando en realidad sabía que podría ser tan bajo como 1055 o tan alto como 1250, siendo 1160 el valor más posible (moda). Él también suponía que la inflación, medida según el Producto Interno Bruto (PIB) deflator (una medida similar al Índice de Precios al Consumidor o IPC), promediaría 3.5% a lo largo de los 25 años de la vida del proyecto, pero pensaba que tendría que revisar un par de pronósticos y estudiar las tendencias históricas. Vea el anexo 4 para ambos pronósticos de los valores del PIB deflator (tanto los históricos del mismo PIB deflactor como los precios históricos del gas natural). La idea de Tom era utilizar el PIB deflator para pronosticar los precios del gas natural después de que expirara el contrato de cuatro años y así poder aumentar el valor del crédito fiscal sobre el gas natural en una base anual.

Más preguntas e incertidumbres. Cuando Tom mostró los resultados a Henry Ostberg, un socio potencial, Henry quedó impresionado ante el escenario "esperado", pero preguntó: "¿Cuál es el riesgo hacia abajo en una inversión como ésta?" Tom había hecho su tarea y enseñó los anexos 5 y 6 (de nuevo los años 13-25 no se muestran). El anexo 5 presentaba los resultados en caso de que no hubiera suficiente gas para desarrollar. El anexo 6 presentaba lo que pasaría si hubiera gas suficiente, pero otras cantidades inciertas se fijaron en una probabilidad en cien de que hubiera niveles peores. Henry se sintió algo incómodo por lo que vio pero dijo: "Hey, Tom, somos hombres de negocios. Estamos aquí para correr riesgos; así es como se hace dinero. Lo que realmente queremos saber es qué tan probable es un resultado como éste."

Tom se dio cuenta de que no había pensado lo suficiente sobre las probabilidades asociadas con los riesgos potenciales que un proyecto de este tipo involucraba. También puso su mente a trabajar pensando si había tomado en consideración todo aquello que, como había visto, pudiera cambiar considerablemente de un proyecto al siguiente. La única incertidumbre adicional que él generó fue la reducción en la producción anual, que podría variar muy significativamente para un pozo en particular. Él había utilizado lo que consideraba los valores esperados en este caso, pero ahora se daba cuenta de que tendría que multiplicar cada uno de ellos por alguna cantidad incierta, con un valor más probable de 1.0, un mínimo de 0.5, y un máximo de 1.75, para tomar en consideración el tipo de fluctuación que había visto.

Tom se preguntó cuál podría ser la manera más efectiva de incorporar las seis incertidumbres (costo total del pozo, si el pozo producía gas o no, producción de gas durante el primer año, contenido en BTU, tasa de reducción de la producción y la inflación promedio durante los próximos 25 años) en su análisis de inversión. Recordaba cómo hacer las famosas tablas "qué pasaría si" en Lotus en la escuela de negocios, pero nunca había oído hablar de una tabla de seis variables. Al revisar sus libros de métodos cuantitativos, vio un capítulo sobre la simulación Monte Carlo y leyó lo suficiente para convencerse de que este método se adecuaba perfectamente a su situación actual.

Cuando Tom le dijo a Henry sobre este nuevo método de evaluación que estaba considerando, su socio se rió y le dijo: "Vamos Tom, no puede ser tan difícil. Lo que estás diciendo suena como algo que le enseñarían a los licenciados en administración de empresas recién graduados. Tú y yo hemos estado haciendo este tipo de inversiones por años. ¿No podríamos simplemente calcularlo en el reverso de un sobre? Cuando Tom intentó hacer una estimación de la probabilidad de su escenario en el peor caso, el resultado fue 0.00000001% (¡no muy probable!). De ninguna manera él iba a perder más tiempo intentando calcular el VNA a mano con base en todas las incertidumbres, sin importar todo lo intuitivo que su amigo pensara que tenía que ser. En consecuencia, Tom pensó un poco más en cómo la simulación Monte Carlo ayudaría a tomar esta decisión.

En su método actual para evaluar proyectos, había estado usando los tres criterios mencionados anteriormente (<42 meses para recuperar la inversión de dinero inicial, >15% de TIR con una base de antes de impuestos y >25% de TIR después de impuestos). Podía ver que el cálculo de la TIR después de varios ensayos Monte Carlo no sería demasiado significativo, ¡especialmente debido a que había una probabilidad de 10% de que se gastarían $160,000 en una base antes de impuestos y no obtendrían rendimiento alguno! Sería imposible hallar la TIR para ese escenario en particular. Pensaba que sí podría calcular un VNA promedio después de varios ensayos e incluso averiguar cuántos años tendrían que transcurrir antes de que el VNA se volviera positivo. Mientras se sentaba en su silla para terminar de leer el capítulo, que le parecía vagamente familiar, alzó la vista brevemente a la verde colina y se preguntó por un momento qué tipo de recursos habría por debajo.

Preguntas

1. Con base en el escenario del caso básico y las dos posibilidades hacia abajo alternativas, ¿es esta inversión económicamente atractiva?
2. ¿Qué beneficio puede aportar la simulación Monte Carlo para que Tom pueda entender los beneficios económicos del Bailey Prospect?
3. Incorpore las incertidumbres a la hoja de cálculo utilizando @Risk o Crystal Ball. ¿Qué revelan los resultados Monte Carlo? ¿Cuál es la probabilidad de que el VNA sea mayor que cero? ¿Debe invertir Tom?

ANEXO 1 Hoja de cálculo del caso básico Bailey Prospect de Sprigg Lane (A)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	POZO	****HIPÓTESIS****		ENTORNO				****RESULTADOS****					
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-------------------------- -			-	-
3	COSTO TOTAL DEL POZO	$160,000	!	TASA DE IMPUESTOS FEDERAL		34.00%	!	RETRIBUCIÓN DEL CAPITAL (DESPUÉS DE IMPUESTOS):				23.26	MESES
4	COSTO INTANGIBLE (% DEL TOTAL)	72.50%	!	TASA DE IMPUESTOS ESTATAL		9.75%	!						
5			!	TASA DE IMPUESTOS POR PRODUCCIÓN		3.40%	!	TASA INTERNA DE RENDIMIENTO (Después de impuestos)				41.07%	
6	COSTOS MENSUALES DE OPERACIÓN	$300	!	TASA DE IMPUESTOS CONDAL		4.50%	!	TASA INTERNA DE RENDIMIENTO				16.65%	
7	DESEMBOLSO ANUAL POR ARRENDAMIENTO	$3,000	!	CRÉDITO FISCAL SEGÚN SECCIÓN 29 ($/MMBTU)		$0.7600	!						
8	FACTOR DE INFLACIÓN - GASTO DEL POZO	1.75%	!	% DE CALIFICACIÓN		100.00%	!	VALOR NETO ACTUAL @ 15%				$ 110,263	
9			!				!						
10	DATOS DE PRODUCCIÓN		!	PIB DEFLACTOR		3.50%	!	FLUJO DE EFECTIVO ACUMULADO DESPUÉS DE IMPUESTOS				$432,235	
11	SUFICIENTE (0=NO,1=SÍ)?	1	!				!						
12	MCF (1,000 pies cúbicos) DEL 1ER. AÑO	33,000	!	REGALÍAS		15.2344%	!						
13	DISMINUCIÓN DE LA PRODUCCIÓN DESPUÉS DE...		!				!						
14	AÑO 1 =	22.50%	!	PRECIOS DE GAS			!						
15	AÑO 2 =	17.50%	!				!						
16	AÑOS 3-5 =	12.50%	!	PRECIO ACTUAL ($/MMBTU)		$1.90	!						
17	AÑOS 6-14 =	10.00%	!	CONTENIDO EN BTU (BTU/FT3)		1,155	!						
18	AÑOS 15-24 =	5.00%	!	1ER. AÑO DE			!						
19			!	INCREMENTO EN PRECIO		5	!						
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	AÑO	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
22	INVERSIÓN INICIAL	(160,000)											
23	PRECIO POR MCF		2.19	2.19	2.19	2.19	2.27	2.35	2.43	2.52	2.61	2.70	2.79
24	PRODUCCIÓN (MCF)		33,000	25,575	21,099	18,462	16,154	14,135	12,721	11,449	10,304	9,274	8,347
25													
26	INGRESOS BRUTOS		$72,419	$56,124	$46,303	$40,515	$36,691	$33,228	$30,952	$28,832	$26,857	$25,017	$23,304
27	MENOS: REGALÍAS		11,033	8,550	7,054	6,172	5,590	5,062	4,715	4,392	4,092	3,811	3,550
28	INGRESOS NETOS		$61,386	$47,574	$39,249	$34,343	$31,101	$28,166	$26,237	$24,440	$22,766	$21,206	$19,753
29	GASTOS DE OPERACIÓN		6,600	6,716	6,833	6,953	7,074	7,198	7,324	7,452	7,583	7,715	7,850
30	IMPUESTOS ESTATALES Y CONDALES SOBRE LA PRODUCCIÓN		5,721	4,434	3,658	3,201	2,899	2,625	2,445	2,278	2,122	1,976	1,841
31	DEPRECIACIÓN	116,000	6,286	6,286	6,286	6,286	6,286	6,286	6,286				
32	UTILIDAD ANTES DEL IMPUESTO SOBRE LA RENTA	(116,000)	$42,779	$30,139	$22,472	$17,904	$14,843	$12,057	$10,182	$14,710	$13,061	$11,514	$10,062
33	AGOTAMIENTO		9,208	7,136	5,887	5,151	4,665	4,225	3,936	3,666	3,415	3,181	2,963
34	IMPUESTO SOBRE LA RENTA ESTATAL	(11,310)	2,042	1,289	830	555	369	199	83	587	484	387	296
35	IMPUESTO SOBRE LA RENTA FEDERAL	(35,595)	(18,247)	(15,853)	(14,484)	(13,821)	(12,937)	(12,141)	(11,631)	(9,231)	(8,796)	(8,393)	(8,022)
36	UTILIDAD DESPUÉS DEL IMPUESTO SOBRE LA RENTA	(69,095)	$49,777	$37,567	$30,238	$26,018	$22,746	$19,775	$17,795	$19,688	$17,958	$16,339	$14,825
37													
38	FLUJO DE EFECTIVO DESPUÉS DE IMPUESTOS	(113,095)	$65,270	$50,989	$42,411	$37,455	$33,697	$30,285	$28,016	$23,354	$21,373	$19,520	$17,788
39	FLUJO DE EFECTIVO DESPUÉS DE IMPUESTOS ACUMULADO	(113,095)	(47,825)	$3,164	$45,575	$83,030	$116,727	$147,013	$175,029	$198,383	$219,756	$239,276	$257,064
40	VNA HASTA EL AÑO N	(113,095)	(56,339)	(17,784)	$10,102	$31,518	$48,271	$61,364	$71,896	$79,531	$85,606	$90,432	$94,255

ANEXO 2 Explicación de los términos de uso común de Sprigg Lane (A)

BTU	British Thermal Unit—cantidad de calor requerida para aumentar en 1° Fahrenheit la temperatura de 1 libra de agua.
MMBTU	1 millón BTUs.
Decatermo	1 MMBTU.
FT^3	1 pie cúbico
mcf	1,000 pies cúbicos
Costos intangibles del pozo	Cualquier gasto por algo que no es posible utilizar de nuevo (por ejemplo, nómina al personal de perforación, costo del cemento). La compra de una tubería de metal, por otro lado, representaría un costo tangible.
Producción	Impuesto estatal sobre ventas en el gas o petróleo extraído y vendido.
Agotamiento	Generalmente, el concepto es similar a la depreciación. Compensa a la empresa por el dinero gastado para adquirir el derecho a perforar. Los principios generales de contabilidad reconocían solamente el costo de agotamiento, que amortizaba el costo con base en una unidad de producción (por ejemplo, # de millones de pies cúbicos producidos este año, divididos entre los millones de pies cúbicos totales en el subsuelo, multiplicado por el costo). El fisco, sin embargo, permitía a la compañía calcular el agotamiento usando el más favorable de dos métodos: uno de éstos es el costo del agotamiento, y el otro se conoce como porcentaje de agotamiento. Este último estaba en la hoja de cálculo y casi siempre era el más favorable.

ANEXO 3 Tasas de interés y rendimientos de Sprigg Lane (A)

		TESORERÍA							
		CERTIFICADOS		NOTAS Y BONOS				MOODY'S[a]	
		1-Año	3-Año	5-Año	7-Año	10-Año	30-Año	Aaa	Baa
1985		7.81	9.64	10.12	10.5	10.62	10.79	11.37	12.72
1986		6.08	7.06	7.30	7.54	7.68	7.78	9.02	10.39
1987		6.33	7.68	7.94	8.23	8.39	8.59	9.38	10.58
1988	Ene.	6.52	7.87	8.18	8.48	8.67	8.83	9.88	11.07
	Feb.	6.21	7.38	7.71	8.02	8.21	8.43	9.40	10.62
	Mar.	6.28	7.50	7.83	8.19	8.37	8.63	9.39	10.57
	Mayo 18	7.34	8.23	8.66	8.90	9.20	9.30	10.22	11.45

[a]Con base en los rendimientos al vencimiento en bonos corporativos seleccionados a largo plazo.
Fuentes: Federal Reserve Bulletin, junio de 1988, y *Wall Street Journal*, 19 de mayo de 1988.

ANEXO 4 Datos históricos y de pronóstico de Sprigg Lane (A)

PRECIOS HISTÓRICOS DEL GAS NATURAL

Año	Precio a la salida del pozo ($/MCF)	Año	Precio a la salida del pozo ($/MCF)
1987	1.78	1975	0.44
1986	1.94	1974	0.30
1985	2.51	1973	0.22
1984	2.66	1972	0.19
1983	2.59	1971	0.18
1982	2.46	1970	0.17
1981	1.98	1969	0.17
1980	1.59	1968	0.16
1979	1.18	1967	0.16
1978	0.91	1966	0.16
1977	0.79	1965	0.16
1976	0.58	1964	0.15

TODOS LOS AÑOS: MEDIA=$0.976 DESV EST=$0.922
ÚLTIMOS 8 AÑOS: MEDIA=$2.189 DESV EST=$0.412

Fuente: Basic Petroleum Data Book, enero de 1988, Sección VI, Tabla 2.

CAMBIO PORCENTUAL DEL PERIODO ANTERIOR EN PIB DEFLATOR

Año	% Cambio	Año	% Cambio
1987	3.0	1969	5.6
1986	2.6	1968	5.0
1985	3.2	1967	2.6
1984	3.7	1966	3.6
1983	3.9	1965	2.7
1982	6.4	1964	1.5
1981	9.7	1963	1.6
1980	9.0	1962	2.2
1979	8.9	1961	1.0
1978	7.3	1960	1.6
1977	6.7	1959	2.4
1976	6.4	1958	2.1
1975	9.8	1957	3.6
1974	9.1	1956	3.4
1973	6.5	1955	3.2
1972	4.7	1954	1.6
1971	5.7	1953	1.6
1970	5.5		

ÚLTIMOS 16 AÑOS: MEDIA ARITMÉTICA = 6.31%, DESV EST = 2.45%
ÚLTIMOS 25 AÑOS: MEDIA ARITMÉTICA = 5.39%, DESV EST = 2.51%
ÚLTIMOS 35 AÑOS: MEDIA ARITMÉTICA = 4.5%, DESV EST = 2.59%
PROMEDIO MÓVIL DE LOS 25 AÑOS: MEDIA = 4.91%, DESV EST = 0.46%

Fuente: Economic Report of the President, 1988, p. 253.

PRONÓSTICOS PARA EL CAMBIO PORCENTUAL DEL PIB DEFLATOR

	1988	1989	1990	AVG 1988–90
Fuentes de datos[a]	3.1	3.8	4.5	3.8
Wharton[b]	3.8	4.5	4.5	4.3
UCLA[c]	2.7	2.8	3.9	3.1

[a]*Data resources Inc.*, noviembre de 1987, p. 99.
[b]*Wharton Econometrics*, septiembre de 1987, p. 9.7-9.8.
[c]*UCLA National Business Forecast*, diciembre de 1987, p. 47.

ANEXO 5 Hoja de cálculo de SPrigg Lane (A) sin producción de gas

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	POZO	****HIPÓTESIS****		ENTORNO				****RESULTADOS****					
2	-	-	-	-	-	-	-	-	----------	----------	-	-	-
3	COSTO TOTAL DEL POZO	$160,000	!	TASA DE IMPUESTOS FEDERAL		0.34	!	RETRIBUCIÓN DEL CAPITAL (DESPUÉS DE IMPUESTOS)=				#¡DIV/0!	MESES !
4	COSTO INTANGIBLE (% DEL TOTAL)	72.50%	!	TASA DE IMPUESTOS ESTATAL		0.0975	!						!
5			!	TASA DE IMPUESTOS POR PRODUCCIÓN		0.034	!	TASA DE RENDIMIENTO INTERNO (Después de impuestos)				#¡NUM!	!
6	COSTOS MENSUALES DE OPERACIÓN	$300.00	!	TASA DE IMPUESTOS CONDAL		0.045	!	TASA DE RENDIMIENTO INTERNO				#¡NUM!	!
7	DESEMBOLSO ANUAL POR ARRENDAMIENTO	$3,000	!	CREDITO FISCAL SEGÚN SECCIÓN 29 ($/MMBTU)		0.76	!						!
8	FACTOR DE INFLACIÓN - GASTO DEL POZO	1.75%	!	% DE CALIFICACIÓN		1	!	VALOR NETO ACTUAL @ 15%				($95,304)	!
9			!				!						!
10	DATOS DE PRODUCCIÓN		!	PIB DEFLACTOR		0.035	!	FLUJO DE EFECTIVO ACUMULADO DESPUÉS DE IMPUESTOS				($95,304)	!
11	SUFICIENTE (0=NO,1=SÍ)?	0	!				!						!
12	MCF (1,000 PIES CÚBICOS) DEL 1ER. AÑO	33,000	!	REGALÍAS		0.15234	!						!
13	DISMINUCIÓN DE LA PRODUCCIÓN DESPUÉS DE. . .		!				!						!
14	AÑO 1 =	22.50%	!	PRECIOS DE GAS			!						!
15	AÑO 2 =	17.50%	!				!						!
16	AÑOS 3-5 =	12.50%	!	PRECIO ACTUAL ($/MMBTU)		1.9	!						!
17	AÑOS 6-14 =	10.00%	!	CONTENIDO EN BTU (BTU/FT3)		1155	!						!
18	AÑOS 15-24 =	5.00%	!	1ER. AÑO DE			!						!
19			!	INCREMENTO EN PRECIO		5	!						!
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	- !
21	AÑO	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
22	INVERSIÓN INICIAL	($160,000)											
23	PRECIO POR MCF		2.19	2.19	2.19	2.19	2.27	2.35	2.43	2.52	2.61	2.70	2.79
24	PRODUCCIÓN (MCF)		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25													
26	INGRESOS BRUTOS		$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0
27	MENOS: REGALÍAS		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	INGRESOS NETOS		$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0
29	GASTOS DE OPERACIÓN		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	IMPUESTOS ESTATALES Y CONDALES SOBRE LA PRODUCCIÓN		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	DEPRECIACIÓN	160,000	0	0	0	0	0	0	0				
32	UTILIDAD ANTES DEL IMPUESTO SOBRE LA RENTA	($160,000)	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0
33	AGOTAMIENTO		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	IMPUESTO SOBRE LA RENTA ESTATAL	($15,600)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	IMPUESTO SOBRE LA RENTA FEDERAL	($49,096)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	UTILIDAD DESPUÉS DEL IMPUESTO SOBRE LA RENTA	($95,304)	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0
37													
38	FLUJO DE EFECTIVO DESPUÉS DE IMPUESTOS	($95,304)	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0	$0
39	FLUJO DE EFECTIVO DESPUÉS DE IMPUESTOS ACUMULADO	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)
40	VNA HASTA EL AÑO N	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)	($95,304)

ANEXO 6 Hoja de cálculo de Sprigg Lane (A) con gas pero con todas las demás incertidumbres definidas con una probabilidad de 1 en 100 en el peor nivel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	POZO	****HIPÓTESIS****		ENTORNO				****RESULTADOS****					
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-------------------------	-		-	-
3	COSTO TOTAL DEL POZO	$166,237 !		TASA DE IMPUESTOS FEDERAL		34.00% !		RETRIBUCIÓN DEL CAPITAL (DESPUÉS DE IMPUESTOS):				65.09	MESES
4	COSTO INTANGIBLE (% DEL TOTAL)	72.50% !		TASA DE IMPUESTOS ESTATAL		9.75% !							
5		!		TASA DE IMPUESTOS POR PRODUCCIÓN		3.40% !		TASA INTERNA DE RENDIMIENTO (Después de impuestos)				#¡NUM!	
6	COSTOS MENSUALES DE OPERACIÓN	$300 !		TASA DE IMPUESTOS CONDAL		4.50% !		TASA INTERNA DE RENDIMIENTO				#¡DIV/0!	
7	DESEMBOLSO ANUAL POR ARRENDAMIENTO	$3,000 !		CREDITO FISCAL SEGÚN SECCIÓN 29 ($/MMBTU)		$0.7600 !							
8	FACTOR DE INFLACIÓN - GASTO DEL POZO	1.34% !		% DE CALIFICACIÓN		100.00% !		VALOR NETO ACTUAL @ 15%				($30,202)	
9		!				!							
10	DATOS DE PRODUCCIÓN	!		PIB DEFLACTOR		2.67% !		FLUJO DE EFECTIVO ACUMULADO DESPUÉS DE IMPUESTOS				($18,138)	
11	SUFICIENTE (0=NO, 1=SÍ)?	1 !				!							
12	MCF (1,000 pies cúbicos) DEL 1ER. AÑO	24,000 !		REGALÍAS		15.23% !							
13	DISMINUCIÓN DE LA PRODUCCIÓN DESPUÉS DE...	!				!							
14	AÑO 1:	37.20% !		PRECIOS DE GAS		!							
15	AÑO 2:	28.93% !				!							
16	AÑOS 3-5:	20.67% !		PRECIO ACTUAL ($/MMBTU)		$1.90 !							
17	AÑOS 6-14:	16.53% !		CONTENIDO EN BTU (BTU/FT3)		1,060 !							
18	AÑOS 15-24:	8.27% !		1ER. AÑO DE		!							
19		!		INCREMENTO EN PRECIO		5 !							
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	AÑO	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
22	INVERSIÓN INICIAL	($166,237)											
23	PRECIO POR MCF		2.01	2.01	2.01	2.01	2.07	2.12	2.18	2.24	2.3	2.36	2.42
24	PRODUCCIÓN (MCF)		24,000	15,072	10,712	8,498	6,741	5,348	4,464	3,726	3,110	2,596	2,167
25													
26	INGRESOS BRUTOS		$48,336	$30,355	$21,573	$17,114	$13,939	$11,353	$9,729	$8,338	$7,146	$6,124	$5,248
27	MENOS: REGALÍAS		7,364	4,624	3,287	2,607	2,124	1,730	1,482	1,270	1,089	933	799
28	INGRESOS NETOS		$40,972	$25,731	$18,287	$14,507	$11,816	$9,624	$8,247	$7,068	$6,057	$5,191	$4,448
29	GASTOS DE OPERACIÓN		6,600	6,688	6,778	6,868	6,960	7,053	7,147	7,243	7,340	7,438	7,537
30	IMPUESTOS ESTATALES Y CONDALES SOBRE LA PRODUCCIÓN		3,819	2,398	1,704	1,352	1,101	897	769	659	565	484	415
31	DEPRECIACIÓN	120,522	6,531	6,531	6,531	6,531	6,531	6,531	6,531				
32	UTILIDAD ANTES DEL IMPUESTO SOBRE LA RENTA	($120,522)	$24,023	$10,114	$3,274	($244)	($2,776)	($4,857)	($6,199)	($834)	($1,847)	($2,731)	($3,503)
33	AGOTAMIENTO		6,146	3,860	1,637	(122)	(1,388)	(2,429)	(3,100)	(417)	(924)	(1,365)	(1,752)
34	IMPUESTO SOBRE LA RENTA ESTATAL	(11,751)	921	94	(207)	(303)	(372)	(430)	(468)	(182)	(212)	(237)	(260)
35	IMPUESTO SOBRE LA RENTA FEDERAL	(36,982)	(13,569)	(10,372)	(8,469)	(7,347)	(6,380)	(5,594)	(5,107)	(3,689)	(3,335)	(3,035)	(2,779)
36	UTILIDAD DESPUÉS DEL IMPUESTO SOBRE LA RENTA	(71,789)	30,525	16,532	10,313	7,528	5,364	3,596	2,475	3,455	2,623	1,906	1,287
37													
38	FLUJO DE EFECTIVO DESPUÉS DE IMPUESTOS	($117,504)	$43,202	$26,922	$18,481	$13,937	$10,506	$7,698	$5,906	$3,038	$1,700	$541	($464)
39	FLUJO DE EFECTIVO DESPUÉS DE IMPUESTOS ACUMULADOS	($117,504)	($74,302)	($47,380)	($28,899)	($14,962)	($4,456)	$3,242	$9,148	$12,186	$13,886	$14,427	$13,962
40	VNA HASTA EL AÑO N	($117,504)	($79,937)	($59,580)	($47,428)	($39,460)	($34,236)	($30,908)	($28,688)	($27,695)	($27,212)	($27,078)	($27,178)

Referencias

Anthony Brigandi, Dennis Dargon, Michael Sheehan y Thomas Spencer, "AT&T's Call Processing Simulator (CAPS) Operational Design for Inbound Call Centers", en *Interfaces*, 24, núm. 1 (1994), pp. 6-28.

James Bookbinder y Terrence Kotwa, "Modeling an AGV Automobile Body-Framing System", en *Interfaces*, 17, núm. 6 (1987), pp. 41-50.

Samuel Davis, George Kleindorfer, Gary Kochenberger, Edward Reutzel y Emmit Brown, "Strategic Planning for Bank Operations with Multiple Check-Processing Locations", en *Interfaces*, 16, núm. 6 (1986), pp. 1-12.

Barry Smith, John Leimkuhler y Ross Darrow, "Yield Management at American Airlines", en *Interfaces*, 22, núm. 1 (1992), pp. 8-31.

CAPÍTULO

12

Colas de espera

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN — Reducción del tiempo que tarda un detenido en ser procesado en el Departamento de Policía de Nueva York

En 1988, los detenidos en la ciudad de Nueva York permanecían en custodia esperando su proceso o acusación durante un promedio de 44 horas, ocasionalmente durante más de 72 horas. Aún más, se les mantenía apiñados en locales ruidosos que les producían tensiones emocionales, eran insalubres y a menudo peligrosos para su integridad física. En marzo de 1990, el *New York Times* publicó un artículo en primera plana con el título "Atrapada en el terror de los penales de detención de Nueva York", acerca de una mujer que pasó 45 horas en detención antes de ser procesada en el Bronx. A los detenidos se les negaba una expedita presentación en la corte, y los grandes retrasos disminuían de manera importante la eficiencia del sistema de procuración de justicia. Ese mismo año, la Suprema Corte de Nueva York decretó que la ciudad intentaría realizar cada proceso en un plazo de 24 horas o se liberaría a la persona arrestada.

Bajo estas circunstancias, se inició el proyecto científico administrativo más ambicioso en la historia de la ciudad hasta la fecha, con el objetivo de reducir el tiempo de arresto para ser procesado. Básicamente había cuatro municipalidades (Manhattan, Bronx, Brooklyn y Queens), cada una con su manera muy peculiar de hacer las cosas. El proceso básico incluía los siguientes pasos, que componían un gran sistema de cola (también llamado línea o fila) de espera: arresto realizado por un oficial del Departamento; traslado a la delegación distrital donde el detenido es registrado, se le toman las huellas digitales y se le mantiene en ese lugar en tanto se completa el informe; traslado a un registro central donde las huellas digitales se mandan por fax a la capital del estado para su identificación y se obtiene un informe de antecedentes criminales; el oficial que hizo el arresto se ocupa de más papeleo, incluyendo la demanda con juramento ante el fiscal del distrito; por último, al detenido se le confina para que espere su proceso.

En 1988, sólo en estas cuatro zonas se realizaron más de 325,000 arrestos, de acuerdo con los cuales los detenidos esperaban ser procesados a veces durante muchas horas (es decir, sobre todo en el caso de los criminales). A diferencia de muchas otras jurisdicciones en Estados Unidos, en Nueva York predominan los delitos mayores, muchos de los cuales implican violencia o drogas ilícitas. Por lo tanto, un detenido podría encontrarse en la misma celda de detención junto con delincuentes reincidentes o acusados de tráfico y uso de drogas.

El equipo del proyecto realizó un amplio esfuerzo durante dos años. Si bien los grandes atrasos en tiempo eran el factor clave para estudiar, el alto costo asociado con el proceso actual fue un tema adicional del estudio. Uno de los factores que contribuían a este alto costo se debía a que los oficiales que efectuaban el arresto tardaban en promedio más de ocho horas desde el momento en que salían del centro de registro hasta que hacían juramento ante la demanda. ¡La mayor parte de este tiempo era tiempo extra, pues la tarea en sí sólo requería 30 minutos! ¡Los oficiales permanecían en una cola de espera durante siete horas y media!

Se hizo el modelo del proceso completo como una serie de etapas. Algunas de las cuales se modelaron como colas de espera de un solo servidor, otras como colas de espera de múltiples servidores, y algunas más fueron incluso más complejas. Se debía determinar la distribución estadística y los parámetros correspondientes para cada etapa. Con el modelo general se podría entonces examinar diferentes escenarios del tipo “qué pasaría si”, incluyendo combinaciones de carga de trabajo y políticas de procesamiento de los arrestos. El modelo generó varios tipos de resultados, incluyendo un tiempo promedio general de retrasos y tiempos promedio para completar las etapas individuales del proceso. El costo de cada uno de los escenarios podía ser generado también mediante un modelo de hoja de cálculo colateral. La ciudad de Nueva York pudo entonces elegir entre varias opciones, cada una con su propio costo y medida de desempeño.

En mayo de 1990, el alcalde David Dinkings dio a conocer los resultados de este proyecto en una conferencia de prensa, en la cual dio un fuerte apoyo a los cambios recomendados. El modelo le ahorró a la ciudad más de $10 millones por año sólo en costos por el tiempo extra de los oficiales de policía. La ciudad ha reducido el retraso promedio de 44 horas a aproximadamente 24 en toda la ciudad. Los detenidos han conseguido el derecho a juicios más rápidos y ya no permanecerán “almacenados” en condiciones horribles durante más tiempo del absolutamente necesario. La ciudad también ha reducido enormemente los costos de supervisión y transporte de detenidos en aproximadamente $11 millones al año. Una recomendación final fue la eliminación de áreas dentro de la corte asignadas a tales procesos. Con ello se obtuvieron ahorros adicionales por $9.5 millones para la ciudad y el estado (véase Larson *et al.*).

12.1 INTRODUCCIÓN

Los modelos de cola de espera están presentes en todas partes. Este hecho es obvio incluso para el observador más distraído. Los aviones “hacen colas de espera” en patrones de espera, hasta la disponibilidad de una pista para poder aterrizar, y a continuación hacen cola de nuevo para poder despegar. Las personas hacen cola para obtener boletos, para comprar comestibles y, si resulta que viven en Inglaterra, para prácticamente todo lo demás. Los trabajos hacen cola en espera de máquinas, los pedidos hacen cola para ser surtidos, y así sucesivamente. Como probablemente usted sabrá, *cola* (o *queue*) es el término británico para cualquier tipo de colas de espera. Al ingeniero danés A. K. Erlang se le atribuye haber sido el creador de la “teoría de colas” (o también llamada teoría de líneas o filas de espera), a la que llegó después de estudiar los conmutadores telefónicos en Copenhague, en la compañía telefónica danesa. Desarrolló muchos de los resultados de colas de espera que utilizamos actualmente. Uno de los mayores usos de la teoría de colas de espera en Estados Unidos es para analizar el flujo del tránsito o circulación de automóviles —se estudia cuántos carriles hay que tener, cómo regular los semáforos, etc.— a fin de maximizar el flujo del tráfico citadino.

Monte Jackson quizá no acepte la idea de que todo en la vida es una cola de espera, pero como director administrativo del Hospital St. Luke en Filadelfia, debe tratar con una diversidad de situaciones que pueden describirse como modelos de colas de espera. En resumen, un **modelo de cola de espera** es aquel en el que usted tiene una secuencia de elementos (tales como las personas) que llegan a una instalación en busca de servicio, como se muestra en la figura 12.1. Por ahora, a Monte le preocupan tres “modelos de colas de espera” en particular.

Modelo 1: Laboratorio de Hematología St. Luke St. Luke atiende a gran cantidad de personas como pacientes externos; es decir, hay muchos pacientes que vienen al hospital a ver a los doctores para su diagnóstico y tratamiento, pero que no ingresan en el hospital. En el hospital, que cuenta con 600 camas, los pacientes externos más los admitidos producen un gran flujo de pacientes nuevos todos los días. La mayor parte de los pacientes nuevos debe pasar por el laboratorio de hematología como parte del proceso de diagnóstico. Cada uno de esos pacientes debe ser examinado por un técnico. El sistema funciona así: después de ver a su doctor, el paciente llega al laboratorio y se registra con un empleado. Los pacientes son asignados, con base en su orden de aparición, a las salas de prueba conforme éstas quedan disponibles. El técnico asignado a una sala determinada lleva a cabo las pruebas ordenadas por el doctor. Cuando las pruebas terminan, el paciente continúa al siguiente paso del proceso (quizás rayos X), y el técnico atiende a un paciente nuevo.

Monte debe decidir cuántos técnicos contratar. Superficialmente, por lo menos, la relación es obvia. Más técnicos significan más gastos para el hospital, pero también un servicio más rápido para los pacientes.

FIGURA 12.1
Modelos generales de colas de espera

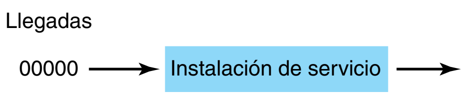


TABLA 12.1 Algunos modelos de colas de espera

PROBLEMA	LLEGADAS	INSTALACIÓN DE SERVICIO
1	Pacientes	Técnicos
2	Llamadas telefónicas	Conmutador
3	Equipo dañado	Reparadores

Modelo 2: Compra de líneas WATS Como parte del proceso de modelado, el St. Luke está diseñando un nuevo sistema de comunicaciones. Monte debe decidir cuántas líneas WATS debe comprar el hospital. WATS (siglas en inglés de servicio telefónico de área amplia) son las siglas de un servicio de larga distancia de cuota fija que ofrecen algunas compañías telefónicas. Cuando todas las líneas asignadas a WATS están en uso, la persona que marca hacia afuera obtendrá una señal de ocupado, lo que indica que la llamada no puede ser realizada. Monte sabe que cuando las personas levantan el teléfono, quieren hacer su llamada, sin tener que intentarlo varias veces. No está claro, sin embargo, cuántas colas debe tener para cumplir con este objetivo a un costo razonable.

Modelo 3: Empleo de personal de mantenimiento El St. Luke emplea técnicos en reparaciones para dar mantenimiento a 20 equipos electrónicos. El equipo incluye dispositivos de medición como la máquina de electrocardiogramas, pequeñas computadoras destinadas a tareas específicas, como la utilizada para el análisis de pulmones, y equipo como el escáner CAT. Si una pieza del equipo falla y todo el personal de reparaciones está ocupado, debe esperar para ser reparada. Monte debe decidir cuántos técnicos en reparaciones debe contratar. Debe equilibrar este costo contra el costo de tener equipo fuera de servicio.

Como lo indica la tabla 12.1, estos tres modelos se ajustan a la descripción general de un modelo de colas de espera. Monte resolverá estos modelos utilizando una combinación de modelos analíticos y de simulación. Sin embargo, antes de que alcancemos el nivel de complejidad requerido para manejar los modelos específicos de Monte, es necesario que pasemos un poco de tiempo con el modelo de cola de espera básico. Durante el proceso aprenderemos algo de terminología, y veremos el tipo de resultados analíticos disponibles.

12.2 EL MODELO BÁSICO

Considere la máquina Xerox localizada en la oficina de servicio secretarial en el cuarto piso. Suponga que los usuarios llegan a la máquina y forman una sola cola. Cada uno de los que llegan utilizan la máquina por turno para llevar a cabo una tarea específica. Estas tareas varían, desde obtener la copia de una carta de una página, hasta la producción de 100 copias de un informe de 25 páginas. Este sistema se conoce como cola de espera de un solo servidor (o de un solo **canal**). Las preguntas sobre éste o cualquier otro sistema de cola de espera se centran en cuatro cantidades:

1. El número de personas en el sistema: el número de personas que están siendo atendidas en el momento, así como aquellas que están esperando servicio.
2. La cantidad de personas en la cola de espera: las personas que están esperando servicio.
3. El tiempo de espera en el sistema: el intervalo entre el momento en que el individuo entra al sistema y aquel en que sale del mismo. Observe que este intervalo incluye el tiempo de servicio.
4. El tiempo de espera en la cola: el tiempo transcurrido desde que uno entra al sistema hasta que se inicia el servicio.

SUPOSICIONES DEL MODELO BÁSICO

1. ***Proceso de llegadas***. A cada llegada se le denominará un "trabajo". Debido a que el tiempo entre llegadas (el **tiempo interarribos**) no se conoce con certeza, necesitaremos especificar una distribución de probabilidades para éste. En el modelo básico se utiliza una distribución particular, llamada *distribución exponencial* (algunas veces se le conoce como la *distribución exponen-*

cial negativa). Esta distribución juega un papel central en muchos modelos de colas de espera. Da una representación razonable del proceso de llegadas en una diversidad de situaciones, y su supuesta propiedad de **carencia de memoria** hace posible obtener resultados analíticos. La distribución exponencial *no* es simétrica, un hecho que disgusta a quienes piensan que un "promedio" debe tener tantos valores por encima de la media como por debajo de ella. Por ejemplo, si los clientes llegan, en promedio, cada 5 minutos de acuerdo con una distribución exponencial, entonces aproximadamente 2/3 de ellos tendrán tiempos interarribos de menos de 5 minutos, y sólo aproximadamente 1/3 de ellos tendrá tiempos mayores que 5 minutos (pero algunos pueden ser muy largos y por lo tanto "sesgan" el promedio). La distribución exponencial sirve para describir muchos servicios (cajeros bancarios, empleados de correos). Aproximadamente 2/3 de los tiempos de servicio quedarán por debajo del tiempo medio (muchas transacciones cortas y rápidas) y 1/3 de los tiempos de servicio quedará por encima de la media (alguien con la cobranza de su negocio, una persona que envía un paquete fuera del país).

Las palabras *entrada de Poisson* también son utilizadas para describir el proceso de llegadas, cuando el tiempo entre llegadas (interarribos) tiene una distribución exponencial. Esto se debe a la relación entre la distribución exponencial y la distribución Poisson. En particular, si el tiempo interarribos tiene una distribución exponencial, el número de llegadas en un periodo específico (digamos, tres horas) tiene una distribución Poisson.

La distribución exponencial y su relación con la distribución Poisson se analiza con cierto detalle en la sección 12.11. En este momento sólo es necesario comprender que la distribución exponencial queda totalmente definida con un solo parámetro. Este parámetro, llamado λ, es la *tasa media de llegadas*; esto es, cuántos trabajos llegan (en promedio) durante un periodo específico. En un momento consideraremos un ejemplo en el cual $\lambda = 0.05$ trabajos por minuto. Esto implica que, *en promedio*, 5/100 de un trabajo llega cada minuto. Es probablemente más natural pensar en términos de un intervalo mayor. Un enunciado equivalente es que, *en promedio*, un trabajo llega cada 20 minutos. Utilizando términos más técnicos, decimos que *el tiempo medio interarribos* es de 20 minutos. El tiempo medio interarribos es el tiempo promedio entre dos llegadas. Por lo tanto, para la distribución exponencial

$$\text{tiempo promedio entre trabajos} = \text{tiempo medio interarribos} = \frac{1}{\lambda} \tag{12.1}$$

Por lo tanto, si $\lambda = 0.05$,

$$\text{tiempo medio interarribos} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.05} = 20$$

2. ***Proceso de servicio***. En el modelo básico, el tiempo que toma terminar un trabajo (el **tiempo de servicio**) también es tratado mediante una distribución exponencial. El parámetro para esta distribución exponencial se conoce como μ. Representa la *tasa media de servicio* en trabajos por minuto. En otras palabras, μT es el número de trabajos que serían atendidos (en promedio) durante un periodo de T minutos si la máquina estuviera ocupada durante ese tiempo. En el ejemplo siguiente asumiremos que $\mu = 0.10$. Esto implica que en promedio 0.10 del trabajo es efectuado cada minuto. Un enunciado equivalente es que en promedio se completa un trabajo cada 10 minutos. La *media*, o *promedio*, del *tiempo de servicio* (el tiempo promedio para completar un trabajo), es $1/\mu$. Cuando μ, la tasa media de servicio, es 0.10, el tiempo promedio de servicio es 10, dado que $1/\mu = 1/0.10 = 10$.

3. ***Tamaño de la cola de espera***. No hay límite en el número de trabajos que pueden estar en cola de espera. Se dice que la cola de espera es infinita.

4. ***Disciplina en las colas de espera***. Los trabajos son atendidos de acuerdo con un criterio de primer arribo, primer trabajo atendido; esto es, se atienden en el mismo orden en que llegan a la cola de espera.

5. ***Horizonte de tiempo***. La operación del sistema se considera como si ocurriera continuamente en un horizonte infinito.

6. ***Población fuente***. Hay una población infinita susceptible de hacer un arribo.

Considere estas hipótesis en el contexto del modelo de la fotocopiadora Xerox. Suponga que el tiempo promedio de llegadas entre trabajos es de 20 minutos. Como hemos visto, el hecho de que el tiempo interarribos tenga una distribución exponencial significa que $1/\lambda = 20$, y por lo tanto $\lambda = 0.05$, o bien que los trabajos llegan a una velocidad de 0.05 trabajos por minuto. De manera similar, si el tiempo promedio para hacer un trabajo es de 10 minutos, sabemos que $1/\mu = 10$, y por lo tanto $\mu = 0.10$, o que los trabajos se hacen a una velocidad de 0.10 trabajos por minuto, cuando la máquina está en operación.

TABLA 12.2 Características de operación para el modelo básico

CARACTERÍSTICA	SÍMBOLO	FÓRMULA
Utilización	—	$\frac{\lambda}{\mu}$
Número esperado en el sistema	L	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$
Número esperado en la cola de espera	L_q	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
Tiempo de espera promedio (Incluyendo tiempo de servicio)	W	$\frac{1}{\mu - \lambda}$
Tiempo esperado en la cola de espera	W_q	$\frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$
Probabilidad de que el sistema esté desocupado	P_0	$1 - \frac{\lambda}{\mu}$

CARACTERÍSTICAS DEL MODELO BÁSICO

Los valores de estos dos parámetros (junto con las hipótesis) son todo lo que se necesita para calcular varias **características de operación** importantes del modelo básico. Las fórmulas necesarias aparecen en la tabla 12.2. ¡ADVERTENCIA! *Las fórmulas de la tabla 12.2 sólo son válidas si* $\lambda < \mu$. Si esta condición no se cumple (es decir, si $\lambda \geq \mu$), el número de personas en la cola de espera crecerá sin límite.

Considere, por ejemplo, un caso específico, donde $\lambda = 0.25$ y $\mu = 0.10$. Recuerde que $1/\lambda$ es el tiempo promedio interarribos. Por lo tanto, dado que $1/\lambda = 1/0.25 = 4$, en promedio llega un trabajo cada 4 minutos. De manera similar, $1/\mu$ es el tiempo promedio que toma hacer un trabajo. Dado que $1/\mu = 1/0.10 = 10$, en promedio toma 10 minutos hacer un trabajo. Parece claro que, en este caso, conforme pase el tiempo la operación de servicio se atrasará cada vez más (la cola de espera crecerá).

Ahora regrese al modelo de la Xerox, en el cual $\lambda < \mu$ por lo que son válidas las fórmulas de la tabla 12.2. Las hojas de cálculo son ideales para obtener los resultados numéricos de estas fórmulas. Utilizaremos una hoja de cálculo de Excel (Q.XLS) originalmente desarrollada por el profesor David Ashley y que ya tiene incluidas estas fórmulas. Cuando abra por primera vez la hoja de cálculo verá la página de introducción, como se muestra en la figura 12.2 (observe que hay cuatro hojas de trabajo diferentes [MMs, MG1, finiteQ, finitePopulation] para utilizarse como queda indicado en las cejas en la parte inferior de la hoja de cálculo).

Al introducir los valores numéricos del modelo Xerox, $\lambda = 0.05$ y $\mu = 0.10$, en las celdas apropiadas (E2 y E3) de la hoja de trabajo apropiada ("MMs" en este ejemplo), nos dará los resultados que se presentan en la figura 12.3. También debemos indicarle que sólo existe un servidor (es decir, una máquina de copiado) y que nuestra unidad de tiempo es el minuto.

Resultados de estado estable Estas cantidades requieren cierta interpretación. *L*, por ejemplo, es el número esperado de personas en el sistema (aquellos que están siendo atendidos, más aquellos que están esperando) después de que la cola de espera ha alcanzado el *estado estable*. En este enunciado, **estado estable** significa que la probabilidad de que se observe cierta cantidad de personas (digamos, 2) en el sistema no depende de la hora a la cual se cuenten. Si se ha alcanzado el estado estable, la probabilidad de que haya dos personas utilizando y/o esperando la máquina Xerox debe ser la misma a las 2:30 p.m. que a las 4:00 p.m.

Las otras características presentadas en la figura 12.3 deben interpretarse de manera similar. Por lo tanto, en el estado estable, (1) el sistema estará vacío con una probabilidad de un medio (la celda F7 muestra que $P_0 = 0.5$); (2) en promedio hay 0.5 personas en la cola de espera (la celda F8 muestra que $L_q = 0.5$); (3) en promedio una llegada debe esperar 10 minutos antes de empezar a utilizar la máquina (la celda F10 muestra que $W_q = 10$); y (4) en promedio una llegada pasará 20

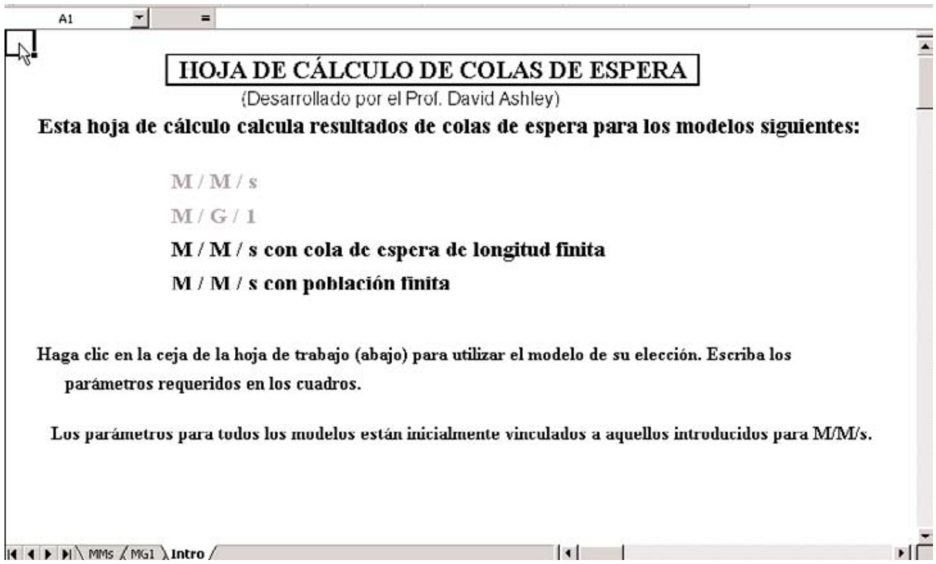


FIGURA 12.2

Página de introducción en el libro de trabajo Queuing

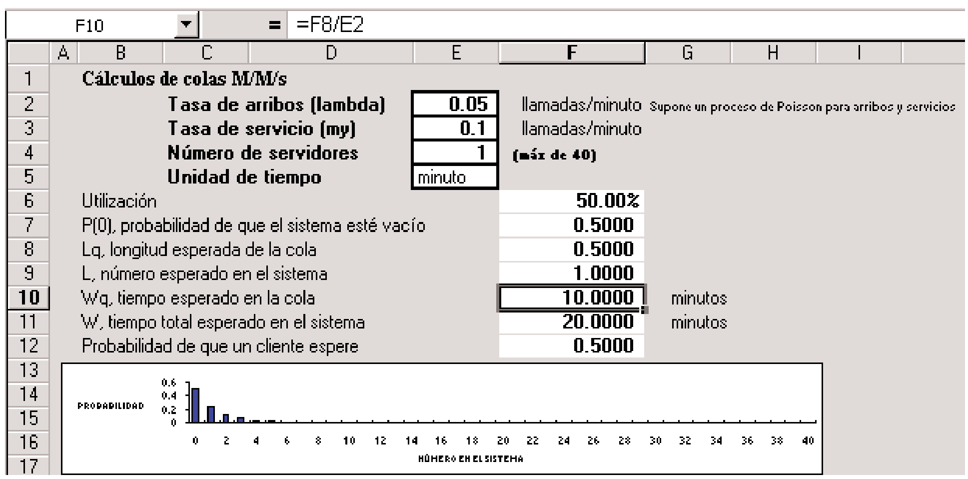


FIGURA 12.3

Evaluación de las características de operación del modelo básico

minutos en el sistema (la celda F11 muestra que $W = 20$). Recuerde que estos valores son promedios y, como tales, pueden tener las mismas características que la distribución exponencial (⅔ de las observaciones bajo la media, ⅓ por encima de ella). Por lo tanto, ⅔ de los clientes pasarán menos de 10 minutos en cola, en tanto que ⅓ pasará más de 10 minutos en ella.

Uso de los resultados Estos resultados son para el modelo básico y para los valores particulares de los parámetros ($\lambda = 0.05$ y $\mu = 0.10$). Proporcionan información que es útil cuando la administración analice esta instalación de servicio. Suponga, por ejemplo, que la administración hace los siguientes cálculos: dado que $\lambda = 0.05$, en promedio $\frac{5}{100}$ de trabajo llega cada minuto. Durante cada día de ocho horas hay $8 \times 60 = 480$ minutos. Por lo tanto, durante cada día hay en promedio un total de

$$(0.05)(480) = 24$$

llegadas. A partir de los cálculos en la figura 12.3 sabemos que en promedio cada persona pasa 20 minutos en el sistema ($W = 20$). Por lo tanto, un total de (24 llegadas al día)(20 minutos por llegada) = 480 minutos, u ocho horas, se utilizan en esta instalación. La administración muy bien podría pensar que esto es demasiado. Podría tomarse una serie de medidas:

1. Se podría comprar otra máquina que tuviera un menor tiempo medio de servicio.
2. Podría comprarse otra máquina y utilizar ambas para satisfacer la demanda. Esto cambiaría el sistema a una cola de espera de dos servidores.
3. Parte del personal podría ser enviado a una instalación de copiado diferente y que fuera menos ocupada. Esto cambiaría el proceso de llegadas.

La administración puede seleccionar alguna de estas alternativas, y quizás alguna otra opción. Pero en cualquier caso, la administración debe equilibrar el costo de dar el servicio con el costo de la espera. Los resultados en la figura 12.3 y resultados similares para otros sistemas formarían el núcleo central del análisis. Estas ideas serán desarrolladas con más detalle en el contexto de los modelos de Monte Jackson.

12.3 CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS DE COLAS DE ESPERA

Hay muchos modelos de colas de espera posibles. Por ejemplo, si al tiempo que existe entre los arribos en el modelo básico se le hubiera dado una distribución diferente (no la exponencial), habríamos tenido un modelo diferente, en el sentido de que las fórmulas anteriores para L, L_q, etcétera, ya no serían válidas. Para facilitar la comunicación entre aquellos que trabajan con modelos de cola de espera, D. G. Kendall propuso una clasificación o taxonomía con base en la siguiente notación:

$$A/B/s$$

donde

A = distribución de las llegadas

B = distribución del servicio

s = número de servidores

CÁPSULA DE APLICACIÓN — Empalme de tráfico: Una simulación de cola de espera ayuda a eliminar un costoso cuello de botella

La Westinghouse Hanford Company ubicada en Richland, Washington, es una instalación de trabajo protegida: todos los vehículos y pasajeros deben ser revisados en la caseta de guardia antes de permitir su entrada al complejo. Esta estación de control creaba enormes colas de tránsito durante los cambios de turno, cuando el volumen de vehículos que entraban era mayor. El resultado era un grave riesgo para la fuerza de trabajo y una pérdida importante de productividad para la empresa, ya que el personal era detenido en largas colas. Se pidió a un grupo interno de ingeniería que estudiara el problema y recomendara los cambios necesarios.

El grupo de estudio encontró que cada día de trabajo por la mañana llegaban a la planta en promedio siete autobuses y 283 automóviles y camionetas. Al aproximarse al portón de entrada, los vehículos formaban una cola para pasar por la estación de control, que normalmente era atendida por dos guardias durante los periodos pico. La cola se extendía más allá del espacio disponible de espera (que tenía capacidad para sólo 40 automóviles) y se desparramaba a la vía rápida adyacente, lo que causaba un gran problema de seguridad. Debido a la larga fila, los conductores de otros vehículos a menudo decidían seguir en la vía rápida hasta una segunda puerta. Esta opción significaba tiempo y distancia adicionales para los empleados, así como un tiempo de espera desconocido en la otra puerta.

El modelo de cola de espera analítico estándar predijo —correctamente— que, debido a que la tasa de servicio en la estación de control era igual a la tasa de llegada, la cola de espera continuaría creciendo sin límite mientras los automóviles siguieran llegando. Esto, sin embargo, sólo confirmaba lo que ya se había observado. Se desarrolló por lo tanto una simulación. El modelo fue ejecutado para reproducir la situación actual y después probar alternativas.

- El primer escenario alternativo aumentaba el número de guardias a tres, conservando un solo carril de tráfico. Este método redujo la longitud máxima de la cola de espera de 45.5 a 28, pero aumentaba los costos.
- El segundo escenario hacía dos colas de vehículos, con un guardia de seguridad asignado a cada cola. Cuando llegaba un autobús, era dirigido alrededor de las dos colas de vehículos y atendido inmediatamente por un guardia, mientras que el otro guardia se ocupaba temporalmente de las dos colas. La solución produjo una longitud máxima de una fila de 14 vehículos y un tiempo de espera de cerca de 12 minutos únicamente, comparado con los más de 30 minutos en la configuración existente.

El segundo escenario parecía ser una buena solución ya que no involucraba ningún costo adicional. Cuando fue puesto en práctica a manera de ensayo, la longitud de la cola de espera se redujo drásticamente. La sorpresa más grande fue que el número de personas que usaron esa puerta se elevó de 285 a 345. Obviamente, los vehículos que por lo general evitaban la puerta principal habían empezado a utilizarla de nuevo. Gracias a las colas de espera más cortas, el nuevo sistema manejaba con facilidad el incremento en la carga de tráfico (Landauer y Becker, 1989).

Se utilizan diferentes letras para designar ciertas distribuciones. Colocadas en la posición A o B, indican la distribución de llegadas o de servicio, respectivamente. Las reglas convencionales siguientes son de uso general:

M = distribución exponencial

D = número determinístico

G = cualquier distribución (general) de tiempos de servicio

GI = cualquier distribución (general) de tiempos de llegada

Podemos ver, por ejemplo, que el modelo de la Xerox es un modelo $M/M/1$; esto es, una cola de espera de un solo servidor, con tiempos exponenciales interarribos y de servicio.

12.4 ECUACIÓN DE FLUJO DE LITTLE Y RESULTADOS RELACIONADOS

Puede demostrarse que en un proceso de cola de espera de estado estable

$$L = \lambda W \tag{12.2}$$

Este resultado indica que L, el número esperado de personas en el sistema, iguala a λ, la tasa de llegadas, multiplicado por W, el tiempo de espera estimado. Para llevar a cabo una rápida revisión numérica, vea si los números resultantes del modelo de la Xerox (figura 12.3) satisfacen a (12.2). El cálculo se muestra en (12.3).

$$L = 1.0 = 0.05 \times 20 = \lambda W \tag{12.3}$$

Para comprender la base intuitiva de este resultado, considere el diagrama en la figura 12.4. En la escena 1 nuestro héroe llega y se pone en la cola de espera. En la escena 2 acaba de terminar con el servicio. Suponga que el sistema está en estado estable. Dado que en este caso el número promedio de personas en el sistema es independiente del tiempo, midamos esta cantidad cuando nuestro héroe termina de obtener el servicio. En este momento, el número de personas en el sistema es precisamente el número total de personas que arribaron después que él (es decir, individuos que llegaron durante su tiempo de espera). Por lo tanto, si W es su tiempo de espera y la gente llega a una velocidad de λ, se esperaría que L, el número promedio en el sistema, fuera igual a λW.

La ecuación (12.2) se conoce a menudo como ecuación de flujo de Little. Observe que se aplica a cualquier proceso de cola de espera de estado estable, y que, por lo tanto, es aplicable a una gran variedad de modelos. La prueba utilizada para establecer (12.2) también muestra que

$$L_q = \lambda W_q \tag{12.4}$$

Una revisión numérica para el modelo de la fotocopiadora muestra que

$$L_q = 0.5 = 0.05 \times 10 = \lambda W_q$$

lo que, de nuevo, coincide con el resultado de la figura 12.3.

Uno debe tener cuidado al aplicar este resultado en casos más complicados. Es esencial que λ represente la velocidad a la cual las llegadas se *unen* a la cola de espera. Esto puede ser diferente a la velocidad a la que la gente en realidad "llega". Considere, por ejemplo, una cola de espera con un límite superior en el número de elementos que pueden esperar en la cola (conocida

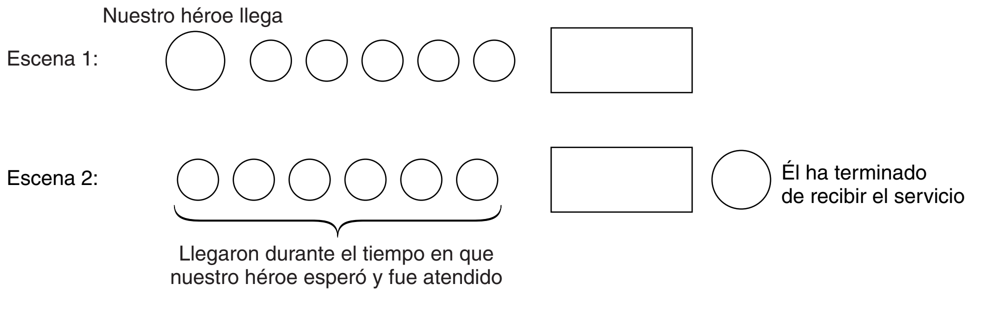


FIGURA 12.4
Ecuación de flujo de Little

como una **cola de espera finita**). Un sistema telefónico moderno que mantiene cierto número de llamadas (digamos, 10) en cola de espera hasta que quede disponible un representante del servicio es un buen ejemplo de dicha cola. En un sistema como éste, una persona que llame y encuentre el sistema lleno obtendrá simplemente una señal de ocupado; en otras palabras, es rechazado. Él o ella no se unen a la cola de espera. Esto se conoce como un **rechazo**. Por lo tanto, si $\lambda = 0.25$ (la tasa de llegadas) y la media de tiempo entre llamadas es de cuatro minutos, ésta *no* es la tasa a la cual la gente se *une* a la cola. Por lo tanto, la relación $L = 0.25W$ no será válida en este sistema. De manera similar, un cliente puede cansarse de estar en línea (o en espera) e irse sin ser atendido. A esto se le llama **rehusarse**. Una vez más, $L = 0.25W$ no será válido en este sistema.

Otro resultado general importante depende de la observación de que

tiempo de espera estimado = tiempo estimado en la cola de espera + tiempo esperado de servicio

Para el modelo básico ya hemos aprovechado el hecho de que

$$\text{tiempo esperado de servicio} = \frac{1}{\mu}$$

Poniendo el resultado en símbolos, obtenemos

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Para el modelo de la Xerox, tenemos que

$$W = 20 = 10 + \frac{1}{0.10} = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{12.5}$$

Esto no sólo es válido para el modelo básico, sino que el resultado general (ecuación [12.5]) es válido para cualquier modelo de cola de espera en que exista un estado estable.

Las ecuaciones (12.2), (12.4) y (12.5) hacen posible calcular las cuatro características de operación L, L_q, W y W_q una vez que una de ellas sea conocida. Para ilustrar este hecho, repitamos otra vez el modelo de la Xerox. Comenzaremos como la última vez, utilizando la segunda fórmula de la tabla 12.2 para calcular L:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0.05}{0.10 - 0.05} = 1$$

Ahora, en vez de utilizar las demás fórmulas de la tabla 12.2 que son específicas para el modelo básico, utilizaremos dos de los resultados generales que acabamos de presentar. Primero, a partir de la ecuación de flujo de Little (12.2) sabemos que

$$L = \lambda W$$

Por lo tanto, sabiendo que $L = 1$ y $\lambda = 0.05$, obtenemos $W = L/\lambda = 20$. Entonces, volviendo a (12.5), vemos que

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 20 - \frac{1}{0.10} = 10$$

Finalmente, (12.4) muestra que

$$L_q = \lambda W_q = 0.05 \times 10 = 0.5$$

Este método alternativo para obtener resultados numéricos será de lo más útil para analizar sistemas más complicados que el modelo básico.

12.5 LA COLA DE ESPERA *M/G*/1

A pesar de que en muchas situaciones la distribución exponencial describe con precisión el proceso de llegadas, puede que no se ajuste muy bien al proceso de servicio. Afortunadamente, existe una generalización del modelo básico, el cual permite que la distribución del tiempo de servicio sea arbitraria. Ni siquiera es necesario conocer la distribución del tiempo de servicio, sólo su media, $1/\mu$, y su varianza, σ^2. Las características de operación para el modelo generalizado aparecen en la tabla 12.3.

TABLA 12.3 Características de operación para el modelo generalizado

CARACTERÍSTICA	SÍMBOLO	FÓRMULA
Utilización	—	$\dfrac{\lambda}{\mu}$
Número esperado en el sistema	L	$L_q + \dfrac{\lambda}{\mu}$
Número esperado en la cola de espera	L_q	$\dfrac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1 - \lambda/\mu)}$
Tiempo de espera estimado (incluyendo tiempo de servicio)	W	$W_q + \dfrac{1}{\mu}$
Tiempo esperado en la cola de espera	W_q	$\dfrac{L_q}{\lambda}$
Probabilidad de que el sistema esté desocupado	P_0	$1 - \dfrac{\lambda}{\mu}$

Observe que hemos hecho uso de los resultados de la sección 12.4 para obtener todas las características de operación, a excepción de L_q. Para comprender la validez de estas fórmulas, suponga que la distribución del tiempo de servicio es exponencial. La varianza de una distribución exponencial es $(1/\mu)^2$ si la media es $1/\mu$. Por lo tanto,

$$L_q = \frac{\lambda^2(1/\mu)^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1 - \lambda/\mu)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

que es el mismo resultado que en el modelo básico.

Conforme σ^2 aumenta, tanto L como L_q, W y W_q se incrementan. Esto significa que la consistencia de un servidor puede ser tan importante como la velocidad del mismo. Suponga que usted debe contratar a una secretaria y tiene que seleccionar entre dos candidatas. La secretaria 1 es muy consistente: escribe a máquina cualquier documento en 15 minutos exactos. La secretaria 2 es un poco más rápida, con un promedio de 14 minutos por documento, pero sus tiempos varían de acuerdo con la distribución exponencial. La carga de trabajo promedio en la oficina es de tres documentos por hora, con tiempos interarribos que varían de acuerdo con la distribución exponencial. ¿Qué secretaria le dará un tiempo de ciclo de documentos más corto? Esto se puede resolver fácilmente mediante las hojas de trabajo “MG1” y “MMs” de SECRETRY.XLS, que se muestran en las figuras 12.5 y 12.6..

Ya que la secretaria 1 pasa a máquina cada documento en exactamente 15 minutos, σ^2 es igual a 0. Los valores de los otros parámetros son $\lambda = 3$ por hora (o 0.05 por minuto) y $\mu = 1/15$ por minuto. Estos valores son escritos en la sección de parámetros de entrada de la hoja de cálculo “MMs” (celdas E3:E6), lo que incorporará automáticamente los valores apropiados a la hoja de trabajo “MG1”. Los resultados se muestran en la figura 12.5.

También podemos comprobar esto manualmente utilizando las fórmulas de la tabla 12.3.

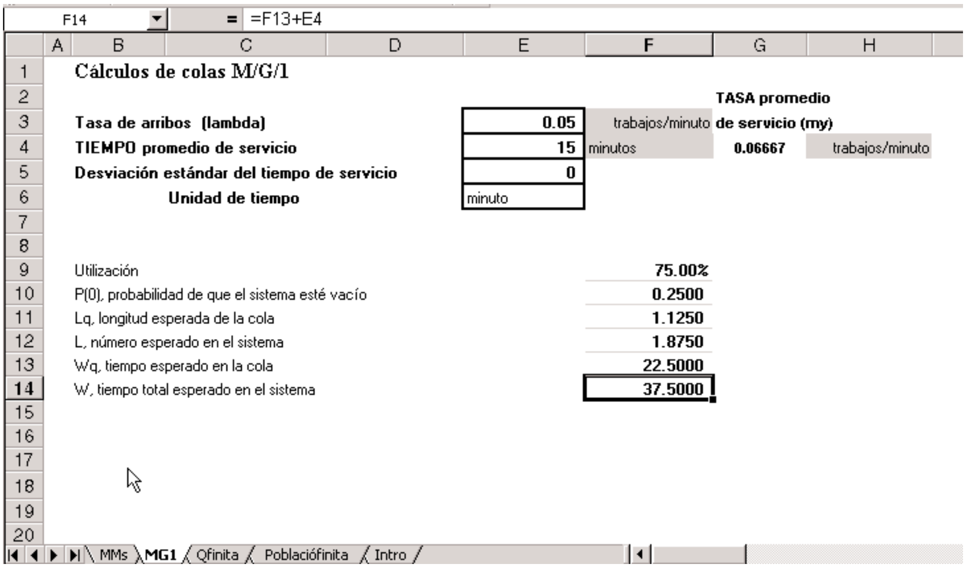
$$L_q = \frac{(0.05)^2(0) + [0.05/(1/15)]^2}{2[1 - 0.05/(1/15)]} = 9/8$$

$$W_q = (9/8)/0.05 = 45/2 = 22.5 \text{ minutos}$$

$$W = 45/2 + 15 = 37.5 \text{ minutos tiempo promedio de ciclo}$$

Una vez más, utilizando el modelo de hoja de cálculo para la secretaria 2, escribimos los parámetros como $\lambda = 0.05$, $\mu = 1/14$ por minuto y $\sigma = 14$ minutos. Los resultados aparecen en la figura 12.6.

También podríamos utilizar ya sea el modelo básico (tabla 12.2) o el modelo generalizado (tabla 12.3) para comprobar la respuesta de la hoja de cálculo para la secretaria 2. Utilizando el modelo generalizado, tenemos que

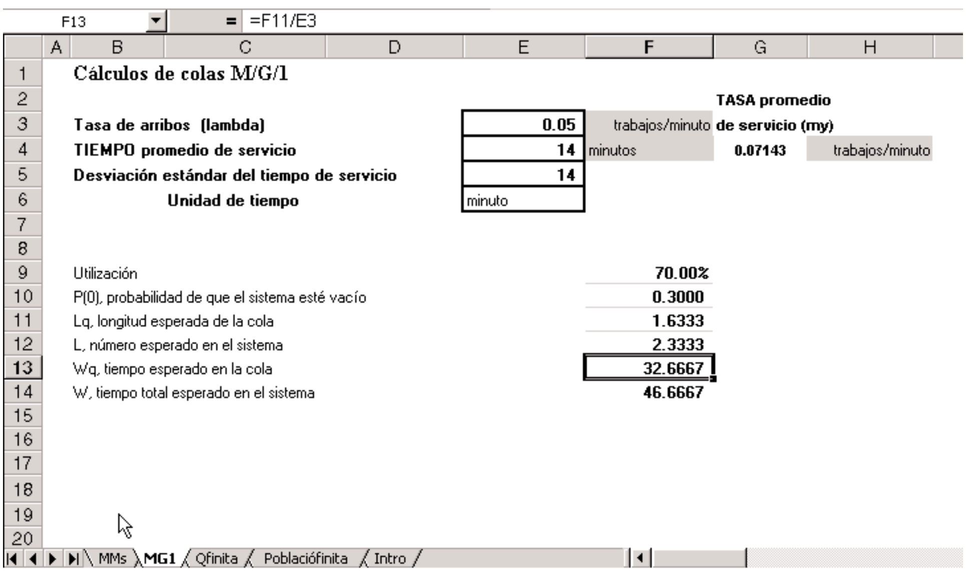


F14 = =F13+E4

	B	E	F	G	H
1	Cálculos de colas M/G/1				
2				TASA promedio	
3	Tasa de arribos (lambda)	0.05	trabajos/minuto	de servicio (my)	
4	TIEMPO promedio de servicio	15	minutos	0.06667	trabajos/minuto
5	Desviación estándar del tiempo de servicio	0			
6	Unidad de tiempo	minuto			
9	Utilización		75.00%		
10	P(0), probabilidad de que el sistema esté vacío		0.2500		
11	Lq, longitud esperada de la cola		1.1250		
12	L, número esperado en el sistema		1.8750		
13	Wq, tiempo esperado en la cola		22.5000		
14	W, tiempo total esperado en el sistema		37.5000		

MMs / MG1 / Qfinita / Poblacióﬁnita / Intro

FIGURA 12.5 Tiempo de ciclo de la secretaria 1



F13 = =F11/E3

	B	E	F	G	H
1	Cálculos de colas M/G/1				
2				TASA promedio	
3	Tasa de arribos (lambda)	0.05	trabajos/minuto	de servicio (my)	
4	TIEMPO promedio de servicio	14	minutos	0.07143	trabajos/minuto
5	Desviación estándar del tiempo de servicio	14			
6	Unidad de tiempo	minuto			
9	Utilización		70.00%		
10	P(0), probabilidad de que el sistema esté vacío		0.3000		
11	Lq, longitud esperada de la cola		1.6333		
12	L, número esperado en el sistema		2.3333		
13	Wq, tiempo esperado en la cola		32.6667		
14	W, tiempo total esperado en el sistema		46.6667		

MMs / MG1 / Qfinita / Poblacióﬁnita / Intro

FIGURA 12.6 Tiempo de ciclo de la secretaria 2

$$L_q = \frac{(0.05)^2(14)^2 + [0.05/(1/14)]^2}{2[1 - 0.05/(1/14)]} = 49/30 = 1.633 \text{ minutos}$$

$$W_q = (49/30)/0.05 = 98/3 = 32.67 \text{ minutos}$$

$$W = 98/3 + 14 = 46.67 \text{ minutos de tiempo promedio de ciclo}$$

A pesar de que la secretaria 2 es “más rápida”, sus tiempos promedio de ciclo son mayores, debido a la alta variabilidad en sus tiempos de servicio.

12.6 MODELO 1: UNA COLA DE ESPERA *M/M/s* (LABORATORIO DE HEMATOLOGÍA)

Recuerde que cuando comenzamos este capítulo, nuestra meta era resolver tres modelos particulares en el Hospital St. Luke con modelos de cola de espera. En las secciones precedentes hemos dado las bases de este proceso. Hemos presentado, definido e ilustrado las características de los sistemas que consideraremos (por ejemplo, número esperado en la cola de espera, tiempo

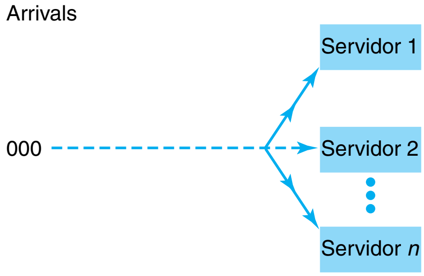


FIGURA 12.7

Cola de espera con múltiples servidores

de espera estimado, etc.), además de que hemos desarrollado una hoja de cálculo que puede llevar a cabo automáticamente dichas características. También hemos presentado resultados generales, como la ecuación de flujo de Little, para su uso en análisis posteriores. Ahora estamos en posibilidad de dirigir nuestra atención hacia los modelos de Monte Jackson.

El sistema descrito en el modelo 1 de la sección 12.1, que es el modelo de prueba de sangre, está ilustrado en la figura 12.7. Observe que cada paciente se forma en una cola de espera común y, al llegar al principio de la cola, entra en la primera sala de examen disponible. Este tipo de sistema no debe confundirse con un sistema en el cual se forma una cola de espera frente a cada servidor, como en la típica tienda de comestibles.

Suponga que el tiempo interarribos está dado por una distribución exponencial con el parámetro $\lambda = 0.20$ por minuto. Esto implica que en promedio llega un nuevo paciente cada cinco minutos, dado que

$$\text{tiempo medio interarribos} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.20} = 5$$

Asimismo, suponga que cada servidor es idéntico y cada tiempo de servicio está dado por una distribución exponencial, con el parámetro $\mu = 0.125$ por minuto. Esto implica que el tiempo medio de servicio es de ocho minutos, dado que

$$\text{tiempo medio de servicio para un solo servidor} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.125} = 8$$

Observe que si hubiera solamente un servidor, la cola de espera crecería sin límite, porque $\lambda > \mu$ ($0.20 > 0.125$). Sin embargo, para una cola de espera con múltiples servidores, existirá un estado estable, siempre y cuando $\lambda < s\mu$, donde s es el número de servidores. Por ejemplo, si tenemos dos servidores, lograremos un estado estable, porque $0.20 < 0.25$ (=2* 0.125).

Las ecuaciones clave Como antes, queremos encontrar los valores L, L_q, W y W_q. Sin embargo, debido a que ésta es una cola de espera de múltiples servidores (no una cola de espera de un solo servidor, como el modelo de la máquina Xerox), debemos utilizar fórmulas diferentes. Para evaluar estas fórmulas, es conveniente comenzar con la expresión para P_0, es decir para la probabilidad de que el sistema esté desocupado. Para este modelo,

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{1}{1-(\lambda/s\mu)}\right)} \tag{12.6}$$

y L_q, la cantidad esperada de personas en la cola de espera, se expresa como

$$L_q = P_0\left[\frac{(\lambda/\mu)^{s+1}}{(s-1)!(s-\lambda/\mu)^2}\right] \tag{12.7}$$

Las ecuaciones (12.6) y (12.7), así como los resultados generales en (12.2), (12.4) y (12.5), hacen posible calcular valores para W_q, W y L para cualquier valor especificado de los parámetros (μ y λ) y cualquier número de servidores (valor de s). Otra vez, estas nuevas fórmulas ya están integradas en la hoja de trabajo "MMs" de nuestra plantilla de cola de espera en nuestro libro de trabajo (HEMATLGY.XLS).

Cálculos de ejemplo Suponga, por ejemplo, que Monte decidiera emplear a dos técnicos. Entonces, ya que $s = 2$, $\lambda = 0.20$ y $\mu = 0.125$, podemos poner estos valores en la hoja de trabajo "MMs" de HEMATLGY.XLS y obtener los resultados que se muestran en la figura 12.8.

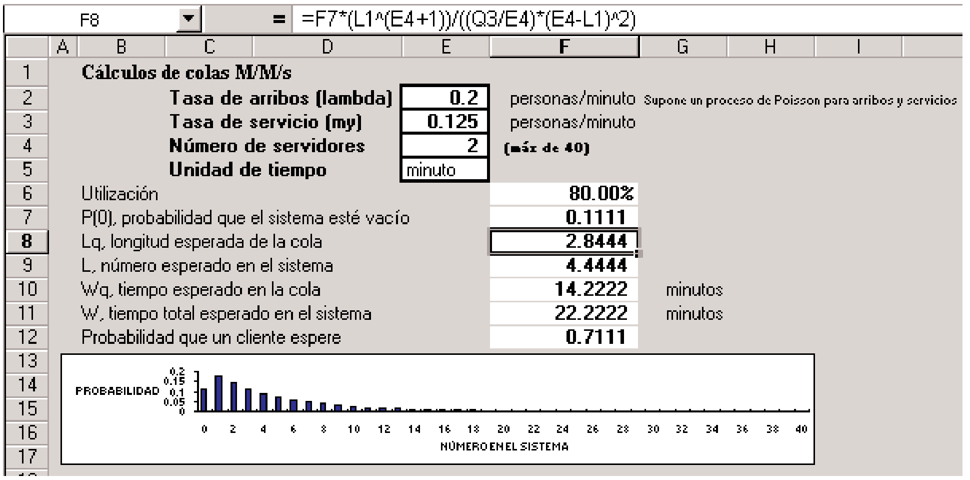


FIGURA 12.8

Resultados del laboratorio de hematología con 2 servidores

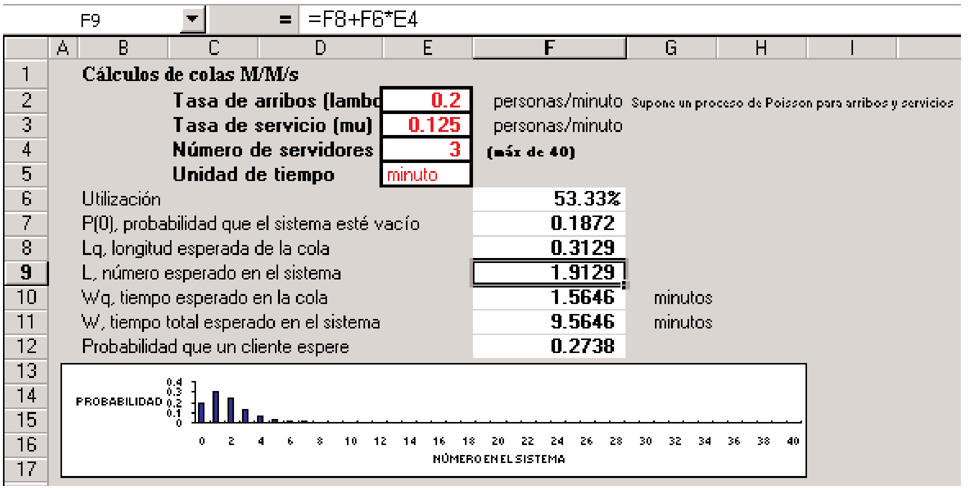


FIGURA 12.9

Resultados del laboratorio de hematología con 3 servidores

Podemos ver que la utilización ($\lambda/s\mu$) = 0.8 (celda F6) y la probabilidad de que el sistema esté desocupado es de 0.11 (celda F7). Estos dos valores pueden utilizarse en la ecuación (12.7) para encontrar L_q = 2.84 (celda F8). Esto es, la cantidad esperada de personas en la cola de espera es algo menor que 3. Utilizando la ecuación (12.4), $L_q = \lambda W_q$, veremos que en promedio un paciente espera 14.22 minutos (celda F10) antes de entrar a una sala de examen.

Por último, la plantilla utiliza la observación general de que

tiempo estimado de espera = tiempo estimado en la cola de espera + tiempo estimado de servicio

para calcular que el tiempo estimado de espera (W) = 22.22 minutos (celda F11). En promedio, entonces, un paciente pasa 22.22 minutos en el área de hematología, esperando a un técnico y después sometiéndose a las pruebas.

Monte quiere verificar ahora lo que sucedería si añadiera un tercer o cuarto técnico (servidor). Estos resultados se muestran en las figuras 12.9 y 12.10, respectivamente.

Hay una reducción dramática del tiempo de espera (W_q) con un tercer servidor (a 1.57 minutos), pero con el costo de tener un servidor adicional. Al añadir un cuarto servidor no hay una diferencia tan drástica, ya que reduce el tiempo de espera en la cola a 0.30 minutos. Otro factor a considerar es qué tan ocupados estarán los servidores en cada escenario. Podemos ver en las figuras 12.8 a 12.10 que la utilización se reduce de 80 a 53.3% y por fin a 40%. Entre más servidores se agreguen, mayor será el porcentaje de tiempo ocioso de los técnicos, lo cual podría llevarlos al aburrimiento y a un trabajo mal hecho.

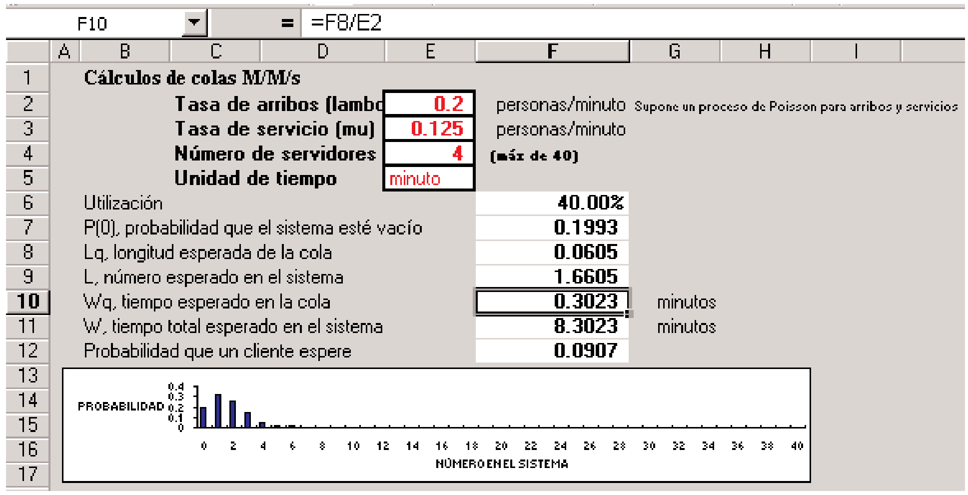


FIGURA 12.10

Resultados del laboratorio de hematología con 4 servidores

Esto cálculos proporcionan mucha información para ayudar a Monte a tomar su decisión. Con un técnico, puesto que $\lambda > \mu$, el sistema es inestable y la cola de espera crecerá continuamente. Esto podría ser considerado una irresponsabilidad. Con dos técnicos, el tiempo de espera promedio en la cola es inferior a 15 minutos. Según los estándares actuales del hospital, éste es un valor pequeño y aceptable. Obviamente, al añadir más servidores, Monte puede reducir el tiempo promedio de espera pero a un costo significativo para el St. Luke. Si, en algunas ocasiones, la cola de espera se vuelve incómodamente larga con dos servidores (recuerde que W_q es un valor esperado, y el tiempo real en la cola de espera variará), los supervisores del laboratorio de hematología pueden pasar temporalmente a uno de los analistas de sangre a un puesto de técnico. Monte, por lo tanto, se siente cómodo ante la idea de contratar dos técnicos de tiempo completo, sin llevar a cabo un análisis de costo detallado.

Tomemos nota de que este modelo de ejemplo es idéntico a los modelos que enfrentan los administradores de franquicias de "comida rápida": cuánta gente se debe tener en un turno para hacer que el cliente promedio no espere más de cierto tiempo. Se dice que McDonalds calcula que perderá un cliente si la espera total es superior a cinco minutos.

12.7 ANÁLISIS ECONÓMICO DE LOS SISTEMAS DE COLAS DE ESPERA

Monte seleccionó el número de técnicos de laboratorio que se deberían contratar, observando las características de operación y utilizando su propio juicio. Éste no es un método fuera de lo común en los modelos de colas de espera, y es especialmente común en el sector no lucrativo. Monte se da cuenta de que está equilibrando el costo de emplear más técnicos contra el costo en que incurriría por obligar a los pacientes a esperar. El costo de emplear técnicos adicionales está bastante claro. El costo de esperar, no.

Monte observa en primer lugar que el costo para el paciente es irrelevante para su decisión, excepto en el sentido de que afecta la disposición del paciente a utilizar el hospital. Realmente no importa quién esté esperando —un asesor que cobra $250 la hora o un desempleado, sin costo de oportunidad—, a menos de que el tiempo de espera persuada al paciente a utilizar algún otro centro de salud. Esta observación explica por qué algunos monopolios, como las oficinas de gobierno, son tan descuidados respecto al tiempo de espera de sus clientes. ¡No hay otro lugar al cual acudir!

Aparte del posible efecto sobre la demanda, el laboratorio de hematología podría costarle dinero al hospital si reduce los resultados para el mismo. Suponga, por ejemplo, que las clínicas para pacientes externos pudieran procesar 50 pacientes nuevos cada día, pero que el laboratorio de hematología pudiera procesar sólo 10 pacientes. (Éste es, claramente, un ejemplo extremo para ilustrar nuestro punto.) En este caso, el hospital estaría desperdiciando un recurso valioso: los doctores y demás personal de las clínicas, debido al cuello de botella en el laboratorio de hematología. Sin embargo, habiendo establecido este hecho, todavía no es sencillo establecer un costo específico para el tiempo de espera de un paciente.

Parámetros del costo Si usted está dispuesto, y es capaz de estimar ciertos costos, puede elaborar modelos de costo esperado de sus sistemas de cola de espera. Considere, por ejemplo, el modelo del laboratorio de hematología (en términos generales, cualquier cola de espera con múltiples servidores con tiempos exponenciales interarribos y de servicio), y suponga que el administrador está dispuesto a especificar dos costos:

C_s = costo por hora de tener un servidor disponible

C_w = costo por hora de tener a una persona esperando en el sistema (un costo muy "difuso" o cualitativo)

Con estos costos es posible calcular el costo total asociado con la decisión de utilizar cualquier número específico de servidores. Comenzaremos calculando el costo total de emplear dos servidores para una jornada de ocho horas. Hay dos componentes:

$$\text{costo del servidor} = (C_s)(2)(8)$$

donde C_s es el costo por hora de un servidor, 2 es el número de servidores y 8 es el número de horas que trabaja cada servidor, y

$$\text{costo de espera} = (C_w)(L_2)(8)$$

donde L_2 es el número de personas en cola de espera cuando hay dos servidores. Este segundo cálculo puede no ser tan obvio, pero la justificación es la misma que para el costo del servidor. Si hay, en promedio, L_2 personas esperando cuando el sistema tiene dos servidores, entonces L_2 multiplicado por ocho es el número promedio de "horas" de espera. Por lo tanto, $(C_w)(L_2)(8)$ es el costo de espera promedio del día de ocho horas.

Si quisiéramos calcular el costo total de utilizar cuatro servidores en un día de seis horas, tomaríamos

$$(C_s)(4)(6) + (C_w)(L_4)(6)$$

o

$$[(C_s(4) + (C_w)(L_4)]6$$

El término entre corchetes, $[(C_s)(4) + (C_w)(L_4)]$, entonces, es el costo total por hora utilizando cuatro servidores.

Costo total por hora Ahora definimos

$$\text{TC}(s) = \text{costo total por hora de utilizar } s \text{ servidores}$$

y podemos ver que

$$\text{TC}(s) = (C_s)(s) + (C_w)(L_s)$$

Nuestro objetivo es escoger s, el número de servidores, para minimizar esta función. Podemos ver que conforme s aumenta, el costo de espera se reducirá, y el costo del servidor se incrementará. La idea es encontrar el valor de s que minimice la suma de estos dos costos.

La figura 12.11 muestra la hoja de trabajo que creó Monte, de nombre "Econ. Analysis" en su libro de trabajo HEMATLGY.XLS, para determinar el valor óptimo de s. Por desgracia, no es posible deducir una fórmula que nos dé el valor óptimo de s. (Esto en contraste con el modelo CEP [Cantidad Económica de Pedidos], donde podemos encontrar la cantidad óptima de pedido, Q^*, con la ecuación $Q^* = \sqrt{2DC_0/C_h}$, como en el capítulo 8.)

En este ejemplo, vamos a elegir un costo relativamente grande para la espera y veremos si la decisión difiere de la original de Monte de elegir dos servidores. Establecemos que C_s = \$50/servidor/hora y C_w = \$100/cliente/hora (vea las celdas B1 y B2), y después calcularemos el costo del servidor y el costo de espera para 2, 3 y 4 servidores. Suponga que deseamos comparar el costo en un turno de ocho horas (celda E1), y debemos escribir en las celdas B6:B8 los valores para L (cantidad esperada en el sistema) por cada valor de s que queramos explorar (obtenido a partir de las figuras 12.8 a 12.10). Podemos ver que tres servidores minimizan el costo total en \$2,730 (celda E7).

A continuación Monte crea una tabla de datos para determinar la sensibilidad de esta decisión al costo "difuso", C_w. Decide que desea explorar valores de C_w de 0 a \$180. Los pasos para que Monte haga esto en su hoja de cálculo son:

1. Escribir el valor inicial de 0 en la celda A11.
2. Hacer clic de nuevo en la celda A11, después seleccionar Edición, Rellenar y después "Series".

C7 = =$B$1*A7*$E$1

	A	B	C	D	E
1	Costo servidor/hora	$ 50.00		# hrs por turno	8
2	Costo de esperar/hora	$ 100.00			
3					
4					
5	Número de servidores	# Promedio en la cola	Costo de servidor	Costo de la espera	Costo total
6	2	4.444	800	3555.2	$ 4,355.20
7	3	1.913	1200	1530.4	$ 2,730.40
8	4	1.66	1600	1328	$ 2,928.00
9					
10	Costo de esperar/hr	4355.2	2730.4	2928	
11	0	$ 800.00	$ 1,200.00	$ 1,600.00	
12	20	$ 1,511.04	$ 1,506.08	$ 1,865.60	
13	40	$ 2,222.08	$ 1,812.16	$ 2,131.20	
14	60	$ 2,933.12	$ 2,118.24	$ 2,396.80	
15	80	$ 3,644.16	$ 2,424.32	$ 2,662.40	
16	100	$ 4,355.20	$ 2,730.40	$ 2,928.00	
17	120	$ 5,066.24	$ 3,036.48	$ 3,193.60	
18	140	$ 5,777.28	$ 3,342.56	$ 3,459.20	
19	160	$ 6,488.32	$ 3,648.64	$ 3,724.80	
20	180	$ 7,199.36	$ 3,954.72	$ 3,990.40	

Celda	Fórmula	Cópiese a
C6	=$B$1*A6*$E$1	C7:C8
D6	=$B$2*B6*$E$1	D7:D8
E6	=SUMA(C6:D6)	E7:E8

FIGURA 12.11

Análisis económico para el laboratorio de hematología con 2, 3 o 4 servidores

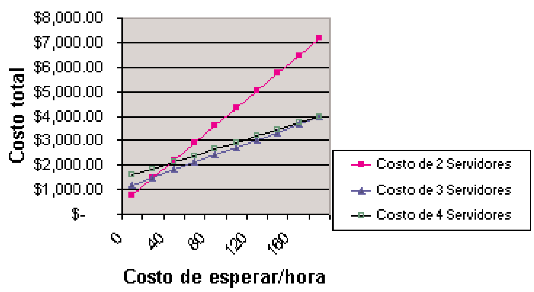


FIGURA 12.12

Gráfica del análisis de sensibilidad respecto al costo de espera para el laboratorio de hematología

3. Hacer clic en “Series en columnas”, y escribir un valor inicial de 20 y un valor final de 180. Hacer clic en Aceptar.
4. Escribir las fórmulas para las cantidades que deseamos obtener (costo total con dos servidores, costo total con tres servidores, costo total con cuatro servidores) en las celdas B10:D10. Estas fórmulas son =E6, =E7 e =E8, respectivamente.
5. Resaltar el rango A10:D20, y hacer clic en Datos, después en “Tabla”.
6. Escribir la Celda de inserción de columnas como B2. Hacer clic en Aceptar.
7. Excel rellenará automáticamente la tabla, como se muestra en las celdas A10:D20 de la figura 12.11.

Finalmente, Monte desea elaborar una gráfica de los resultados de este análisis de sensibilidad para buscar patrones y tendencias. Para hacerlo, resalta el rango A11:D20, hace clic en Asistente para gráficas y después sigue los pasos para generar la gráfica que se muestra en la figura 12.12.

Podemos ver que dos servidores son óptimos para $C_w = 0$, en tanto que tres servidores son óptimos para $C_w = \$20$ hasta \$180. Para valores de $C_w \geq \$200$, parece que cuatro servidores serán la decisión óptima.

Terminemos nuestro examen del modelo del laboratorio de hematología con estas observaciones: hemos visto cómo encontrar valores para L, L_q, W y W_q. Estos valores fueron utilizados entonces para seleccionar el número apropiado de técnicos (servidores). Esta decisión puede tomarse con base en la intuición o con base en un análisis económico explícito. Es importante llevar a cabo también un análisis de sensibilidad, especialmente con parámetros difíciles de cuantificar, como C_w. Ahora proseguiremos con el segundo modelo de Monte.

12.8 MODELO 2: UNA COLA DE ESPERA FINITA (LÍNEAS WATS)

No se confunda con el título de esta sección. Está dedicada al modelo 2, que es el intento de Monte para seleccionar la cantidad apropiada de líneas WATS para el hospital St. Luke. Afortunadamente, en este caso él puede esperar ayuda de la compañía telefónica. Ésta tiene gran experiencia en dichos asuntos, debido a que los modelos de cola de espera han tenido gran uso en el campo de la ingeniería del tráfico telefónico. El problema de cuántas líneas se necesitan en un conmutador se atacaba típicamente utilizando el modelo *M*/*G*/*s*, "eliminando a los clientes bloqueados". Usted ya sabe que este modelo es una cola de espera multicanal con *s* servidores (*s* líneas), tiempos interarribos exponenciales para las llamadas y una distribución general para el tiempo de servicio, que en este caso es la duración de cada llamada. La frase "eliminación de los clientes bloqueados" es jerga de las colas de espera. Significa que *cuando una llamada encuentra todos los servidores ocupados (todas las líneas ocupadas), él o ella no ingresan en la cola de espera, sino que simplemente se van*. Esta frase describe claramente el comportamiento del conmutador telefónico tradicional. Los sistemas más sofisticados de ahora tienen una cola de espera para un número finito de clientes, en algunos casos, incluso proporcionando al cliente afortunado la oportunidad de disfrutar una versión de Muzak de "Can You Feel the Love Tonight?" de Elton John, o bien la "Macarena".

Probabilidad de *j* servidores ocupados El problema de seleccionar la cantidad apropiada de líneas (servidores) se ataca calculando la probabilidad en estado estable de que exactamente *j* líneas estén ocupadas. Esto, a su vez, será utilizado para calcular la probabilidad de estado estable de que todas las *s* líneas estén ocupadas. Claramente, si usted tiene *s* líneas y todas están ocupadas, la siguiente persona que llame no será capaz de lograr la llamada.

La probabilidad de estado estable de que haya exactamente *j* servidores ocupados, dado que *s* líneas (servidores) están disponibles, está dada por la expresión

$$P_j = \frac{(\lambda/\mu)^j/j!}{\sum_{k=0}^{s}(\lambda/\mu)^k/k!} \tag{12.8}$$

donde λ = tasa de llegadas (la velocidad a que llegan las llamadas)

$\frac{1}{\mu}$ = tiempo medio de servicio (duración promedio de una conversación)

s = número de servidores (líneas)

Esta expresión se conoce como *distribución de Poisson truncada* o *distribución de pérdida de Erlang*. Es válido observar que aunque estamos considerando una distribución general del tiempo de servicio, el valor P_j definido por (12.8) depende solamente de la media de esta distribución.

Considere un sistema en el cual $\lambda = 1$ (las llamadas llegan a una tasa de 1 por minuto) y $1/\mu = 10$ (la duración promedio de una conversación es de 10 minutos). Aquí $\lambda/\mu = 10$. Suponga que tenemos cinco líneas en el sistema ($s = 5$) y queremos encontrar la probabilidad de estado estable de que exactamente dos estén ocupadas ($j = 2$). A partir de (12.8) vemos que

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{(\lambda/\mu)^2/2!}{\sum_{k=0}^{5}(\lambda/\mu)^k/k!} \\ &= \frac{(10)^2/2\cdot 1}{1 + 10^1/1 + 10^2/(2\cdot 1) + 10^3/(3\cdot 2\cdot 1) + 10^4/(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1) + 10^5/(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} \\ &= \frac{50}{1 + 10 + 50 + 166.67 + 416.67 + 833.33} \\ &= \frac{50}{1477.67} = 0.034 \end{aligned}$$

En otras palabras, en promedio, dos líneas estarán ocupadas 3.4% del tiempo. Una manera alternativa de obtener P_j y que es fácil de hacer en una hoja de cálculo (debido a su formulación secuencial) es como sigue:

$$P_i = P_{i-1}(\lambda/\mu)/i$$

Así que, por ejemplo, una vez que conocemos P_2, podemos calcular P_3 como:

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2(10)/3 \\ &= (0.034)\ (10)/3 \\ &= 0.1133 \end{aligned}$$

De manera similar, P_4 se encuentra como

$$\begin{aligned} P_4 &= P_3\ (10)/4 \\ &= (0.1133)(10)/4 \\ &= 0.2833 \end{aligned}$$

Cada $P_{i\text{-}1}$ sucesivo se multiplica por λ/μ y se divide entre i para llegar al P_i nuevo.

La pregunta más interesante es: "¿Cuál es la probabilidad de que todas las líneas estén ocupadas?", ya que en este caso, quien llama no será capaz de lograr una conexión en las líneas WATS. Para encontrar la respuesta a esta pregunta, simplemente establecemos que $j = s$ (en nuestro ejemplo, $s = 5$), y obtenemos

$$\begin{aligned} P_5 &= P_4\ (10)/5 \\ &= (0.2833)(10)/5 \\ &= 0.564 \end{aligned}$$

o, en promedio, el sistema estará totalmente ocupado 56.4% del tiempo.

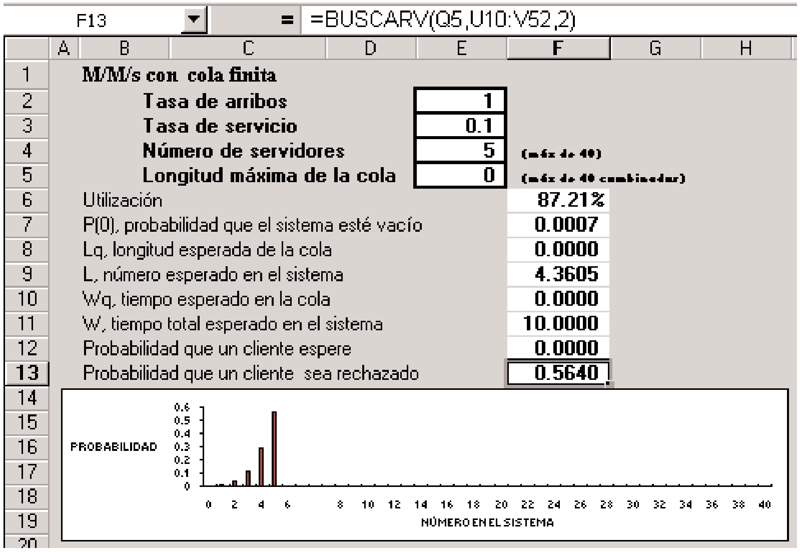
De nuevo, es bastante fácil ejecutar todas estas fórmulas en una hoja de cálculo. La probabilidad de que el sistema esté totalmente ocupado (todos los servidores ocupados) está calculada en una nueva hoja de trabajo, llamada "finiteQ" en el libro de trabajo WATS.XLS. Podemos ver que la probabilidad de que un cliente sea rechazado con cinco servidores, se calcula con mucha más facilidad en una hoja de cálculo, como se muestra en la figura 12.13. Por supuesto, obtenemos el mismo valor (0.564 en la celda F3). Podemos entonces elaborar una tabla de datos para determinar este valor para varios valores diferentes de s. La figura 12.14 muestra la tabla de datos que elaboró Monte para examinar la posibilidad de entre 0 y 10 líneas telefónicas.

Los pasos que siguió Monte para hacer esto en una hoja de cálculo fueron:

1. Escribir un valor inicial de 0 en la celda A23.
2. Hacer clic de nuevo en la celda A23, después seleccionar Edición, Rellenar y después "Series".
3. Hacer clic en "Series en columnas", escribir un valor inicial de 1 y un valor final de 10. Hacer clic en Aceptar.
4. Escribir las fórmulas para la cantidad que queremos rastrear (la probabilidad de que un cliente quede fuera) en la celda C22. La fórmula es =F13.
5. Resaltar el rango B22:C33 y hacer clic en Datos, después en "Tabla".
6. Entrar a la Celda Insertar Columnas como E4. Hacer clic en Aceptar.

Excel rellenará automáticamente la tabla como se muestra en la figura 12.14. A continuación podemos crear la columna D, que calculará la mejoría marginal en esta probabilidad conforme agregamos más servidores. Esto también se muestra en la figura 12.14. Aquí está claro que el efecto marginal de añadir más servidores se reduce. Por ejemplo, al añadir una segunda línea, cuando hay una en servicio, reduce la probabilidad de que el sistema esté ocupado en 0.089, en tanto que añadir la décima línea, cuando ya hay nueve en servicio, reduce esta probabilidad en 0.059.

Número promedio de servidores ocupados Otra cantidad interesante y útil en el diseño de instalaciones telefónicas es el número promedio de líneas ocupadas. Esta cantidad se conoce como la *carga* en la jerga de las colas de espera. Si definimos que $\bar{N}$ es el número promedio de servidores ocupados, entonces

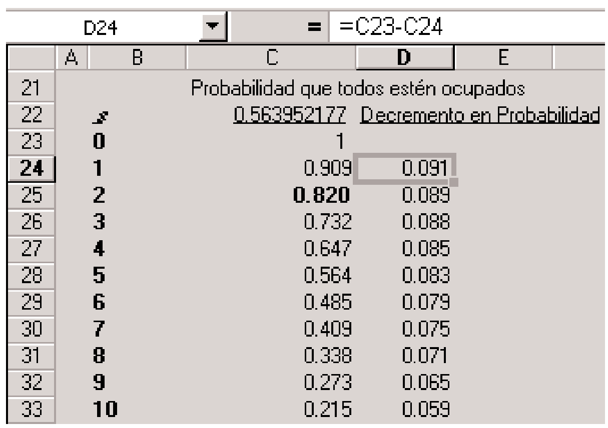


F13 = =BUSCARV(Q5,U10:V52,2)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	M/M/s con cola finita							
2		Tasa de arribos			1			
3		Tasa de servicio			0.1			
4		Número de servidores			5	(máx de 40)		
5		Longitud máxima de la cola			0	(máx de 40 combinados)		
6	Utilización					87.21%		
7	P(0), probabilidad que el sistema esté vacío					0.0007		
8	Lq, longitud esperada de la cola					0.0000		
9	L, número esperado en el sistema					4.3605		
10	Wq, tiempo esperado en la cola					0.0000		
11	W, tiempo total esperado en el sistema					10.0000		
12	Probabilidad que un cliente espere					0.0000		
13	Probabilidad que un cliente sea rechazado					0.5640		

FIGURA 12.13

Cálculo de la probabilidad de que un cliente sea rechazado en la hoja de cálculo de la cola de espera finita



D24 = =C23-C24

	A	B	C	D	E
21			Probabilidad que todos estén ocupados		
22		s	0.563952177	Decremento en Probabilidad	
23		0	1		
24		1	0.909	0.091	
25		2	**0.820**	0.089	
26		3	0.732	0.088	
27		4	0.647	0.085	
28		5	0.564	0.083	
29		6	0.485	0.079	
30		7	0.409	0.075	
31		8	0.338	0.071	
32		9	0.273	0.065	
33		10	0.215	0.059	

FIGURA 12.14

Tabla de datos sobre la probabilidad de que un cliente sea rechazado ante diferentes valores de *s*

$$\bar{N} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)[1 - \text{Probabilidad de que un cliente sea rechazado}] \tag{12.9}$$

Suponga ahora que en el modelo de Monte de las líneas WATS para el St. Luke, $\lambda = 1$ y $1/\mu = 10$. Por lo tanto, si compra 10 líneas telefónicas, podemos ver en la figura 12.14 que la probabilidad de que las 10 líneas estén ocupadas es igual a 0.215 (celda C33). A partir de (12.9), se deriva que

$$\bar{N} = 10(1 - 0.215) = 7.85$$

En otras palabras, todo el sistema tendrá una probabilidad de 0.215 de estar ocupado, o aproximadamente una quinta parte del tiempo y, en promedio, casi ocho líneas estarán ocupadas. Después de que se ha calculado $\bar{N}$ la utilización del servidor puede calcularse dividiendo $\bar{N}$ entre s (el número de servidores). Por lo tanto, en la situación del St. Luke, la utilización de los servidores es de 7.85/10 = 78.5%, lo que significa que cada servidor (en promedio) está ocupado 78.5% del tiempo y ocioso 21.5% del tiempo.

Monte piensa que 10 líneas son un término medio razonable. No parece haber demasiada capacidad excedente, pero, por otro lado, la probabilidad de hallar el sistema ocupado queda en una región (70 a 80%) que él siente apropiada para el hospital. Si él se siente incómodo con esta solución, con base en un balanceo o equilibrio subjetivo del número de líneas y de la probabilidad de encontrar el sistema ocupado, y además está dispuesto a definir un costo por cada vez que alguien llame y encuentre el sistema ocupado, puede seleccionar el número de líneas que minimice el costo por hora esperado. Procedería de la misma manera que en el sistema $M/M/s$ de las secciones 12.6 y 12.7.

12.9 MODELO 3: EL MODELO DEL REPARADOR

En este modelo Monte debe decidir cuántos reparadores emplear para mantener 20 piezas de equipo electrónico. Los reparadores trabajan con las máquinas con base en un sistema de "primeras llegadas (quizás sería más preciso decir primeras fallas), primeras atenciones".

Un solo reparador se ocupa de cada máquina con fallas. Por lo tanto, usted puede imaginarse las máquinas descompuestas como si formaran una cola de espera frente a múltiples servidores (reparadores).

Éste es otro modelo *M/M/s*, pero difiere de manera fundamental del sistema *M/M/s* considerado en la sección 12.6 (el modelo de las pruebas de sangre). En este modelo hay un número de elementos limitado (20) que pueden llegar a la cola de espera, en tanto que en el modelo del laboratorio de hematología potencialmente un número ilimitado de personas podían colocarse en la cola.

Se dice que un modelo de cola de espera como el modelo de los reparadores, en el cual sólo un número finito de "personas" son aptas para unirse a la cola, tiene una **población** de solicitantes *finita*. De aquellos modelos con una cantidad ilimitada de posibles participantes se dice que tienen una *población de solicitantes infinita*.

Considere el modelo con 20 máquinas y dos reparadores. Suponga que cuando una máquina está funcionando, el tiempo entre fallas tiene una distribución exponencial con parámetro λ = 0.25 por hora; esto es, el tiempo promedio entre fallas es $1/\lambda = 4$ horas. De manera similar, suponga que el tiempo necesario para reparar una máquina tiene una distribución exponencial y que el tiempo medio de reparación es de 0.50 horas (es decir, $1/\mu = 0.50$). Este modelo es un modelo *M/M/*2, con un máximo de 18 elementos en cola de espera (20, incluyendo los dos en servicio) y una población de solicitantes finita. En este caso, las ecuaciones generales para la probabilidad en estado estable de que haya n trabajos en el sistema son una función de λ, μ, s (el número de reparadores) y N (el número de aparatos). En particular,

$$P_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}(\lambda/\mu)^n P_0 \text{ para } 0 \le n \le s$$

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!s!s^{n-s}}(\lambda/\mu)^n P_0 \text{ para } s < n \le N \qquad \textbf{(12.10)}$$

También sabemos que

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = 1 \qquad \textbf{(12.11)}$$

Por lo tanto, tenemos $N + 1$ ecuaciones lineales (N de la ecuación [12.10]) y 1 de la ecuación [12.11]) en las $N + 1$ variables de interés (P_0, P_1,..., P_n). Esto hace posible (aunque doloroso) calcular los valores de P_n para cualquier modelo en particular. Uno puede ver que cada modelo se hace un poco más complejo que el anterior, y que las fórmulas para P_n se hacen más complicadas.

No existen, sin embargo, expresiones simples (incluso según estos estándares) para el número esperado de trabajos (máquinas con fallas) en el sistema o en la espera. Si se calculan los valores para P_n, entonces (de verdad) es tarea fácil encontrar un valor numérico para la cantidad esperada en el sistema. Sólo debe calcular

$$\text{cantidad esperada en el sistema} = L = \sum_{n=0}^{N} nP_n$$

Si Dios hubiera querido que los humanos efectuaran este tipo de cálculos a mano, no hubiera permitido que se inventaran las hojas de cálculo. La figura 12.15 muestra la configuración de la hoja de trabajo "finitePopulation" en el libro de trabajo REPAIR.XLS que puede utilizarse para calcular valores de P_n, la cantidad esperada en el sistema, y la cantidad estimada de espera, para una variedad de sistemas diferentes. Como se puede ver, el usuario integra los típicos parámetros del sistema (λ, μ y s) en la hoja de trabajo "MMs", después hace clic en la nueva hoja de trabajo "finitePopulation" y agrega el tamaño de la población finita (celda E5), y la hoja de cálculo hace el resto. En este caso, "el resto" consiste en una evaluación numérica de las ecuaciones para P_n y en utilizar los resultados para encontrar la cantidad esperada en el sistema. Existe un "truco" con este tipo de modelo: cuando usted escriba el valor de la tasa de llegadas (λ) en la hoja de trabajo "MMs", lo que en realidad debe escribir es N*λ, o la tasa de llegadas de toda la población.

Como puede ver en la figura 12.15, para este sistema, L_q, el número promedio de máquinas esperando servicio, es 3.348 (celda F8) y W, el tiempo esperado en el sistema, es 1.405 horas (celda F11).

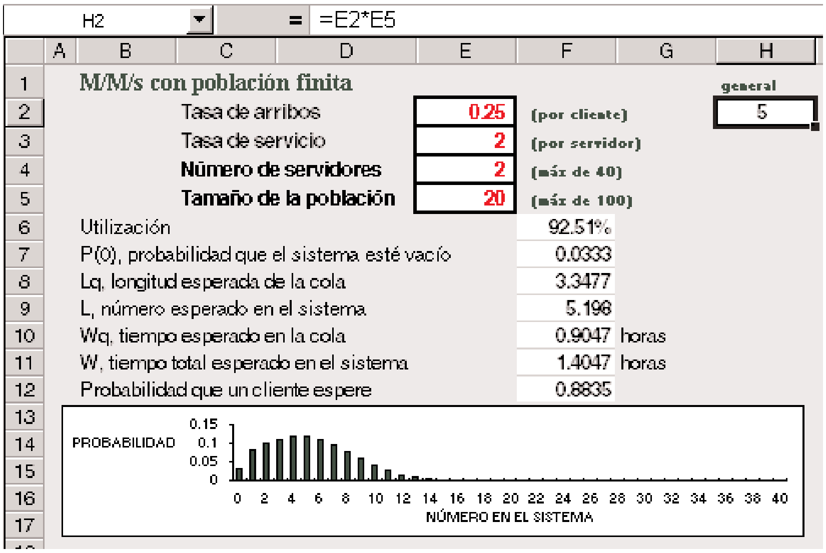


FIGURA 12.15
Hoja de cálculo Finite Population para el modelo del reparador

La utilización es elevada en 92.5% y podemos ver en el histograma que hay una probabilidad de 3.3% de que el sistema esté desocupado, una probabilidad mayor de que haya una máquina (8.3%), y que las probabilidades siguen creciendo para números más elevados de aparatos, hasta que alcanzan un máximo en 4 y 5 aparatos (empatados en 11.8%). Entonces, para más de cinco aparatos las probabilidades disminuyen.

12.10 RESULTADOS TRANSITORIOS *VERSUS* RESULTADOS DE ESTADO ESTABLE: PROMESA DE ENTREGA DE PEDIDO

No siempre será el caso que estemos interesados en resultados de estado estable, o que un modelo analítico esté disponible para predecir el comportamiento del sistema de colas de espera que nos interesa. En esta sección consideraremos una situación en la cual estamos interesados en el comportamiento *transitorio* del sistema, y debemos utilizar la simulación para obtener las respuestas deseadas.

Los procesos de fabricación pueden considerarse como sistemas de colas de espera complejos. Probablemente la herramienta administrativa con más uso en la fabricación es la simulación de sistemas de colas de espera. Larry Lujack, la persona que planea la producción de PROTRAC y recién titulado de la Graduate Bussines School en la Universidad de Chicago, está preguntándose si lo que aprendió sobre los modelos de colas en su último semestre en la escuela puede ayudarle a decidir cuándo *prometer* un nuevo pedido para un cliente. El pedido es por 20 unidades de un producto que requiere un proceso secuencial en dos estaciones de trabajo. El tiempo promedio para procesar una unidad en cada estación de trabajo es de cuatro horas. Cada estación de trabajo está disponible durante ocho horas cada día laborable.

Considerando para cuándo estará terminada la última de las 20 unidades, Larry inicialmente estima que tomará 10.5 días procesar el pedido. La última unidad debe esperar en la estación de trabajo 1 hasta que las primeras 19 unidades estén terminadas, y después debe ser procesada en la estación de trabajo 1 y más adelante en la estación de trabajo 2. Suponiendo que no tenga que esperar al llegar a la estación de trabajo 2, Larry hace el cálculo como sigue:

$$(19 \text{ unidades} \times 4 \text{ horas/unidad} + 4 \text{ horas} + 4 \text{ horas}) \div 8 \text{ horas/día} = 10.5 \text{ días}$$

Sin embargo, este análisis es algo simplista. Ignora la variabilidad de los tiempos del proceso y la posibilidad de una cola de espera en la estación de trabajo 2. Larry siente que la distribución exponencial es una distribución adecuada para los tiempos de proceso, debido a que se llegó a la cifra de cuatro horas mediante un promedio de muchos tiempos de proceso que fueron menores que cuatro horas con algunos otros considerablemente mayores (vea la sección 12.11). Estos pocos tiempos de proceso largos se debieron a fallas en el equipo en la estación de trabajo durante el proceso de una unidad.

D8 = =MAX(C8,E7)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Tiempo promedio en ET1	4	horas		# hr./día	8	
2	Tiempo promedio en ET2	4	horas		Tiempo de terminación	10.5	días
3							
4							
5		Estación de trabajo 1		Estación de trabajo 2			
6	Unidad #	Inicio	Paro	Inicio	Paro		
7	1	0	4	4	8		
8	2	4	8	8	12		
9	3	8	12	12	16		
10	4	12	16	16	20		
11	5	16	20	20	24		
12	6	20	24	24	28		
13	7	24	28	28	32		
14	8	28	32	32	36		
15	9	32	36	36	40		
16	10	36	40	40	44		
17	11	40	44	44	48		
18	12	44	48	48	52		
19	13	48	52	52	56		
20	14	52	56	56	60		
21	15	56	60	60	64		
22	16	60	64	64	68		
23	17	64	68	68	72		
24	18	68	72	72	76		
25	19	72	76	76	80		
26	20	76	80	80	84		

Celda	Fórmula	Cópiese a
C7	= \$B\$1 + B7	C8:C26
D7	=C7	—
E7	=D7+\$B\$2	E8:E26
B8	=C7	B9:B26
D8	=MAX(C8, E7)	D9:D26
F2	= E26/F1	—

FIGURA 12.16

Hoja de cálculo que presenta la promesa de entrega de un pedido

A continuación Larry revisa si las hipótesis del modelo de cola de espera básico se cumplieron. El resultado de salida de la estación de trabajo 1 (WS1) son las llegadas a la estación de trabajo 2 (WS2), y el tiempo entre llegadas es exponencial, porque el tiempo de proceso en la estación de trabajo 1 es exponencial. El tiempo de servicio en la estación de trabajo 2 es exponencial, porque es igual al tiempo de proceso. Las unidades se procesan bajo una base de "primeras llegadas, primeras atenciones" en la estación de trabajo 2, y hay suficiente capacidad de almacenamiento temporal entre estaciones de trabajo para que la cola de espera sea prácticamente infinita. Sin embargo, no se contempla la hipótesis de un horizonte de tiempo infinito. Larry solamente está interesado en el comportamiento del sistema mientras esté en proceso el "cliente" número 20.

De cualquier modo Larry decide aplicar el modelo básico y utilizarlo como una aproximación. Hace una estimación del tiempo que toma procesar 20 unidades como sigue. Primero, estima que la última unidad del lote de 20 saldrá de la estación de trabajo 1 después de $20 \times 4 = 80$ horas. Después, esta unidad esperará en la cola de espera frente a la estación de trabajo 2. Finalmente, terminará de procesarse en la estación de trabajo 2, momento en el cual se habrán terminado las 20 unidades. El tiempo total que la última unidad pasa en la estación de trabajo 2 es W. Por lo tanto, Larry estima que es de $20 \times 4 + W$. En el modelo básico, W está dado por la fórmula $1/(\mu - \lambda)$. Larry ahora se da cuenta de su dilema: μ y λ son iguales (1 unidad cada 4 horas) y la fórmula es válida sólo cuando μ es *mayor* que λ.

Larry decide elaborar una hoja de cálculo (ORDER.XLS) para simular el flujo de las 20 unidades a través de las dos estaciones de trabajo. Su hoja de cálculo aparece en la figura 12.16. Larry supone que siempre hay materia prima disponible en la estación de trabajo 1, de forma que la siguiente unidad en la estación de trabajo 1 pueda comenzarse tan pronto como la unidad

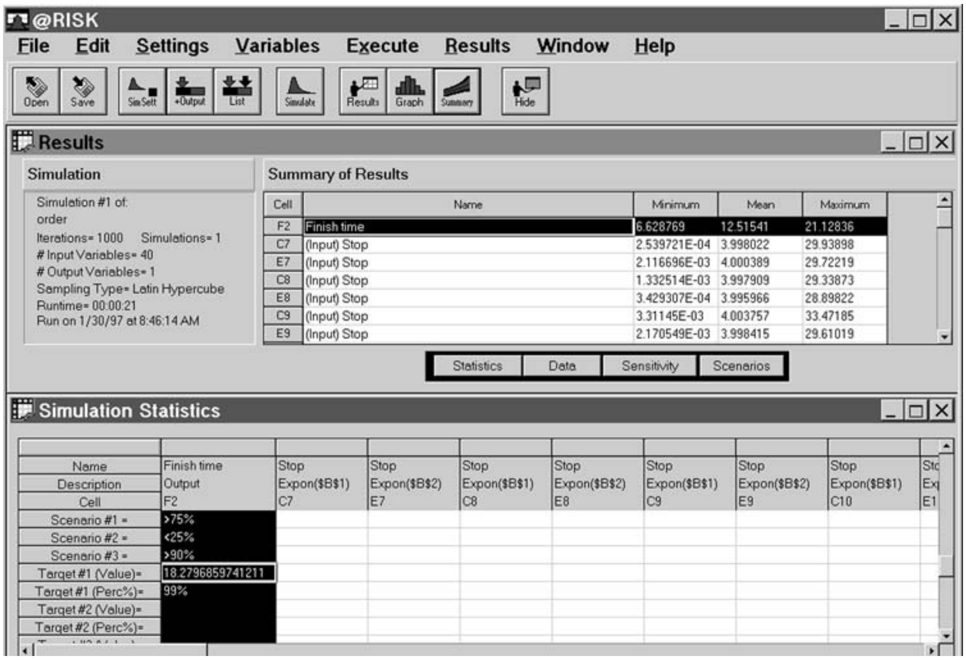


FIGURA 12.17
Resultado estadístico para el modelo de terminación de un pedido

presente esté terminada. Esto significa que para la estación de trabajo 1 el tiempo inicial para una unidad es el tiempo final de la unidad anterior. Por ejemplo, la fórmula en la celda B8 de la hoja de cálculo es =C7. El tiempo inicial de una unidad en la estación de trabajo 2 es el tiempo final de esa unidad en la estación de trabajo 1 o el tiempo final de la unidad anterior en la estación de trabajo 2, el tiempo que resulte mayor. Así que, por ejemplo, la fórmula en la celda D8 es =MAX(C8,E7). El tiempo final de una unidad es simplemente el tiempo inicial más el tiempo de proceso. El tiempo final en días aparece en la celda F2 y se calcula dividiendo el tiempo final de la última unidad en la estación de trabajo 2 entre el número de horas/día (8 en la celda F1). La hoja de cálculo procesa este tiempo en 10.5 unidades *si* cada unidad ocupa exactamente cuatro horas en cada estación de trabajo.

Para analizar el impacto de la variabilidad de los tiempos de proceso, Larry remplaza la constante de tiempo de proceso de 4 en WS1 en su hoja de cálculo con la distribución aleatoria apropiada [en Crystal Ball, selecciona de la galería la distribución exponencial; en @RISK, escribe =Risk Expon($B$1)], que extraerá un muestreo de una distribución exponencial, con media de 4. Esto hace que el tiempo final sea una variable aleatoria. A Larry le gustaría saber el 99 *percentil* de esta variable aleatoria (el número que 99% de las veces la variable aleatoria será menor que o igual a). Entonces podría prometer la entrega del pedido en ese número de días y estar 99% seguro de que en realidad será terminado a tiempo.

Cuando se utiliza Crystal Ball o @Risk, es tarea simple encontrar cualquier percentil de cualquier variable aleatoria de la hoja de cálculo. La figura 12.17 muestra el 99 percentil para la celda F2 (el tiempo de terminación en días), con base en 1,000 iteraciones (1,000 conjuntos de 40 tiempos de proceso aleatorios: 20 para la estación de trabajo 1, 20 para la estación de trabajo 2). Primero, observe que el tiempo de terminación esperado ("Mean" en la celda F2 de la figura 12.17) es de 12.52 días, dos días más que en el cálculo inicial de Larry. Los dos días adicionales son el retraso promedio en la cola de espera causado por la variabilidad de los tiempos de proceso. Si Larry quiere estar 99% seguro de que tendrá el pedido completo para el tiempo que lo prometa, debería establecer la fecha de entrega en 18.28 días ("Target #1(Value")=" en la figura 12.17) después de que el material esté disponible en la estación de trabajo 1.

La cola de espera que se crea en la estación de trabajo 2 ha aumentado el *plazo de entrega* (el tiempo desde el comienzo del pedido hasta su terminación) en cerca de ocho días (18.28 menos 10.5) más de los que serían si no hubiera variabilidad en los tiempos de proceso. La figura 12.18 muestra el histograma del tiempo final, y podemos ver que el tiempo puede variar desde 6.5 hasta 21 días.

Aunque el modelo básico no es aplicable en este caso, le ayudó a Larry a pensar acerca del modelo y a comprender esta respuesta para su simulación en la hoja de cálculo. El problema 12-29 explora una situación ligeramente diferente, en la cual el modelo básico puede utilizarse para estimar el tiempo final promedio y el 99 percentil.

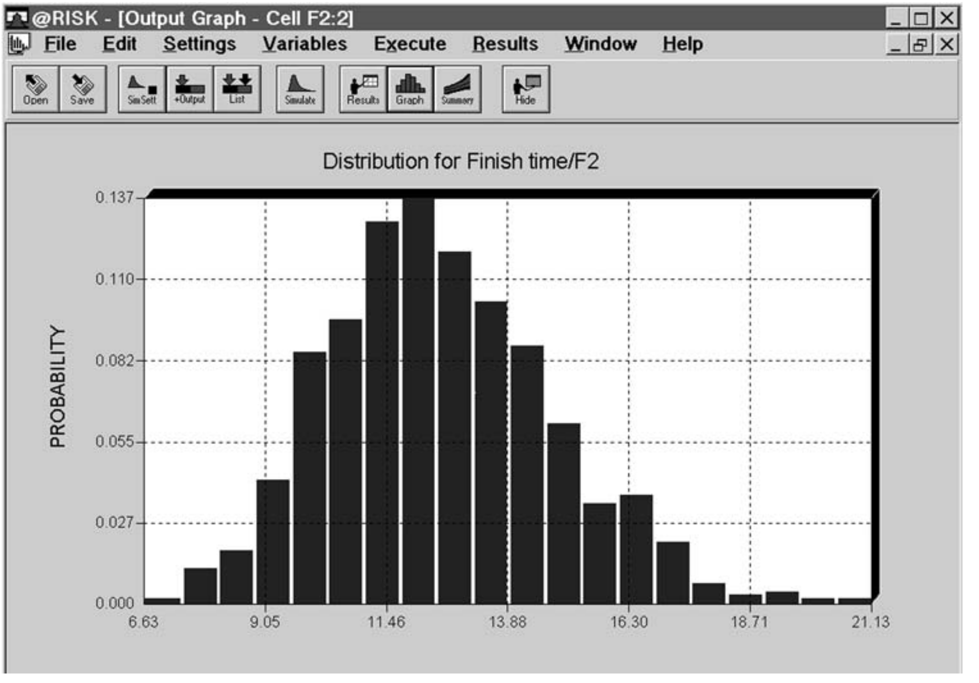


FIGURA 12.18

Histograma de tiempos para el modelo de terminación del pedido

12.11 EL PAPEL QUE DESEMPEÑA LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Existen muchísimos libros que tratan sobre los sistemas de cola de espera, y es virtualmente imposible para un administrador estar consciente de todos los resultados. Existen, sin embargo, algunas consideraciones generales que son útiles para ayudar a un administrador a pensar sobre el uso de los modelos de cola de espera. Una de tales consideraciones es el papel que juega la distribución exponencial en modelos de cola de espera analíticos.

No hay, esencialmente, resultados analíticos para los modelos de cola de espera que no involucren la distribución exponencial, ya sea como la distribución de los tiempos interarribos o de tiempos de servicio, o ambos. Debido a este hecho es importante que el administrador reconozca el conjunto de circunstancias en las cuales es razonable suponer que ocurrirá una distribución exponencial. Las siguientes tres propiedades de la distribución exponencial ayudan a identificarla:

1. ***Carencia de memoria***: En un proceso de llegadas, esta propiedad implica que la probabilidad de que una llegada ocurra en los siguientes minutos no está influida por cuándo ocurrió la última llegada; esto es, el sistema no tiene memoria de lo que acaba de ocurrir. Esta situación se presenta cuando (1) hay muchos individuos que en potencia podrían llegar al sistema, (2) cada persona decide llegar independientemente de los demás individuos, y (3) cada individuo selecciona su tiempo de llegada completamente al azar. Es fácil ver por qué la hipótesis de las llegadas exponenciales se ajusta tan bien al sistema telefónico.

2. ***Tiempos de servicio pequeños***: Con una distribución exponencial, son comunes los tiempos de servicio pequeños. Esto se puede ver en la figura 12.19. Esta figura muestra la gráfica de la probabilidad de que el tiempo de servicio S sea menor que o igual a t (Prob $\{S \leq t\}$) si el tiempo medio de servicio es 10; esto es, $\mu = 0.1$ y $1/\mu = 10$. Observe que la gráfica se eleva rápidamente y después se acerca en forma lenta al valor 1.0. Esto indica una alta probabilidad de tener un tiempo de servicio corto. Por ejemplo, cuando $t = 10$, la probabilidad de que $S \leq t$ es de 0.632. En otras palabras, más de 63% de los tiempos de servicio es menor que el tiempo promedio de servicio. Esto en comparación con una distribución normal, donde solamente 50% de los tiempos de servicio es menor que el promedio. La implicación práctica de este hecho es que una distribución exponencial se puede utilizar mejor para modelar una distribución de tiempos de servicio en un sistema en el cual una gran proporción de "trabajos" toma un tiempo muy corto y sólo algunos "trabajos" ocupan largo tiempo.

Se dice que los ingenieros piensan que todo el mundo está distribuido exponencialmente, en tanto que los científicos sociales piensan que todo el mundo está normalmente distribuido. Una manera rápida de comprobar qué tipo de distribución tiene es ver si el promedio de los datos está cerca de su desviación estándar. Si lo está, entonces lo más probable es que los números es-

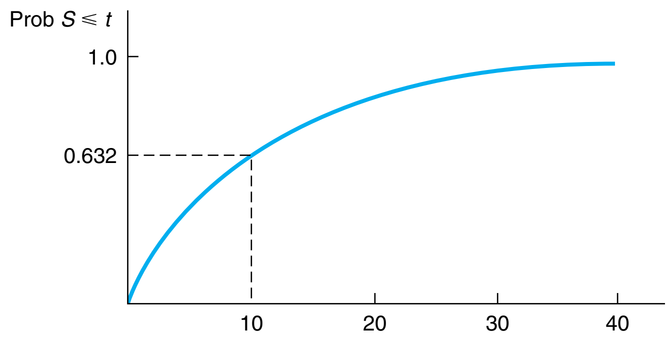


FIGURA 12.19

Una alta probabilidad de tiempos de servicio cortos

tén distribuidos exponencialmente. Si es 1/3 o menos de la media, es muy probable que esté normalmente distribuida.

3. ***Relación con la distribución de Poisson:*** Cuando hicimos la introducción al modelo básico (sección 12.2), hicimos notar la relación entre la distribución exponencial y la de Poisson. En particular, si el tiempo entre llegadas tiene una distribución exponencial con parámetro λ, entonces en un periodo especificado (digamos T) el número de llegadas tendrá una distribución de Poisson, con parámetros λT. Entonces, si X es el número de llegadas durante el tiempo T, la probabilidad de que X iguale un número específico (digamos, n), está dada por la ecuación

$$\text{Prob}\{X = n\} = \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!}$$

Esta ecuación es válida para cualquier valor entero no negativo de n (es decir, $n = 0, 1, 2,$ y así sucesivamente).

La relación entre la distribución exponencial y la de Poisson juega un papel importante en el desarrollo teórico de la teoría de colas. También tiene una connotación práctica importante. Comparando el número de trabajos que llegan a servicio durante un periodo específico con el número que sugiere la distribución de Poisson, el administrador es capaz de ver si sus opciones de los valores y parámetros de un modelo para el proceso de llegadas son razonables.

12.12 DISCIPLINA EN LAS COLAS DE ESPERA

En las secciones anteriores especificamos la distribución de llegadas, la distribución de servicio y el número de servidores para definir un sistema de colas de espera. La disciplina en las colas de espera es una característica más que debe especificarse para definir un sistema de este tipo. En todos los modelos que hemos considerado hasta ahora, hemos supuesto que las llegadas eran atendidas en una base de "primeras llegadas, primeras atenciones" (a menudo llamada FIFO por las siglas en inglés de "first-in, first-out"). Ciertamente esto es una hipótesis adecuada para sistemas telefónicos y muchos otros, donde son personas las que llegan. Sin embargo, éste no es necesariamente el caso de otros sistemas. En un elevador, la última persona en entrar es por lo general la primera en salir (LIFO, por las siglas en inglés de "last in, first out"). Y en el modelo del reparador, realmente no hay razón para arreglar las máquinas en el mismo orden en que fallan. Si cierto aparato puede ser devuelto a producción en cinco minutos, parece buena idea hacerlo primero, en vez de hacerlo esperar hasta que esté terminado un trabajo que tomará una hora con otro aparato que se descompuso antes.

Al añadir la posibilidad de seleccionar una buena disciplina en las colas de espera, este tipo de modelos se hace más complicado. Los modelos de esta clase se conocen a menudo como modelos de programación, y existe una amplia literatura que se ocupa de ellos, misma que dejaremos para cursos más avanzados.

12.13 NOTAS SOBRE LA APLICACIÓN

Los modelos analizados en este capítulo son representantes útiles de sólo una pequeña parte de una gran gama de los modelos de colas de espera. En general, los resultados presentados aquí requieren que el tiempo entre llegadas, el tiempo de servicio, o incluso ambos, tengan una distribución exponencial. Son importantes porque dan resultados analíticos precisos y porque, en muchas circunstancias, es razonable suponer que el proceso de llegadas es un proceso de

Poisson. En particular, hemos notado que una población grande de usuarios (esencialmente infinita), en la cual los miembros individuales de la población deciden de manera aleatoria llegar a las instalaciones de servicio, genera una distribución exponencial en el tiempo entre llegadas. No es sorprendente, por lo tanto, que los modelos analíticos se utilicen a menudo en este tipo de mecanismo de llegadas. Las redes de comunicaciones (especialmente el sistema telefónico) y el control del tráfico son dos importantes ejemplos de este tipo de sistemas.

La simulación dinámica de eventos discretos (DEDS, por sus siglas en inglés) es un método popular para estudiar modelos de colas de espera que no se ajustan al molde analítico. De hecho, programas existentes, tales como Arena (de Systems Modeling), Extend y Alpha/SIM han sido creados para facilitar el proceso de simulación.

12.14 RESUMEN

Este capítulo ofreció una introducción al tema de las colas (filas o líneas) de espera. Con él se hizo notar que muchos modelos interesantes pueden representarse en el modo llegada/servicio de un modelo determinado de cola de espera.

La sección 12.2 estuvo dedicada al modelo básico, una cola de espera de un solo canal con tiempos exponenciales interarribos y de servicio. Se definieron cuatro características del sistema: cantidad esperada en el sistema, L; cantidad estimada en cola de espera, L_q; tiempo estimado de espera, W; y tiempo estimado en cola de espera, W_q. Se presentaron fórmulas para obtener estas características como funciones de los parámetros de los procesos de llegadas y servicio. Se ofreció un ejemplo numérico.

La sección 12.3 hizo una breve introducción a un sistema de notación para la descripción de modelos de colas de espera. En la sección 12.4 se presentó la ecuación de flujo de Little, $L = \lambda W$. Esta ecuación, aunada al hecho de que

$$W = W_q + \text{tiempo de servicio esperado}$$

se ofrecieron como medios alternativos para calcular características de las colas de espera.

La sección 12.5 hizo una generalización del modelo básico para permitir una distribución arbitraria del tiempo. La sección 12.6 consideró una cola de espera con múltiples servidores. Se presentaron algunas nuevas fórmulas. Estas fórmulas se combinaron con los resultados de la sección 12.4 para calcular resultados numéricos en una hoja de cálculo de Excel para un modelo de personal en un laboratorio de hematología. La sección 12.7 estuvo dedicada a un análisis económico del modelo de personal en el laboratorio de hematología.

Las secciones 12.8 y 12.9 continuaron el análisis de colas de espera con múltiple servidor. La sección 12.8 estuvo dedicada a un sistema $M/G/s$, en el cual los clientes que llegan y encuentran todos los servidores ocupados no esperan, simplemente abandonan la cola (en este caso la línea). Este modelo es particularmente útil en el diseño de sistemas telefónicos. Se presentó un ejemplo específico de este tipo.

La sección 12.9 consideró el modelo del reparador, un sistema $M/M/s$ con una población finita. También ilustró el uso de hojas de cálculo para obtener resultados numéricos en un modelo particular.

La sección 12.10 mostró cómo se puede utilizar una simulación de hoja de cálculo para explorar el comportamiento transitorio, en vez del estado estable, en un sistema.

La sección 12.11 describió la importancia de la distribución exponencial en el análisis de los sistemas de colas de espera. También presentó dos características de la distribución exponencial: la propiedad de la carencia de memoria y la alta probabilidad de valores pequeños.

La sección 12.12 consideró brevemente el tema de la disciplina en las colas de espera.

Términos clave

Canal. Sinónimo de *servidor* en la jerga de colas de espera (por ejemplo, una cola de espera de un solo canal es una cola de espera con un solo servidor).

Características de operación. Cantidades, tales como la cantidad esperada en la cola, y que describen la operación del sistema de colas de espera.

Carencia de memoria. Característica de la distribución exponencial que hace posible derivar resultados analíticos de muchos modelos de colas de espera.

Cola de espera finita. Una cola de espera con un límite superior en el número de elementos que pueden esperar.

Disciplina en las colas de espera. Es la regla establecida por la instalación de servicio que determina cuáles elementos se deben atender. Un ejemplo típico es “primeras llegadas, primeros elementos atendidos”.

Estado estable. Condición en la cual la probabilidad de observar una situación en particular (por ejemplo, una cola de espera vacía) no depende de la hora a la cual se observe.

Modelo de colas de espera. Un modelo que involucra la espera en una cola o fila.

Población solicitante. El número de elementos que puede llegar al sistema en busca de servicio; por consiguiente es un factor a considerar para determinar el proceso de llegadas.

Proceso de llegadas. La parte del modelo de cola de espera que determina el patrón de llegadas.

Proceso de servicio. La parte del modelo de cola de espera que determina el tiempo de servicio para cada elemento.

Rechazo. Ocurre cuando un cliente llega a una cola de espera finita, la cual está completamente ocupada.

Rehusarse. Ocurre cuando un cliente abandona un sistema sin haber sido atendido.

Tamaño de la cola de espera. El límite en el número de elementos a los que se permite esperar en la cola por el servicio que se otorga.

Tiempo de servicio. La cantidad de tiempo que toma a un elemento pasar a través de la instalación de servicio. Es por lo general una cantidad aleatoria.

Tiempo interarribos. La cantidad de tiempo entre dos llegadas consecutivas a una instalación de servicio. Por lo general es una cantidad aleatoria.

Ejercicios de repaso

Verdadero-Falso

1. **V F** El número de personas en el sistema significa el número de ellas que está esperando en la cola.
2. **V F** El tiempo de espera incluye el tiempo de servicio.
3. **V F** La distribución exponencial es una distribución de dos parámetros que se define por una media y una desviación estándar.
4. **V F** La media del tiempo interarribos es recíproca a la tasa media de llegadas, y la media del tiempo de servicio es recíproca a la tasa media de servicio.
5. **V F** El modelo básico es *M*/*M*/1.
6. **V F** Conforme aumenta el número de servidores, por lo general aumenta el costo de espera.
7. **V F** La hipótesis de que la tasa media de servicio es menor a la tasa media de llegadas es suficiente para eliminar la formación de colas de espera infinitamente largas.
8. **V F** La ecuación de flujo de Little enuncia una relación directamente proporcional entre el tiempo de espera estimado y la cantidad esperada de gente en el sistema.
9. **V F** La notación *G*/*M*/2 significa que la distribución del servicio es general, que la distribución de llegadas es exponencial y que hay dos servidores paralelos.

Opción Múltiple

10. ¿Cuál de los siguientes enunciados no se aplica al modelo básico?
    - **a.** llegadas exponencialmente distribuidas
    - **b.** tiempos de servicio exponencialmente distribuidos
    - **c.** horizonte de tiempo finito
    - **d.** tamaño de cola de espera ilimitado
    - **e.** la disciplina es “primeras llegadas, primeras atenciones”
11. Un objetivo principal de las colas de espera es
    - **a.** minimizar el costo de proporcionar un servicio
    - **b.** proporcionar modelos que ayuden al administrador a calcular el costo del servicio
    - **c.** maximizar el rendimiento esperado
    - **d.** optimizar las características del sistema
12. Características de las colas de espera, tales como “la cantidad esperada en el sistema”:
    - **a.** son relevantes después de que la cola de espera haya alcanzado el estado estable
    - **b.** son enunciados probabilísticos
    - **c.** dependen del modelo específico
    - **d.** todo lo anterior
13. En la ecuación de flujo de Little, ¿cuál de los siguientes enunciados *no* es verdadero?
    - **a.** λ es la constante de proporcionalidad entre la cantidad esperada en la cola de espera y el tiempo estimado en ella.
    - **b.** λ es la constante de proporcionalidad entre la cantidad esperada en el sistema y el tiempo esperado en éste
    - **c.** λ es la tasa de llegadas, incluyendo aquellas que eligen no unirse al sistema.
14. El aspecto más complicado de llevar a cabo un análisis económico formal de los sistemas de colas de espera es
    - **a.** la estimación del costo de servicio
    - **b.** la estimación del costo de espera
    - **c.** la estimación del uso
15. En un sistema con múltiples servidores con eliminación de clientes bloqueados, ¿cuál de los siguientes enunciados no se aplica?
    - **a.** Cuando todos los servidores están ocupados, las nuevas llegadas abandonan la cola.
    - **b.** Las características interesantes son: la probabilidad de que todos los servidores estén ocupados y, el número promedio de servidores ocupados.
    - **c.** Uno nunca haría un análisis de costo esperado por hora.
16. En una distribución exponencial, ¿cuál de los siguientes enunciados *no* es una característica?
    - **a.** la carencia de memoria
    - **b.** por lo general da como resultado tiempos de servicio mayores que la media
    - **c.** un solo parámetro

Respuestas

1.	F	**5.**	V	**9.**	F	**13.**	c
2.	V	**6.**	F	**10.**	c	**14.**	b
3.	F	**7.**	F	**11.**	b	**15.**	c
4.	V	**8.**	V	**12.**	d	**16.**	b

Problemas

12-1. Las barcazas llegan a la esclusa La Crosse en el río Mississippi a una tasa promedio de una cada dos horas. Si el tiempo interarribos tiene una distribución exponencial,
(a) ¿cuál es el valor de λ?
(b) ¿cuál es el tiempo medio interarribos?
(c) ¿cuál es la tasa media de llegadas?

12-2. Los automóviles llegan a Joe's Service Station para un cambio de aceite cada 15 minutos, y el tiempo interarribos tiene una distribución exponencial. La estación de servicio es capaz de atender hasta 48 automóviles en un periodo de ocho horas sin tiempo ocioso. Suponga que el tiempo de servicio es también una variable aleatoria con distribución exponencial. Estime:
(a) El valor de λ.
(b) La tasa media de llegadas.
(c) El valor de μ.
(d) El tiempo medio de servicio.
(e) La tasa media de servicio.

12-3. Una agente de inmigración en el Aeropuerto Heathrow de Londres puede procesar en promedio 120 entradas durante sus ocho horas de servicio si estuviera ocupada todo el tiempo. Si el tiempo para procesar cada entrada es una variable aleatoria con una distribución exponencial,
(a) ¿cuál es el valor de μ?
(b) ¿cuál es el tiempo medio de servicio?
(c) ¿cuál es la tasa media de servicio?

12-4 Para los datos del problema 12-2, determine:
(a) La cantidad esperada de automóviles en el sistema.
(b) La cantidad estimada de automóviles en la cola de espera.
(c) El tiempo de espera estimado.
(d) El tiempo medio en la cola de espera.
(e) La probabilidad de que el sistema esté vacío.

12-5. Considere a la oficial de inmigración mencionada en el problema 12-3. Suponga que el modelo básico es una aproximación razonable de su operación. Recuerde que si ella estuviera ocupada todo el tiempo, podría procesar 120 entradas durante su turno de ocho horas. Si en promedio llega una entrada a su estación cada seis minutos, encuentre:
(a) La cantidad esperada en el sistema.
(b) La cantidad estimada en la cola de espera.
(c) El tiempo de espera estimado.
(d) El tiempo medio en la cola de espera.
(e) La probabilidad de que el sistema esté vacío.

•• **12-6.** Considere la esclusa La Crosse mencionada en el problema 12-1. Suponga que el modelo básico es una aproximación razonable a su operación. La nueva estimación de la media de tiempo interarribos para la temporada entrante es 60 minutos para barcazas, y en promedio toma 30 minutos pasar una barcaza por la esclusa. Encuentre:
(a) La cantidad esperada en el sistema.
(b) La cantidad estimada en la cola de espera.
(c) El tiempo de espera estimado.
(d) El tiempo medio en la cola de espera.
(e) La probabilidad de que el sistema esté vacío.
(f) El mayor tiempo promedio de servicio para el cual el tiempo de espera estimado sea menor que 45 minutos.

12-7. Considere una cola de espera de un solo canal. Suponga que el modelo básico es una aproximación razonable a su operación. Haga un comentario sobre el siguiente esquema para estimar λ:
1. Sea que N es igual al número de llegadas entre 8:00 a.m. y 4:00 p.m.
2. Sea que $\lambda = 8/N$.

•• **12-8.** Considere el modelo básico. Sea que $\lambda = 5$, y trace la cantidad esperada en el sistema para $\mu =$ 6, 7,..., 15.

•• **12-9.** Considere el modelo básico. Sea que $\mu = 10$, y trace la probabilidad de que el sistema esté vacío para $\lambda = 0, 1,..., 10$.

12-10. Utilice las respuestas al problema 12-6 para mostrar que la ecuación de flujo de Little es válida.

•• **12-11.** Utilice la ecuación de flujo de Little y el hecho que $L = \lambda/(\mu - \lambda)$ en el modelo básico, para deducir una expresión para W.

•• **12-12.** Utilice la ecuación de flujo de Little, y la expresión para tiempo medio de servicio, así como el hecho de que $L = \lambda/(\mu - \lambda)$ en el modelo básico, para deducir la expresión para W_q.

12-13. En Homeburg Savings and Loan, los clientes que desean comprar certificados de depósito se forman en una sola cola y son atendidos por un ejecutivo del banco específico con base en "primeras llegadas, primeras atenciones". El tiempo de servicio está normalmente distribuido con una media de cinco minutos y una desviación estándar de un minuto. Los clientes llegan a una tasa de uno cada ocho minutos. Un estudio de tiempo muestra que los clientes pasan en promedio 11.833 minutos en el sistema (es decir, esperando y siendo atendidos). ¿Cuál es la cantidad promedio de personas en el sistema?

12-14. Una doctora pasa, en promedio, 20 minutos con sus pacientes. Si el tiempo estimado de espera es de media hora, ¿cuál es el tiempo estimado en la cola de espera?

••• **12-15.** Suponga que, en el problema 12-14, se determina que los pacientes llegan a una tasa de siete por hora. Haga un comentario sobre este problema.

12-16. Resuelva del inciso (a) al (e) del problema 12-6 utilizando el modelo generalizado para el caso en el cual la varianza en la distribución del tiempo de servicio es igual a su media.

12-17. Homeburg Savings and Loan emplea tres cajeros los sábados. El tiempo interarribos y el tiempo de servicio a los clientes tienen ambos una distribución exponencial. Los clientes llegan a una tasa de 20 por hora, y el tiempo medio de servicio es de seis minutos. Los clientes forman una sola cola de espera, y son atendidos por el primer cajero disponible. Bajo condiciones de estado estable, encuentre:
(a) La probabilidad de que no haya clientes esperando o siendo atendidos.
(b) La cantidad de gente estimada en la cola de espera.
(c) El tiempo de espera estimado en la cola de espera.
(d) El tiempo de espera estimado.
(e) La cantidad estimada de gente en el sistema.

••• **12-18.** Darden Business School tiene diez conexiones Ethernet de alta velocidad a Internet para uso del profesorado. Si un miembro del profesorado intenta registrarse y todas las conexiones están ocupadas, se le dice que el servidor está ocupado y debe intentarlo de nuevo más tarde. Para estimar las características del sistema, el director de tecnología de la información desea saber los valores en estado estable de las características, suponiendo una población solicitante finita de 100 y una cola de espera infinita. (Ésta es una aproximación, porque los miembros del profesorado que son rechazados por el sistema deben intentarlo de nuevo.) Cada miembro del profesorado desea examinar la World Wide Web una vez cada ocho horas en promedio, y el tiempo interarribos está distribuido exponencialmente. Los miembros del profesorado se pasan en promedio 30 minutos navegando por la Web una vez que están conectados, distribuidos de manera exponencial. Encuentre:
(a) La probabilidad de que todos los puertos estén desocupados.
(b) La cantidad de gente estimada en la cola de espera.
(c) El tiempo de espera estimado en la cola.
(d) El tiempo de espera estimado.
(e) La cantidad esperada en el sistema.

12-19. Describa con sus palabras un sistema de colas de espera $M/D/3$.

12-20. Para el problema 12-18, estime la probabilidad de que todas las conexiones estén ocupadas utilizando la plantilla de hoja de cálculo ("finiteQ") presentada en el capítulo. (Suponga un modelo $M/G/s$ con eliminación de clientes bloqueados, una población solicitante infinita y una tasa de llegadas que sea 100 veces la de un solo miembro del profesorado.)

••• **12-21.** STECO tiene 100 representantes de ventas en Estados Unidos. Envían los pedidos a una oficina central, donde un empleado de oficina, utilizando un sistema de control de inventarios central, confirma la disponibilidad del producto, el precio y la fecha de entrega. El representante llama directamente desde la oficina del cliente antes de firmar un contrato. Las llamadas son mantenidas en la cola de espera y atendidas por el primer oficinista disponible con base en un sistema de "primeras llegadas, primeras atenciones". Las llamadas llegan a una tasa de 40 por hora, y el tiempo medio de servicio es de seis minutos. La administración estima que la llamada de un representante de ventas y la colocación de su pedido cuesta $20 por hora, mientras que son $12 por hora utilizar un empleado de oficina. Haga un modelo de esta situación como una cola de espera *M*/*M*/*s* con una población solicitante infinita, y calcule el costo total por hora esperado si STECO contrata cinco empleados de oficina.

•• **12-22.** Encuentre el costo total esperado para el sistema del problema 12-21 si STECO emplea seis oficinistas.

•• **12-23.** Utilice las soluciones de los problemas 12-21 y 12-22 para determinar el valor de la relación C_s/C_w en la cual a STECO le sea indiferente emplear cinco o seis empleados de oficina.

••• **12-24.** En una celda específica de manufactura, un reparador tiene que dar mantenimiento a cuatro máquinas. Para las máquinas, el tiempo entre fallas está distribuido exponencialmente, con un promedio de cuatro horas. En promedio, toma media hora arreglar una máquina.

(a) Encuentre la probabilidad de que haya 0, 1, 2, 3 o 4 máquinas en reparación.
(b) Encuentre la cantidad promedio de máquinas en reparación.

•• **12-25.** Un conmutador telefónico tiene siete líneas. Las llamadas llegan a una tasa de dos por minuto, y el tiempo interarribos tiene una distribución exponencial. Las conversaciones tienen una distribución normal, con una media de cinco minutos y una desviación estándar de un minuto. Cuando las siete líneas están ocupadas, quien llama simplemente recibe una señal de ocupado.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente tres líneas estén ocupadas?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema esté totalmente ocupado?
(c) ¿Cuál es la cantidad promedio de servidores ocupados?

•• **12-26.** Un grupo de investigación de mercados tiene tres entrevistadores en cabinas adyacentes en un centro comercial suburbano. Una persona interpela a la gente que camina por el centro y les pregunta si están dispuestos a ser entrevistados. Ellos estiman que los clientes que acceden a la entrevista llegan a una tasa de 15 por hora, y el tiempo interarribos tiene una distribución exponencial. En promedio, la entrevista ocupa 15 minutos. Si todas las cabinas están ocupadas, la persona que ha accedido a ser entrevistada no espera y simplemente se va a atender sus asuntos.

(a) Haga un comentario sobre el siguiente enunciado: Dado que $\lambda > \mu s$, este sistema crecerá sin límite.
(b) Calcule la probabilidad de que exactamente un entrevistador esté ocupado.
(c) Encuentre la probabilidad de que los tres entrevistadores estén ocupados.
(d) Encuentre la cantidad promedio de entrevistadores ocupados.

12-27. Considere de nuevo la esclusa La Crosse mencionada en los problemas 12-1 y 12-6. Suponga que la media de tiempo interarribos es de 60 minutos y que en promedio toma 30 minutos mover la barcaza a través de la esclusa, pero que la desviación estándar de este tiempo de servicio es de tres minutos. Vuelva a responder los incisos (a) a (e) del problema 12-6. ¿Cómo cambiaron sus respuestas, y por qué?

12-28. Las solicitudes de reparación son manejadas por un reparador general en un complejo de departamentos con base en "primeras llegadas, primeras atenciones". Las solicitudes llegan a una tasa de una por hora en promedio. El tiempo que le toma al reparador hacer la reparación está normalmente distribuido, con una media de 30 minutos y una desviación estándar de 15 minutos. ¿Qué tan largo es en promedio el tiempo entre la solicitud de una reparación y la terminación de la misma?

•• **12-29.** Larry Lujack no está feliz con los largos tiempos de entrega que está teniendo que cotizar a los clientes (vea la sección 12.10). Él piensa que PROTRAC empezará a perder el negocio ante sus competidores, que pueden prometer tiempos de entrega menores. Larry inicialmente supuso que los tiempos de proceso estaban exponencialmente distribuidos. Después de examinar más de cerca los datos, descubre que 90% de las veces toma tres horas procesar una unidad, ya sea en la estación de trabajo (WS) 1 o 2, y 10% de las veces toma 13 horas ya sea en una o en otra. Por lo tanto, el tiempo promedio es $0.9 * 3 + 0.1 * 13 = 4.0$ horas. Después de hablar con el supervisor de producción de estas estaciones, se entera de que este largo tiempo se debe a fallas en el equipo cuando se procesa una unidad. De manera invariable, se necesitan 10 horas para reparar el equipo a partir del momento en que falla. Larry ha oído que el mantenimiento preventivo puede reducir la probabilidad de fallas en el equipo y se pregunta cuál será el valor de reducir la probabilidad de falla de 10% a 1%.

(a) Utilice Crystal Ball o @RISK para encontrar el tiempo promedio para terminar 20 unidades y el 99 percentil del tiempo, si en cada estación hay una probabilidad de 10% de fallas en el equipo mientras se procesa una unidad. ¿Cómo se comparan sus respuestas con aquellas de la sección 12.10, donde los tiempos de proceso estaban distribuidos exponencialmente?
(b) Ahora suponga que en cada estación de trabajo hay una probabilidad de 1% de fallas en el equipo mientras se procesa una unidad. ¿Cuál es el valor del mantenimiento preventivo si reduce las fallas en el equipo a este nivel?

••• **12-30.** Suponga que Larry Lujack tiene que prometer otro pedido (observe la sección 12.10). Este pedido es también de 20 unidades, pero el tiempo de proceso promedio es de seis horas por unidad en la estación de trabajo 1 y cuatro horas por unidad en la estación de trabajo 2.

(a) Utilizando el modelo básico, estime el tiempo promedio necesario para completar el pedido.
(b) Suponiendo que los tiempos de proceso tienen una distribución exponencial, utilice una simulación de hoja de cálculo para obtener el tiempo promedio. ¿Cómo se compara con su respuesta del inciso (a)?
(c) Cuando los tiempos de llegada y de servicio tienen una distribución exponencial, entonces en el modelo básico los tiempos de espera más los de proceso están distribuidos exponencialmente. Utilice este hecho para estimar sin simulación el 99 percentil del tiempo que toma terminar 20 unidades.
(d) Utilice Crystal Ball o @RISK para encontrar el 99 percentil del tiempo que toma completar 20 unidades. Compárelo con su respuesta al inciso (c).
(e) Suponga que los tiempos fueron invertidos; esto es, que el procesamiento tomara un promedio de cuatro horas por unidad en la estación de trabajo 1 y seis horas por unidad en la estación de trabajo 2. ¿Puede utilizar el modelo básico para estimar la media y el 99% fráctil? ¿Por qué sí o por qué no? Utilice la simulación y compárela con sus respuestas a los incisos (b) y (d).

Caso práctico ¿Cuántos operadores?

L. L. Bean está consciente de la importancia que tienen las personas para que a su vez él tenga su propio éxito. El énfasis en la capacitación y las relaciones laborales nos dice que L. L. Bean comprende un hecho básico de la administración: las personas juegan un papel importante para determinar qué tan bien opera la mayor parte de los sistemas. Es obvio que una preocupación por las personas dentro de una organización se refleja en la manera en que los individuos son tratados cotidianamente. Puede no ser tan obvio que esta misma preocupación juegue un papel importante al diseñar sistemas empresariales.

Los pedidos por correo son el núcleo central de los negocios de L. L. Bean. Este negocio está basado en pedidos recibidos por teléfono. Las líneas telefónicas de Bean están abiertas 24 horas al día, 365 días al año. Tienen una tasa promedio de 78,000 llamadas al día. Un momento de reflexión sugiere que estas llamadas no llegan siguiendo una tasa uniforme. Resulta claro que existen efectos estacionales, así como variabilidad cada día. Para cumplir su necesidad de operadores de teléfonos, Bean ofrece tres tipos de convenios de trabajo: tiempo completo, medio tiempo permanente y temporal. Esta estrategia permite una gran flexibilidad para ajustar el número de operadores en servicio en cualquier momento. También da flexibilidad a los empleados, que pueden estructurar un convenio que se ajuste a otras demandas de su tiempo.

Sin embargo, la molesta pregunta permanece: "¿Cuántos operadores necesita Bean, y cuándo los necesita?" Parece claro que la empresa desea equilibrar el servicio al cliente con el gasto en personal. Su método es considerar cada una de las 168 horas de la semana como un periodo de asignación de personal. Para cada hora, se hace un modelo del sistema como una cola de espera *M*/*M*/*s*; esto es, una cola de espera con múltiples servidores, con tiempos de llegada y de servicio exponenciales y *s* servidores (operadores). La tasa de llegadas y la tasa de servicio están estimadas a partir de datos históricos. El equilibrio en los costos se hace de manera intuitiva: un estándar de servicio que la administración considera apropiado es la base del diseño. En particular, el sistema de Bean está diseñado de forma que no más de 15% de las llamadas espere más de veinte segundos antes de encontrar un operador.

Observemos una versión simplificada de este modelo. Suponga que hay una sola línea telefónica que responde a quienes llaman al número 1-800 en el periodo de 1 a.m. a 5 a.m. (por supuesto, un horario drámaticamente lento). La empresa ha reunido algunos datos sobre esta línea (anexo 1).

Podemos ver que la primera llamada llega a los 0.45 minutos y toma 3.66 minutos procesar el pedido por un total de $51.40. Cuando el siguiente cliente llama a los 0.945 minutos, el operador todavía está atendiendo al primer cliente, así que él o ella obtienen una señal de ocupado. La hoja de cálculo (BEAN.XLS) tiene datos de las primeras 100 llamadas telefónicas.

Preguntas

1. Haga un análisis de los datos para determinar cuál es la duración promedio de una llamada. ¿Cuál es el tiempo interarribos promedio? ¿Cuál es el valor promedio del pedido?
2. Trace el histograma de estos datos y decida si está de acuerdo en que una distribución exponencial es la distribución adecuada para utilizarse en la tasa de llegadas. ¿Para la tasa de servicio? (SUGERENCIA: Crystal Ball tiene una característica interconstruida para ajustar datos como éstos a la mejor distribución probabilística.)
3. ¿Qué porcentaje del tiempo está ocupado un operador?
4. ¿Qué porcentaje de las llamadas se pierde debido a la señal de ocupado?

El modelo actual da una señal de ocupado si alguien más está siendo atendido, pero L. L. Bean ciertamente podría añadir más líneas y poner a los clientes en espera hasta que su único operador sea capaz de atenderlos. Después de que esas líneas adicionales estén llenas, los otros clientes recibirán la señal de ocupado. Suponga que el costo fijo de cada línea adicional es de $35 al mes y que la llamada efectuada promedio al número 1-800 le cuesta a la empresa $2 adicionales en promedio por llamada. L. L. Bean se pregunta cómo analizar los pros y los contras si añadiera la capacidad de poner a los clientes en espera. Suponga que existe un margen de utilidad de 45% en todos los pedidos colocados.

Más preguntas

5. Utilice la plantilla "finiteQ" para analizar el número aumentado de llamadas que se podría manejar si L. L. Bean añadiera 1, 2, 3, 4 o 5 líneas extras. ¿Cuáles ingresos y utilidades adicionales se generarían para cada uno de estos escenarios?
6. ¿La utilidad adicional vale la pena en comparación con el costo esperado? ¿Cuál es el número óptimo de líneas que se debe añadir?

ANEXO 1 Datos de pedidos telefónicos

E5 = =SI(C5=0,B5+D5,E4)

	A	B	C	D	E	F
1		Llegada		Duración de la llamada		
2	Cliente #	(minutos)	¿Ocupado?	(minutos)	Fin del servicio	Monto del pedido
3	1	0.452	0	3.660	4.112	$ 51.40
4	2	0.945	1	ND	4.112	ND
5	3	7.553	0	2.086	9.639	$ 58.12
6	4	10.803	0	1.217	12.020	$ 55.86
7	5	12.217	0	1.914	14.131	$ 37.81
8	6	16.426	0	0.319	16.745	$ 61.82
9	7	18.136	0	1.012	19.148	$ 43.44
10	8	25.242	0	6.883	32.125	$ 49.15
11	9	27.753	1	ND	32.125	ND
12	10	30.159	1	ND	32.125	ND
13	11	31.395	1	ND	32.125	ND
14	12	32.042	1	ND	32.125	ND
15	13	32.380	0	0.049	32.429	$ 37.75
16	14	36.803	0	2.165	38.968	$ 56.18
17	15	36.911	1	ND	38.968	ND
18	16	40.864	0	2.434	43.299	$ 63.83
19	17	45.586	0	5.860	51.445	$ 59.18
20	18	46.211	1	ND	51.445	ND

Referencias

Edwin Landauer y Linda Becker, "Reducing Waiting Time at Security Checkpoints," en *Interfaces,* 19, núm. 5 (1989), pp. 57–70.

Richard Larson, Michael Cahn, y Martin Shell, "Improving the New York City Arrest-to-Arraignment System," en *Interfaces,* 23, núm. 1 (1993), pp. 76–96.

CAPÍTULO

13

Pronósticos

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN — Pronóstico de mejoras en L. L. Bean

L. L. Bean es un minorista ampliamente conocido de productos y ropa de alta calidad para el campismo y la cacería. La mayor parte de sus ventas se genera a través de pedidos telefónicos (vía un servicio 800), que fue introducido en 1986. El 10% de los $870 millones de las ventas de 1993 provino de transacciones en tienda y 18% fue pedido por correo, lo que deja la mayor parte (72%) a pedidos recibidos en el centro donde se toman las llamadas de la empresa.

Las llamadas al centro telefónico de L. L. Bean se clasifican en dos grupos principales: telemercadeo (TM) y preguntas por teléfono (PT), cada una con su propio número 800. Las llamadas TM son principalmente para colocar los pedidos que genera la gran mayoría de las ventas de la empresa. Los que llaman a PT son principalmente clientes que preguntan sobre el estado de sus pedidos, informan de problemas sobre los pedidos, etc. Entre estas dos clases, el volumen de llamadas y su duración promedio son bastante diferentes. El volumen anual de llamadas TM es muchas veces superior que el volumen de llamadas PT, pero su duración promedio es mucho menor. Los agentes PT son responsables de atender las preguntas de los clientes en una diversidad de áreas y requieren capacitación especial. Por lo tanto, es importante pronosticar con precisión por separado el volumen de llamadas entrante tanto para PT como para TM, a fin de programar apropiadamente estos dos grupos diferentes de servidores.

El verdadero objetivo de estos pronósticos es la tercera semana futura. Una vez que el pronóstico está hecho, los programadores pueden elaborar un horario semanal para sus operarios y dárselo con dos semanas de anticipación. Los pronósticos imprecisos resultan muy costosos para L. L. Bean, debido a que provocan un desequilibrio entre la oferta y la demanda. Cuando hay menos operarios TM que los necesarios se incrementan los costos de oportunidad, debido a la disminución en ingresos por pedidos perdidos (un porcentaje de los clientes que no se conectan de inmediato, abandonan la llamada y no vuelven a llamar). Cuando están presentes menos operarios PT que los necesarios, disminuye la satisfacción general de los clientes y se afecta su lealtad. En ambos casos, la falta de personal lleva a tiempos de cola de espera excesivos, lo cual provoca que los cargos de teléfono por conexión aumenten drásticamente. Por otro parte, si en cualquiera de los grupos sobra personal, se incurre en una penalización obvia por costos de mano de obra excesivos debido al número de agentes en servicio que son subutilizados.

Las decisiones de programación de personal serían bastante rutinarias si no fuera por la naturaleza errática y la extrema estacionalidad de los negocios de L. L. Bean. Por ejemplo, el periodo de tres semanas antes de Navidad puede salvar o hundir el año, ya que casi 20% de las llamadas anuales se reciben durante este corto lapso. Por lo general, durante este periodo L. L. Bean duplica el número de operarios y cuadruplica la cantidad de líneas telefónicas. Después de este lapso se presenta, por supuesto, el problema completamente opuesto, un proceso declinante. Además, durante todo el año existe un patrón muy fuerte en los días de la semana en ambos tipos de llamadas, con un volumen de llamadas más alto los lunes que se reduce de manera monótona hasta llegar al mínimo los domingos.

Otro factor que el modelo de pronóstico debe considerar es el efecto de los envíos de catálogos. Éstos se hacen generalmente de forma que la mayor parte de los catálogos lleguen alrededor del martes, lo que altera bastante el patrón normal de las llamadas. Muchos clientes ansiosos harán un pedido de inmediato, lo que crea una oleada de nuevas llamadas alrededor de la hora del "envío". El nuevo modelo de pronóstico que se desarrolló tenía mucha mayor precisión que el método anterior de L. L. Bean y fue capaz de producir un error porcentual medio absoluto de 7.4% para el grupo TM y 11.4% para el grupo PT en cinco años de datos históricos. Hasta ahora, en pronósticos para tres semanas en el futuro, el nuevo modelo de pronóstico ha tenido aproximadamente la misma precisión que demostró con datos históricos. Se estima que la mayor precisión conseguida por estos modelos se traducirá en $300,000 en ahorros anuales para L. L. Bean gracias a una programación más eficiente. (Véase Andrews *et al.*)

13.1 INTRODUCCIÓN

La fecha es 15 de junio de 1941. Joachim von Ribbentrop, enviado especial de Hitler, está reunido en Venecia con el conde Ciano, el ministro italiano de relaciones exteriores, y von Ribbentrop dice: "Mi querido Ciano, no puedo decirle nada todavía, ya que todas las decisiones las tiene el Führer encerradas en su impenetrable pecho. Sin embargo, una cosa es segura: si atacamos, la Rusia de Stalin quedará borrada del mapa en ocho semanas" (véase Bullock). Nueve días después, la Alemania nazi iniciaba la operación Barbarrosa y declaraba la guerra a Rusia. Con esta decisión se puso en marcha la cadena de eventos que llevó a la caída del Tercer Reich, y el curso de la historia cambió de manera dramática.

A pesar de que pocas decisiones tienen esta importancia, claramente se ve que muchas de las más importantes tomadas por individuos y organizaciones dependen de manera crucial de una estimación del futuro. Por lo tanto se esperan de manera ferviente, y en algunos casos se persiguen con diligencia, predicciones o pronósticos con una precisión mayor a la lograda por el Estado Mayor Alemán. Existen unos cuantos dichos "sabios" que ilustran las promesas y frustraciones de los pronósticos:

"Es difícil hacer un pronóstico, especialmente si se trata del futuro."

"Lo difícil no es hacer un pronóstico, sino hacerlo de manera correcta."

"¡Los números, si los torturas lo suficiente, confesarán cualquier cosa!"

El pronóstico económico, considerado por sí mismo, es una actividad importante. Las políticas gubernamentales y las decisiones empresariales se basan en pronósticos del producto interno bruto (PIB), del nivel de desempleo, de la demanda para refrigeradores, etc. En las más grandes empresas de seguros, es difícil encontrar un departamento de inversiones que no tenga un contrato celebrado con algún experto o empresa que le prepare pronósticos económicos de manera periódica. Miles de millones de dólares de inversión en hipotecas y bonos están influidos por estos pronósticos. Más de 2,000 personas acuden cada año al Annual Forecast Luncheon, organizado por la Universidad de Chicago, para escuchar las opiniones de tres economistas sobre el panorama económico. Los datos son apabullantes. Los pronósticos juegan un papel cada vez más trascendental en la empresa moderna.

No sólo los pronósticos son cada vez más importantes, sino que los modelos cuantitativos desempeñan un papel cada vez más crucial en la función de pronosticar. Claramente hay también un crecimiento continuo en el uso de modelos de pronósticos cuantitativos en todos los niveles en la industria y en el gobierno. Un ejemplo muy visible es el uso generalizado de programas de control de inventarios que incluyen una subrutina de pronóstico. Otro ejemplo es la dependencia de varias industrias (aerolíneas, hoteles, automóviles de renta, cruceros) del sector económico de servicios en los pronósticos precisos de la demanda, como entrada para sus complejos optimizadores matemáticos usados en la administración de los ingresos (por ejemplo, ¿qué tanto sobreboletaje? ¿cuántas unidades deben estar disponibles, para cada nivel diferente de descuento?). Para entidades económicas como el PIB o los tipos de cambio de monedas, actualmente muchas empresas dependen de modelos econométricos para sus pronósticos. Estos modelos, que consisten en un sistema de ecuaciones estadísticamente estimadas, han tenido un considerable impacto en los procesos de decisiones, tanto en la industria como en el gobierno.

Hay muchas maneras de clasificar los modelos de pronóstico y la terminología varía según la clasificación. Por ejemplo, uno puede referirse a modelos a "largo plazo", de "plazo medio" y de "corto plazo". Existen modelos de "regresión", modelos de "extrapolación" y modelos "condicionales" o "basados en precedentes", así como modelos del "vecino más próximo". La distinción principal que emplearemos será entre *técnicas de pronóstico cuantitativas* y *cualitativas*.

13.2 PRONÓSTICOS CUANTITATIVOS

Los modelos de pronósticos cuantitativos poseen dos importantes y atractivas características:

1. Están expresados en notación matemática. Por lo tanto, establecen un registro, carente de toda ambigüedad, sobre cómo se prepara el pronóstico. Esto es un excelente vehículo para una comunicación clara sobre el pronóstico entre aquellos a quienes concierne. Aún más, proporcionan la oportunidad de una modificación y mejoría sistemáticas de la técnica de pronóstico. En un modelo cuantitativo se pueden modificar los coeficientes y/o agregar términos hasta que el modelo dé buenos resultados. (Esto supone que la relación expresada en el modelo sea fundamentalmente sólida.)

2. Usando hojas de cálculo y computadoras, los modelos cuantitativos pueden basarse en una increíble cantidad de datos. Por ejemplo, una importante empresa petrolera estaba considerando la reorganización y expansión de sus instalaciones de comercialización nacional (estaciones de gasolina). Todos comprendían que se trataba de una decisión crucial para la empresa. Tan sólo el monto propuesto de inversión de capital, sin mencionar la posible influencia en ingresos provenientes de la venta de gasolina, indicaban que esta decisión tenía que ser tomada por la junta directiva. A fin de evaluar las estrategias alternativas de expansión, la junta necesitó pronósticos de la demanda de gasolina en cada una de las regiones comerciales (se incluyeron más de 100 regiones) para cada uno de los siguientes 15 años. Cada una de estas 1,500 estimaciones estuvo basada en una combinación de varios factores, incluyendo población y nivel de construcciones nuevas en cada región. Sin computadoras y modelos cuantitativos, en general hubiera sido imposible realizar un estudio a ese nivel de detalle. De manera similar, sin modelos cuantitativos y computadoras no podrían construirse sistemas de control de inventarios para literalmente miles de artículos que requieren pronósticos que deben actualizarse cada mes.

La literatura técnica relacionada con los modelos de pronósticos cuantitativos es enorme, y en ciertas áreas es necesario un elevado nivel de conocimientos técnicos, principalmente estadísticos, para comprender las complejidades de los modelos. En las dos secciones siguientes haremos un resumen de algunas de las características y aplicaciones importantes de dichos modelos. Haremos una distinción entre dos categorías con base en el planteamiento subyacente. Éstas son los *modelos causales* y los *modelos de series de tiempo*.

13.3 MODELOS DE PRONÓSTICOS CAUSALES

En un **pronóstico causal**, el pronóstico de la cantidad que nos interesa va “montada” sobre otra cantidad o conjunto de cantidades. En otras palabras, nuestro conocimiento del valor de una variable (o quizás de algunas variables) nos permite pronosticar el valor de otra variable. En términos más precisos, suponga que y indique el valor real de alguna variable de interés, y que $\hat{y}$ sea un valor pronosticado de esa variable. Entonces, en un modelo causal,

$$\hat{y} = f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$$

donde f es una regla de pronóstico, o función, y $x_1, x_2,..., x_n$ es un conjunto de variables.

En esta representación, las variables x a menudo se conocen como *variables independientes*, en tanto que $\hat{y}$ es la *variable dependiente* o *de respuesta*. La idea es que conocemos las variables independientes y las utilizamos en el modelo de pronóstico para predecir el valor de la variable dependiente.

Piense en los siguientes ejemplos:

1. Si y es la demanda de alimentos para bebés, entonces x podría ser el número de niños entre siete y 24 meses de edad.
2. Si y es la demanda de accesorios de plomería, x_1 y x_2 podrían ser la cantidad de inicios de construcción de casas y el número de casas existentes, respectivamente,
3. Si y es el volumen del tránsito en cierta autopista, x_1 y x_2 podrían ser el volumen de tránsito en cada una de las dos autopistas cercanas.
4. Si y es el rendimiento de la materia prima utilizable por kilo de ingredientes en una planta química específica, entonces x podría ser la misma cantidad, producida por una planta experimental a pequeña escala.

Para que un modelo causal resulte útil, hay que conocer de antemano cuáles son las variables independientes, o bien debe ser posible pronosticarlas con mayor facilidad que $\hat{y}$, la variable dependiente. Por ejemplo, saber cuál es la relación funcional entre los kilos de col agria y la cantidad de salchichas vendidas en Milwaukee durante un mismo año podría interesar a los sociólogos, pero a menos que el consumo de col agria sea fácilmente predecible, la relación es de escaso valor para cualquiera en el negocio del pronóstico de venta de salchichas. De manera más general, al examinar resultados anteriores las empresas a menudo encuentran que su venta mensual está directamente relacionada con el PIB de cada mes, y por lo tanto, piensan que se podría elaborar un buen pronóstico utilizando el valor del PIB del mes siguiente. El único problema es que esta cantidad no es conocida, o puede que sólo sea un pronóstico, y por lo tanto no constituye una verdadera variable independiente.

Para utilizar un modelo de pronóstico causal, entonces, se deben cumplir dos condiciones:

1. Debe haber una relación entre los valores de las variables independiente y dependiente, de forma que la primera proporcione información sobre la segunda.
2. Los valores de las variables independientes deben ser conocidos y estar disponibles para quien hace el pronóstico en el momento en que éste deba hacerse.

Antes de seguir adelante, volvamos a enfatizar lo que significa el punto 1. Sólo porque exista una relación matemática, ello no es garantía de que realmente haya una causa y un efecto. Desde que el Super Tazón se instauró en 1967, casi siempre que gana un equipo de la NFC el indicador Standard & Poor 500 en la bolsa de valores aumenta en ese año. Cuando gana un equipo de la AFC, el mercado usualmente baja. ¡Durante 30 años esta regla ha funcionado 90% de las veces (27 de 30)! Si usted realmente creyera que hay una relación significativa entre estas dos variables (el equipo que gana el Super Tazón y el desempeño en el mercado subsecuente de ese año), entonces en 1997 usted hubiera invertido todos sus ahorros (o quizás incluso pedido prestado) en el mercado, porque al principio de ese año los Empacadores de Green Bay (NFC) derrotaron a los Patriotas de Nueva Inglaterra (AFC).

Un método comúnmente utilizado para crear un modelo de pronóstico causal se conoce como **ajuste de curvas**.

AJUSTE DE CURVAS: LA EXPANSIÓN DE UNA EMPRESA PETROLERA

La idea fundamental del ajuste de curvas está ilustrada de manera sencilla por un modelo, en el cual se utiliza una variable independiente para predecir el valor de la variable dependiente. Como modelo específico, considere una empresa petrolera que está planeando expandir su red de modernas estaciones de autoservicio de gasolina. La empresa planea utilizar el flujo del tránsito (medido como la cantidad promedio de automóviles por hora) para pronosticar las ventas (medidas en ventas promedio por hora en dólares).

La empresa ha tenido cinco estaciones en operación por más de un año, y ha utilizado datos históricos para calcular los promedios que aparecen en la figura 13.1 (OILCOMP.XLS). Estos datos aparecen trazados en la figura 13.2. Dicho gráfico a menudo es conocido como **diagrama de dispersión**. A fin de crear este diagrama (o gráfico) en Excel, hay que hacer lo siguiente:

1. Resalte el rango de datos (B2:C6); después haga clic en el Asistente para gráficos.
2. En el primer paso, indique que desea el tipo de gráfico *XY* (Dispersión) (la quinta opción), después indique que desea el primer subtipo de gráfico de dispersión que puede elegir (sólo puntos de datos, sin líneas que los conecten).
3. En el segundo paso, haga clic en "Siguiente>", porque todas las opciones predeterminadas de Excel están correctas.
4. En el tercer paso, escriba la etiqueta del eje *X* como "Automóviles/hora" y la etiqueta del eje *Y* como "Ventas/hora ($)"; después haga clic en "Siguiente>".

FIGURA 13.1

Datos de ventas y del tránsito

	A	B	C
1	Estación	Automóviles por hora	Ventas por hora
2	1	150	$ 220.00
3	2	55	$ 75.00
4	3	220	$ 250.00
5	4	130	$ 145.00
6	5	95	$ 200.00

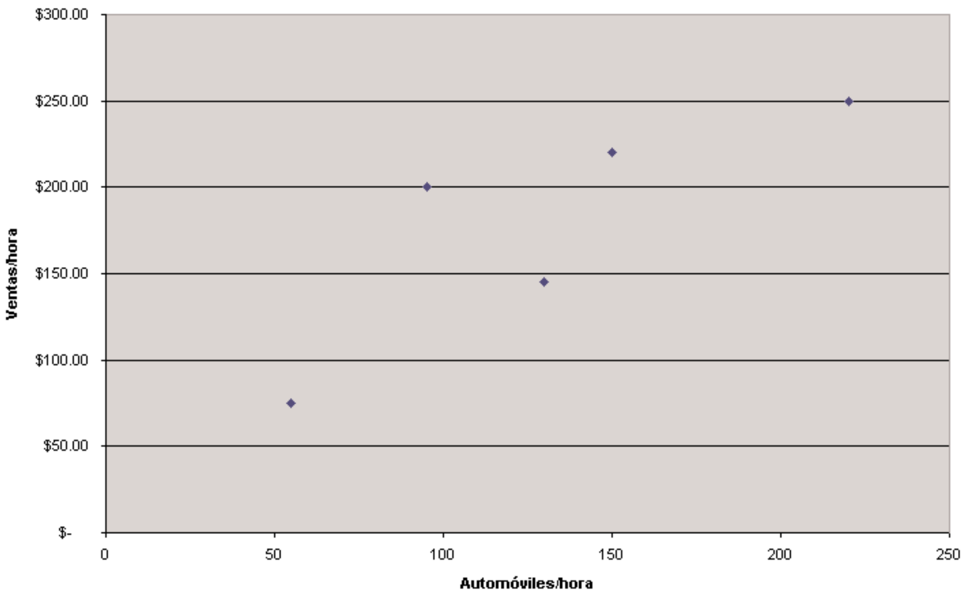


FIGURA 13.2

Trazo de dispersión de ventas en comparación con el tránsito

5. En el último paso, haga clic en "Como hoja nueva" para colocar el gráfico en una hoja de trabajo por separado con nombre "Gráfico1"; después haga clic en "Terminar".

Ahora deseamos utilizar estos datos para preparar una función que nos permita pronosticar las ventas en cualquier ubicación particular, midiendo el flujo de tránsito en ese lugar e integrando ese valor a la función que construyamos. En particular, suponga que el flujo de tránsito en la ubicación propuesta de Buffalo Grove es de 183 automóviles por hora. ¿Cómo podemos utilizar los datos en la figura 13.2 para pronosticar las ventas en ese lugar?

Ajuste por mínimos cuadrados El **método de mínimos cuadrados** es un procedimiento formal para el ajuste de curvas. Es un proceso en dos pasos:

1. Seleccione una forma funcional específica (por ejemplo, una línea recta o una curva cuadrática).
2. Con el conjunto de funciones especificadas en el paso 1, elija la función específica que minimice la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los puntos de datos y los valores de la función.

Para demostrar este proceso, considere el ejemplo de ventas-flujo de tránsito. En el paso 1, suponga que seleccionamos una línea recta; esto es, limitamos nuestra atención a funciones de la forma $y = a + bx$. El paso 2 está ilustrado en la figura 13.3. Aquí fueron escogidos valores para a y b (en un momento le mostraremos cómo hacerlo en Excel), fue trazada la línea apropiada $y = a + bx$ y fueron indicadas las desviaciones entre los puntos observados y la función. Por ejemplo,

$$d_1 = y_1 - [a + bx_1] = 220 - [a + 150b]$$

donde
y_1 = ventas/hora reales (observadas) en la ubicación 1 (es decir, 220).
x_1 = flujo de tránsito real (observado) en la ubicación 1 (es decir, 150).
a = intersección (en el eje vertical) de la función en la figura 13.3.
b = pendiente de la función en la figura 13.3.

El valor d_1^2 es una medida de lo cercano que está el valor de la función $[a + bx_1]$ al valor observado, y_1; esto es, indica qué tan bien se ajusta la función en este punto.

Queremos que la función se ajuste bien a todos los puntos. Una medida en general de qué tan bien lo hace, es la suma del cuadrado de las desviaciones, es decir $\sum_{i=1}^{5} d_i^2$. Ahora considere-

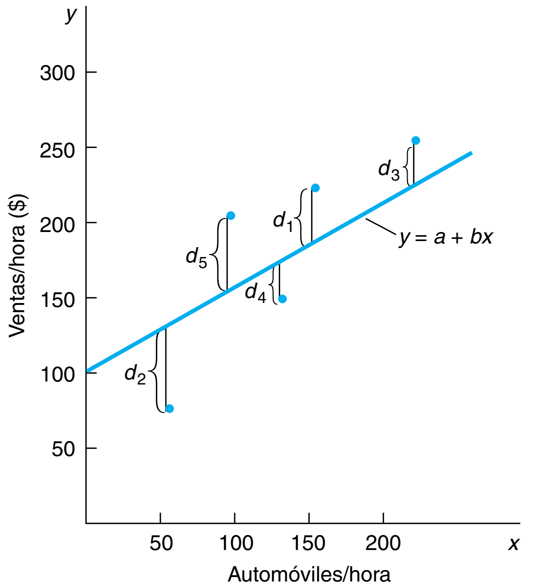


FIGURA 13.3
Método de mínimos cuadrados

mos un modelo de tipo general, con n en vez de cinco observaciones. Entonces, dado que cada $d_i = y_i - (a + bx_i)$, la suma del cuadrado de las desviaciones se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - [a + bx_i])^2 \tag{13.1}$$

Utilizando el método de mínimos cuadrados, seleccionamos a y b para minimizar la suma que aparece en la ecuación (13.1). Pueden utilizarse reglas de cálculo para determinar los valores de a y b que minimicen esta suma. Hace un siglo, los matemáticos no podían determinar cuál era la línea recta que minimizara la desviación o error absoluto $|y_i - \hat{y}_i|$, pero podían utilizar el cálculo para determinar la línea que minimizara el error cuadrático $(y_i - \hat{y}_i)^2$. Por lo tanto, la práctica de realizar pronósticos se ha visto inundada con fórmulas de "mínimos cuadrados" y racionalizaciones acerca de por qué los errores "cuadrados" deben minimizarse. Actualmente, con la llegada de las hojas de cálculo, somos capaces se utilizar otras medidas de error (por ejemplo, la desviación media absoluta [DMA] y el error porcentual medio absoluto [EPMA]) porque las hojas de cálculo, combinadas con el algoritmo Solver, pueden ahora minimizar las sumas de los errores absolutos, o también los errores porcentuales. Estas dos medidas de error, que son más recientes, serán utilizadas y demostradas extensamente en la sección 13.4.

Para continuar con el desarrollo del método tradicional de mínimos cuadrados, el procedimiento es calcular la derivada parcial de la suma en la ecuación (13.1) respecto a a y establecer la expresión resultante igual a cero. Esto nos da una ecuación. Utilizando el mismo procedimiento con b se obtiene una segunda ecuación. Las ecuaciones que resultan de este procedimiento son

$$\sum_{i=1}^{n} -2(y_i - [a + bx_i]) = 0 \quad \text{y l} \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - [a + bx_i]) = 0$$

Recuerde que los valores para x_i y y_i son las observaciones, y que nuestro objetivo es encontrar los valores de a y b que satisfagan estas dos ecuaciones. Se puede demostrar que la solución es

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{13.2}$$

FIGURA 13.4
Cuadro de diálogo Herramienta de regresión de Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	RESULTADOS DE RESUMEN								
2									
3	*Estadísticas de regresión*								
4	R Múltiple	0.8330373							
5	R Cuadrada	0.6939511							
6	R Cuadrada ajustada	0.5919348							
7	Error Estándar	44.176596							
8	Observaciones	5							
9									
10	ANOVA								
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Significancia F*			
12	Regresión	1	13275.28502	13275.29	6.802356	0.079813424			
13	Residual	3	5854.714984	1951.572					
14	Total	4	19130						
15									
16		*Coeficientes*	*Error Estándar*	*t Stat*	*valor-P*	*95% inferior*	*95% superior*	*95% inferior*	*95% superior*
17	Intersección	57.104235	50.38799691	1.13329	0.339471	-103.2530105	217.46148	-103.25301	217.4614796
18	X Variable 1	0.9299674	0.356564467	2.608133	0.079813	-0.204780908	2.06471576	-0.2047809	2.064715761

FIGURA 13.5
Resultados de la regresión

El siguiente paso es determinar los valores de $\sum x_i$, $\sum x_i^2$, $\sum y_i$, $\sum x_i y_i$. Observe que estas cantidades dependen sólo de los datos que hemos observado y que podemos determinarlos mediante operaciones aritméticas simples. Por supuesto, Excel es bastante capaz de hacerlo por nosotros, y de hecho, tiene algunas funciones predefinidas que lo harán de manera automática. Para hacerlo, simplemente

1. Haga clic en Herramientas, después en "Análisis de datos". (Si no aparece como opción en el submenú, necesitará hacer clic en "Complementos" y después seleccionar "Herramientas de análisis").
2. Seleccione "Regresión", lo que hará aparecer el cuadro de diálogo que se muestra en la figura 13.4. Escriba el rango Y como \$C\$2:\$C\$6 y el rango X como \$B\$2:\$B\$6.
3. Indique que deseamos el informe de los resultados en una hoja de cálculo por separado, de nombre "Resultados".
4. Haga clic en Aceptar.

Los resultados, calculados e informados automáticamente por Excel, aparecen en la figura 13.5.

Existe una abundante cantidad de información, pero los parámetros de interés inmediato para nosotros están contenidos en las celdas B17:B18. Observamos que los valores de "Intersección" (a) y de "X Variable 1" se nos reportan como:

$$b = 0.92997$$
$$a = 57.104$$

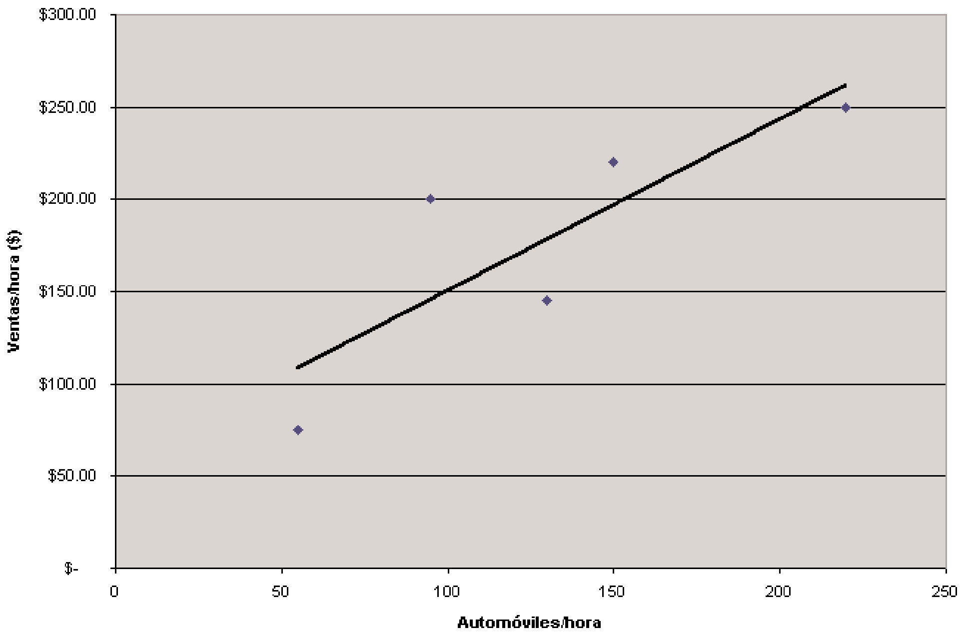


FIGURA 13.6
Trazo de tendencia lineal de mínimos cuadrados

Para agregar la línea de mínimos cuadrados resultante debemos seguir estos pasos:

1. Haga clic en la hoja de cálculo que contiene nuestro trazo de dispersión original (Gráfico 1).
2. Haga clic en las series de datos, de forma que queden resaltados.
3. Haga clic en el menú Gráfico, y a continuación "Agregar línea de tendencia".
4. Para responder al tipo de línea de tendencia que deseamos, haga clic en Aceptar (porque la tendencia lineal es la opción predeterminada).
5. Haga clic en Aceptar.

El resultado se muestra en la figura 13.6 como una línea continua.

Exploremos lo que significa parte de la demás información que se nos dio en los "Resultados del resumen" de la regresión. El valor "Raíz de R" en la celda B5 de la figura 13.5 aparece como 69.4%. Ésta es una medida de lo "cercano del ajuste", igual que la suma de los cuadrados de las desviaciones. Este número representa la estadística R^2 analizada en las clases de estadística básica. Su valor está en el rango de 0 a 1 y nos da una idea de qué cantidad de la variación total en Y respecto a su media está explicada por la nueva línea que hemos dibujado. Dicho de otra manera, la gente que hace estadísticas gusta de hablar de las tres diferentes sumas de errores (suma total de los cuadrados [STC], suma de los errores cuadrados [SEC], y suma de regresión de los cuadrados [SRC]). La relación básica entre ellos es:

$$\text{STC} = \text{SEC} + \text{SRC}$$

y se definen como sigue:

$$\text{STC} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$$

$$\text{SEC} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$\text{SRC} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 \qquad \textbf{(13.3)}$$

SEC es la cantidad que intentamos minimizar con la herramienta Regresión. Esencialmente, la suma de errores cuadrados restantes después de que la regresión haya hecho su parte (SEC) es la variación que no puede ser explicada por la regresión. La cantidad SRC es efectivamente la cantidad de variación total original (STC) que hemos eliminado utilizando nuestra recién descubierta línea de regresión. Otra manera en que R^2 se define es:

$$R^2 = \frac{\text{SCR}}{\text{STC}}$$

Si pudiéramos hallar una línea de regresión perfectamente ajustada (SEC = 0), observaríamos que SRC = STC y que R^2 = 1.0 (su valor máximo). En nuestro caso, R^2 = .694, lo que significa que podemos explicar aproximadamente 70% de la variación de los valores de *Y* mediante nuestra variable explicatoria (*X*), es decir, automóviles por hora.

Ahora regresemos a nuestra tarea original: ¿debemos construir una estación en Buffalo Grove, donde el tráfico es de 183 automóviles/hora? Se llega a nuestra mejor estimación de lo que sería el volumen correspondiente de ventas introduciendo este valor para *X* en nuestra nueva ecuación de regresión:

$$\text{Ventas/hora} = 57.104 + 0.92997 * (183 \text{ automóviles/hora})$$

Esto nos da un pronóstico de ventas/hora de $227.29. ¿Qué grado de confianza tenemos en nuestro pronóstico? Sería agradable ser capaz de establecer un intervalo de confianza de 95% por arriba y por debajo de nuestra mejor estimación. La información que necesitamos para ello también está contenida en el resumen de resultados de Excel. En la celda B7, Excel informa que el error estándar (S_e) es de 44.18. Esta cantidad representa la cantidad de dispersión de los datos reales alrededor de nuestra línea de regresión, y es muy similar en concepto a la SEC. De hecho, su fórmula es

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - k - 1}} \tag{13.4}$$

donde *n* es la cantidad de puntos de datos (cinco en nuestro ejemplo) y *k* es el número de variables independientes (una en nuestro ejemplo). Podemos ver que la ecuación (13.4) es equivalente a

$$= \sqrt{\frac{\text{SEC}}{n - k - 1}}$$

Una vez que tenemos este valor S_e, podemos hacer uso de una regla práctica aproximada basada en la distribución normal, la cual dice que podemos tener una confianza de 68% de que el valor real de las ventas/hora estará dentro de $\pm\ 1S_e$ de nuestro valor predicho ($227.29). De manera similar tenemos 95% de confianza en que el valor real de ventas/hora estará dentro de $\pm\ 2S_e$ de nuestro valor predicho ($227.29), lo que significa que nuestro intervalo de confianza de 95% sería

$$[227.29 - 2(44.18);\ 227.29 + 2(44.18)] \text{ o } [\$138.93;\ \$315.65]$$

Para ser más precisos en estos intervalos de confianza se requiere que calculemos S_p (el error de predicción estándar), que siempre es mayor que S_e pero más difícil de deducir y está más allá del alcance de un enfoque introductorio. Lo que debemos recordar aquí es que cuando estamos tratando de predecir *Y* con base en valores de *X* cercanos a $\bar{X}$, entonces S_p estará muy próximo a S_e. Entre más se alejen de *X* los valores de $\bar{X}$, mayor será la diferencia entre S_p y S_e.

Otro valor de interés en los resultados del resumen es la estadística *t* para la variable *X* y sus valores asociados (celdas D18:G18). La estadística *t* está dada en la celda D18 como 2.61. El valor *P* en la celda E18 es 0.0798. Deseamos tener un valor *P* menor que 0.05. Esto representaría que tenemos un intervalo de confianza de por lo menos 95% de que el parámetro de la pendiente (*b*) es, en términos estadísticos, significativamente diferente de cero (una pendiente de cero sería una línea plana e indicaría que no hay relación entre *Y* y *X*). De hecho, Excel da un intervalo de confianza de 95% a su estimación de *b*. En nuestro caso, tenemos una confianza de 95% de que el valor real de *b* está entre −0.205 y 2.064 (celdas F18 y G18) y por lo tanto no podemos excluir la posibilidad de que el valor real de *b* sea cero.

Por último, la significación *F* dada en la celda F12 es idéntica al valor *P* de la estadística *t* (0.0798) y siempre será así si sólo hay una variable independiente. En caso de que exista más de una variable *X*, la significación *F* pone a prueba la hipótesis de que todos los parámetros de las variables *X* como grupo son, en términos estadísticos significativamente diferentes de cero.

Una última observación antes de pasar a los modelos de regresión múltiple: conforme añada otras variables X, la estadística R^2 siempre aumentará, lo que significa que la SRC ha aumentado. Pero a fin de evitar manipular en exceso los datos, debería usted estar atento en la estadística R^2 ajustada (celda B6), ya que es un indicador más confiable de la verdadera "bondad de ajuste", pues compensa la reducción de la SEC debida a la adición de más variables independientes. Por lo tanto, podría informar un valor ajustado de R^2 menor incluso si R^2 ha aumentado, a menos que la mejora en la SRC esté más que compensada por la adición de nuevas variables independientes.

Debemos señalar que podríamos haber obtenido los mismos valores de parámetro para a y b utilizando el algoritmo Solver (definir nuestra función objetivo como la suma del cuadrado de las desviaciones, hacer que las variables de decisión fueran a y b y después dejar libre a Solver para que intente minimizar nuestra función objetivo no lineal).

Observe que nuestro pronóstico también "predice" una ganancia de $57.10 (el valor de a) cuando no llega ningún automóvil (es decir, automóviles/hora = 0). En este punto sería bueno establecer límites sobre el rango en el cual sentimos que el pronóstico es válido (por ejemplo, de 30 a 250 automóviles) o buscar una explicación lógica. Muchas estaciones de servicio ofrecen "comida rápida" y también operaciones de mostrador. Por lo tanto, "a" podría representar la cantidad de negocios de mostrador (que sería constante independientemente de la cantidad de tránsito).

Ajuste de una función cuadrática El ejemplo anterior ha mostrado cómo hacer *ajustes lineales* para el caso de una variable independiente. Pero el método de mínimos cuadrados puede utilizarse con cualquier número de variables independientes y con cualquier forma de función. Como ejemplo, suponga que queremos ajustar una función cuadrática de la forma

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

a nuestros datos anteriores usando el método de mínimos cuadrados. Nuestro objetivo, entonces, es seleccionar a_0, a_1 y a_2 a fin de minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones, que es ahora

$$\sum_{i=1}^{5} (y_i - [a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2])^2 \tag{13.5}$$

Continuamos el proceso haciendo que las derivadas parciales respecto a a_0, a_1 y a_2 sean iguales a cero. Esto da las ecuaciones

$$\begin{aligned}
5a_0 + \left(\sum x_i\right)a_1 + \left(\sum x_i^2\right)a_2 &= \sum y_i \\
\left(\sum x_i\right)a_0 + \left(\sum x_i^2\right)a_1 + \left(\sum x_i^3\right)a_2 &= \sum x_i y_i \\
\left(\sum x_i^2\right)a_0 + \left(\sum x_i^3\right)a_1 + \left(\sum x_i^4\right)a_2 &= \sum x_i^2 y_i
\end{aligned} \tag{13.6}$$

Éste es un conjunto simple de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Por lo tanto, el nombre general para este ajuste de curva de mínimos cuadrados es "regresión lineal". El término *lineal* no procede del ajuste de una línea recta, sino del hecho de que se están resolviendo ecuaciones lineales simultáneas.

Es sencillo encontrar los valores numéricos de los coeficientes en una hoja de cálculo. Ahora en vez de utilizar la herramienta "Regresión" de Excel, mostraremos el uso del algoritmo Solver. Utilizaremos la nueva hoja de cálculo de nombre "Quadratic" del mismo libro de trabajo OILCOMP.XLS que se muestra en la figura 13.7.

Los pasos para encontrar los valores óptimos para los parámetros (a_0, a_1 y a_2) se indican a continuación:

1. Haga clic en el menú Herramientas y después en "Solver".
2. Complete el cuadro de diálogo Parámetros de Solver como se muestra en la figura 13.8. Haga clic en "Resolver". Básicamente estamos creando un modelo no lineal de optimización sin restricciones donde los tres parámetros (celdas B2:B4) son nuestras variables de decisión (las celdas cambiantes) y nuestra función objetivo es minimizar la suma de los cuadrados de los errores (celda F13).

D7 = =$B$2+$B$3*B7+$B$4*B7^2

	A	B	C	D	E	F
1	**Parámetros**					
2	***a0*** =	0				
3	***a1*** =	0				
4	***a2*** =	0				
5				**Pronóstico**		
6	**Estación**	**Automóviles por hora**	**Ventas por hora**	**Ventas/hora**	**Error**	**Error al cuadrado**
7	1	150	$ 220.00	0	220.00	48,400
8	2	55	$ 75.00	0	75.00	5,625
9	3	220	$ 250.00	0	250.00	62,500
10	4	130	$ 145.00	0	145.00	21,025
11	5	95	$ 200.00	0	200.00	40,000
12						
13					**SUMA=**	177,550

Celda	Fórmula	Cópiese a
D7	= $B$2+$B$3*B7+$B$4×B7^2	D8:D11
E7	= C7−D7	E8:E11
F7	= E7^2	F8:F11
F13	= SUMA(F7:F11)	—

FIGURA 13.7

Hoja de cálculo de tendencia cuadrática

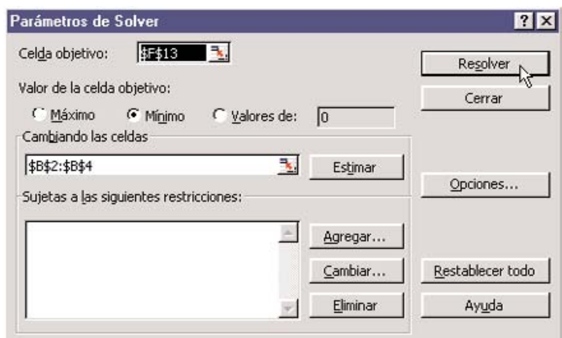


FIGURA 13.8

Cuadro de diálogo de Solver para la tendencia cuadrática

3. Cuando Solver haga aparecer su cuadro de diálogo indicando que ha encontrado una solución, haga clic en Aceptar y verá los resultados que se muestran en la figura 13.9.

   Podemos ver que los parámetros óptimos son:

$$a_0 = -13.586$$
$$a_1 = 2.147$$
$$a_2 = -0.0044$$

lo que nos da una suma de errores al cuadrado de 4954. *Nota*: Excel tiene una función predeterminada para ayudarnos a calcular esta cantidad directamente (es decir, podríamos hacerlo sin las columnas E y F) conocida como =sumxmenosy2 (rango 1, rango2) y aparece en la celda F15 de la figura 13.9. La función toma los valores del segundo rango y los resta de los valores del primero (uno por uno), eleva al cuadrado la diferencia y suma estas diferencias al cuadrado para todos los valores en el rango. Para graficar los datos originales y su función cuadrática, utilizamos el Asistente para gráficos con los siguientes pasos:

1. Resalte el rango de datos original (B7:C11) en la hoja de cálculo “Quadratic”, después haga clic en Asistente para gráficos.
2. En el primer paso, indique que desea el tipo de gráfico *XY* (Dispersión), que es la quinta opción, después indique que desea el primer subtipo de gráfico de dispersión que puede escoger (sólo los puntos de datos, sin líneas que los conecten).

F15 = =SUMAXMENOSY2(C7:C11,D7:D11)

	A	B	C	D	E	F
1	Parámetros					
2	*a0* =	-13.58618463				
3	*a1* =	2.146774483				
4	*a2* =	-0.004381271				
5				Pronóstico		
6	Estación	Automóviles por hora	Ventas por hora	Ventas/hora	Error	Error al cuadrado
7	1	150	$ 220.00	209.8513819	10.15	103
8	2	55	$ 75.00	91.23306603	(16.23)	264
9	3	220	$ 250.00	246.6506672	3.35	11
10	4	130	$ 145.00	191.451012	(46.45)	2,158
11	5	95	$ 200.00	150.8164171	49.18	2,419
12						
13					SUMA=	4,954
14						
15				(Fórmula elegante)	SSE =	4954.4
16						

Celda	Fórmula	Cópiese a
D7	= $B$2+$B$3*B7+$B$4+B7^2	D8:D11
E7	= C7−D7	E8:E11
F7	= E7^2	F8:F11
F13	= SUMA(F7:F11)	—
F15	= SUMAXMENOSY2(C7:C11,D7:D11)	—

FIGURA 13.9
Resultados para los parámetros cuadráticos óptimos

3. En el segundo paso, haga clic en "Siguiente>", porque las opciones predeterminadas de Excel están bien.
4. En el tercer paso, escriba la etiqueta del eje *X* como "Automóviles/hora" y la del eje *Y* como "Ventas/hora($)"; después, haga clic en "Siguiente>".
5. En el último paso, haga clic en "Como hoja nueva" para colocar el gráfico en una hoja de trabajo separada de nombre "Gráfico2"; después haga clic en "Terminar".
6. Haga clic en las series de datos del Gráfico2 de forma que estén resaltadas.
7. Haga clic en el menú Gráfico, seguido por "Agregar línea de tendencia".
8. En respuesta al tipo de línea de tendencia que deseamos, haga clic en "Polinomio" de orden 2.
9. Haga clic en Aceptar y obtendrá el gráfico que se presenta en la figura 13.10.

Para realizar esto mismo con la herramienta "Regresión", debe crear primero una columna para una segunda variable independiente, $X_2 = X_1^2$, y después regresar Y (Ventas/hr) tanto en X_1 (Automóviles/hr) como en X_2 ([Automóviles/hr]^2)]. Dejaremos esto como un ejercicio para el estudiante (observe el problema 13-23).

Comparación de los ajustes lineales y cuadráticos En el método de mínimos cuadrados, hemos seleccionado la suma de los cuadrados de las desviaciones como medida de la "bondad de ajuste". Podemos por lo tanto comparar el ajuste lineal y cuadrático con estos criterios. A fin de hacer esta comparación, tenemos que regresar y utilizar la regresión lineal de la hoja de cálculo "Resultados" y hacer las operaciones correspondientes en la hoja de cálculo "Datos" original. Este trabajo se muestra en la figura 13.11.

Podemos ver que la suma de los cuadrados de las desviaciones para la función cuadrática es de hecho más pequeña que la correspondiente de la función lineal (es decir, $4954 < 5854.7$). De hecho, la función cuadrática nos da más o menos una reducción de 15% en la suma de los cuadrados de las desviaciones. El resultado general tiene que ser válido en esa dirección; esto es, la función cuadrática siempre debe conseguir un mejor ajuste que la función lineal. Una función lineal es, después de todo, un caso especial de una función cuadrática (en la cual $a_2 = 0$). Es obvio entonces que la mejor función cuadrática debe ser por lo menos tan buena como la mejor función lineal.

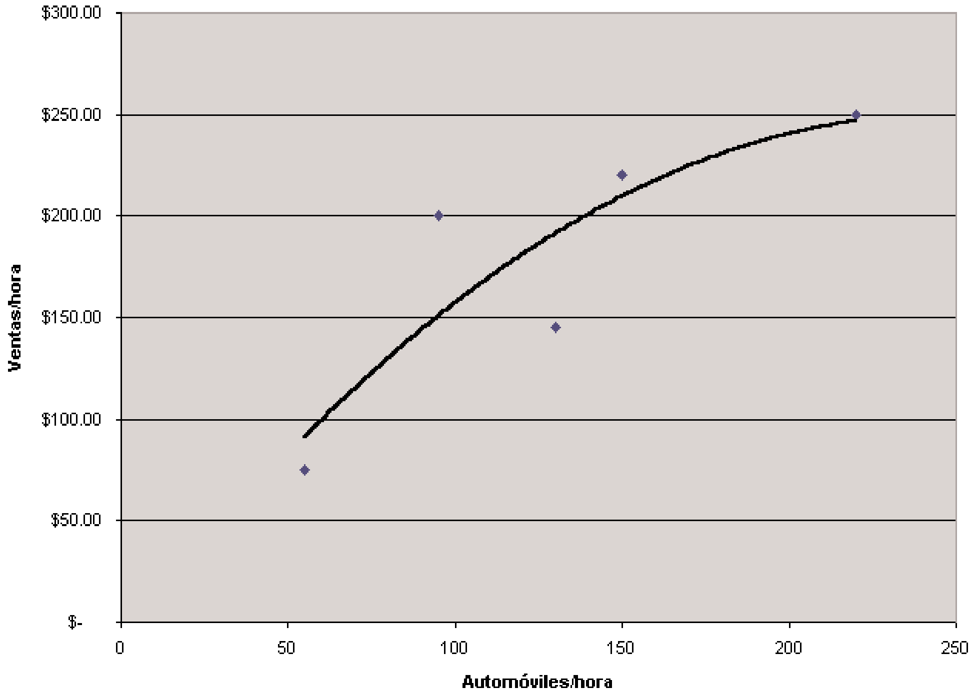


FIGURA 13.10

Ajuste de los datos originales a una función cuadrática por mínimos cuadrados

D2 = =Resultados!$B$17+Resultados!$B$18*B2

	A	B	C	D	E	F
1	Estación	Automóviles por hora	Ventas por hora	Ventas pronosticadas por hora	Error	Error al cuadrado
2	1	150	$ 220.00	196.60	23.40	547.59
3	2	55	$ 75.00	108.25	(33.25)	1,105.72
4	3	220	$ 250.00	261.70	(11.70)	136.82
5	4	130	$ 145.00	178.00	(33.00)	1,089.00
6	5	95	$ 200.00	145.45	54.55	2,975.58
7						
8					SUMA=	5,854.71

Celda	Fórmula	Cópiese a
D2	= Resultados!$B$17+Resultados!$B$18*B2	D3:D6
E2	= C2−D2	E3:E6
F2	= E2^2	F3:F6
F8	= SUMA(F2:F6)	—

FIGURA 13.11

Cálculo de la suma de los errores cuadrados de las desviaciones para los resultados de la regresión lineal

¿QUÉ CURVA AJUSTAR?

Si una función cuadrática es por lo menos tan buena como una función lineal, ¿por qué no escoger una forma todavía más general, como la cúbica o la cuarta, y obtener un ajuste aún mejor? En principio el método puede aplicarse a cualquier forma de función específica. En la práctica, funciones de la forma (otra vez se utiliza para efectos ilustrativos una sola variable independiente)

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

se sugieren a menudo. Dicha función se conoce como función **polinomial de grado *n***, y representa una amplia y flexible clase de funciones (para $n = 2$ tendremos una función cuadrática, $n = 3$ una función cúbica, $n = 4$ una función cuarta, etc.). Uno puede obtener una extraordinaria cantidad de curvas con funciones polinomiales, y por lo tanto dichas funciones son populares entre los que ajustan curvas. Uno debe, sin embargo, avanzar cautelosamente cuando se ajusten datos usando funciones polinomiales. Bajo condiciones bastante generales es posible, por ejemplo, encontrar un polinomio de grado $(k - 1)$ que se ajustará perfectamente a k puntos de datos. Para ser más es-

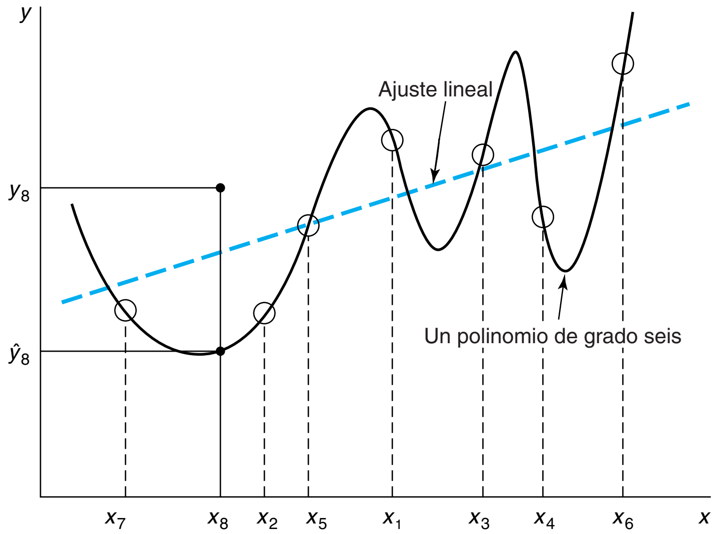


FIGURA 13.12
Un polinomio de grado seis consigue un ajuste perfecto

pecíficos, suponga que tenemos a mano siete observaciones históricas, identificadas como (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 7$. Es posible encontrar un polinomio de grado seis

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_6x^6$$

que pasa exactamente por cada uno de estos siete puntos de datos (véase la figura 13.12).

Este ajuste perfecto (que da cero como suma de los cuadrados de las desviaciones), es sin embargo engañoso, porque no implica tanto como se pudiera pensar respecto al valor de predicción del modelo al usarlo en pronósticos futuros. Por ejemplo, remítase de nuevo a la figura 13.12. Cuando la variable independiente (en algún momento futuro) asume el valor x_8, el verdadero valor de y podría estar dado por y_8, en tanto que el valor predicho es $\hat{y}_8$. A pesar de un ajuste anterior perfecto, el pronóstico es muy impreciso. En esta situación un ajuste lineal (es decir, un polinomio de primer grado) como el indicado en la figura 13.12, podría dar pronósticos más realistas, a pesar de que, según el criterio de mínimos cuadrados, no se "ajusta" tan bien a los datos históricos como el polinomio de sexto grado. Observe también que el ajuste polinomial posee peligrosas propiedades de extrapolación. Esto es, el polinomial "se dispara" en sus extremos; los valores de x ligeramente superiores a x_6 producen predicciones de y muy elevadas. Observando la figura 13.12, usted podrá entender por qué los ajustes polinomiales de orden elevado se consideran "erráticos".

Una manera de averiguar cuál de los ajustes es verdaderamente el "mejor" es utilizar un estándar de comparación diferente, el "error cuadrático medio" o ECM —que es la suma del cuadrado de los errores/(número de puntos − número de parámetros)—. Para nuestro ajuste lineal, el número estimado de parámetros es 2 (a, b), así que el ECM = 5854/(5 − 2) = 1951.3; y para el ajuste cuadrático, el ECM = 4954/(5 − 3) = 2477.0. Por lo tanto, en este caso el ECM empeora, a pesar de que en un ajuste de orden más alto la suma total de cuadrados siempre será menor o igual. (*Nota*: Esto es similar a la forma en que opera la estadística R^2.) Todavía tenemos que ser algo cuidadosos, incluso con este nuevo estándar de comparación, porque cuando exista un ajuste perfecto, tanto la suma total de cuadrados como el ECM serán 0.00. Debido a esto, la mayor parte de los paquetes de programas de pronóstico sólo harán ajustes hasta un polinomial cúbico, porque los grados más altos simplemente no reflejan la tendencia general de los datos reales.

¿Qué es un buen ajuste? La intención de los párrafos anteriores es sugerir que un modelo que ha dado como resultado un buen ajuste a los datos históricos puede dar un terrible ajuste de datos futuros. Esto es, un buen ajuste histórico puede tener un bajo poder de predicción. Así que, ¿qué es un buen ajuste?

La respuesta a esta pregunta incluye consideraciones tanto filosóficas como técnicas. Depende, primero, de si uno tiene alguna idea del proceso del mundo real subyacente, que relaciona las y con las x. Para que sea un dispositivo de pronóstico efectivo, la función de pronóstico debe capturar hasta cierto punto características importantes de ese proceso. Entre más sabe uno, mejor puede hacer las cosas. Para adentrarse mucho en este proceso, uno debería emplear un nivel de estadística que se extendería bastante más allá del alcance de este texto introductorio. Para nuestros propósitos, es suficiente decir que el conocimiento del proceso subyacente se enuncia típicamente en lenguaje estadístico. Por ejemplo, el ajuste lineal, en el contexto estadístico, se conoce como **regresión lineal**. Si las hipótesis estadísticas sobre el modelo de regresión lineal son satisfechas con precisión (por ejemplo, los errores están distribuidos normalmente a ambos lados de la línea de regresión), entonces la gente que crea las estadísticas puede probar, de manera precisa y bien definida, que el ajuste lineal es el "mejor ajuste posible".

Pero en un sentido real, esto da por sentado lo que queda por probar. En el mundo real uno nunca puede estar completamente seguro de un proceso subyacente. Nunca "se nos presenta en bandeja de plata". Uno sólo tiene algunos datos históricos que observar (y a menudo no los suficientes). La pregunta entonces se transforma: ¿cuánta confianza podremos tener de que el proceso subyacente es aquel que satisface un conjunto particular de hipótesis estadísticas? Afortunadamente, existen medidas cuantitativas. El análisis estadístico, al menos para el tipo de modelos simples como el de regresión lineal, puede revelar qué tan bien satisfacen esas hipótesis los datos históricos.

¿Y qué pasa si no lo hacen? Se intenta con un nuevo modelo. Retrocedamos (divaguemos) por un momento, para recordar algo de la filosofía involucrada en el uso de modelos de optimización (que es exactamente lo que constituye el ajuste de mínimos cuadrados: una optimización no lineal y no restringida). Existe un problema del mundo real subyacente. El modelo es una representación selectiva de dicho problema. ¿Qué tan bueno es ese modelo, o representación? Por lo general, no se tienen medidas precisas, y muchos párrafos de este texto se han dedicado al papel que juega el juicio directivo y el análisis de sensibilidad para establecer la credibilidad de un modelo. De manera ideal, para probar la "bondad de un modelo", a uno le gustaría tener considerable experiencia en su uso. Si, a través de un uso repetido, observamos que el modelo se desempeña bien, entonces nuestra confianza es elevada.[1] Sin embargo, ¿qué confianza podemos tener al principio, sin experiencia previa?

Validación de Modelos Una marca de referencia importante, que nos acerca al contexto real, es hacer la pregunta: supongamos que el modelo ha sido utilizado para tomar decisiones en el pasado; ¿qué tan bien le ha ido a la empresa? Este acercamiento "crea" cierta experiencia *simulando* el pasado. Esto a menudo se conoce como **validación** del modelo. Una manera de utilizar este método, en el contexto de los pronósticos, se conoce como "divide y vencerás" y se analiza en la sección 13.5. Típicamente, para elaborar el modelo uno utiliza sólo una parte de los datos históricos; por ejemplo, ajustar un polinomio de un grado específico. Uno puede utilizar entonces los datos restantes para ver qué tal se hubiera desempeñado el modelo. Este procedimiento está explicado con algún detalle en la sección 13.5. En este momento, basta con concluir enfatizando que en el ajuste de curvas la interrogante de la "bondad de ajuste" es tanto filosófica como técnica, y usted no querrá omitir ninguno de los dos puntos de vista.

RESUMEN

Un modelo de pronóstico causal utiliza una o más variables independientes para pronosticar el valor de una variable dependiente o de respuesta. Este modelo a menudo se elabora ajustando una curva al conjunto de datos existentes y después utilizando esta curva para determinar la respuesta asociada con nuevos valores de la(s) variable(s) independiente(s). El método de mínimos cuadrados es un método particularmente útil para ajustar una curva. Ilustramos el concepto general de este método y consideramos los problemas específicos del ajuste de una línea recta, una función cuadrática y polinomios de alto orden a un conjunto de datos. Para fines de simplicidad, todos nuestros ejemplos incluyeron una sola variable independiente, pero las mismas técnicas se aplican a modelos con muchas variables.

Estos pocos ejemplos de modelos de pronóstico causales demostraron que, incluso en modelos simples, los cálculos necesarios son tediosos. La amplia capacidad de las hojas de cálculo ha reducido el problema de los cálculos necesarios, de forma que resultan insignificantes. Las preguntas importantes son: ¿cuál modelo, si es que existe alguno, puede desempeñar una tarea de pronóstico confiable?; ¿y están los datos requeridos para tal modelo disponibles y son confiables?

Hemos analizado los temas tanto filosóficos como técnicos que el administrador debe considerar al "ajustar las curvas". Los comentarios sobre el papel de los modelos causales en la to-

[1] No importa cuántas observaciones parecen sustanciar el modelo, nunca se puede concluir que el modelo es "verdadero". Recuerde el alto grado de "sustanciación" del modelo de la tierra plana. "Si usted sale del puerto y navega hacia el oeste finalmente caerá de la Tierra y nunca más será visto".

ma de decisiones administrativas están reservados para la sección 13.7. Ahora dirigiremos nuestra atención al análisis de las series de tiempo.

13.4 MODELOS DE PRONÓSTICOS DE SERIES DE TIEMPO

Otra clase de técnica de pronóstico cuantitativo incluye los llamados modelos de **pronóstico de series de tiempo**. Estos modelos producen pronósticos mediante la *extrapolación del comportamiento histórico de valores de una sola variable particular de interés.* Por ejemplo, uno podría estar interesado en las ventas de un artículo en particular, o también en la fluctuación a lo largo del tiempo de un precio específico en el mercado. Los modelos de series de tiempo utilizan una técnica para *extrapolar* el comportamiento histórico hacia el futuro. De manera figurada, las series son transportadas al futuro "tirando de las cintas de sus propios zapatos". Los datos de las series de tiempo son datos históricos en orden cronológico, con un solo valor por periodo. Por lo tanto, los datos para la estación de servicio de la sección anterior *no* son datos de una serie de tiempo y no pueden analizarse utilizando las técnicas de esta sección.

EXTRAPOLACIÓN DEL COMPORTAMIENTO HISTÓRICO

A fin de dar varios ejemplos de métodos para "tirar de las cintas de los propios zapatos", supongamos que tenemos a mano en el *Wall Street Journal* las cotizaciones de cierre diarias de un contrato a futuro del cacao durante el mes de marzo correspondiente a los últimos 12 días, incluyendo hoy, y que de este caudal pasado de datos deseamos predecir el precio de cierre de mañana. Diversas posibilidades vienen a la mente:

1. Si se piensa que todos los valores históricos son importantes, y que todos poseen igual valor predictivo, quizás queramos obtener el *promedio* de los últimos 12 valores como nuestro mejor pronóstico para mañana.
2. Si se piensa que el valor de hoy (el duodécimo) es con mucho el de mayor importancia, este valor puede ser nuestra mejor predicción para mañana.
3. Quizás se piense que en el mercado actual de "rápidas tasas de crecimiento" los primeros seis valores son demasiado viejos, y que los seis valores más recientes son importantes y cada uno tiene igual poder de predicción. Entonces quizás tomaríamos el promedio de los seis valores más recientes como nuestra mejor estimación para mañana.
4. Se puede pensar que *todos* los valores pasados contienen información útil, pero que el de hoy (la observación número 12) es el más importante de todos, y, en consecuencia, el undécimo, el décimo, el noveno y así sucesivamente, tienen importancias decrecientes. En este caso, quizás quisiéramos calcular un *promedio ponderado* de las 12 observaciones, con coeficientes de ponderación crecientes asignados a cada valor en el orden de 1 a 12, considerando que los 12 coeficientes se aproximen a 1.
5. Quizás debiéramos hacer un trazo de los 12 valores en función del tiempo y después hacer un "trazo de tendencia lineal" que se acerque a esos valores. Esta línea podría ser entonces utilizada para producir el valor de mañana.

Ahora supongamos que el precio de cierre real de mañana es conocido, y que se piensa en el pronóstico para el día de pasado mañana utilizando los 13 valores históricos disponibles. Los métodos 1 y 2 se pueden aplicar de manera directa. Ahora vea el método 3. En este caso quizás tomaríamos en cuenta el precio real observado de mañana, junto con el de hoy y los cuatro precios anteriores, para obtener un promedio de 6 días. Esta técnica se conoce como *promedio móvil simple de 6 periodos*, y será analizada con mayor detalle en las secciones siguientes.

Ahora veamos el método 4. En este caso, debido a que empleamos todos los valores pasados, estaríamos utilizando 13 en vez de 12 valores, con nuevos coeficientes de ponderación asignados a esos mismos valores. De esta manera opera una categoría importante de técnicas llamada *modelos de ponderación exponencial*. Estos modelos también serán explicados en el análisis que sigue.

Finalmente, exploraremos con mayor detalle la técnica mencionada en el punto 5. Ésta nos da otra ilustración de los pronósticos usando el *método de ajuste de curvas.*

Llegados a este punto, mencionaremos que siempre que tengamos valores para una variable de interés específica (una sola), que pueda ser trazada en función del tiempo, estos valores a menudo se conocen como *series de tiempo*, y cualquier método utilizado para analizar y extrapolar dichas series en el futuro entra en una categoría general llamada *análisis de series de tiempo*. Ésta es actualmente un área de investigación muy activa en estadística y ciencias de la administración. En términos de un desarrollo formal apenas si presentaremos una mera explicación superficial. Sin embargo se desarrollarán algunos de los conceptos de importancia desde el punto de vista del administrador. En esta sección utilizaremos las medidas de error DMA (des-

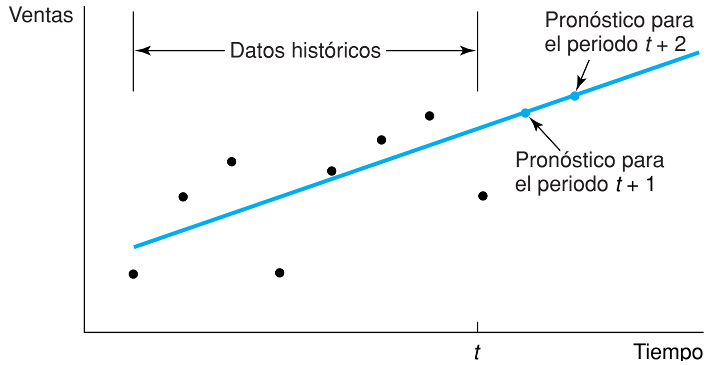


FIGURA 13.13
Ajuste de una línea recta

viación media absoluta) y EPMA (error porcentual medio absoluto) en vez del error cuadrático medio (ECM), que fue utilizado extensamente en la sección 13.3.

AJUSTE DE CURVAS

Ya hemos considerado el ajuste de curvas en el análisis de modelos causales. La diferencia principal, por lo que se refiere a las series de tiempo, se debe a que el tiempo es la variable independiente. Las observaciones históricas de la variable dependiente son trazadas en función del tiempo, y la curva es entonces ajustada para que coincida con estos datos. La curva entonces se extiende hacia el futuro para obtener un pronóstico. En este contexto, la extensión de la curva simplemente significa una evaluación de la función obtenida para valores más grandes de t, el tiempo. Este procedimiento se ilustra para una línea recta en la figura 13.13.

El uso del tiempo como variable independiente tiene implicaciones más serias que simplemente modificar unas cuantas fórmulas, y el administrador debe comprender la importancia de la diferencia entre un modelo causal que usa ajuste de curvas y un modelo de series de tiempo que también utiliza ajuste de curvas. Una de las hipótesis en el ajuste de curvas es que todos los datos tienen igual importancia (igual peso). Este método produce un pronóstico muy estable, bastante insensible a cambios pequeños en los datos.

Las técnicas matemáticas para el ajuste de curvas son idénticas, pero el razonamiento, o filosofía, tras los dos modelos es en esencia bastante diferente. Para comprender esta diferencia, piense en valores de y, la variable de interés, como si fueran producidos por un proceso o sistema subyacente en particular. El modelo causal supone que conforme cambia el sistema subyacente para producir diferentes valores de y, también se producen diferencias correspondientes en las variables independientes y, por lo tanto, conociendo las variables independientes, se puede deducir un buen pronóstico de y. El modelo de series de tiempo supone que el sistema que produce y es esencialmente *estacionario* (o *estable*), y continuará su acción en el futuro como ha venido ocurriendo en el pasado. Los patrones futuros en los cambios de y se parecerán mucho a los patrones pasados. Esto significa que el tiempo está sustituyendo muchos factores que pueden ser difíciles de medir pero que con el tiempo parecen variar de manera constante y sistemática. Si el sistema que produce y cambia de manera considerable (por ejemplo, debido a cambios ambientales, tecnológicos o en las políticas del gobierno), entonces la hipótesis de un *proceso estacionario* no es válida y en consecuencia un pronóstico basado en el tiempo como variable independiente estará muy propenso a errores.

Igual que con los modelos causales, es, por supuesto, posible utilizar una función diferente a la lineal para extrapolar una serie de observaciones (es decir, para pronosticar el futuro). Como podrá usted imaginarse, una alternativa a menudo sugerida en la práctica es suponer que y es un polinomio en t de orden elevado, esto es,

$$y_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_k t^k$$

Como antes, los valores apropiados para los parámetros $b_0, b_1, \ldots, b_k$ deben ser deducidos matemáticamente a partir de los valores de observaciones anteriores. El polinomio de orden más alto, sin embargo, sufre de los defectos mencionados anteriormente. Esto es, pueden obtenerse ajustes históricos perfectos (o por lo menos muy buenos) que tengan poco o ningún poder de predicción.

PROMEDIOS MÓVILES: PRONÓSTICO DE LAS VENTAS DE PUNTALES DE STECO

La hipótesis subyacente a modelos de este tipo es que el desempeño promedio durante el pasado reciente es un buen pronóstico del futuro. El hecho de que para pronosticar el futuro sólo se utilicen los datos más recientes, y quizás ponderando más los coeficientes de los datos más recientes, produce un pronóstico mucho más *sensible* que un modelo de ajuste de curva. Este nuevo tipo de modelo será sensible a aumentos o disminuciones en las ventas o a otros cambios en los datos. Tal vez resulte sorprendente que estos modelos "sin afectación" sean tan extremadamente importantes en las aplicaciones. Muchas de las aerolíneas más grandes del mundo necesitan generar pronósticos de la demanda que está por venir por el tipo de tarifa para alimentar estos pronósticos en complejos mecanismos de administración de los ingresos. Gran número de aerolíneas utiliza una clase especial de promedios móviles llamados promedios móviles con coeficientes exponenciales de ponderación. Además, casi todos los paquetes de control de inventarios incluyen una subrutina de pronóstico con base en este mismo tipo de promedios móviles (promedios móviles de coeficientes exponenciales de ponderación). Con base en un criterio como el de la "frecuencia de uso", el método de los promedios móviles es de seguro un procedimiento de pronóstico importante.

Una persona que está profundamente preocupada sobre el uso de modelos de pronósticos simples es Victor Kowalski, el nuevo vicepresidente de operaciones de STECO. Su introducción a los modelos de control de inventarios es analizada en el capítulo 8. Ya que él es responsable del inventario de miles de artículos, los modelos de pronóstico simples (es decir, poco costosos) son importantes para él. A fin de familiarizarse con los diferentes modelos, decide "probar" varios de ellos usando algunos datos históricos. En particular, decide utilizar los datos de ventas mensuales del año anterior de puntales de acero inoxidable y ver qué tan bien hubieran funcionado si el año anterior STECO hubiera utilizado dichos modelos. Está llevando a cabo lo que se conoce como estudio de *validación*.

Los modelos de pronóstico se presentan, por supuesto, en símbolos. Victor siente que sería necesario utilizar una notación común durante toda la investigación. Por lo tanto, decide establecer que

$$y_{t-1} = \textit{ventas observadas} \text{ de puntales en el mes } t - 1$$
$$\hat{y}_t = \textit{pronóstico} \text{ de las ventas de puntales en el periodo } t$$

Está interesado en elaborar un pronóstico de las ventas con un mes de anticipación; esto es, tomará los valores históricos conocidos $y_1,..., y_{t-1}$ (demanda en los meses 1 a $t-1$) y utilizará esta información para producir $\hat{y}_t$ el pronóstico de la demanda en el mes t. En otras palabras, tomará las ventas pasadas reales, hasta mayo por ejemplo, y las utilizará para pronosticar las ventas de junio; después utilizará las ventas hasta junio para pronosticar las ventas en julio, y así sucesivamente. El proceso producirá una secuencia de valores $\hat{y}_t$. Al comparar estos valores con los valores y_t reales observados, se obtiene un indicativo de cómo hubiera funcionado el modelo de pronóstico si realmente hubiera estado en uso el año anterior.

Promedio móvil simple de *n* periodos El modelo más simple en la categoría de promedios móviles es el **promedio móvil simple de *n* periodos.** En este modelo se utiliza el promedio de un número fijo (digamos, n) de las observaciones más recientes para estimar el valor siguiente de y. Por ejemplo, si n es igual a 4, entonces, después de haber observado el valor de y en el periodo 15, nuestra estimación para el periodo 16 sería

$$\hat{y}_{16} = \frac{y_{15} + y_{14} + y_{13} + y_{12}}{4}$$

En general,

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{1}{n}(y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-n+1})$$

La aplicación de promedios móviles de tres y cuatro periodos a los datos de ventas de puntales de STECO aparecen en la tabla 13.1.

Podemos ver que el pronóstico de promedio móvil de tres meses para las ventas de abril es el promedio de las ventas de enero, febrero y marzo, (20 + 24 + 27)/3, o 23.67. *Ex post* (es decir, después del pronóstico), las ventas reales en abril fueron de 31. Por lo tanto, en este caso el pronóstico de ventas difirió de las ventas reales en 31 – 23.67, o 7.33.

La comparación de las ventas reales con el pronóstico de ventas utilizando los datos de la tabla 13.1 sugiere que ningún método de pronóstico parece particularmente preciso. Resulta, sin embargo, útil remplazar esta *impresión cualitativa* con alguna *medida cuantitativa* de lo bien que se desempeñaron los dos métodos. Las medidas de comparación que utilizaremos en esta

TABLA 13.1 Promedios simples de tres y cuatro meses

MES	VENTAS REALES ($000s)	PRONÓSTICO DE PROMEDIO MÓVIL SIMPLE DE TRES MESES	PRONÓSTICO DE PROMEDIO MÓVIL SIMPLE DE CUATRO MESES
Enero	20		
Febrero	24		
Marzo	27		
Abril	31	(20 + 24 + 27)/3 = 23.67	
Mayo	37	(24 + 27 + 31)/3 = 27.33	(20 + 24 + 27 + 31)/4 = 25.50
Junio	47	(27 + 31 + 37)/3 = 31.67	(24 + 27 + 31 + 37)/4 = 29.75
Julio	53	(31 + 37 + 47)/3 = 38.33	(27 + 31 + 37 + 47)/4 = 35.50
Agosto	62	(37 + 47 + 53)/3 = 45.67	(31 + 37 + 47 + 53)/4 = 42.00
Septiembre	54	(47 + 53 + 62)/3 = 54.00	(37 + 47 + 53 + 62)/4 = 49.75
Octubre	36	(53 + 62 + 54)/3 = 56.33	(47 + 53 + 62 + 54)/4 = 54.00
Noviembre	32	(62 + 54 + 36)/3 = 50.67	(53 + 62 + 54 + 36)/4 = 51.25
Diciembre	29	(54 + 36 + 32)/3 = 40.67	(62 + 54 + 36 + 32)/4 = 46.00

sección serán la desviación media absoluta (DMA) y el error porcentual medio absoluto (EPMA), donde

$$\text{DMA} = \frac{\displaystyle\sum_{\text{todos los pronósticos}} \left|\text{ventas reales} - \text{ventas del pronóstico}\right|}{\text{número de pronóstico}}$$

$$\text{EPMA} = \frac{\displaystyle\sum_{\text{todos los pronósticos}} \frac{\left|\text{ventas reales} - \text{ventas del pronóstico}\right|}{\text{ventas reales}} \times 100\ \%}{\text{número de pronósticos}} \qquad (13.7)$$

La DMA se calcula para el pronóstico de promedio móvil de tres meses (comenzando en abril) y de cuatro meses (comenzando en mayo) en una nueva hoja de cálculo (STRUT.XLS), que se muestra en la figura 13.14. Dado que el promedio móvil de tres meses da una DMA de 12.67 (celda D16), en tanto que el promedio móvil de cuatro meses da una DMA de 15.59 (celda F16), parece (al menos históricamente) que la inclusión de un mayor número de datos históricos perjudica en vez de beneficiar la precisión del pronóstico.

Un promedio móvil simple resultará siempre menor que los datos en aumento y mayor que los datos en disminución. Por lo tanto, si aparecen amplias elevaciones o caídas, los promedios móviles simples no se desempeñarán bien. Se ajustan mejor a datos con pequeños ascensos y descensos erráticos, dando alguna estabilidad frente a perturbaciones aleatorias.

El promedio móvil simple tiene dos inconvenientes, uno filosófico y otro operacional. El inconveniente *filosófico* se centra en el hecho de que al calcular un pronóstico (digamos, $\hat{y}_8$), a la observación más reciente (y_7) no se le da una mayor importancia o coeficiente que a una observación más antigua, como y_5. Esto se debe a que a cada una de las últimas n observaciones se le asigna el coeficiente $1/n$. Este procedimiento de asignar coeficientes iguales es opuesto a la intuición personal de que en muchos casos los datos más recientes deben contener más información sobre el futuro que los datos más antiguos. De hecho, el análisis en la figura 13.14 sugiere que las mejores predicciones para las ventas de puntales son las basadas en los datos más recientes.

C5 = =PROMEDIO(B2:B4)

	A	B	C	D	E	F
1	Mes	Ventas reales (000)	Pronóstico Prom.Móvil 3 Meses	Error absoluto	Pronóstico Prom.Móvil 4 Meses	Error absoluto
2	Enero	20				
3	Febrero	24				
4	Marzo	27				
5	Abril	31	23.67	7.33		
6	Mayo	37	27.33	9.67	25.50	11.50
7	Junio	47	31.67	15.33	29.75	17.25
8	Julio	53	38.33	14.67	35.50	17.50
9	Agosto	62	45.67	16.33	42.00	20.00
10	Septiembre	54	54.00	0.00	49.75	4.25
11	Octubre	36	56.33	20.33	54.00	18.00
12	Noviembre	32	50.67	18.67	51.25	19.25
13	Diciembre	29	40.67	11.67	46.00	17.00
14						
15			Suma =	114.00	Suma =	124.75
16			DMA =	12.67	DMA =	15.59

Celda	Fórmula	Cópiese a
C5	=PROMEDIO(B2:B4)	C6:C13
D5	=ABS(B5-C5)	D6:D13
E6	=PROMEDIO(B2:B5)	E7:E13
F6	=ABS(B6-E6)	F7:F13
D15	=SUMA(D5:D13)	F15
D16	=PROMEDIO(D5:D13)	F16

FIGURA 13.14

Comparación de la desviación absoluta media para pronósticos de promedio móvil de tres y cuatro meses

El segundo inconveniente, que es *operacional*, es que en el promedio móvil, si se van a incluir n observaciones, deben extraerse entonces $(n - 1)$ elementos de datos para combinarse con la observación actual (la número n). Todos estos datos deben ser almacenados de alguna manera a fin de calcular el pronóstico. Éste no es un problema serio si sólo se trata de una pequeña cantidad de pronósticos. La situación cambia bastante para aquella empresa que necesite pronosticar la demanda de miles de productos individuales en una base de artículo por artículo. Si, por ejemplo, STECO está utilizando promedios móviles de ocho periodos para pronosticar la demanda de 5,000 piezas pequeñas, entonces, por cada artículo, se deben almacenar siete elementos de datos viejos para cada pronóstico, en adición a las observaciones más recientes. Esto implica que se debe almacenar un total de 40,000 elementos de datos. Otro ejemplo donde es enorme el número de pronósticos viene de las aerolíneas. Considere una aerolínea que tiene un gran número de vuelos despegando cada día (como United Airlines o Continental). Suponga que tiene 2,000 vuelos saliendo cada día y que pronostica todos los vuelos con 300 días de anticipación. Esto significa que habrá 600,000 vuelos por pronosticar y deberá llevar su control de manera continua. En ambos casos, los requerimientos de almacenamiento, así como el tiempo de cómputo, pueden convertirse en factores importantes al diseñar un sistema de pronóstico y/o de control de inventarios.

Promedio móvil ponderado de *n*-periodos La idea de que los datos recientes son más importantes que los datos más antiguos puede ponerse en práctica con un **promedio móvil ponderado de *n* periodos**. Éste generaliza el concepto de un promedio móvil simple de n periodos donde, como hemos visto, cada coeficiente de ponderación es $1/n$. En esta forma más general, tomando $n = 3$ como ejemplo específico, podríamos hacer que

$$\hat{y}_7 = \alpha_0 y_6 + \alpha_1 y_5 + \alpha_2 y_4$$

donde las α (que se conocen como coeficientes de ponderación) son números no negativos, escogidos de forma que los coeficientes más pequeños sean asignados a los datos más antiguos y que todos los coeficientes sumen 1. Existen, por supuesto, innumerables maneras de seleccionar un conjunto de α que satisfaga estos criterios. Por ejemplo, si el promedio ponderado debe incluir las últimas tres observaciones (un promedio móvil ponderado de tres periodos), uno podría determinar que

$$\hat{y}_7 = \frac{3}{6} y_6 + \frac{2}{6} y_5 + \frac{1}{6} y_4$$

F5 = =SUMAPRODUCTO($B$1:$B$3,E2:E4)

	A	B	C	D	E	F	G
1	*alfa2 =*	0.167		**Mes**	**Ventas reales (000)**	**Pronóstico Prom.Móvil 3 Meses**	**Error absoluto**
2	*alfa1 =*	0.333		Enero	20		
3	*alfa0 =*	0.500		Febrero	24		
4	*SUMA DE COEF.POND. =*	1.00		Marzo	27		
5				Abril	31	24.83	6.17
6				Mayo	37	28.50	8.50
7				Junio	47	33.33	13.67
8				Julio	53	41.00	12.00
9				Agosto	62	48.33	13.67
10				Septiembre	54	56.50	2.50
11				Octubre	36	56.50	20.50
12				Noviembre	32	46.33	14.33
13				Diciembre	29	37.00	8.00
14							
15						**Suma =**	99.33
16						**DMA =**	11.04

Celda	Fórmula	Cópiese a
B4	=SUMA(B1:B3)	—
F5	=SUMAPRODUCTO($B$1:$B$3, E2:E4)	F6:F13
G5	=ABS(E5-F5)	G6:G13
G15	=SUMA(G5:G13)	—
G16	=PROMEDIO(G5:G13)	—

FIGURA 13.15

Promedio móvil ponderado inicial de tres meses

De manera alternativa, se podría definir

$$\hat{y}_7 = \frac{5}{10}y_6 + \frac{3}{10}y_5 + \frac{2}{10}y_4$$

En ambas expresiones tenemos coeficientes de ponderación decrecientes cuya suma es 1. En la práctica, una elección apropiada de coeficientes de ponderación podría dejársele fácilmente al algoritmo Solver.

Para tener una idea de cómo funciona, Victor aplica el promedio móvil ponderado de tres meses con coeficientes iniciales de 3/6, 2/6, 1/6 a los datos históricos del puntal de acero inoxidable. Los pronósticos y la DMA aparecen desarrollados por Victor en una nueva hoja llamada "PMP" (o WMA: Weighted Moving Average, que se refiere al pronóstico móvil ponderado) en el mismo libro de trabajo (STRUT.XLS), que se muestra en la figura 13.15. Comparando la nueva DMA obtenida por Victor de 11.04 (celda G16) con la DMA del promedio móvil simple de tres meses (12.67) y el promedio móvil simple de cuatro meses (15.59), se confirma la sospecha de que los resultados de ventas recientes son un mejor indicador de las ventas futuras que los datos más antiguos.

Por supuesto, si permitimos que Solver escoja por nosotros los coeficientes de ponderación óptimos, podremos obtener resultados mejores que en nuestras aproximaciones iniciales de coeficientes. Para hacer que Solver escoja ponderaciones que minimicen la DMA, hacemos lo siguiente:

1. Hacemos clic en Herramientas, después en "Solver".
2. Definimos G16 como celda objetivo e indicamos a Solver que deseamos minimizarla.
3. Indicamos que las celdas que cambian son B1:B3.
4. Añadimos las restricciones de que (a) B4 $=$ 1.0, (b) B1:B3 $\geq$ 0, (c) B1:B3 $\leq$ 1, (d) B1 $\leq$ B2, y (e) B2 $\leq$ B3 .
5. Hacemos clic en Resolver para obtener los resultados que se muestran en la figura 13.16.

Aquí vemos que la ponderación óptima consiste en colocar la mayor parte de la ponderación en las observaciones más recientes, lo que da una DMA de 7.56 (una reducción de 31.5% en el error de nuestra aproximación inicial). Esto sigue confirmando nuestra idea de que deberíamos dar un mayor peso de ponderación a la observación más reciente (al extremo de este ejemplo).

A pesar de que los promedios móviles ponderados le dan mayor peso a los datos más recientes, esto no resuelve los problemas operacionales de almacenamiento de datos, ya que (n – 1) elementos históricos de datos aún deben almacenarse. Ahora veremos un esquema de ponderación que inteligentemente resolverá este problema.

F5 = =SUMAPRODUCTO($B$1:$B$3,E2:E4)

	A	B	C	D	E	F	G
1	*alfa2 =*	0.000		**Mes**	**Ventas reales (000)**	**Pronóstico Prom.Móvil 3 Meses**	**Error absoluto**
2	*alfa1 =*	0.000		Enero	20		
3	*alfa0 =*	1.000		Febrero	24		
4	*SUMA OF COEF.POND. =*	1.00		Marzo	27		
5				Abril	31	27.00	4.00
6				Mayo	37	31.00	6.00
7				Junio	47	37.00	10.00
8				Julio	53	47.00	6.00
9				Agosto	62	53.00	9.00
10				Septiembre	54	62.00	8.00
11				Octubre	36	54.00	18.00
12				Noviembre	32	36.00	4.00
13				Diciembre	29	32.00	3.00
14							
15						**Suma =**	68.00
16						**DMA =**	7.56

FIGURA 13.16

Promedio móvil ponderado óptimo de tres meses

PONDERACIÓN EXPONENCIAL: EL MODELO BÁSICO

Vimos que, utilizando un promedio móvil ponderado, hay muchas maneras diferentes de asignar coeficientes decrecientes de ponderación que sumen 1. Una de ellas se llama **ponderación o suavización exponencial,** que es un nombre abreviado para *promedio móvil ponderado exponencialmente*. Éste es un esquema que pondera los datos recientes con mayor peso que los datos pasados, con coeficientes que sumen 1, pero evita el problema operacional que acabamos de ver. En este modelo, para cualquier $t \geq 1$ el pronóstico para el periodo $t + 1$, identificado como $\hat{y}_{t+1}$, es una suma ponderada (con coeficientes que suman 1) de las *ventas observadas en el periodo t* (es decir, y_t) y del *pronóstico para el periodo* t (que era $\hat{y}_t$). En otras palabras,

Pronóstico para $t + 1$ | Observado en t | Pronóstico para t

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_t \tag{13.8}$$

donde α es una constante especificada por el usuario tal que $0 \leq \alpha \leq 1$. El valor asignado a α determina cuánto peso relativo se le da al coeficiente de ponderación de la observación más reciente al calcular el pronóstico del periodo siguiente. Observe en la ecuación (13.8) que si a α se le asigna un valor cercano a 1, casi todo el peso se coloca en la demanda real del periodo t.

La ponderación exponencial tiene importantes ventajas de cálculo. Para calcular $\hat{y}_{t+1}$, sólo debe almacenarse $\hat{y}_t$, (junto con el valor de α). Tan pronto como se conoce el y_t real, calculamos $y_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_t$. Si STECO quisiera pronosticar la demanda de 5,000 piezas pequeñas en cada periodo, entonces deberán almacenarse 10,001 elementos (los 5,000 valores $\hat{y}_t$, los 5,000 valores y_t y el valor de α), a diferencia de los 40,000 elementos previamente calculados necesarios para poner en práctica un promedio móvil de ocho periodos. Dependiendo del comportamiento de los datos, podría ser necesario almacenar un valor α diferente para cada artículo, pero incluso se requeriría mucho menos almacenamiento que si se utilizaran promedios móviles. Lo que es agradable en la ponderación exponencial es que al guardar α y el último pronóstico, *de manera implícita* se están almacenando todos los pronósticos anteriores.

A fin de comprender mejor el modelo de ponderación exponencial, observemos que cuando $t = 1$ la expresión utilizada para definir $\hat{y}_2$ es

$$\hat{y}_2 = \alpha y_1 + (1 - \alpha)\hat{y}_1$$

En esta expresión $\hat{y}_1$ es una “estimación inicial” del valor para y en el periodo 1, y y_1 es el valor observado del periodo 1. Para comenzar el pronóstico de ponderación exponencial, necesitamos establecer esta “estimación inicial”. Tenemos varias opciones disponibles: (1) La primera y más común, hacemos que $\hat{y}_1 = y_1$ (es decir, suponemos un pronóstico “perfecto” para iniciar el proceso, pero no contamos este error de cero en nuestro cálculo de la DMA). Otras opciones incluyen (2) buscar todos los datos disponibles y determinar que $\hat{y}_1 = \bar{y}$ (promedio de todos los datos disponibles), o (3) estableciendo que $\hat{y}_1$ = el promedio de sólo el primer par de meses. Elegiremos el primer planteamiento.

En este punto Victor decide utilizar la hoja de cálculo “EXPSMTH” en el mismo libro de trabajo (STRUT.XLS) para aplicar la ponderación exponencial a los datos de los puntales de acero inoxidable. La figura 13.17 muestra las ventas reales y las ventas estimadas para 12 meses a un valor inicial para $\alpha = 0.5$.

F3 = =$B$1*E2+(1-$B$1)*F2

	A	B	C	D	E	F	G
1	*alfa* =	0.500		**Mes**	**Ventas reales (000)**	**Ventas pronosticadas**	**Error absoluto**
2				Enero	20	20.00	
3				Febrero	24	20.00	4.00
4				Marzo	27	22.00	5.00
5				Abril	31	24.50	6.50
6				Mayo	37	27.75	9.25
7				Junio	47	32.38	14.63
8				Julio	53	39.69	13.31
9				Agosto	62	46.34	15.66
10				Septiembre	54	54.17	0.17
11				Octubre	36	54.09	18.09
12				Noviembre	32	45.04	13.04
13				Diciembre	29	38.52	9.52
14							
15						**Suma =**	109.17
16						**DMA =**	9.92

Celda	Fórmula	Cópiese a
F3	=$B$1*E2 + (1−$B$1)*F2	F4:F13
G3	=ABS(E3−F3)	G4:G13
G15	=SUMA(G3:G13)	—
G16	=PROMEDIO(G3:G13)	—

FIGURA 13.17

Pronóstico de ponderación exponencial, α inicial = 0.5

También ha calculado la DMA de febrero a diciembre. De hecho, el modelo de ponderación exponencial con $\alpha = 0.5$ da una DMA inferior (9.92 en la celda G16) al de los modelos de promedios móviles (vea la figura 13.14) o a nuestra estimación inicial del modelo de promedios móviles ponderados (vea la figura 13.15).

Victor sabe que puede encontrar un mejor modelo utilizando el Solver para seleccionar el valor óptimo de α (el que minimice la DMA), pero está complacido con los resultados iniciales. La DMA es menor que el que había obtenido con varios de los modelos anteriores, y los cálculos son simples. Desde el punto de vista de los cálculos es razonable considerar la ponderación exponencial como una manera viable de pronosticar las ventas de muchos de los productos que STECO tiene en inventario.

Aunque los resultados obtenidos del modelo de ponderación exponencial son impresionantes, está claro que los valores numéricos específicos (columna F de la figura 13.17) dependen del valor seleccionado para la constante de ponderación α y de la "estimación inicial" $\hat{y}_1$. A fin de encontrar el valor óptimo de α, simplemente establecemos un modelo de optimización no lineal utilizando la herramienta Solver de Excel. Por supuesto, si permitimos que Solver escoja por nosotros el α óptimo, podemos obtener algo mejor que nuestra aproximación inicial de $\alpha = 0.5$. Para permitir que Solver elija el α que minimice la DMA, se requiere lo siguiente:

1. Hacer clic en Herramientas, después en "Solver".
2. Establecer G16 como celda objetivo e indicar a Solver que deseamos minimizarla.
3. Indicar que la celda que va a cambiar es B1.
4. Añadir las restricciones en el sentido de que (a) $B1 \geq 0$ y (b) $B1 \leq 1$.
5. Hacer clic en Resolver para obtener los resultados que se muestran en la figura 13.8.

De nuevo, igual que con el método de promedio móvil ponderado, vemos que debido a la tendencia lineal (hacia arriba, después hacia abajo) en los datos, entre mayor peso podamos otorgar a la observación más reciente, mejor será el pronóstico. Así que, sin sorprendernos en absoluto, el α óptimo es igual a 1.0, y este método de pronóstico le da a Victor una DMA de 6.82 (celda G16), que es el mejor desempeño que ha visto hasta ahora.

Debido a la importancia del modelo de ponderación exponencial básico, merece la pena explorar con más detalle cómo funciona y cuándo puede aplicarse con éxito en modelos reales.

G8 = =ABS(E8-F8)

	A	B	C	D	E	F	G
1	*alfa* =	1.000		**Mes**	**Ventas reales (000)**	**Ventas pronosticadas**	**Error absoluto**
2				Enero	20	20.00	
3				Febrero	24	20.00	4.00
4				Marzo	27	24.00	3.00
5				Abril	31	27.00	4.00
6				Mayo	37	31.00	6.00
7				Junio	47	37.00	10.00
8				Julio	53	47.00	6.00
9				Agosto	62	53.00	9.00
10				Septiembre	54	62.00	8.00
11				Octubre	36	54.00	18.00
12				Noviembre	32	36.00	4.00
13				Diciembre	29	32.00	3.00
14							
15						**Suma =**	75.00
16						**DMA =**	6.82

FIGURA 13.18
Pronóstico de ponderación exponencial, α óptimo

Examinaremos ahora algunas de sus propiedades. Para comenzar, observe que si $t \geq 2$, es posible sustituir $t - 1$ en lugar de t en (13.8), para obtener

$$\hat{y}_t = \alpha y_{t-1} + (1 - \alpha)\hat{y}_{t-1}$$

Al sustituir esta relación para $\hat{y}_t$ de nuevo en la expresión original de $\hat{y}_{t+1}$ (es decir, en [13.8]), se obtiene para $t \geq 2$,

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)y_{t-1} + (1 - \alpha)^2\,\hat{y}_{t-1}$$

Llevando a cabo exitosamente sustituciones similares, llegamos a la siguiente expresión general para $\hat{y}_{t+1}$:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+1} = {} & \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \dots \\ & + \alpha(1 - \alpha)^{t-1} y_1 + (1 - \alpha)^t \hat{y}_1\end{aligned} \tag{13.9}$$

Por ejemplo,

$$\hat{y}_4 = \alpha y_3 + \alpha(1 - \alpha)y_2 + \alpha(1 - \alpha)^2 y_1 + (1 - \alpha)^3\hat{y}_1$$

Dado que usualmente $0 < \alpha < 1$, es obvio que $0 < 1 - \alpha < 1$. Por lo tanto,

$$\alpha > \alpha(1 - \alpha) > \alpha\,(1 - \alpha)^2$$

En otras palabras, en el ejemplo anterior y_3, la observación más reciente, recibe un peso mayor que y_2, que a su vez recibe un peso mayor que y_1. Esto ilustra la propiedad general de un modelo de ponderación exponencial: *que los coeficientes de las* "y" *van decreciendo conforme los datos son más antiguos*. También se puede demostrar que *la suma de todos los coeficientes (incluyendo el coeficiente de $\hat{y}_1$) es 1*; esto es en el caso de $\hat{y}_4$, por ejemplo,

$$\alpha + \alpha(1 - \alpha) + \alpha(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3 = 1$$

Así, hemos visto en la ecuación (13.9) que el valor general de $\hat{y}_{t+1}$ es una suma ponderada de *todas las observaciones anteriores* (incluyendo el último valor observado, y_t). Aún más, los coeficientes suman 1 y son decrecientes entre más antiguas sean las observaciones históricas. El último término de la suma, $\hat{y}_1$, no es una observación histórica. Recuerde que ésta fue una "estimación" de y_1. Ahora podemos observar que conforme t aumenta, decrece la influencia de $\hat{y}_1$ sobre $\hat{y}_{t+1}$ y con el tiempo se vuelve despreciable. Para ver esto, observe que el coeficiente de $\hat{y}_t$ en (13.9) es $(1 - \alpha)^t$. Por lo tanto, el peso asignado a $\hat{y}_1$ decrece exponencialmente con t. Incluso si α es pequeño (lo que haría $[1 - \alpha]$ cercano a 1), el valor de $(1 - \alpha)^t$ decrece rápidamente. Por ejemplo, si $\alpha = 0.1$ y $t = 20$, entonces $(1 - \alpha)^t = 0.12$. Si $\alpha = 0.1$ y $t = 40$, entonces $(1 - \alpha)^t = 0.015$. Por lo tanto, tan pronto como se hayan obtenido suficientes datos, el valor de $\hat{y}_{t+1}$ resultará bastante insensible a la elección de $\hat{y}_1$.

Obviamente, el valor de α, que es un parámetro escogido por el administrador, afecta el desempeño del modelo. Como puede usted ver explícitamente en (13.8), es el peso de ponderación dado al valor de dato (y_t) observado más recientemente. Esto implica que entre mayor sea el valor de α, más fuertemente reaccionará el modelo a la última observación (llamamos a esto un pronóstico *sensible*). Esto, como veremos, puede ser o no deseable. Si $\alpha \approx 0.0$, esto significa

TABLA 13.2 Coeficientes de ponderación para diferentes valores de α

VARIABLE	COEFICIENTE	α = 0.1	α = 0.3	α = 0.5
y_t	α	0.1	0.3	0.5
y_{t-1}	$\alpha(1-\alpha)$	0.09	0.21	0.25
y_{t-2}	$\alpha(1-\alpha)^2$	0.081	0.147	0.125
y_{t-3}	$\alpha(1-\alpha)^3$	0.07290	0.10290	0.0625
y_{t-4}	$\alpha(1-\alpha)^4$	0.06561	0.07203	0.03125
y_{t-5}	$\alpha(1-\alpha)^5$	0.05905	0.05042	0.01563
y_{t-6}	$\alpha(1-\alpha)^6$	0.05314	0.03530	0.00781
y_{t-7}	$\alpha(1-\alpha)^7$	0.04783	0.02471	0.00391
y_{t-8}	$\alpha(1-\alpha)^8$	0.04305	0.01729	0.00195
y_{t-9}	$\alpha(1-\alpha)^9$	0.03874	0.01211	0.00098
y_{t-10}	$\alpha(1-\alpha)^{10}$	0.03487	0.00847	0.00049
Suma de los Coeficientes		0.68619	0.98023	0.99610

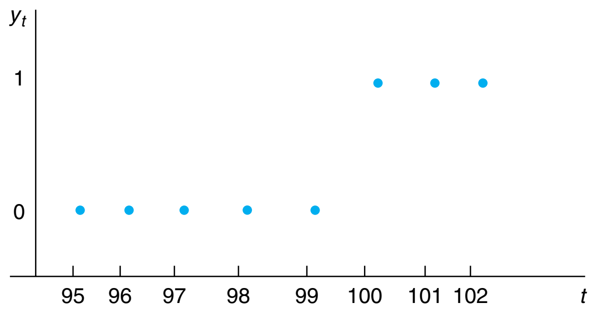


FIGURA 13.19
Cambio en el sistema cuando $t = 100$

una confianza casi total en el último pronóstico y que se está ignorando casi por completo la observación más reciente (es decir, el último punto de datos). Éste sería un pronóstico extremadamente *estable*. La tabla 13.2 muestra valores de los coeficientes de ponderación (en la ecuación [13.9]) cuando $\alpha = 0.1$, 0.3 y 0.5. Usted puede ver que para valores más elevados de α (por ejemplo, $\alpha = 0.5$) se asigna un coeficiente relativo de ponderación mayor a las observaciones más recientes, y la influencia de los datos más antiguos disminuye con mayor rapidez.

Para ilustrar aún más el efecto de escoger varios valores de α (es decir, asignar coeficientes de ponderación mayores o menores que las observaciones recientes), consideraremos tres casos específicos.

Caso 1 (Respuesta a un cambio repentino) Suponga que en cierto punto del tiempo el sistema subyacente experimenta un cambio rápido y radical. ¿Cómo influirá la elección de α en la manera en que reaccione el modelo de ponderación exponencial? Como ejemplo ilustrativo, considere un caso extremo, en el cual

$$y_t = 0 \text{ para } t = 1, 2, \ldots, 99$$
$$y_t = 1 \text{ para } t = 100, 101, \ldots$$

Esta situación se ilustra en la figura 13.19. Observe que, en este caso, si $\hat{y}_1 = 0$, entonces $\hat{y}_{100} = 0$ para cualquier valor de α, ya que estamos tomando la suma ponderada de una serie de ceros.

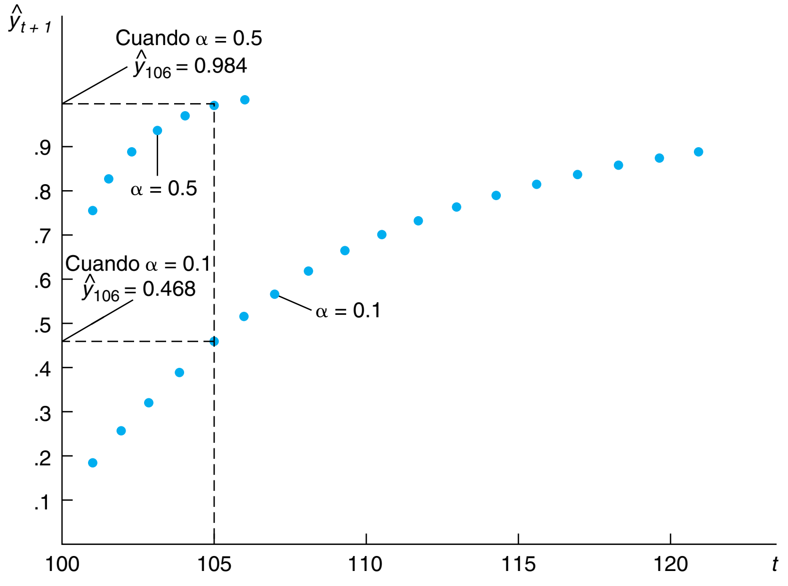


FIGURA 13.20

Respuesta a un cambio unitario en y_t

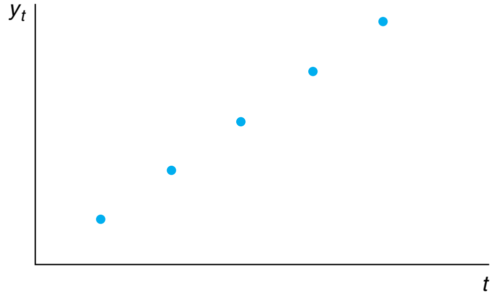


FIGURA 13.21

Valores continuamente crecientes de y_t (una rampa lineal)

Por lo tanto, en el tiempo 99 nuestra mejor estimación de y_{100} es 0, en tanto que el valor real será 1. En el tiempo 100 primero veremos que el sistema ha cambiado. Las preguntas son: ¿qué tan rápidamente responderá el sistema de pronóstico conforme pasa el tiempo? y ¿acaso se encuentra disponible la información que indica que el sistema ha cambiado?

Para responder esta pregunta, en la figura 13.20 hacemos un trazo de $\hat{y}_{t+1}$ para α = 0.5 y α = 0.1. Observe que cuando α = 0.5, $\hat{y}_{106}$ = 0.984; por lo tanto, en el momento 105 nuestra estimación de y_{106} sería 0.984, en tanto que el valor real resultaría ser 1. Cuando α = 0.1, nuestra estimación de y_{106} es de sólo 0.468.

Entonces podemos ver que un sistema de pronóstico con α = 0.5 responde con mucha mayor rapidez a cambios en los datos que un sistema con α = 0.1. El administrador entonces preferirá una α relativamente grande si el sistema se caracteriza por un bajo nivel de comportamiento aleatorio, pero sujeto a ocasionales cambios repentinos. (El caso 1 es un ejemplo extremo de esta situación.)

Sin embargo, suponga que los datos se caracterizan por grandes errores aleatorios, pero con una media estable. Entonces, si α es grande, un error aleatorio grande en y_t disparará demasiado el valor de pronóstico, $\hat{y}_{t+1}$. Por lo tanto, para este tipo de proceso se preferiría un valor menor de α.

Caso 2 (Respuesta a un cambio estable) En contraposición con el cambio rápido y radical analizado en el caso 1, suponga ahora que un sistema experimenta un cambio *estable* en el valor de y. En la figura 13.21 se ilustra un patrón de crecimiento estable. Este ejemplo se llama *rampa lineal*. De nuevo las preguntas son: ¿cómo responderá el modelo de ponderación exponencial? y ¿cómo se verá afectada esta respuesta por la elección de α?

En este caso, recuerde que

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)y_{t-1} + \ldots$$

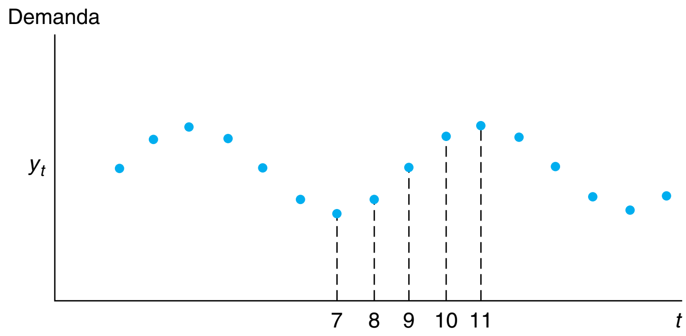


FIGURA 13.22
Patrón estacional en y_t

Ya que todos los valores de y anteriores ($y_1, \ldots, y_{t-1}$) son menores que y_t, y puesto que todos los coeficientes de ponderación suman 1, se puede demostrar que, para cualquier α entre 0 y 1, $\hat{y}_{t+1} < y_t$. También, ya que y_{t+1} es mayor que y_t, podemos ver que $\hat{y}_{t+1} < y_t < y_{t+1}$. Por lo tanto, nuestro pronóstico *siempre* será demasiado reducido. Finalmente, puesto que los valores más pequeños de α ponen coeficientes de ponderación más elevados a datos más antiguos, mientras más pequeño sea el valor de α, peor será el pronóstico. Pero incluso con una α muy cercana a 1, el pronóstico no es muy bueno si la rampa es pronunciada. La moraleja para los administradores es que la ponderación exponencial (o, de hecho, cualquier promedio móvil ponderado), sin una modificación apropiada, no es una buena herramienta de pronóstico en un mercado de rápido crecimiento o reducción. El modelo puede ajustarse para incluir la tendencia, y a esto se le conoce como el modelo de Holt (o de ponderación exponencial con tendencia); este método será mostrado con mayor detalle más adelante en esta sección.

En realidad, la observación que Victor hizo con los puntales en nuestro ejemplo anterior (es decir, que tanto el promedio móvil ponderado como la ponderación exponencial asignaban TODO el coeficiente de ponderación a la observación más reciente) es una buena pista, para usted como administrador, de que en los datos se presenta una tendencia obvia, y que debería considerarse un modelo de pronóstico diferente.

Caso 3 (Respuesta a un cambio estacional) Suponga que un sistema experimenta un *patrón estacional* periódico en y (como sería el caso si y representara, por ejemplo, la demanda de trajes de baño en la ciudad de Denver). ¿Cómo responderá entonces el modelo de ponderación exponencial, y cómo se verá afectada esta respuesta por la elección de α? Considere, por ejemplo, el patrón estacional que se ilustra en la figura 13.22, y suponga que se desea extrapolar para *varios periodos en el futuro*. Por ejemplo, suponga que deseamos pronosticar la demanda en los periodos 8 a 11 con base únicamente en datos que llegan hasta el periodo 7. Entonces

$$\hat{y}_8 = \alpha y_7 + (1 - \alpha)\hat{y}_7$$

Ahora para obtener $\hat{y}_9$, debido a que sólo tenemos datos hasta el periodo 7, suponemos que $y_8 = \hat{y}_8$. Entonces

$$\hat{y}_9 = \alpha y_8 + (1 - \alpha)\hat{y}_8 = \alpha\hat{y}_8 + (1 - \alpha)\,\hat{y} = \hat{y}_8$$

De manera similar, se puede demostrar que $\hat{y}_{11} = \hat{y}_{10} = \hat{y}_9 = \hat{y}_8$. En otras palabras, $\hat{y}_8$ es la mejor estimación de todas las demandas futuras.

Ahora veamos qué tan buenas son estas predicciones. Sabemos que

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2\, y_{t-2} + \ldots$$

Suponga que se elige un valor pequeño de α. Remitiéndonos a la tabla 13.2, vemos que cuando α es pequeña (digamos, 0.1), los coeficientes de los términos más recientes cambian de manera relativamente lenta (es decir, son casi iguales entre sí). Por lo tanto, $\hat{y}_{t+1}$ representará el promedio móvil simple de un cierto número de términos. En este caso, las predicciones futuras (por ejemplo, $\hat{y}_{11}$) quedarán todas alrededor del promedio de las observaciones pasadas. Por lo tanto, el pronóstico esencialmente ignora el patrón estacional. Si se elige un valor grande de α, $\hat{y}_{11}$, que es igual a $\hat{y}_8$, estará cerca en valor a y_7, lo que obviamente no es bueno. En otras palabras, en este caso el modelo se comporta mal, sin importar la elección de α.

El modelo de ponderación exponencial $\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha)\,\hat{y}_t$ está diseñado para situaciones en las cuales el comportamiento de la variable de interés es esencialmente estable, en el sentido de que las desviaciones a través del tiempo no tienen nada que ver con el *tiempo* en sí, sino que son causadas por *efectos aleatorios* que no siguen un patrón periódico. Esto es lo que hemos identificado como la hipótesis *estacionaria*. No es sorprendente, entonces, que el modelo tenga varias fallas cuando se le utiliza en situaciones (como una rampa lineal o la demanda de trajes de baño) que no corresponden a esta definición. Aunque este enunciado puede ser verdadero, no es demasiado constructivo. ¿Qué método debe utilizar un administrador cuando el modelo de ponderación exponencial, tal como se describió anteriormente, no resulta apropiado? En el caso de un patrón estacional, un método simplista sería utilizar el modelo de ponderación exponencial en datos pasados que sean "apropiados". Por ejemplo, las aerolíneas u hoteles, que presentan una fuerte estacionalidad según el día de la semana, podrían tomar un promedio suavizado de la demanda de lunes anteriores para pronosticar la demanda de los lunes por venir. Otra empresa con estacionalidad mensual podría tomar un promedio suavizado de las ventas de junios anteriores, para pronosticar las ventas del junio de este año. Este último método presenta dos problemas. Primero, ignora gran cantidad de información útil. Ciertamente, las ventas desde el último martes hasta el domingo, en el ejemplo de la aerolínea o el hotel (o de julio a mayo en el otro ejemplo), deben dar por lo menos una cantidad limitada de información sobre el nivel posible de ventas de este lunes (o junio). Segundo, si el ciclo es muy largo, digamos un año, este método implica que para obtener una muestra de tamaño razonable se deberán utilizar datos muy antiguos. La hipótesis arriba mencionada, que el sistema o proceso que produce la variable de interés es esencialmente *estacionario* a través del tiempo, se vuelve más inconsistente cuando el intervalo de tiempo cubierto por los datos es bastante grande.

Si el administrador está convencido de que hay una tendencia (el caso Shumway, Horch y Sager [B]) o un efecto estacional (el caso del pronóstico de habitaciones del Marriott) en la variable a predecir, un mejor método es desarrollar modelos de pronóstico que incorporen estas características. Cuando existe un patrón discernible de estacionalidad (que se puede detectar con bastante facilidad graficando los datos en Excel), existen métodos, que utilizan promedios móviles simples, para determinar un factor de estacionalidad. Utilizando este factor, los datos pueden ser "desestacionalizados", en los cuales se puede utilizar algún método de pronóstico, y el pronóstico entonces puede ser "reestacionalizado". Este método será mostrado después del modelo de tendencia de la siguiente sección.

MODELO DE HOLT (PONDERACIÓN EXPONENCIAL CON TENDENCIA)

Como se analizó anteriormente, los modelos de ponderación exponencial simple no se desempeñan muy bien en modelos que muestran tendencias obvias hacia arriba o hacia abajo (sin estacionalidad) en los datos. Para corregir esto, Holt desarrolló el siguiente modelo:

$$\hat{y}_{t+k} = L_t + kT_t$$

donde:

$$\begin{aligned} L_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \\ T_t &= \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \end{aligned} \tag{13.10}$$

El **modelo de Holt** nos permite pronosticar hasta k periodos en el futuro. En este modelo, tenemos ahora dos parámetros de ponderación, α y β, ambos entre 0 y 1. El término L_t indica el nivel a largo plazo o valor básico de los datos de la serie de tiempo. El término T_t indica el incremento o decremento esperados por periodo (es decir, la tendencia).

Demostremos cómo hacer funcionar este modelo mediante un nuevo ejemplo. Amy Luford es analista en una gran empresa de Wall Street. Ha estado observando las utilidades por trimestre de Startup Airlines y se espera que haga un pronóstico de las utilidades del siguiente trimestre. Tiene los datos y la gráfica siguientes disponibles en una hoja de cálculo (STARTUP.XLS), como se muestra en la figura 13.23.

Amy puede detectar que los datos incluyen una tendencia obvia, como se esperaría de una empresa nueva con éxito. Quiere aplicar el modelo de tendencia de Holt a los datos para generar su pronóstico de utilidades por acción (PUA) del decimotercer trimestre. Este método de pronóstico se muestra en su hoja de cálculo "Holt" en el mismo libro de trabajo (STARTUP.XLS) y aparece en la figura 13.24. Ella necesita valores iniciales para L y T. Tiene varias opciones: (1) determinar que L_1 = PUA reales del trimestre 1 y $T_1 = 0$, (2) determinar que L_1 = PUA promedio de los 12 trimestres y T_1 = tendencia promedio para los 12 trimestres, y muchas otras variantes intermedias. Amy elige la primera opción.

Con estimaciones iniciales para $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.5$, ella puede ver que el error porcentual medio absoluto (EPMA) es 43.3% (celda F18). Aunque esto es bastante alto, Amy hace el inten-

Trimestre	Utilidad/Acción
1	$ (0.20)
2	$ 0.10
3	$ 0.05
4	$ 0.15
5	$ 0.22
6	$ 0.35
7	$ 0.37
8	$ 0.42
9	$ 0.37
10	$ 0.53
11	$ 0.59
12	$ 0.65

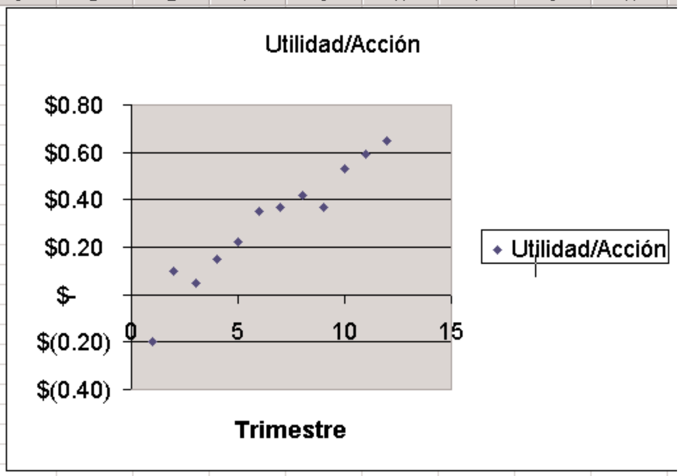


FIGURA 13.23
Utilidad por acción de Startup Airlines

D6 = =$B$2*(C6-C5)+(1-$B$2)*D5

	A	B	C	D	E	F	G
1	*alfa* =	0.50					
2	*beta* =	0.50					
3							
4	Trimestre	Utilidades/Acción	Término de nivel	Término de tendencia	Pronóstico de Utilidades/Acción	% Error absoluto	
5	1	$ (0.20)	$ (0.20)	0	NA	NA	
6	2	$ 0.10	$ (0.05)	0.075	$ (0.20)	300.0%	
7	3	$ 0.05	$ 0.04	0.081	$ 0.03	50.0%	
8	4	$ 0.15	$ 0.13	0.089	$ 0.12	20.8%	
9	5	$ 0.22	$ 0.22	0.088	$ 0.22	1.6%	
10	6	$ 0.35	$ 0.33	0.098	$ 0.31	11.5%	
11	7	$ 0.37	$ 0.40	0.084	$ 0.43	15.7%	
12	8	$ 0.42	$ 0.45	0.068	$ 0.48	14.9%	
13	9	$ 0.37	$ 0.44	0.031	$ 0.52	40.4%	
14	10	$ 0.53	$ 0.50	0.044	$ 0.48	10.3%	
15	11	$ 0.59	$ 0.57	0.055	$ 0.55	7.3%	
16	12	$ 0.65	$ 0.64	0.062	$ 0.62	4.1%	
17					$ 0.70		
18						43.3%	= EPMA

Celda	Fórmula	Cópiese a
C5	=B5	—
C6	=$B$1*B6 + (1-$B$1)*(C5+D5)	C7:C16
D6	=$B$2* (C6-C5)+(1-$B$2)*D5	D7:D16
E6	=SUMA(C5:D5)	E7:E17
F6	=ABS(B6-E6)/B6	F7:F16
F18	=PROMEDIO(F6:F16)	—

FIGURA 13.24
Modelo de ponderación exponencial con tendencia para Startup Airlines

to con una β igual a cero (como si no existiera tendencia y estuviera otra vez en la ponderación exponencial simple, para ver si este nuevo modelo le ofrece alguna ventaja), y ve en la figura 13.25 que el EPMA es mucho peor, hasta 78.1% (véase la figura 13.25).

Finalmente, decide utilizar Solver para ayudarse a encontrar los valores óptimos de α y β, porque sabe que Solver puede mejorar sus estimaciones iniciales de 0.5. Para permitir que Solver elija las α y β que minimicen el EPMA, hace lo siguiente:

1. Hace clic en Herramientas, después en "Solver".
2. Establece F18 como celda objetivo e indica a Solver que deseamos minimizarla.

C6 = =$B$1*B6+(1-$B$1)*(C5+D5)

	A	B	C	D	E	F	G
1	*alfa* =	0.50					
2	*beta* =	0.00					
3							
4	**Trimestre**	**Utilidades/Acción**	**Término de nivel**	**Término de tendencia**	**Pronóstico de Utilidades/Acción**	**% Error absoluto**	
5	1	$ (0.20)	$ (0.20)	0	NA	NA	
6	2	$ 0.10	$ (0.05)	0.000	$ (0.20)	300.0%	
7	3	$ 0.05	$ -	0.000	$ (0.05)	200.0%	
8	4	$ 0.15	$ 0.08	0.000	$ -	100.0%	
9	5	$ 0.22	$ 0.15	0.000	$ 0.08	65.9%	
10	6	$ 0.35	$ 0.25	0.000	$ 0.15	57.9%	
11	7	$ 0.37	$ 0.31	0.000	$ 0.25	32.8%	
12	8	$ 0.42	$ 0.36	0.000	$ 0.31	26.3%	
13	9	$ 0.37	$ 0.37	0.000	$ 0.36	1.4%	
14	10	$ 0.53	$ 0.45	0.000	$ 0.37	30.7%	
15	11	$ 0.59	$ 0.52	0.000	$ 0.45	24.0%	
16	12	$ 0.65	$ 0.58	0.000	$ 0.52	20.1%	
17					$ 0.58		
18						78.1%	**= EPMA**

FIGURA 13.25

Modelo de hoja de cálculo de Startup Airlines sin tendencia

F6 = =ABS(B6-E6)/B6

	A	B	C	D	E	F	G
1	*alfa* =	0.59					
2	*beta* =	0.42					
3							
4	**Trimestre**	**Utilidades/Acción**	**Término de nivel**	**Término de tendencia**	**Pronóstico de Utilidades/Acción**	**% Error absoluto**	
5	1	$ (0.20)	$ (0.20)	0	NA	NA	
6	2	$ 0.10	$ (0.02)	0.074	$ (0.20)	300.0%	
7	3	$ 0.05	$ 0.05	0.074	$ 0.05	0.0%	
8	4	$ 0.15	$ 0.14	0.080	$ 0.12	17.4%	
9	5	$ 0.22	$ 0.22	0.080	$ 0.22	0.2%	
10	6	$ 0.35	$ 0.33	0.093	$ 0.30	14.2%	
11	7	$ 0.37	$ 0.39	0.080	$ 0.42	14.1%	
12	8	$ 0.42	$ 0.44	0.067	$ 0.47	12.2%	
13	9	$ 0.37	$ 0.43	0.033	$ 0.51	37.4%	
14	10	$ 0.53	$ 0.50	0.050	$ 0.46	13.2%	
15	11	$ 0.59	$ 0.57	0.060	$ 0.55	6.5%	
16	12	$ 0.65	$ 0.64	0.064	$ 0.63	2.5%	
17					$ 0.71		
18						38.0%	**= EPMA**

FIGURA 13.26

Modelo óptimo de una hoja de cálculo sobre la ponderación exponencial con tendencia para Startup Airlines

3. Indica que las celdas que cambiarán son B1:B2.
4. Añade las restricciones de que (a) B1:B2 $\geq$ 0, y (b) B1:B2 $\leq$ 1.
5. Hace clic en Resolver para obtener los resultados que se muestran en la figura 13.26.

Amy observa que $\alpha^* = 0.59$ y $\beta^* = 0.42$ y que el EPMA ha sido reducido hasta 38%, lo que es una mejoría de casi 12.5% sobre el EPMA con sus estimaciones iniciales de $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.5$.

El otro método de pronóstico que Amy pudo haber utilizado y con el cual habría podido observar una tendencia obvia en los datos (y por lo tanto donde esa ponderación exponencial y los promedios ponderados móviles no serían efectivos) sería mediante una regresión lineal en los datos, siendo el tiempo la variable independiente. Esto lo dejaremos como ejercicio para el estudiante (véase el problema 13-19).

ESTACIONALIDAD

Cuando se hacen pronósticos utilizando datos de una serie de tiempo, uno puede a menudo sacar provecho de la estacionalidad. La **estacionalidad** comprende movimientos hacia arriba y hacia abajo en un patrón de duración constante que se repite.

Por ejemplo, si usted estuviera observando los datos mensuales de las ventas de helados, esperaría ver, año tras año, ventas más altas en los meses más cálidos (junio a agosto en el he-

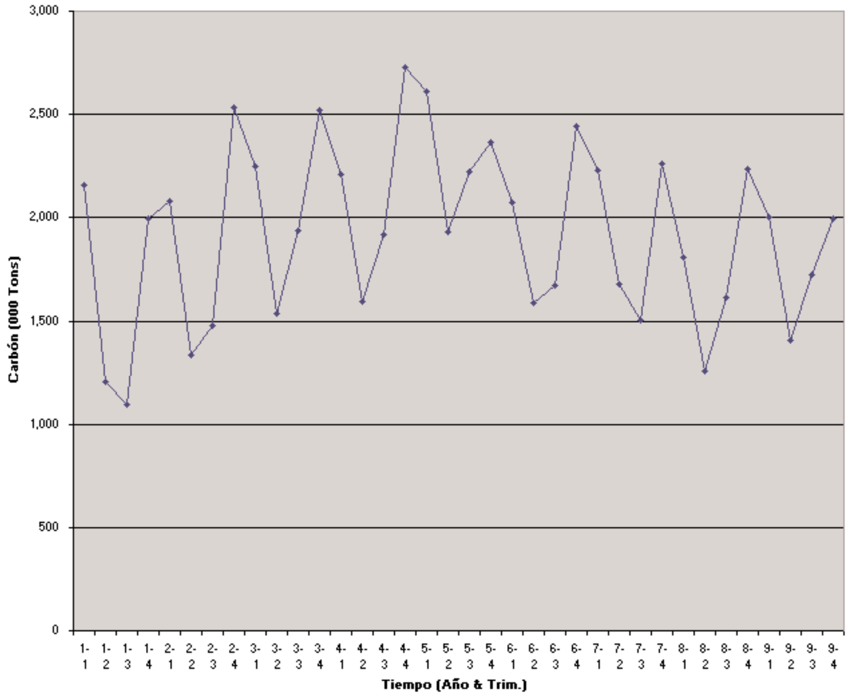


FIGURA 13.27

Recibos del carbón en un periodo de nueve años

misferio norte) que en los de invierno. El patrón de estacionalidad sería de 12 meses de duración. Si utilizáramos datos semanales, el patrón estacional se repetiría cada 52 semanas. La cantidad de periodos en un patrón estacional depende de la frecuencia con que se recolecten las observaciones.

En otro ejemplo podríamos estar observando datos diarios del número de huéspedes que se hospedan en el hotel del centro para hombres de negocios. Nuestra intuición podría indicarnos que esperamos un gran número de ellos las noches de los lunes, martes y miércoles, pocos los viernes y sábados, y un número intermedio jueves y domingos. Así, nuestro patrón sería como sigue, comenzando el domingo: medio, alto, alto, alto, medio, bajo, bajo. El patrón se repetiría cada siete días.

El método para tratar patrones estacionales como éstos consiste en cuatro pasos: (1) observar los datos originales que exhiben un patrón estacional; observe que a partir del examen de los datos y de nuestro propio juicio, suponemos un patrón estacional de *m* periodos. (2) Utilizando el método numérico descrito en la siguiente sección, desestacionalizamos los datos. (3) Utilizando el mejor método de pronóstico disponible, hacemos un pronóstico en términos desestacionalizados. (4) Reestacionalizamos el pronóstico para que incluya el patrón estacional.

Ilustraremos estos conceptos con datos sobre los recibos del carbón en Estados Unidos en los sectores comercial/residencial en un periodo de nueve años (medidos en miles de toneladas). Es importante que observe en esta figura los informes trimestrales del carbón en Estados Unidos. Frank Keetch es el administrador de Gillette Coal Mine y está intentando hacer un pronóstico de la demanda para los siguientes dos trimestres. Ha incluido los datos de toda la industria en una hoja de cálculo (COAL.XLS), y en la figura 13.27 aparece una gráfica de los mismos. La intuición le dice a Frank que espere recibos del carbón que deben ser mayores al promedio en el primero y cuarto trimestres (efecto del invierno) y menores al promedio en el segundo y tercer trimestres (efecto de la primavera/verano).

Desestacionalización El procedimiento para desestacionalizar datos es simplemente hacer un promedio de todas las variaciones que ocurren dentro de una estación. Por lo tanto, para datos trimestrales, se utiliza un promedio de cuatro periodos para eliminar la estacionalidad dentro de ese año. A fin de desestacionalizar una serie de tiempo completa, el primer paso es calcular una serie de promedios móviles de *m* periodos, donde *m* es la duración del patrón estacional. A fin de calcular este promedio móvil de cuatro periodos, él tiene que agregar dos columnas (C y D) a su hoja de cálculo de Excel, que se presenta en la figura 13.28.

C10 = =PROMEDIO(B8:B11)

	A	B	C	D	E	F	G
6	Tiempo	Recibos de	Promedio móvil	Promedio móvil	Relación de Recibos de Carbón	Índices	Datos
7	Año-Trim.	Carbón	4 Periodos	Centrado	a Promedio móvil centrado	Estacionales	Desestacionalizados
8	1-1	2,159	-----	-----	-----	1.108	1,948.
9	1-2	1,203	-----	-----	-----	0.784	1,535.
10	1-3	1,094	1,613	1,603	0.682	0.860	1,272.
11	1-4	1,996	1,594	1,610	1.240	1.234	1,617.
12	2-1	2,081	1,626	1,674	1.244	1.108	1,877.
13	2-2	1,332	1,721	1,788	0.745	0.784	1,700.
14	2-3	1,476	1,856	1,877	0.787	0.860	1,716.
15	2-4	2,533	1,898	1,923	1.317	1.234	2,053.
16	3-1	2,249	1,948	2,005	1.122	1.108	2,029.
17	3-2	1,533	2,063	2,061	0.744	0.784	1,956.
18	3-3	1,935	2,060	2,055	0.942	0.860	2,250.
19	3-4	2,523	2,050	2,058	1.226	1.234	2,045.
20	4-1	2,208	2,066	2,064	1.070	1.108	1,992.
21	4-2	1,597	2,061	2,087	0.765	0.784	2,038.
22	4-3	1,917	2,112	2,163	0.886	0.860	2,229.
23	4-4	2,726	2,213	2,255	1.209	1.234	2,209.
24	5-1	2,612	2,297	2,335	1.119	1.108	2,356.
25	5-2	1,931	2,373	2,328	0.830	0.784	2,464.
26	5-3	2,223	2,282	2,215	1.004	0.860	2,585.
27	5-4	2,363	2,148	2,105	1.123	1.234	1,915.
28	6-1	2,074	2,062	1,994	1.040	1.108	1,871.
29	6-2	1,589	1,925	1,935	0.821	0.784	2,028.
30	6-3	1,673	1,945	1,964	0.852	0.860	1,945.
31	6-4	2,443	1,984	1,995	1.225	1.234	1,980.
32	7-1	2,231	2,006	1,984	1.124	1.108	2,013.
33	7-2	1,675	1,963	1,940	0.863	0.784	2,137.
34	7-3	1,503	1,917	1,864	0.806	0.860	1,748.

Gráfica de datos / PMC / Gráfica desest. / **Datos**

Celda	Fórmula	Cópiese a
C10	=PROMEDIO(B8:B11)	C11:C42
D10	=PROMEDIO(C10:C11)	D11:D41
E10	=B10/D10	E11:E41
F8	=$E$1	F12, F16, F20, F24, F28, F32, F36, F40
F9	=$E$2	F13, F17, F21, F25, F29, F33, F37, F41
F10	=$E$3	F14, F18, F22, F26, F30, F34, F38, F42
F11	=$E$4	F15, F19, F23, F27, F31, F35, F39, F43

FIGURA 13.28

Hoja de cálculo para desestacionalizar los datos

La columna C de la figura 13.28 muestra un promedio móvil de cuatro periodos de los datos en la columna B. La primera cantidad es el promedio de los primeros cuatro periodos,

$$(2159 + 1203 + 1094 + 1996)/4 = 1613$$

La segunda es el promedio de los siguientes cuatro periodos, y así sucesivamente.

A Frank realmente le gustaría centrar el promedio móvil en el punto medio de los datos a partir de los cuales fue calculado. *Si m es impar*, el primer promedio móvil (promedio de puntos 1 a m) es fácilmente centrado en el punto $(m + 1)/2$ (por ejemplo, suponga que tuviera datos diarios donde $m = 7$, el primer promedio móvil de siete periodos se centraría en el punto $(7 + 1)/2$ o en el cuarto punto). Este proceso sigue adelante hasta encontrar el segundo promedio móvil a través del punto $(m + 1)$, que se centra en el punto $(m + 3)/2$, y así sucesivamente.

Si m es par, como en el caso de Frank, la tarea es un poco más complicada, requiriéndose un paso adicional para centrar los promedios móviles. Ya que el promedio de los primeros cuatro puntos en realidad debería estar en el punto central entre el segundo y tercer datos, y el promedio de los periodos dos a cinco debe estar centrado a la mitad del camino entre los periodos tres y cuatro, el valor que será centrado en el periodo tres puede ser aproximado tomando el promedio de los primeros dos promedios. Por lo tanto, la primera cantidad en la columna del *promedio móvil centrado* (columna D) es

$$(1613 + 1594)/2 = 1603$$

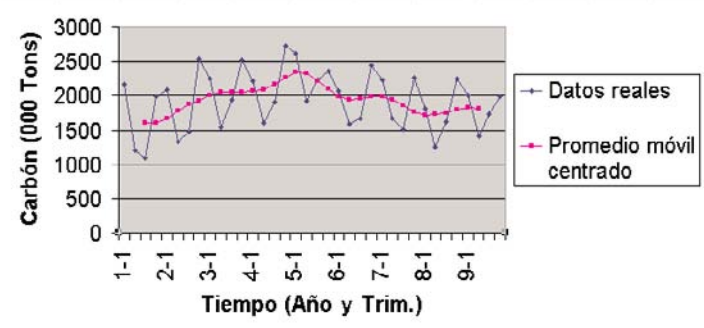


FIGURA 13.29
Gráfica de los datos y sus promedios móviles centrados

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	1.108	**1ero.**	-----	1.244	1.122	1.070	1.119	1.040	1.124	1.052	1.096
2	0.784	**2do.**	-----	0.745	0.744	0.765	0.830	0.821	0.863	0.724	0.776
3	0.860	**3ero.**	0.682	0.787	0.942	0.886	1.004	0.852	0.806	0.920	-----
4	1.234	**4rto.**	1.240	1.317	1.226	1.209	1.123	1.225	1.284	1.246	-----

Celda	Fórmula	Cópiese a
E1	=PROMEDIO(H1:O1)	E2
E3	=PROMEDIO(G3:N3)	E4

FIGURA 13.30
Relaciones por trimestre y sus promedios

En la figura 13.29 aparece una gráfica de los datos originales junto con sus promedios móviles centrados. Observe que, como Frank había esperado, los recibos del carbón están por encima del promedio móvil centrado en los trimestres primero y cuarto, y por debajo del promedio en los trimestres dos y tres. Observe que el promedio móvil tiene mucha menos volatilidad que la serie original; de nuevo, el proceso de promediar elimina variaciones de un trimestre a otro.

El tercer paso es dividir los datos reales en un punto dado de la serie entre el promedio móvil *centrado* correspondiente al mismo punto. Este cálculo no se puede hacer para todos los puntos posibles, ya que al principio y al final de la serie no es posible calcular un promedio móvil centrado. Estas relaciones representan el grado al cual una observación particular queda por debajo (como el .682 para el periodo tres que se muestra en la celda E10 de la figura 13.28) o por encima (como el 1.24 para el periodo cuatro en la celda E11) del nivel típico. Observe que estas relaciones para el tercer trimestre tienden a estar por debajo de 1.0 y las relaciones para el cuarto trimestre tienden a estar por encima de 1.0. Estas relaciones forman la base para el desarrollo de un "índice estacional".

Para desarrollar el índice estacional, primero agrupamos las relaciones según el trimestre (columnas G a O), como se muestra en la figura 13.30. Entonces, trimestre por trimestre calculamos el promedio móvil de todas las relaciones de los promedios móviles (columna E). Por ejemplo, todas las relaciones del primer trimestre promedian 1.108. Éste es un índice estacional para el primer trimestre, y Frank concluye que el primer trimestre produce recibos del carbón que son en promedio 110.8% comparados con los promedios de todos los trimestres.

Estos índices estacionales representan lo que los datos de esa estación específica serían en promedio en comparación con el promedio de la serie completa. Un índice estacional mayor que 1 significa que esa estación es más alta que el promedio del año; de manera similar, un índice menor que 1 significa que la estación es menor que el promedio del año.

El último paso de la desestacionalización es tomar los datos reales y dividirlos entre el índice estacional adecuado. Esto se muestra en las columnas F y G de la figura 13.31. Los datos desestacionalizados aparecen graficados en la figura 13.32.

Frank se da cuenta de que los datos desestacionalizados parecen "subir y bajar" mucho menos que los datos originales.

G8 = =B8/F8

	C	D	E	F	G
6	Promedio móvil	Promedio móvil	Relación de Ingresos por Carbón	Índices	Datos
7	4 Periodos	Centrado	a Promedio móvil centrado	Estacionales	Desestacionalizados
8	-----	-----	-----	1.108	1,948.1
9	-----	-----	-----	0.784	1,535.4
10	1,613	1,603	0.682	0.860	1,272.3
11	1,594	1,610	1.240	1.234	1,617.8
12	1,626	1,674	1.244	1.108	1,877.8
13	1,721	1,788	0.745	0.784	1,700.0
14	1,856	1,877	0.787	0.860	1,716.6
15	1,898	1,923	1.317	1.234	2,053.1
16	1,948	2,005	1.122	1.108	2,029.3
17	2,063	2,061	0.744	0.784	1,956.5
18	2,060	2,055	0.942	0.860	2,250.4
19	2,050	2,058	1.226	1.234	2,045.0
20	2,066	2,064	1.070	1.108	1,992.3
21	2,061	2,087	0.765	0.784	2,038.2
22	2,112	2,163	0.886	0.860	2,229.5
23	2,213	2,255	1.209	1.234	2,209.5
24	2,297	2,335	1.119	1.108	2,356.9
25	2,373	2,328	0.830	0.784	2,464.5
26	2,282	2,215	1.004	0.860	2,585.3
27	2,148	2,105	1.123	1.234	1,915.3
28	2,062	1,994	1.040	1.108	1,871.4
29	1,925	1,935	0.821	0.784	2,028.0
30	1,945	1,964	0.852	0.860	1,945.7
31	1,984	1,995	1.225	1.234	1,980.1
32	2,006	1,984	1.124	1.108	2,013.1
33	1,963	1,940	0.863	0.784	2,137.8
34	1,917	1,864	0.806	0.860	1,748.0
35	1,812	1,759	1.284	1.234	1,831.0
36	1,706	1,720	1.052	1.108	1,632.3
37	1,734	1,731	0.724	0.784	1,600.5
38	1,729	1,753	0.920	0.860	1,875.9
39	1,777	1,796	1.246	1.234	1,814.0
40	1,815	1,829	1.096	1.108	1,808.3

FIGURA 13.31
Cálculo de valores desestacionalizados

Celda	Fórmula	Cópiese a
G8	=B8/F8	G9:G43

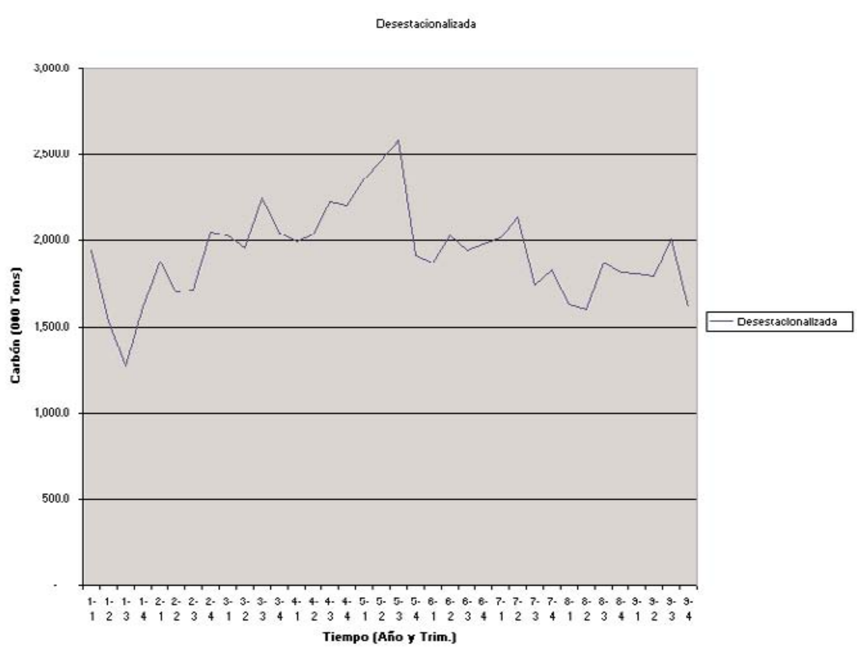


FIGURA 13.32
Gráfica de datos desestacionalizados

J10 = =SUMAXMENOSY2(G9:G43,H9:H43)/CONTAR(G9:G43)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
6	Tiempo	Recibos de	Promedio móvil	Promedio móvil	Relación de Recibos de Carbón	Índices	Datos			alpha =
7	Año-Trim.	Carbón	4 Periodos	Centrado	a Promedio móvil centrado	Estacionales	Desestacionalizados	Pronóstico		0.653
8	1-1	2,159	-----	-----	-----	1.108	1,948.1	1,948.1		
9	1-2	1,203	-----	-----	-----	0.784	1,535.4	1,948.1		ECM =
10	1-3	1,094	1,613	1,603	0.682	0.860	1,272.3	1,678.5		47,920
11	1-4	1,996	1,594	1,610	1.240	1.234	1,617.8	1,413.1		
12	2-1	2,081	1,626	1,674	1.244	1.108	1,877.8	1,546.8		
13	2-2	1,332	1,721	1,788	0.745	0.784	1,700.0	1,763.0		
14	2-3	1,476	1,856	1,877	0.787	0.860	1,716.6	1,721.9		
15	2-4	2,533	1,898	1,923	1.317	1.234	2,053.1	1,718.4		
16	3-1	2,249	1,948	2,005	1.122	1.108	2,029.3	1,937.1		
17	3-2	1,533	2,063	2,061	0.744	0.784	1,956.5	1,997.4		
18	3-3	1,935	2,060	2,055	0.942	0.860	2,250.4	1,970.7		
19	3-4	2,523	2,050	2,058	1.226	1.234	2,045.0	2,153.4		
20	4-1	2,208	2,066	2,064	1.070	1.108	1,992.3	2,082.6		
21	4-2	1,597	2,061	2,087	0.765	0.784	2,038.2	2,023.6		
22	4-3	1,917	2,112	2,163	0.886	0.860	2,229.5	2,033.2		
23	4-4	2,726	2,213	2,255	1.209	1.234	2,209.5	2,161.4		
24	5-1	2,612	2,297	2,335	1.119	1.108	2,356.9	2,192.8		
25	5-2	1,931	2,373	2,328	0.830	0.784	2,464.5	2,300.0		
26	5-3	2,223	2,282	2,215	1.004	0.860	2,585.3	2,407.5		
27	5-4	2,363	2,148	2,105	1.123	1.234	1,915.3	2,523.7		
28	6-1	2,074	2,062	1,994	1.040	1.108	1,871.4	2,126.2		
29	6-2	1,589	1,925	1,935	0.821	0.784	2,028.0	1,959.7		
30	6-3	1,673	1,945	1,964	0.852	0.860	1,945.7	2,004.4		
31	6-4	2,443	1,984	1,995	1.225	1.234	1,980.1	1,966.0		
32	7-1	2,231	2,006	1,984	1.124	1.108	2,013.1	1,975.2		
33	7-2	1,675	1,963	1,940	0.863	0.784	2,137.8	2,000.0		
34	7-3	1,503	1,917	1,864	0.806	0.860	1,748.0	2,090.0		
35	7-4	2,259	1,812	1,759	1.284	1.234	1,831.0	1,866.5		
36	8-1	1,809	1,706	1,720	1.052	1.108	1,632.3	1,843.3		
37	8-2	1,254	1,734	1,731	0.724	0.784	1,600.5	1,705.5		
38	8-3	1,613	1,729	1,753	0.920	0.860	1,875.9	1,636.9		
39	8-4	2,238	1,777	1,796	1.246	1.234	1,814.0	1,793.0		
40	9-1	2,004	1,815	1,829	1.096	1.108	1,808.3	1,806.7		

Celda	Fórmula	Cópiese a
H8	=G8	—
H9	=\$J\$7*G8+(1−\$J\$7)*H8	H10:H44
J10	=SUMAXMY2(G9:G43,H9:H43)/CONTAR(G9:G43)	—

FIGURA 13.33

Hoja de cálculo del pronóstico de ponderación exponencial de datos desestacionalizados

Pronóstico Una vez desestacionalizados los datos, se puede hacer un pronóstico desestacionalizado. Éste deberá estar basado en una metodología apropiada, que tome en cuenta el patrón de los datos desestacionalizados (es decir, si en los datos aparece una tendencia, utilizar un modelo basado en tendencias). En este ejemplo, Frank elige pronosticar los recibos del carbón para el primer trimestre del décimo año usando una ponderación exponencial simple. Utilizando este método de pronóstico, resulta que la constante de ponderación óptima es $\alpha^* = .653$, que da un ECM de 47,920 (observe la figura 13.33). Frank determina que el pronóstico desestacionalizado sería de 1,726 mil toneladas para el primer trimestre del siguiente año (celda H44). Éste también sería el valor del pronóstico desestacionalizado para el segundo trimestre, dados los datos que tenemos actualmente.

Reestacionalización El último paso del proceso es que Frank reestacionalice el pronóstico de 1,726. La forma de hacer esto es *multiplicando* 1,726 por el índice estacional del primer trimestre (1.108) para obtener el valor de 1,912. Un pronóstico estacionalizado para el segundo trimestre sería 1,726 multiplicado por su índice estacional (0.784), lo que da un valor de 1,353. Estos valores representarían los puntos de pronóstico de Frank para los siguientes dos trimestres.

LA CAMINATA ALEATORIA

Las técnicas de promedio móvil y de ponderación exponencial analizadas anteriormente son ejemplos de lo que se conoce como modelos de series de tiempo. En fechas recientes han aparecido métodos mucho más complejos para el análisis de series de tiempo. Estos métodos, basados principalmente en desarrollos llevados a cabo por G. E. P. Box y G. M. Jenkins (véase Box y Jenkins), ya han causado un impacto importante en la práctica de los pronósticos, y de hecho el método Box-Jenkins está incorporado en varios paquetes de pronóstico basados en computadora.

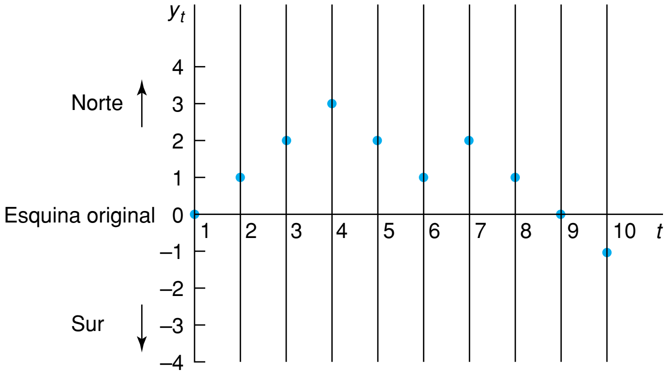


FIGURA 13.34
Caminata aleatoria clásica

Estas técnicas de pronóstico de las series de tiempo están basadas en la hipótesis de que los valores verdaderos de la variable de interés, y_t, son generados por un modelo estocástico (es decir, probabilístico). Nos parece poco apropiado presentar lo suficiente sobre la teoría de las probabilidades para que podamos analizar estos modelos con algún grado de generalidad, pero un proceso especial, muy importante (y muy simple), conocido como **caminata aleatoria**, sirve como una ilustración adecuada del modelo estocástico. Aquí la variable y_t se supone producida por la relación

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon$$

donde el valor de ϵ está determinado por un evento aleatorio. Para ilustrar este proceso de manera aún más explícita, consideremos a un hombre parado en la esquina de una calle que está orientada de norte a sur. Lanza una moneda al aire. Si cae en águila (A), caminará una calle hacia el norte. Si cae en sol (S), caminará una calle hacia el sur. Cuando llegue a la siguiente esquina (la que haya tocado en suerte), repite el proceso. Éste es el ejemplo clásico de una caminata aleatoria. Para poner este ejemplo en forma de modelo, identifique la esquina original como cero. Haremos éste el valor de la primera observación, y_1. Comenzando en este punto, identifique las esquinas sucesivas hacia el norte como $+1, +2, \ldots$. También comenzando desde la esquina original, identifique las esquinas sucesivas hacia el sur $-1, -2, \ldots$ (vea la figura 13.34). Estas etiquetas que describen la localización de nuestro caminante aleatorio son las y_t.

En el modelo, $y_t = y_{t-1} + \epsilon$, donde (suponiendo un lanzamiento justo de moneda) $\epsilon = 1$ con probabilidad de 1/2, y $\epsilon = -1$ con probabilidad de 1/2. Si nuestro caminante observa la secuencia A, A, A, S, S, A, S, S, S, seguirá la trayectoria que se muestra en la figura 13.34.

Pronósticos basados en el valor esperado condicional Suponga que una vez que nuestro agente especial haya lanzado la moneda nueve veces (es decir, se ha movido nueve veces, y tenemos [comenzando con la esquina 0] 10 observaciones de esquinas), nos gustaría hacer un pronóstico de dónde estará después de otro movimiento. Éste es el típico problema de pronóstico en el contexto de series de tiempo. Esto es, hemos observado $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ y necesitamos un buen pronóstico $\hat{y}_{11}$ del valor por venir y_{11}. En este caso, de acuerdo con un criterio razonable, el mejor valor para $\hat{y}_{11}$ es un *valor condicional esperado* de la cantidad aleatoria y_{11}. En otras palabras, el mejor pronóstico es el valor esperado de y_{11} dado que conocemos $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$. A partir del modelo sabemos que y_{11} será igual a $(y_{10} + 1)$ con una probabilidad igual a $^1/_2$ y y_{11} igualará a $(y_{10} - 1)$ con una probabilidad igual a $^1/_2$. Por lo tanto, $E(y_{11} \mid y_1, \ldots, y_{10})$, el valor condicional esperado de y_{11} dados $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$, se calcula como sigue:

$$E(y_{11} \mid y_1, \ldots, y_{10}) = (y_{10} + 1)\,{}^1/_2 + (y_{10} - 1)\,{}^1/_2 = y_{10}$$

Por lo tanto, podemos ver que para este modelo los datos $y_1, \ldots, y_9$ son irrelevantes, y que *el mejor pronóstico de cuál será el movimiento que realice en el futuro el caminante aleatorio y que pueda alterar su posición, es precisamente su posición actual*. Es interesante observar que el mejor pronóstico de la siguiente observación y_{12} dados $y_1, \ldots, y_{10}$ (el conjunto original) es también y_{10}. De hecho, el mejor pronóstico de cualquier valor futuro de y_t, dado este modelo particular, es su valor actual.

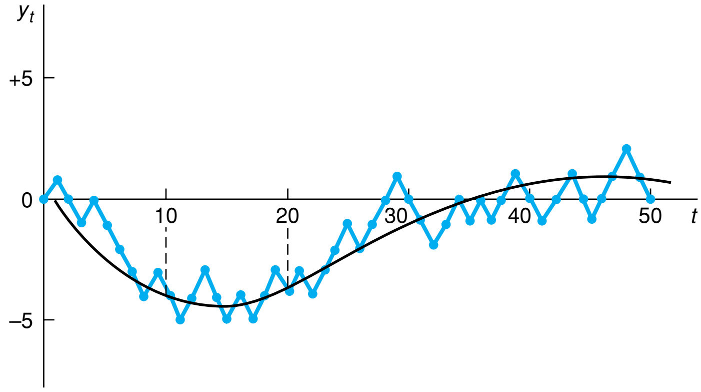


FIGURA 13.35

Datos de series de tiempo

Ver lo que no está ahí Este ejemplo no es tan tonto como puede parecer a primera vista. De hecho, hay evidencia importante que apoya la idea de que el precio de las acciones y las tasas de cambio de monedas extranjeras se comporta como una caminata aleatoria y el mejor pronóstico del precio futuro de las acciones o de una tasa de cambio (por ejemplo, yen/$) es su valor actual. No es sorprendente que esta conclusión no sea acogida cálidamente por los directores de investigaciones y graficadores técnicos que se ganan la vida haciendo pronósticos de precios de acciones o de tasas de cambio. Una razón de esta resistencia a la hipótesis de la caminata aleatoria es la casi universal tendencia humana de detectar, al ver un conjunto de datos, ciertos patrones o periodicidades, sin importar cómo se produjeron los datos. Considere los datos de series de tiempo trazados en la figura 13.35. No parece irracional creer que los datos siguen un patrón senoidal sugerido por la suave curva en la figura. A pesar de esta impresión, los datos fueron de hecho generados por el modelo de caminata aleatoria presentado antes en esta sección. Esto ilustra la tendencia de ver patrones donde no hay alguno. En la figura 13.35, cualquier intento de producir valores futuros extrapolando el patrón senoidal no tendrá más valor que el lanzar una moneda al aire.

Para concluir esta sección deberíamos enfatizar que *no* es una conclusión general que en el análisis de las series de tiempo la mejor estimación del futuro sea el presente (es decir, que $\hat{y}_{t+1} = y_t$). Este resultado es válido para el modelo particular de caminata aleatoria mostrado antes. El resultado depende en esencia de la hipótesis de que el valor esperado o medio de ϵ, el componente aleatorio, es cero. Si la probabilidad de que ϵ valiese 1 hubiera sido 0.6 y la probabilidad de que ϵ valiese -1 hubiera sido 0.4, el mejor pronóstico de y_{t+1} no hubiera sido y_t. Para encontrar este pronóstico uno tendría que encontrar el nuevo valor para $E(y_{t+1} \mid y_1, \ldots y_t)$. Tal modelo se conoce como *caminata aleatoria con deriva*.

13.5 EL PAPEL QUE DESEMPEÑAN LOS DATOS HISTÓRICOS: DIVIDE Y VENCERÁS

Los datos históricos juegan un papel importante en la elaboración y prueba de modelos de pronóstico. Uno espera que un razonamiento preceda la elaboración de un modelo de pronóstico cuantitativo. Pueden haber razones teóricas para creer que existe una relación entre algunas de las variables independientes y la variable dependiente a pronosticar y, por lo tanto, resulta apropiado un modelo causal. De manera alternativa, uno podría adoptar el punto de vista de las series de tiempo respecto a que el "comportamiento del pasado" es un buen indicativo del futuro. En cualquier caso, sin embargo, si se va a utilizar un modelo cuantitativo, deben seleccionarse los parámetros del modelo. Por ejemplo:

1. En un modelo causal que utilice una función de pronóstico lineal, $y = a + bx$, se deben definir los valores de a y b.
2. En un modelo de series de tiempo que utilice un promedio móvil ponderado de n periodos, $\hat{y}_{t+1} = \alpha_0 y_t + \alpha_1 y_{t-1} + \ldots + \alpha_{n-1} y_{t-n+1}$, debe especificarse el número de términos, n, y los valores de los pesos de ponderación, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.
3. En un modelo de series de tiempo que utilice la ponderación exponencial, $\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_t$, debe definirse el valor de α.

En cualquiera de estos modelos, a fin de definir los valores de los parámetros, uno generalmente deberá hacer uso de los datos históricos. Una guía útil al buscar cómo usar tales datos es, en efecto, la fórmula "divide y vencerás". De manera más directa, esto significa que a menudo es práctica provechosa utilizar parte de los datos para estimar los parámetros y el resto de los datos para probar el modelo. Con datos reales, también es importante "limpiar" los datos; esto es, analizarlos en busca de irregularidades, información perdida o circunstancias especiales, y ajustarlos de manera correspondiente.

Por ejemplo, suponga que una empresa tiene datos de ventas semanales de un producto específico durante los últimos dos años (104 observaciones) y planea utilizar un modelo de ponderación exponencial para hacer un pronóstico de las ventas de este producto. La empresa podría utilizar el procedimiento siguiente:

1. Escoger un valor particular para α y comparar los valores de $\hat{y}_{t+1}$ con los de y_{t+1} para $t = 25$ a 75. A fin de eliminar cualquier efecto inicial o de "arranque" en la comparación, no se usan los primeros 24 valores; esto es, anular la influencia de la estimación inicial, $\hat{y}_1$. El administrador continuaría seleccionando diferentes valores de α, hasta que el modelo produzca un ajuste satisfactorio durante el periodo $t = 25$ a 75.
2. Probar el modelo obtenido en el paso 1 en los 29 elementos de datos restantes. Lo cual se logra utilizando el mejor valor de α del paso 1, comparar los valores de $\hat{y}_{t+1}$ para y_{t+1} a y_{t+1} para $t = 76$ a 104.

Si el modelo funciona bien al pronosticar los valores de la última parte de los datos históricos, hay razones para creer que también funcionará bien en el futuro. Por otro lado, si utilizando los datos de las semanas 1 a 75 el modelo no se desempeña bien al predecir la demanda de las semanas 76 a 104, las perspectivas para predecir el futuro con el mismo modelo parecen dudosas. En este caso, se podría intentar otra técnica de pronóstico.

El mismo tipo de estrategia de divide y vencerás se puede utilizar con cualquiera de las técnicas de pronóstico que hemos presentado. Este método se centra en la *simulación* del desempeño del modelo sobre datos pasados. Es un método popular para probar modelos. Debe subrayarse, sin embargo, que este procedimiento representa lo que se conoce como una *prueba nula*. Si el modelo falla ante datos históricos, probablemente no es apropiado. Si el modelo tiene éxito ante datos históricos, *uno no puede estar seguro de que funcionará en el futuro*. Quien sabe, podría cambiar el sistema subyacente que produce las observaciones. Éste es el tipo de experiencia aleccionadora que hace que ciertos pronosticadores se sientan menos seguros.

13.6 PRONÓSTICOS CUALITATIVOS

JUICIO EXPERTO

Muchos de los pronósticos que se consideran importantes no están basados en modelos formales. Este punto parece obvio en el ámbito de los asuntos a nivel mundial (asuntos de guerra y paz, por así decirlo). Quizás sea más sorprendente saber que esto también ocurre a menudo en asuntos económicos. Por ejemplo, durante el periodo de tasas de interés elevadas de 1980 y 1981, los pronosticadores de mayor influencia sobre las tasas de interés no eran dos modelos econométricos competidores operados por equipos de econometristas. Más bien, fueron Henry Kaufman de Salomon Brothers y Albert Wojnilower de First Boston, los llamados doctores Doom y Gloom (fatalidad y lobreguez) del mundo de las tasas de interés. Estos caballeros combinaron factores relevantes, tales como la oferta de dinero y el desempleo, así como los resultados de modelos cuantitativos, según su propia manera intuitiva (sus propios modelos "internos") y produjeron pronósticos que tuvieron muy amplia credibilidad e impacto en la comunidad financiera.

La moraleja para los administradores es que los modelos cualitativos pueden ser también una fuente importante de información. Los administradores, antes de llegar a una decisión, deben tomar en consideración una amplia variedad de fuentes de datos. No se debe ignorar la opinión de los expertos. Una medida inteligente y útil de todos los pronósticos —cuantitativos y cualitativos— es un registro del desempeño pasado. El buen desempeño en el pasado es un tipo razonable de prueba nula. Un excelente historial de desempeño no promete buenos resultados futuros. Un historial pobre, sin embargo, casi nunca crea entusiasmo sobre grandes desempeños futuros. Por lo tanto, los administradores deben escuchar con cautela a los expertos y sujetarlos a un estándar de desempeño. Este mismo tipo de estándar debería ser aplicado por las personas a los miles de administradores de acciones y fondos de bonos mutualistas. Cada trimestre el *Wall Street Journal* publica el resultado del distinto desempeño de los fondos mutualistas del trimes-

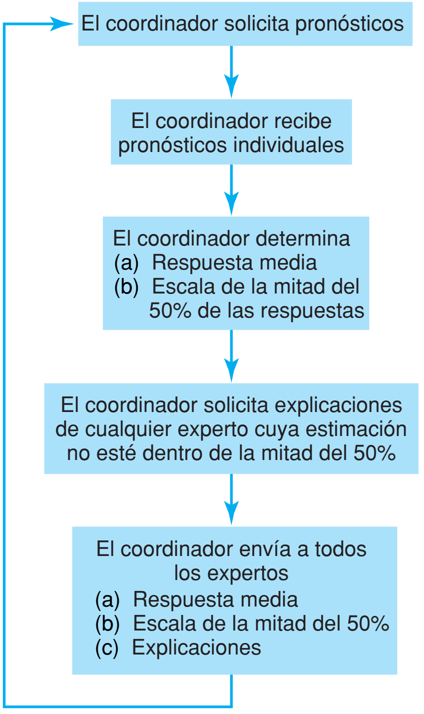


FIGURA 13.36
Método Delphi

tre, año y lustro anteriores. Los inversionistas sensatos verifican el historial de los diferentes fondos, aunque no sea garantía de su desempeño en el futuro.

Hay más, sin embargo, en la elaboración de un pronóstico cualitativo que la sola selección del experto "adecuado". Existen técnicas para extraer y combinar pronósticos de diversos grupos de expertos, y ahora volveremos nuestra atención a estas técnicas.

EL MÉTODO DELPHI Y EL GRUPO DE CONSENSO

El **método Delphi** confronta el problema de obtener un pronóstico combinado a partir de un grupo de expertos. Un enfoque consiste en reunir a los expertos en una sala de juntas y dejar que analicen el evento hasta que surja un consenso. No es sorprendente que este grupo sea conocido como **grupo de consenso**. Este planteamiento encuentra problemas debido a las dinámicas de grupo en este tipo de ejercicio. Un individuo dominante puede causar un enorme efecto en el pronóstico debido a su personalidad, reputación o habilidades para el debate. Un análisis preciso podría quedar degradado a una posición secundaria.

El método Delphi fue desarrollado por Rand Corporation para retener el poder de un pronóstico conjunto eliminando simultáneamente los efectos de las dinámicas de grupo. El método utiliza un coordinador y un conjunto de expertos. Ninguno de los expertos sabe quién más pertenece al grupo. Toda la comunicación es a través del coordinador. El proceso se ilustra en la figura 13.36.

Después de tres o cuatro pasadas por este proceso, por lo general surge un pronóstico en consenso. El pronóstico puede quedar cerca de la media original, pero si un pronóstico que en la ronda 1 se aleja de la media está apoyado por un sólido análisis, el pronóstico extremo de la ronda 1 puede convertirse en el pronóstico del grupo, después de tres o cuatro rondas.

PRONÓSTICOS POPULARES E INVESTIGACIÓN DE MERCADOS

Otras técnicas cualitativas se enfocan principalmente en el pronóstico de la demanda por un producto o grupo de productos. Están basadas en el principio de preguntar ya sea a quienes están cerca del consumidor final, como son los vendedores, o a los consumidores mismos, sobre un producto o sus planes de compra.

Consulta a vendedores En los **pronósticos populares**, se pide a los vendedores que pronostiquen la demanda en sus distritos. En la más simple de las situaciones, estos pronósticos son sumados para obtener un pronóstico de la demanda total. En sistemas más complicados, los pronósticos individuales o el pronóstico total pueden ser ajustados sobre la base de la correlación histórica entre pronósticos de vendedor y ventas reales. Semejante procedimiento hace posible corregir la posibilidad real de que aparezca un optimismo estereotipado de los vendedores.

Los pronósticos populares tienen la ventaja de proporcionar gran cantidad de conocimientos detallados para tomarlos en cuenta en el problema de pronóstico. El vendedor individual, profundamente consciente de la situación en su distrito, debe ser capaz de dar un mejor pronóstico que modelos más completos. Existen, sin embargo, varios problemas:

1. ***Alto costo:*** El tiempo que el vendedor utiliza haciendo el pronóstico no lo usa vendiendo. Algunos consideran que este costo de oportunidad de los pronósticos populares es su mayor desventaja.
2. ***Posible conflicto de intereses:*** Los pronósticos de ventas pueden convertirse muy bien en objetivos de mercadeo que pueden afectar la retribución del vendedor de manera importante. Dichas consideraciones ejercen una tendencia a la baja en los pronósticos individuales.
3. ***Esquizofrenia de producto (es decir, optimismo estereotipado del vendedor):*** Para los vendedores es importante ser entusiastas respecto a su producto y su uso potencial. No resulta claro que ese entusiasmo dé como consecuencia una fría estimación de su potencial de mercado.

En resumen, los pronósticos populares pueden no ajustarse a otros objetivos de la organización y por lo tanto, en lo general, pudieran no ser efectivos.

Consulta a clientes La **investigación de mercados** es una disciplina grande e importante por derecho propio. Incluye una diversidad de técnicas, desde grupos de clientes hasta encuestas a clientes y otras técnicas, para probar la mercadotecnia. El objetivo es hacer predicciones sobre el tamaño y estructura del mercado de bienes y/o servicios específicos. Estas predicciones (pronósticos) están basadas por lo general en pequeñas muestras y son cualitativas, en el sentido de que los datos originales generalmente consisten en evaluaciones subjetivas por parte de los clientes. Existe un amplio abanico de técnicas cuantitativas que ayudan a determinar cómo reunir y analizar los datos.

La investigación de mercados es una actividad importante en la mayoría de las empresas fabricantes de productos a clientes. También juega un papel cada vez más importante en el proceso político y electoral.

13.7 NOTAS SOBRE LA APLICACIÓN

Ya sea en el sector privado o público, la necesidad de manejar el futuro es parte implícita o explícita de toda acción y decisión administrativas. Debido a esto, administrar la creación de pronósticos es una parte crítica de la responsabilidad de un administrador. Un administrador debe decidir los recursos que habrá de dedicar a un pronóstico particular y el método que utilizará para obtenerlo.

La pregunta “qué recursos” está articulada sobre dos temas:

1. La importancia del pronóstico, o de manera más precisa, la importancia de la decisión que se espera en el pronóstico, así como su sensibilidad al mismo.
2. La calidad del pronóstico como una función de los recursos dedicados al mismo.

En otras palabras, ¿qué tan importante es, y cuánto cuesta? Son estas mismas preguntas las que el administrador debe hacer y responder sobre muchos de los servicios que adquiere.

En aplicaciones reales, la selección del método adecuado de pronóstico para una situación específica depende de una diversidad de factores. Algunas de las características que distinguen una situación de la siguiente son

1. La importancia de la decisión.
2. La disponibilidad de datos relevantes.
3. El horizonte de tiempo para el pronóstico.
4. El costo de preparación del pronóstico.
5. El tiempo hasta el momento en que el pronóstico será necesitado.

6. El número de veces que dicho pronóstico será necesitado.
7. La estabilidad del entorno.

La importancia que tiene la decisión probablemente desempeña el papel de mayor trascendencia para determinar el método de pronóstico que se va a utilizar. Curiosamente, los *métodos cualitativos* (a diferencia de los *cuantitativos*) dominan la escena en los casos extremos de pronósticos importantes y no muy importantes. En el lado inferior de la escala de importancia, piense en las muchas decisiones que toma el encargado de un supermercado sobre lo que son típicamente pronósticos implícitos: qué ofertas especiales hacer, qué exhibir en los anuncios de los pasillos, cuántos empacadores emplear. En dichos casos, los pronósticos son simplemente juicios empresariales. El rendimiento potencial no es lo suficientemente elevado como para justificar el gasto de recursos requerido para el desarrollo de un modelo formal y extenso.

En el caso de los altos ejecutivos, las decisiones son *demasiado importantes* (y quizás demasiado complejas) para dejarlas enteramente en manos de modelos cuantitativos formales. El futuro de la empresa, por no decir el del propio jefe, pueden depender de un buen pronóstico y de la decisión consiguiente. *Los modelos cuantitativos ciertamente pueden proporcionar información importante. De hecho, entre más elevado sea el nivel de planeación, más seguro se puede estar de que por lo menos hasta cierto punto se utilizarán modelos de pronóstico*. Pero para decisiones muy importantes, el pronóstico final estará basado en el juicio del ejecutivo y de sus colegas.

El punto hasta el cual un modelo cuantitativo es utilizado como entrada para este juicio dependerá, en un análisis final, de la evaluación por parte de la administración sobre la validez del modelo. Un grupo de consenso (un comité administrativo) es a menudo el vehículo elegido para alcanzar el pronóstico final. Por ejemplo, ¿qué pronósticos piensa usted que persuadieron a Henry Ford IV, al final de los setenta, para rechazar el plan de Lee Iacocca de convertir los Ford en pequeños automóviles, eficientes en el uso de energía? Asimismo, ¿qué pronósticos llevaron a Panasonic a introducir, para el mercado de reproductoras de TV, un sistema de cintas mientras que RCA presentaba un sistema de discos? ¿Y qué hay de la crisis de los misiles en Cuba? ¿La Bahía de Cochinos? Claramente, la visualización del futuro por parte de la administración jugó ahí un papel muy importante.

CÁPSULA DE APLICACIÓN

Sí, Virginia...: Un modelo de pronóstico económico ayuda a mantener en números negros un fondo fiduciario de seguros contra el desempleo

Los seguros contra el desempleo operan bajo la misma filosofía de compartir riesgos que cualquier otra póliza de seguros: se recolectan fondos de una gran población, a fin de ayudar a pagar costos no esperados de un pequeño porcentaje de dicha población. La pregunta obvia es, ¿cuánto debe recolectar el Estado, y de quién, a fin de solventar los pagos reglamentados en su ley sobre el desempleo? Esta pregunta sólo puede responderse haciendo pronósticos de flujos de efectivo por ingresos y egresos.

La comunidad de Virginia ha creado el modelo de pronóstico econométrico del seguro para desempleo (UIEFM, por sus siglas en inglés) para ayudar a responder esta pregunta. El modelo general se subdivide en dos: un modelo de proyección y un modelo de pronóstico financiero. El primero utiliza análisis de regresión para pronosticar las *salidas* de efectivo como una función de factores económicos fundamentales, que incluyen:

1. Tasas de desempleo
2. Tasas de incremento en niveles de salarios
3. Cambios en la fuerza laboral asegurada y en nómina
4. Valores mínimo y máximo de las prestaciones semanales

El programa de pronóstico financiero se concentra en dos temas:

1. El impacto del flujo de efectivo proyectado en el mecanismo de impuestos del sistema UI (unemployment insurance), esto es, en las *entradas de efectivo* al sistema
2. El nivel de fondos en el fideicomiso de seguro contra el desempleo después de 10 años

El programa de pronóstico financiero es bastante complejo, ya que la ley contra el desempleo en Virginia incluye tres alternativas fiscales. Los patrones o empleadores de Virginia pagan un impuesto basado en su historial sobre el desempleo anterior. La idea es que aquellos empleadores que incrementan más las filas de los desempleados deben pagar una proporción más elevada en los gastos por desempleo. Además, cada patrón paga un impuesto "general" para ayudar a cubrir gastos que el impuesto por historial no cubre. Finalmente, se cobra un tercer impuesto cuando el fondo UI cae por debajo del nivel de solvencia de 50% definido en la ley contra el desempleo. De hecho, gran parte de la motivación para el modelo UIEFM provino de una dramática declinación ocurrida entre 1975 y 1980 en el Fondo Fiduciario de Seguro Contra el Desempleo.

Una contribución importante del modelo de pronóstico era alertar a los planeadores sobre la posibilidad de un superávit. El modelo predijo que bajo condiciones económicas favorables, los fondos del fideicomiso contra el desempleo podrían exceder las expectativas de quienes elaboraron la ley original del seguro contra el desempleo. Como resultado, para tratar esta situación se diseñaron varias políticas. El modelo se utilizó entonces para evaluar el impacto potencial de las mismas, ayudando a los legisladores a elegir las propuestas más efectivas. De manera más general, el representante de la Comisión de Empleos de Virginia ha declarado que "la preponderancia de la legislación en Virginia está avalada por simulaciones y análisis del modelo" (véase Lackman *et al.*).

Los modelos cuantitativos juegan un papel primordial en la elaboración de pronósticos directamente utilizables, en situaciones que se consideran como de “mediana importancia”. Esto es cierto sobre todo en escenarios a corto plazo (hasta un mes) y a plazo medio (de un mes a dos años). Los análisis de series de tiempo son populares en especial para pronósticos repetitivos de mediana importancia en un entorno relativamente estable. El uso de la ponderación exponencial para pronosticar la demanda de productos maduros es un prototipo de este tipo de aplicación.

Los modelos causales compiten activamente con varios expertos para pronosticar diversos fenómenos económicos en el rango de mediana importancia (rango medio). Situaciones en las cuales se repetirá muy a menudo el pronóstico, y donde hay muchos datos relevantes disponibles, son el objetivo principal de los modelos cuantitativos, y en esos casos se han elaborado muchos modelos exitosos. Como se pudo observar en nuestro análisis anterior sobre pronósticos de las tasas de interés, hay mucho espacio en este mercado para “expertos” con un buen historial de desempeño. En la práctica comercial uno encuentra que muchos grupos asesores en administración, así como empresas especializadas, proveen “paquetes” de pronóstico, para uso en una variedad de escenarios de nivel medio.

Como comentario final, podemos hacer las siguientes observaciones sobre el uso de los pronósticos en la toma de decisiones dentro del sector público: al igual que en la industria privada, a menudo se da el caso de que, mientras más alto es el nivel de la función de planeación, se observa un mayor uso de modelos de pronóstico utilizados como entradas. En tales situaciones de alto nivel se da gran valor a la experiencia, y los pronósticos son, en algún sentido, una extensión formal del juicio experto. Piense en el Consejo de Asesores Económicos, el jefe de la Junta Federal de la Reserva o el director de la Agencia Central de Inteligencia. Puede usted estar seguro de que los pronósticos son de importancia en esos contextos, y puede estar seguro también de que en dichos entornos hay una constante actualización y, uno así lo esperaría, una mejora en las técnicas de pronóstico. Como siempre, el punto hasta el cual se usan los resultados de modelos existentes es función de la evaluación general del modelo en sí por parte del ejecutivo.

Términos clave

Ajuste de curvas. Selección de una “curva” que pase cerca de los puntos de datos en un diagrama de dispersión.

Caminata aleatoria. Un proceso estocástico, en el cual la variable en el momento t es igual a la variable al momento $(t - 1)$ más un elemento aleatorio.

Diagrama de dispersión. Una gráfica de la variable de respuesta contra una sola variable independiente.

Estacionalidad. Movimientos hacia arriba y hacia abajo con un patrón de duración constante, que se repite a sí mismo en un conjunto de datos de series de tiempo.

Grupo de consenso. Un grupo de expertos reunido para producir un pronóstico con el que todos concuerden.

Investigación de mercados. Una clase de pronósticos populares que se basa en obtener información directamente de los consumidores.

Método de mínimos cuadrados. Un procedimiento para ajustar una curva a un conjunto de datos. Minimiza la suma del cuadrado de las desviaciones de los datos con respecto a la curva.

Método Delphi. Un método para llegar a un consenso entre expertos, evitándose al mismo tiempo factores de dinámicas de grupo.

Modelo de Holt. Una variante de la ponderación exponencial simple, que toma en cuenta tendencias hacia arriba o hacia abajo en los datos.

Polinomio de grado *n*. Una función de la forma $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Se utiliza a menudo como la curva en un ajuste de mínimos cuadrados.

Ponderación exponencial. Una suma ponderada, con coeficientes de ponderación decrecientes para *todas* las observaciones pasadas, siendo igual a 1 la suma de los coeficientes; sólo se necesita almacenar un elemento de información.

Promedio móvil ponderado de *n* periodos. Una suma ponderada, con coeficientes decrecientes, de las últimas n observaciones, se utiliza como pronóstico. La suma de los coeficientes es igual a 1; se deben almacenar $(n - 1)$ conjuntos de datos.

Promedio móvil simple de *n* periodos. Se utiliza el promedio de los últimos *n* periodos como el pronóstico de valores futuros; deben almacenarse ($n - 1$) conjuntos de datos.

Pronóstico causal. El pronóstico de la cantidad que interesa se determina en función de otras variables.

Pronóstico de series de tiempo. Se traza una variable de interés contra el tiempo y se extrapola hacia el futuro utilizando alguna de las técnicas.

Pronósticos populares. Solicitar pronósticos a individuos "cercanos" y por lo tanto presumiblemente enterados, respecto a la entidad que será pronosticada.

Regresión lineal. Una técnica estadística utilizada para estimar los parámetros de un polinomio, de forma que éste se convierta en la "mejor" representación del conjunto de datos. Se utiliza también a veces para describir el problema de ajustar una función lineal a un conjunto de datos.

Validación. El proceso de utilizar un modelo sobre datos reales anteriores, para evaluar su credibilidad.

Ejercicios de repaso

Verdadero-Falso

1. **V F** Minimizar desviaciones totales (es decir, $\sum_{i=1}^{n} d_i$) es una manera razonable de definir un "buen ajuste".
2. **V F** Los ajustes por mínimos cuadrados se pueden utilizar para un variedad de curvas, además de las líneas rectas.
3. **V F** Los análisis de regresión pueden utilizarse para comprobar que el método de mínimos cuadrados produce el mejor ajuste posible en cualquier modelo real específico.
4. **V F** El método de mínimos cuadrados se utiliza en modelos causales, así como en modelos de series de tiempo.
5. **V F** En un pronóstico de promedio móvil ponderado de tres periodos, los coeficientes de ponderación se pueden asignar de muchas maneras diferentes.
6. **V F** La ponderación exponencial asigna automáticamente coeficientes de ponderación que disminuyen en valor conforme los datos son más antiguos.
7. **V F** El error cuadrático medio es una manera de comparar diversas técnicas de pronóstico.
8. **V F** La *validación* se refiere al proceso de determinar la credibilidad de un modelo, simulando su desempeño sobre datos pasados.
9. **V F** Una "caminata aleatoria" es un modelo estocástico.
10. **V F** En niveles más altos de administración, los modelos cualitativos de pronóstico se vuelven más importantes.

Opción múltiple

11. La regresión lineal (con una variable independiente)
- **a.** requiere de la estimación de tres parámetros
- **b.** es un caso especial de mínimos cuadrados polinomiales
- **c.** es un método rápido y aproximado
- **d.** utiliza la desviación total como medida de un buen ajuste

12. Un problema operacional con los promedios móviles de *k* periodos es que
- **a.** asigna igual coeficiente de ponderación a cada conjunto de datos pasados
- **b.** asigna igual coeficiente de ponderación a cada una de las últimas *k* observaciones
- **c.** requiere del almacenamiento de $k - 1$ conjuntos de datos
- **d.** ninguna de las anteriores posibilidades

13. En un modelo de ponderación exponencial un valor grande de α pone más peso en datos
- **a.** recientes
- **b.** antiguos.

14. Si los datos que se están observando pueden tomarse mejor en consideración como si fueran generados por desviaciones aleatorias alrededor de una media estacionaria, en un modelo de ponderación exponencial, es preferible un valor de α
- **a.** grande
- **b.** pequeño

15. Una estrategia de "divide y vencerás" significa que
- **a.** se divide el procedimiento de modelado en dos partes:
  (1) utilizar todos los datos para estimar los valores de los parámetros, y
  (2) utilizar los valores de parámetros del inciso (1) para ver cómo funciona el modelo.
- **b.** dividir los datos en dos partes:
  (1) se estiman los parámetros del modelo en la primera parte.
  (2) se ve cómo funciona el modelo en la segunda parte.
- **c.** se comparan dos modelos en la misma base de datos.
- **d.** nada de lo anterior.

16. El método Delphi
- **a.** se apoya en el poder de argumentos escritos
- **b.** requiere la solución de las diferencias a través de un debate cara a cara
- **c.** se utiliza principalmente como una alternativa a la ponderación exponencial
- **d.** nada de lo anterior

17. El conflicto de intereses puede ser un problema serio
- **a.** en el método Delphi
- **b.** al preguntarle a vendedores
- **c.** en la investigación de mercados basada en datos de los consumidores
- **d.** nada de lo anterior

Respuestas

1. F	**6.** V	**10.** V	**14.** b
2. V	**7.** V	**11.** b	**15.** b
3. F	**8.** V	**12.** c	**16.** a
4. V	**9.** V	**13.** a	**17.** b
5. V			

Problemas

•• **13-1.** Considere el conjunto de datos que se muestra (contenidos en 13-1.XLS):

x	100	70	30	40	80	60	50	20	10	90
y	57	40	35	33	56	46	45	26	26	53

(a) Trace una gráfica de dispersión para estos datos.
(b) Ajuste una línea recta a los datos, utilizando el método de mínimos cuadrados.
(c) Utilice la función obtenida en el inciso (b) para hacer un pronóstico del valor de y cuando $x = 120$.

•• **13-2.** Considere el siguiente conjunto de datos, donde x es la variable independiente y y la variable dependiente (contenido en 13-2.XLS):

x	30	25	20	15	10	5
y	15	20	30	35	45	60

(a) Haga una gráfica del diagrama de dispersión de estos datos.
(b) Ajuste una línea recta a los datos mediante el método de mínimos cuadrados.

•• **13-3.** Considere el siguiente conjunto de datos (contenido en 13-3.XLS):

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2.00	1.50	4.50	4.00	5.50	4.50	6.00

(a) Haga una gráfica del diagrama de dispersión para estos datos.
(b) Ajuste una línea recta a los datos mediante el método de mínimos cuadrados. Trace la línea en el diagrama de dispersión.
(c) Ajuste una función cuadrática a los datos mediante el método de mínimos cuadrados. Trace la curva en el diagrama de dispersión.

•• **13-4.** Ajuste una función cuadrática a los datos del problema 13-2 mediante el método de mínimos cuadrados.

•• **13-5.** Compare la "bondad de ajuste" con los datos en el problema 13-3 para la función lineal de mínimos cuadrados, y también para la función cuadrática de mínimos cuadrados mediante el cálculo de la suma de los cuadrados de las desviaciones.

•• **13-6.** Compare la "bondad de ajuste" en los datos del problema 13-2 para la función lineal de mínimos cuadrados, y también para la función cuadrática de mínimos cuadrados (derivada en el problema 13-4) calculando la suma del cuadrado de las desviaciones. ¿La respuesta a 13-4 es siempre mejor que la de 13-2?

•• **13-7.** Una investigación posterior revela que la variable x en el problema 13-1 es simplemente 10 veces el tiempo en el cual una observación se registró, y la variable y es la demanda. Por ejemplo, una demanda de 57 ocurrió al momento 10; una demanda de 26 ocurrió en los momentos 1 y 2.
(a) Trace la demanda real contra el tiempo.
(b) Utilice un promedio móvil simple de cuatro periodos para pronosticar la demanda en el momento 11.
(c) Mediante la inspección de los datos, ¿esperaría usted que éste sea un buen modelo o no? ¿Por qué?

•• **13-8.** Considere el siguiente conjunto de datos (contenido en 13-8.XLS):

TIEMPO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
DEMANDA	10	14	19	26	31	35	39	44	51	55	61	54

(a) Trace esta serie de tiempo. Conecte los puntos con una línea recta.
(b) Utilice un promedio móvil simple de cuatro periodos para hacer un pronóstico de la demanda para los periodos 5-13.
(c) Encuentre la desviación media absoluta.
(d) ¿Parece éste un dispositivo de pronóstico razonable a partir de los datos ofrecidos?

•• **13-9.** Considere los datos del problema 13-7.

(a) Utilice un promedio móvil ponderado de cuatro periodos con coeficientes 4/10, 3/10, 2/10 y 1/10 para pronosticar la demanda para el momento 11. Los coeficientes mayores deberán aplicarse a las observaciones más recientes.

(b) ¿Prefiere usted este planteamiento al modelo simple de cuatro periodos sugerido en el problema 13-7? ¿Por qué?

(c) Ahora encuentre los coeficientes óptimos utilizando Solver. ¿Cuánto ha reducido usted la medida de error en comparación con (a)?

•• **13-10.** Considere los datos del problema 13-8.

(a) Utilice un promedio móvil ponderado de cuatro periodos con coeficientes 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4 para pronosticar la demanda para los periodos 5-13. Los coeficientes más altos deberán aplicarse a las observaciones más recientes.

(b) Encuentre la desviación media absoluta.

(c) ¿Prefiere usted este planteamiento al modelo de cuatro periodos simple sugerido en el problema 13-8? ¿Por qué?

(d) Ahora encuentre los coeficientes óptimos utilizando Solver. ¿Qué tanto ha reducido usted su medida de error en comparación con el método para (a)?

•• **13-11.** Considere los datos de la serie de tiempo del problema 13-7.

(a) Sea $\hat{y}_1 = 22$ y $\alpha = 0.4$. Utilice un modelo de ponderación exponencial para hacer un pronóstico de la demanda en el periodo 11.

(b) Si usted fuera a utilizar un modelo de ponderación exponencial para hacer un pronóstico de esta serie de tiempo, ¿preferiría un valor mayor (≥ 0.4) o menor de α? ¿Por qué?

(c) Encuentre el valor óptimo de α utilizando Solver para minimizar el error porcentual medio absoluto.

•• **13-12.** Considere los datos de la serie de tiempo del problema 13-8.

(a) Suponga que $\hat{y}_1 = 8$ y $\alpha = 0.3$. Utilice un modelo de ponderación exponencial para pronosticar la demanda en periodos 2-13.

(b) Encuentre el error porcentual medio absoluto.

(c) Repita el análisis utilizando $\alpha = 0.5$.

(d) Si fuera usted a utilizar un modelo de ponderación exponencial para hacer un pronóstico de esta serie de tiempo, ¿preferiría $\alpha = 0.3$, un valor mayor (≥ 0.3), o menor para α? ¿Por qué?

(e) ¿Cuál es el valor óptimo de α? ¿Qué tanto reduce el EPMA del inciso (a)?

•• **13-13.** El presidente de Quacker Mills desea una evaluación subjetiva del potencial de mercado para un nuevo cereal con sabor a nachos para el desayuno. Dicha evaluación debe proporcionarla un grupo consistente de (1) el vicepresidente de mercadotecnia, (2) el administrador de mercadotecnia de la región occidental, (3) 10 gerentes de ventas de distrito de la región occidental. Analice las ventajas y desventajas de un grupo de consenso y del método Delphi para obtener esta evaluación.

•• **13-14.** Dado que y_t se produce por medio de la relación $y_t = y_{t-1} + \epsilon$ donde ϵ es un número aleatorio con media de cero y $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 1.5, y_4 = 0.8, y_5 = 1$, ¿cuál es su mejor pronóstico para y_6?

•• **13-15.** Dado su conocimiento actual de la situación, ¿recomendaría usted un modelo causal o de serie de tiempo para hacer un pronóstico de la demanda del próximo mes de los Rice Crispies de Kelloggs? ¿Por qué?

•• **13-16.** Si $\alpha = 0.3$, al calcular $\hat{y}_5$, ¿cuál es el coeficiente en?

(a) $\hat{y}_1$

(b) y_1

(c) y_4

••• **13-17.** En algunos casos es posible obtener mejores pronósticos utilizando un pronóstico ajustado por tendencia.

(a) Utilice el modelo de tendencia de Holt con $\hat{y}_1 = 22$ para pronosticar la secuencia de demandas en el problema 13-7.

(b) Utilice la medida de ECM para comparar el modelo de ponderación exponencial simple (problema 13-11) con el modelo ajustado por tendencia de la parte (a) en la demanda de pronósticos.

••• **13-18.** En algunos casos es posible obtener mejores pronósticos utilizando uno ajustado por tendencia.

(a) Utilice el modelo de tendencia de Holt con $\hat{y}_1 = 8$ para pronosticar la secuencia de demandas del problema 13-8.

(b) Igual que en el problema 13-17, compare el resultado anterior con el resultado del problema 13-12 (ponderación exponencial simple).

•• **13-19.** En la sección 13.4 presentamos el modelo de tendencia de Holt hecho por Amy Luford para pronosticar las utilidades de Startup Airlines. Utilice los mismos datos para

(a) Desarrollar un modelo de tendencia utilizando la regresión lineal con el tiempo como variable independiente.

(b) ¿Cómo se compara el desempeño del pronóstico con el modelo de tendencia de Holt?

••**13-20.** Analice el valor de la medida ECM. Al comparar dos métodos de pronóstico, ¿es *siempre* mejor aquél que tiene un error cuadrático medio menor?

••**13-21.** Si una empresa experimenta un crecimiento exponencial en las ventas, ¿cómo alteraría usted el modelo de pronóstico de ventas para tomar en cuenta esto?

••**13-22.** La hoja de cálculo AUTO.XLS contiene datos de *Business Week* sobre ventas mensuales de automóviles durante 43 meses.
- **(a)** Desestacionalice los datos.
- **(b)** Encuentre el mejor método de pronóstico para los datos desestacionalizados.
- **(c)** ¿Cuál es su pronóstico para el periodo 44?
- **(d)** ¿Cuánta confianza tiene usted en su pronóstico?

••**13-23.** Utilizando los datos de OILCOMP.XLS, utilice la herramienta "Regresión" de Excel para ajustar una función cuadrática a los datos. SUGERENCIA: Debe usted crear primero una columna para una segunda variable independiente, $X_2 = X_1^2$, y después hacer la regresión de Y(Ventas/hora) tanto sobre X_1 (Automóviles/hora) como sobre X_2 ([Automóviles/hora]^2).
- **(a)** ¿Cómo se comparan estos resultados con los del capítulo cuando se utilizó Solver?
- **(b)** ¿Cuál de las técnicas parece más sencilla?
- **(c)** ¿Qué medidas de error puede utilizar para comparar estos dos métodos?

Caso práctico — El Banco de Laramie

Jim Cowan estaba revisando las necesidades de personal para el Departamento de Pruebas. Él era el presidente del Banco de Laramie y una de sus primeras prioridades era evaluar un problema de personal y horarios.

Información sobre la empresa

El Banco de Laramie llevaba a cabo actividades bancarias de primer piso al público y a corporaciones, y ofrecía una completa línea de servicios de fideicomiso para sus clientes. Daba a sus clientes una línea completa de servicios bancarios corporativos, incluyendo la administración de efectivo y servicios del mercado de dinero. Tenía activos totales por $19 millones y una utilidad neta de $300 mil.

Departamento de prueba

El Departamento de Prueba era el corazón de las operaciones de liquidación y cobranza de cheques del banco. El departamento recibía y procesaba cheques y otros documentos para liquidarlos o cobrarlos en el menor tiempo posible, a fin de ahorrar en documentos en proceso de cobro, que promediaban $450 millones al día. El departamento era el responsable de ordenar los cheques, comprobar la exactitud de los depósitos, distribuir los cheques y hacer una lista de las transacciones provenientes de las operaciones diarias del banco.

La instalación consistía físicamente en una sala con dos máquinas de prueba y varias mesas. El departamento operaba de 8:00 a.m. a 5:30 p.m., de lunes a viernes. A pesar de la práctica en otros bancos de manejar el procesamiento de cheques casi exclusivamente de noche, en el Banco de Laramie se consideraba importante que sus empleados tuvieran un horario de trabajo normal.

En los últimos dos años el volumen de piezas procesadas en el Departamento de Prueba había aumentado considerablemente, de 780 mil/año a 1.6 millones/año. El problema de programación en el departamento crecía debido a la carencia de uniformidad en la naturaleza del volumen. El anexo 1 contiene los volúmenes de prueba semanales *desestacionalizados* hasta el principio del año anterior. Este patrón de volumen llevó a la administración a utilizar personal de tiempo parcial para cubrir las cargas pico. Actualmente, en el banco estaban trabajando un operador de prueba de tiempo completo y dos de tiempo parcial. Cada operador aportaba una tasa media de procesamiento de 700 piezas por hora.

Pronósticos

Lo primero que Cowan tenía que hacer era preparar un pronóstico de la demanda para la semana siguiente, la número 67, y después necesitaría diseñar un programa para el personal de tiempo completo y tiempo parcial necesario para satisfacer la demanda predicha. Se sintió atraído por un par de métodos de pronóstico simples, a saber, utilizar la demanda real de la semana anterior como pronóstico de la semana siguiente, o sencillamente utilizar el promedio semanal de las últimas 66 semanas. Se preguntó, sin embargo, qué tan precisos serían estos métodos simples, y si existía o no un mejor procedimiento.

Él utilizaría su pronóstico para determinar cuántas horas de trabajadores adicionales para una función de tiempo parcial debería programar para la siguiente semana. Su programa base era suficiente para manejar 15,000 cheques; podía añadir tantas horas de tiempo parcial como quisiera al programa. (*Nota:* el programa base incluye la cantidad de cheques que un trabajador de tiempo completo y dos de tiempo parcial pueden procesar, junto con el resto de sus demás tareas.) Si él programaba tanto horas de tiempo completo como de tiempo parcial, tendría que pagarlas, incluso si los trabajadores terminaban el procesamiento de cheques antes. Por otro lado, si el volumen de cheques era tan elevado que no pudieran procesarse en las horas programadas por él para la semana, tendría que pagar tiempo adicional (50% más costoso que el tiempo ordinario) a fin de completar el trabajo de la semana. No había ningún requisito que obligara a que todos los cheques de un día dado se terminaran ese día, pero todos los cheques de la semana tenían que estar procesados para el viernes en la tarde.

Su primera tarea era encontrar un método para el problema de pronóstico; entonces podría utilizarlo fácilmente para determinar la cantidad de horas de tiempo parcial por programar.

ANEXO 1 Volúmenes de pruebas semanales desestacionalizados del Banco de Laramie

SEMANA	VOLUMEN (000)	SEMANA	VOLUMEN (000)
1	23.4	34	31.1
2	26.4	35	31.0
3	28.7	36	29.6
4	26.5	37	31.5
5	28.6	38	31.3
6	29.4	39	31.1
7	29.9	40	34.9
8	29.3	41	32.3
9	32.2	42	35.6
10	28.7	43	33.8
11	27.8	44	31.3
12	31.1	45	31.2
13	32.7	46	30.4
14	32.5	47	31.1
15	28.9	48	32.7
16	31.8	49	34.8
17	32.8	50	34.5
18	32.7	51	36.0
19	31.7	52	28.3
20	32.5	53	27.8
21	32.7	54	30.4
22	30.9	55	28.4
23	30.5	56	29.3
24	31.3	57	28.9
25	30.1	58	33.5
26	32.4	59	32.6
27	28.5	60	32.0
28	29.9	61	30.6
29	31.7	62	31.9
30	30.7	63	31.3
31	31.6	64	31.6
32	32.1	65	31.1
33	30.1	66	32.0

Preguntas

1. Examine los siguientes cinco procedimientos sugeridos abajo para hacer el pronóstico de los requerimientos de carga semanal del Departamento de Pruebas

   Método 1: Este esquema de pronóstico simple utiliza el volumen de la semana anterior para pronosticar el volumen de cada semana siguiente (es decir, el pronóstico para la semana 10 debería ser 32.2, el volumen de la semana 9).

   Método 2: Este método utiliza como pronóstico el volumen promedio de todas las semanas anteriores. Por lo tanto, el pronóstico para la semana 23 sería de 30.05 (promedio de las primeras 22 semanas). Para hacer un pronóstico de la semana 67, se haría un promedio de las semanas 1 a 66.

   Método 3: Este método es la ponderación exponencial con alfa = 0.5. Utilice la hoja de cálculo (BANK.XLS) que ya tiene incorporados los datos del anexo 1 y el pronóstico de ponderación exponencial calculado, con una alfa de 0.5. (Observe que este método de pronóstico requiere un promedio inicial para arrancar el proceso. La hoja de cálculo utilizó 23.4 como este promedio; básicamente usando un método del "mejor caso", asumiendo que el primer promedio era perfecto.)

   Método 4: Este método es el método de promedios móviles. La cantidad de periodos en el promedio móvil dependerá de usted. Intente varios valores diferentes para llegar al mejor método de pronóstico que pueda.

   Método 5: Este método se conoce como regresión lineal. Básicamente, ajusta una línea recta a través de los datos, buscando la tendencia general.
2. ¿Cuál de los métodos de pronóstico presentados recomendaría usted para pronosticar los volúmenes semanales? Si es necesario ajuste la constante de ponderación para mejorar el método 3.
3. ¿Cuántas horas de tiempo parcial deberá programar Cowan para la siguiente semana? SUGERENCIA: Piense en el costo de programar horas de más o de menos.

Christensen comenzó a examinar las cifras de circulación de algunas otras revistas mensuales representadas por los clientes asiduos. El primer conjunto de datos correspondía a *Working Woman* (que se encuentra en la hoja "WkgWom" de SHSB.XLS, y que se muestra en el anexo 1), que estaba dirigida a mujeres en carreras de administración de empresas. El contenido incluía secciones dedicadas a empresarios, noticias de negocios, tendencias económicas, tecnología, política, áreas profesionales, ciencias sociales y del comportamiento, moda y salud. Era vendida casi totalmente por suscripción, como resulta evidente por las últimas cifras proporcionadas al Audit Bureau of Circulation (823.6K suscripciones de una circulación total de 887.8K).

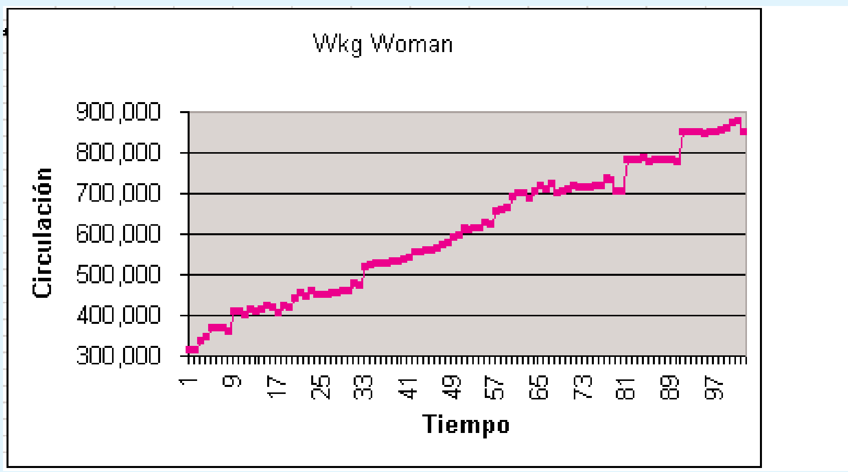
[1]Este caso es para utilizarse como base para un análisis en clase, no para ilustrar el manejo eficiente o ineficiente de una situación administrativa. © 1990 por la Darden Graduate Business School Foundation. Revise extractos de casos de Darden en la World Wide Web en www.darden.virginia.edu/demso.

La siguiente gráfica representaba los datos de circulación correspondientes a *Country Living* (que se encuentra en la hoja "CtryLiving" de SHBS.XLS, y que aparece en el anexo 2), un periódico que se centraba tanto en las preocupaciones prácticas como en las recompensas intangibles de vivir en el campo. Se vendía a gente que poseía un lugar en el campo, ya fuera una granja en operación, una casa de campo para el descanso o una residencia para los fines de semana.

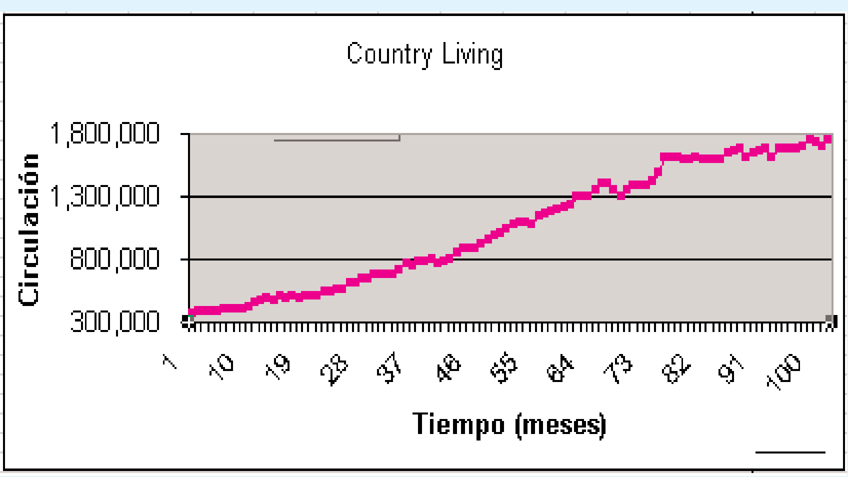
El tercer conjunto de datos era de *Health* (que se encuentra en la hoja "Hlth" de SHSB.XLS y se muestra en el anexo 3), que era una revista sobre hábitos de vida, editada para mujeres que intentaban verse y sentirse mejor. La revista incluía información sobre ejercicios físicos, belleza, nutrición, medicina, psicología y moda para mujeres activas.

Una cuarta gráfica correspondía a *Better Homes and Gardens* (que se encuentra en la hoja "BH&G" de SHBS.XLS y se ilustra en el anexo 4), que competía con *Good Housekeeping* y se publi-

ANEXO 1 Gráfica de la circulación de *Working Woman*



ANEXO 2 Gráfica de la circulación de *Country Living*



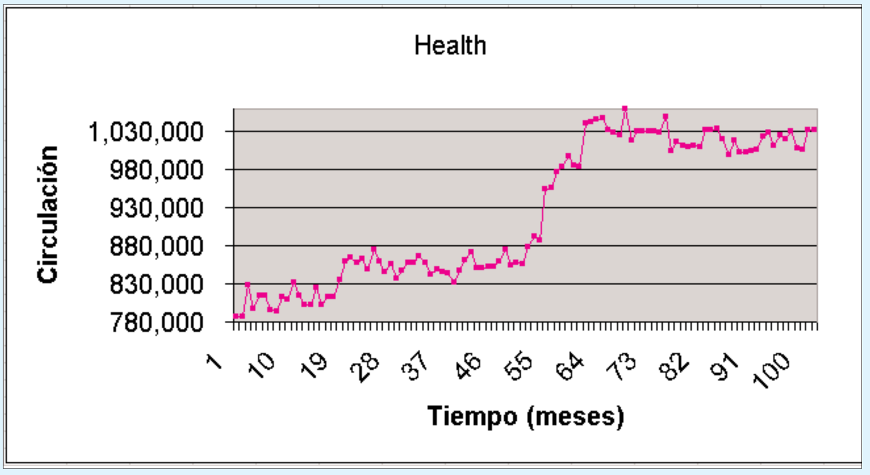
caba para hombres y mujeres interesados en el hogar y la familia como puntos focales de sus vidas. Cubría a profundidad estos temas sobre el hogar y la familia: alimentos y aparatos domésticos, construcción y manualidades, decoración, administración del presupuesto familiar, jardinería, viajes, salud, automóviles familiares, entretenimiento en el hogar y con la familia, información sobre nuevos productos y compras. La circulación de la revista parecía estar experimentando una volatilidad creciente a través del tiempo. ¿Era éste el principio de un nuevo patrón?

La última revista era *True Story* (que se encuentra en la hoja "TruStry" de SHSB.XLS y se muestra en el anexo 5). Era editada para mujeres jóvenes e incluía editoriales de relatos, así como secciones sobre recetas y alimentos, artículos de belleza y salud, administración del hogar y consejos personales. La circulación de este periódico durante los últimos nueve años parecía tener una tendencia descendente definitiva. ¿Era la causa un interés general decreciente sobre los temas que trataba, o era éste un ciclo que se corregiría por sí mismo en el futuro (como la onda senoidal que Christensen había estudiado en trigonometría)?

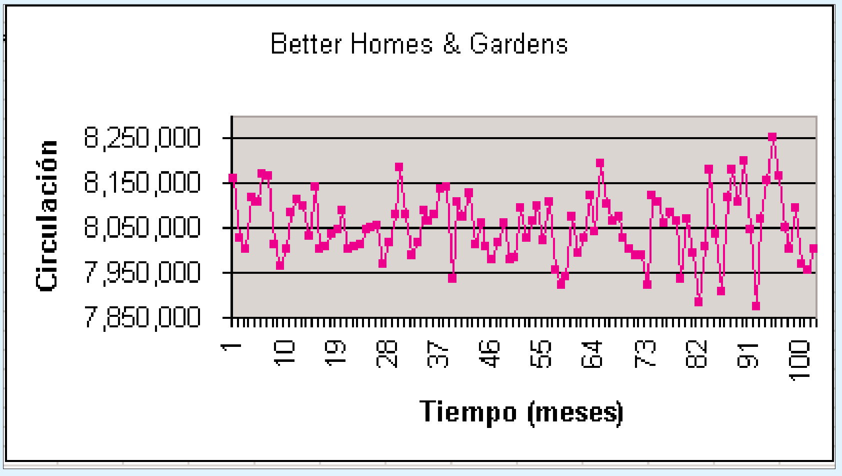
Pregunta

1. ¿Cuál es el mejor método de pronóstico para cada una de las cinco revistas? Utilice el concepto de "divide y vencerás" para poner realmente a prueba los diferentes modelos de pronóstico.

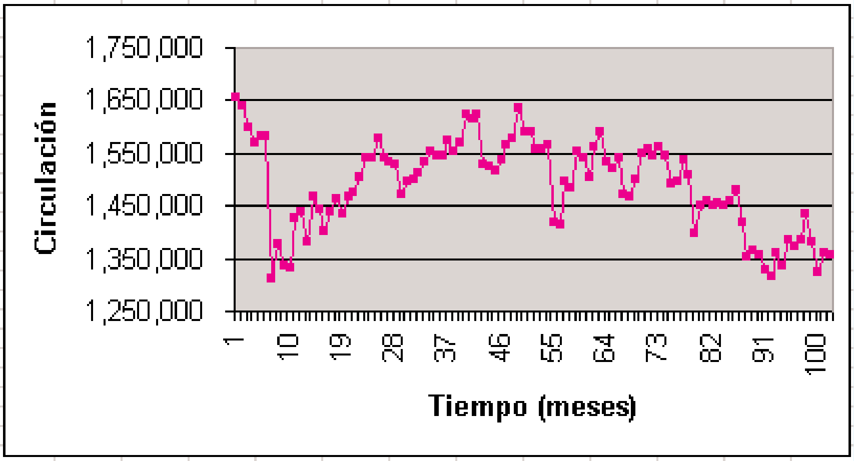
ANEXO 3 Gráfica de la circulación de *Health*



ANEXO 4 Gráfica de la circulación de *Better Homes & Gardens*



ANEXO 5 Gráfica de la circulación de *True Story*



Caso Práctico — Pronóstico sobre las habitaciones del Marriott[1]

"Una habitación de hotel es un bien perecedero. Si está vacío por una noche, el ingreso se pierde para siempre." Esto lo dijo Linda Snow refiriéndose a la utilización de la capacidad en el negocio hotelero. "Por otro lado, para nosotros el cliente es el rey. En la recepción tenemos muchísimo cuidado de evitar decir a un cliente con reservación que no tenemos una habitación para él."

Como gerenta de reservaciones de uno de los hoteles Marriott, Linda se enfrentaba a este intercambio constantemente. Para complicar el asunto, a menudo los clientes hacían reservaciones y después no aparecían, o cancelaban las reservaciones justo antes de su llegada esperada. Además, algunos clientes se quedaban en el hotel más días de los incluidos en sus reservaciones y otros se iban antes. Un aspecto clave para tratar con el problema de la administración de la capacidad era tener un buen pronóstico de cuántas habitaciones se necesitarían en cualquier fecha futura. Era responsabilidad de Linda preparar, el martes por la tarde, un pronóstico del número de habitaciones que estarían ocupadas cada día de la semana siguiente (de sábado a viernes). Este pronóstico era utilizado por casi todos los departamentos del hotel para una diversidad de propósitos; ahora ella necesitaba el pronóstico para una decisión en su propio departamento.

Hotel Hamilton

El Hotel Hamilton era un gran hotel empresarial del centro que contaba con 1,877 habitaciones y abundantes espacios de reunión para grupos y convenciones. Había sido construido y era operado por los Hoteles Marriott, una empresa que operaba más de 180 hoteles y lugares de recreo en todo el mundo y se estaba expandiendo rápidamente hacia otros segmentos del mercado. La administración del Hamilton informaba periódicamente a la Corporación Marriott sobre los rendimientos en términos de ocupación e ingresos.

Los administradores del hotel eran recompensados por su habilidad para lograr las metas en la ocupación de las habitaciones y también en los ingresos. Linda no podía recordar alguna vez que las metas hubieran bajado, pero las había visto elevarse en los dos años que ella había estado trabajando como gerenta de reservaciones. Los administradores del hotel estaban continuamente comparando los pronósticos de rendimiento contra estas metas. Además de supervisar la oficina de reservaciones con ocho empleados, Linda preparaba el pronóstico de la semana siguiente y lo presentaba el martes por la tarde a los otros administradores departamentales del hotel. El pronóstico se utilizaba para programar, por ejemplo, asignaciones diarias del personal de limpieza, recepcionistas, el personal del restaurante y otras más. También desempeñaba cierto papel en la planeación de compras, ingresos y costos.

Sobreventa

Sin embargo, por el momento Linda necesitaba su pronóstico para saber qué hacer ante una oportunidad que se estaba desarrollando para el siguiente sábado. Era martes, 18 de agosto, y los pronósticos de Linda eran para la semana que comenzaba la tarde del sábado 22 de agosto y terminaba el próximo viernes 28. A pesar de que ya se habían reservado 1,839 habitaciones para el sábado, Linda acababa de recibir la solicitud de una compañía turística por 60 habitaciones adicionales para esa noche. Esta compañía tomaría cualquier número de habitaciones inferior a 60 que Linda pudiera proporcionarle, pero no mayor que 60. Normalmente Linda estaría encantada con semejante solicitud: llenar completamente un hotel empresarial en sábado era como sacarse la lotería. Sin embargo, la

[1] Este caso es para utilizarse como base para un análisis en clase, no para ilustrar el manejo eficiente o ineficiente de una situación administrativa. © 1989 por la Darden Graduate Business School Foundation. Revise los extractos de casos de Darden en la World Wide Web en www.darden.virginia.edu/dems.

solicitud en su totalidad hacía que las reservaciones quedaran por encima de la capacidad del hotel. Cierto, una reservación en los libros el martes no era lo mismo que una "cabeza en la cama" el sábado, especialmente porque las noches de fin de semana producían muchas reservaciones "ausentes". "Hay grandes posibilidades de que todavía no tengamos casa llena el sábado", pensó Linda en voz alta. "Pero si todos llegan y debido a la sobreventa a alguien se le niega alojamiento, seguro que llegará a mis oídos, ¡y quizás también a los de Bill Marriott!"

Linda ponderó los pros y los contras entre quedarse con una habitación vacía y negarle la habitación a un cliente. El margen de contribución de una habitación era de aproximadamente $90, debido a que los bajos costos variables provenían principalmente de limpiar la habitación y del registro de entradas/salidas. Por otro lado, si a un cliente con reservación se le negaba una habitación en el Hamilton, la recepción encontraría una habitación comparable en algún lugar de la ciudad, transportaría al cliente allá y le daría alguna compensación, como una canasta de frutas, en consideración por la molestia sufrida. Si el cliente era un "tarjetahabiente Marqués" (un cliente frecuente que pasa más de 45 noches al año en el hotel) él o ella recibiría $200 en efectivo, más las siguientes dos estadías en el Marriott gratis. Linda no estaba segura de la cifra que tendría que poner como costo de una habitación negada; a su juicio, podía valuarse, con crédito mercantil y todo, en aproximadamente el doble de la cifra de contribución.

Pronóstico

Linda se concentró en obtener un buen pronóstico para el sábado 22 de agosto y en tomar una decisión sobre si debía aceptar o no las reservaciones adicionales para aquel día. Tenía datos históricos de la demanda de habitaciones en el hotel; el anexo 1 muestra la demanda de las primeras tres semanas para fechas comenzando el sábado 23 de mayo. (Diez semanas adicionales [semanas 4-13] están contenidas en MARRIOTT.XLS y por lo tanto, en esta base de datos, el sábado 22 de agosto era el comienzo de la semana 14.) Las cifras de "Demanda" (columna C) incluían la cantidad de peticiones de reservación rechazadas en una noche, en que el hotel hubiera dejado de aceptar reservaciones debido a la capacidad,

ANEXO 1 Demanda histórica y datos de las reservaciones

E5 = =C5/D5

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Índice del día de la semana 1=Sábado, 2=Domingo, 3=Lunes, 4=Martes, 5=Miércoles,*						
2							
3		Indicador		Reservacion	Relación de	Índice	
4	Semana	del día de la	Demanda	al martes	aciertos	DS	
5	1	1	1470	1512	0.972	0.865	
6		2	870	864	1.007	0.914	
7		3	986	827	1.192	0.977	
8		4	1247	952	1.310	1.024	
9		5	1109	740	1.499	1.072	
10		6	1197	908	1.318	1.108	
11		7	1500	1311	1.144	1.041	
12	2	1	1854	2034	0.912	0.865	
13		2	1489	1584	0.940	0.914	
14		3	1792	1682	1.065	0.977	
15		4	1708	1684	1.014	1.024	
16		5	1787	1600	1.117	1.072	
17		6	1314	1077	1.220	1.108	
18		7	1136	956	1.188	1.041	
19	3	1	1537	1455	1.056	0.865	
20		2	1132	1001	1.131	0.914	
21		3	1368	1131	1.210	0.977	
22		4	1488	1151	1.293	1.024	
23		5	1392	942	1.478	1.072	

Celda	Fórmula	Cópiese a
E5	=C5/D5	E6:E91

además del número de habitaciones ocupadas realmente esa noche. También se incluye en el anexo 1 el número de habitaciones reservadas (columna D) en la mañana del martes de la *semana anterior* a cada fecha. (Observe que este martes antecede a una fecha por un número de días que depende de la fecha del día de la semana. Está adelantado cuatro días de una fecha de sábado, siete días de un martes, 10 días de un viernes. También observe que en una mañana de martes, se conoce la demanda real para la noche del lunes, pero no para la noche del martes.)

En el anexo 1 Linda había calculado relaciones de aciertos para cada fecha cuya demanda real fuera conocida (columna E). Entre un martes con una semana de adelanto y cualquier fecha, se agregaron nuevas reservaciones, se cancelaron otras, algunas se extendieron durante más noches, algunas se acortaron y en otras los clientes no se presentaron. El efecto neto fue una demanda final que podría ser mayor que las reservaciones del martes (una relación de aciertos superior a 1.0) o menor que las reservaciones del martes (una relación de aciertos inferior a 1.0). Linda concibió su tarea de pronóstico como la de predecir su relación de aciertos. Con un buen pronóstico de la relación de aciertos, podía multiplicarlo simplemente por las reservaciones del martes y obtener un pronóstico de la demanda.

Gracias a sus primeras experiencias en hoteles, Linda estaba consciente de que el día de la semana (DS) representaba una gran diferencia en lo referente a la demanda de habitaciones; su experiencia reciente en reservaciones le sugería que era clave para el pronóstico de relaciones de aciertos. Los hoteles empresariales del centro como éste tendían a estar más ocupados a mitad de semana (martes, miércoles, jueves) y más desocupados los fines de semana. Utilizando los datos de su hoja de cálculo, había obtenido un índice DS para la relación de aciertos durante cada día de la semana, mismo que aparece en la columna F del anexo 1. Por lo tanto, la relación promedio de aciertos para el sábado es de aproximadamente 86.5% de la relación promedio de aciertos de todos los días de la semana. Su plan era ajustar los datos en función de este efecto DS mediante la división de cada relación de aciertos entre este factor. El ajuste eliminaría el efecto DS, y pondría las relaciones de acierto a un mismo nivel. Entonces podría utilizar la corriente de relaciones de aciertos ajustadas para hacer un pronóstico de la relación de aciertos ajustada del sábado. Para esto, necesitaba pensar en cómo nivelar los picos y valles de la demanda, los cuales sabía por experiencia que no se podían pronosticar. Una vez que tuviera este pronóstico de la relación de aciertos ajustado, entonces podría multiplicarlo por el índice DS del sábado para regresar a una relación de aciertos sin ajustar. “Pongámonos a trabajar”, se dijo a sí misma. “Necesito obtener una respuesta acerca de esa petición de 60 reservaciones.”

Preguntas

1. Compruebe los índices de los días de la semana (DS) en la columna F del anexo 1.
2. ¿Qué procedimiento de pronóstico recomendaría usted para hacer el pronóstico del martes en la tarde, en el cual se presenta la demanda de los días del sábado próximo hasta el siguiente viernes?
3. ¿Cuál es su pronóstico para el sábado 22 de agosto? ¿Qué haría usted respecto a la petición actual de ofrecer las 60 habitaciones para el sábado?

Referencias

Bruce Andrews y Shawn Cunningham, “L. L. Bean Improves Call-Center Forecasting”, en *Interfaces*, 25, núm. 6 (1995), pp. 1-13.

George E. P. Box y Gwilym M. Jenkins, *Time Series Analysis, Forecasting and Control* (San Francisco, Holden-Day, Inc., 1970).

Alan L. C. Bullock, *Hitler: A Study in Tyranny* (Nueva York, Harper & Row, 1962).

Conway Lackman y Alex Valz, “Risk Funding of Unemployment Insurance: An Econometric Approach”, en *Interfaces*, 18, núm. 2 (1988), pp. 64-71.

Informes trimestrales sobre el carbón, publicados por el Department of Energy, Energy Information Administration.

CAPÍTULO

14

Administración de Proyectos: PERT y CPM

PERFIL DEL CAPÍTULO

CÁPSULA DE APLICACIÓN

¿Cuándo es el nado sincronizado? Las ciencias de la administración van a las Olimpiadas de Barcelona

Como anfitriona de los Juegos Olímpicos del verano de 1992, la ciudad de Barcelona se enfrentaba ante un problema logístico extremadamente complejo: la programación de más de 2,000 eventos en un periodo de 15 días. El problema no sólo era muy grande sino que incluía muchas y diversas restricciones, algunas de ellas no frecuentes en la programación de proyectos más ordinarios.

Primero estaban las relaciones de precedencia; por ejemplo, las rondas de calificación obviamente tenían que ocurrir antes que los cuartos de final, las semifinales y las finales. Además, había la necesidad de distribuir los eventos, tanto en el tiempo como en el espacio. Uno de los objetivos era evitar los embotellamientos de tráfico que podrían resultar si dos o más eventos de gran atractivo popular se programaban al mismo tiempo en instalaciones cercanas. Pero incluso cuando estuvieran involucradas diferentes áreas de la ciudad, era preferible programar los eventos más atractivos a horas diferentes, a fin de alcanzar la mayor audiencia posible para la mayor cantidad posible de eventos. Otro factor a considerar eran los requerimientos de cobertura en vivo por TV de los diferentes eventos hacia distintas zonas horarias. Por ejemplo, en Europa, África y Sudamérica sería alto el interés por partidos de futbol soccer, pero no en Estados Unidos o Canadá. Finalmente, había restricciones respecto al equipo disponible (como cámaras de TV) y personal (por ejemplo, de seguridad).

Este complejo problema planteó un reto interesante a dos profesores de la Universitat Politécnica de Cataluña en Barcelona. Pronto fue evidente que ninguno de los programas existentes era adecuado por sí sólo para la tarea. Por lo tanto, desarrollaron una serie de algoritmos interactivos para complementar *software* para la administración de proyectos que fuera más convencional, junto con un conjunto de ayudas gráficas para ayudar a comparar las diferentes características de la programación de eventos.

Se encontró útil crear primero un calendario (asignando competencias a los días) y después refinar el programa preciso de eventos de cada día. Este método permitió la generación rápida de programas aproximados. También resultó ser útil al trabajar con divisiones de tiempo tanto mayores como menores para un "evento".

- Los diseñadores de modelos descubrieron que cada deporte tenía su propio ritmo, y que ayudaba el pensar en función de bloques de días que se adecuaran a dicho ritmo. Un deporte particular, por ejemplo, podría ser mejor servido programándolo con tres días consecutivos de competencias preliminares, un día de descanso, y después las finales.
- Igualmente útil resultó el concepto de "unidad del todo"; es decir una parte del evento que posee tanto interés intrínseco como un espectáculo. Así, la final de la maratón, por ejemplo, era tratada como una unidad.

La función objetivo del proceso de programación incorporaba varios criterios, cada uno de los cuales fue evaluado según una escala numérica. Entre éstos estaba la continuidad (el número de días entre la primera y última actividad de un evento particular) y el perfil temporal (una medida de lo bien que el programa distribuyó las actividades a lo largo del periodo de dos semanas, comparado con una distribución ideal).

El problema de programación de la TV podía formularse como un modelo de programación de enteros binarios, pero su solución habría requerido una cantidad no práctica en el tiempo de computadora. En vez de esto, resultó útil un algoritmo más simple, diseñado para la situación, para desarrollar horarios a la medida de las necesidades de audiencias específicas.

El factor clave del sistema resultante, llamado SUCCESS92, es su velocidad y flexibilidad. De presentarse dificultades meteorológicas, rápidamente se puede diseñar un programa alterno. SUCCESS92 fue recibido con gran entusiasmo por los organizadores de los juegos (véase Andreu *et al.*).

14.1 INTRODUCCIÓN

La tarea de administrar grandes proyectos es un antiguo y honorable arte. Aproximadamente en el año 2600 a.C. los egipcios construyeron la Gran Pirámide para el Rey Keops. El historiador griego Herodoto decía que 400,000 hombres trabajaron durante 20 años para construir esta estructura. Aunque actualmente se cuestionan estas cifras, no hay duda de la enormidad del proyecto. El Libro del Génesis nos dice que la Torre de Babel no fue terminada porque Dios hizo imposible que los constructores se comunicaran entre sí. Este proyecto es de especial importancia, ya que establece un precedente histórico sobre la popular costumbre de citar la intervención divina como razón de los fracasos.[1]

Los proyectos modernos, en rangos que van desde construir un centro comercial suburbano hasta poner un hombre en la luna, son extremadamente grandes, complejos y costosos. No es tarea fácil terminar dichos proyectos a tiempo y dentro del presupuesto. En particular, veremos que los complicados problemas para programar dichos proyectos a menudo quedan estructurados debido a la interdependencia de las actividades. Generalmente, no es posible iniciar ciertas actividades antes de que otras hayan sido terminadas. Al tratar con proyectos que con toda posibilidad involucran miles de dichas relaciones de dependencia, no es sorprendente que los administradores busquen métodos de análisis efectivos. Algunas de las preguntas clave que este capítulo responderá son:

1. ¿Cuál es la fecha esperada de terminación del proyecto?
2. ¿Cuál es la "variabilidad" potencial de esta fecha?
3. ¿Cuáles son las fechas de inicio y terminación programadas para cada actividad específica?
4. ¿Qué actividades son *críticas*, en el sentido de que deben ser terminadas exactamente como fueron programadas, a fin de cumplir el objetivo de terminación general del proyecto?
5. ¿Cuánto tiempo pueden retrasarse las actividades *no críticas*, antes de que se incurra en un retraso en la fecha de terminación general?
6. ¿Cómo pueden concentrarse más eficientemente los recursos en actividades, a fin de acelerar la terminación del proyecto?
7. ¿Qué control se debe ejercer en el flujo de gastos para las diversas actividades a lo largo del proyecto, a fin de que el presupuesto general se pueda cumplir?

PERT y **CPM**, siglas de Program Evaluation Review Technique (Técnica de revisión y evaluación de programas) y Critical Path Method (Método de la ruta crítica), respectivamente, darán las respuestas a estas preguntas. Cada uno de estos métodos de programación representa un proyecto como una red, y por lo tanto el material de este capítulo puede ser considerado como una ampliación a las redes determinísticas analizadas en el capítulo 6. Cuando un proyecto involucra ciertos elementos inciertos, la representación del proyecto requiere una red estocástica, que introduce un nivel de complejidad adicional que no está presente en el capítulo 6.

PERT fue desarrollado a finales de los años cincuenta por la Oficina Naval de Proyectos Especiales, en cooperación con la firma asesora en administración de Booz, Allen y Hamilton. La técnica recibió una publicidad favorable sustancial debido a su uso en el programa de

[1] El *Chicago Tribune* (5 de agosto de 1977) hizo el siguiente comentario referente al apagón de Nueva York en julio de ese año: "el desastre era un acto divino", dijo Con Ed.

ingeniería y desarrollo del misil Polaris, un complicado proyecto que incluía 250 contratistas directos y más de 9,000 subcontratistas. Desde entonces, ha sido ampliamente adoptada en otras ramas del gobierno y de la industria y aplicada a proyectos muy diversos, tales como la construcción de fábricas, edificios, autopistas, administración de la investigación, desarrollo de productos, instalación de nuevos sistemas de computadoras, y así sucesivamente. Hoy en día, muchas empresas y oficinas del gobierno exigen a todos sus contratistas que utilicen PERT.

CPM fue desarrollado en 1957 por J. E. Kelly de Remington Rand y M. R. Walker de DuPont. Difiere de PERT principalmente en detalles sobre cómo se tratan tiempo y costo. De hecho, en la aplicación actual, las distinciones entre PERT y CPM se han difuminado conforme las empresas han integrado las mejores características de ambos sistemas, en sus propios esfuerzos por administrar eficientemente los proyectos. La aplicación de PERT y CPM tuvo un efecto inmediato en la programación de proyectos, porque permitía la práctica de "administración por excepción". Aunque en un proyecto pudiera haber 10,000 actividades, quizás solo 150 de ellas serían "críticas" y merecedoras de una vigilancia cercana. Para enviar a un estadounidense a la Luna durante la era del proyecto Apolo, la aviación de Estados Unidos utilizó PERT para aportar su parte del proyecto con seis semanas de anticipación. Incluía más de 32,000 eventos y cientos de miles de actividades, pero sólo unos cuantos centenares necesitaron una vigilancia constante.

De acuerdo con la filosofía seguida a lo largo del texto, explicaremos el tema de la administración de proyectos en dos niveles. Primero, utilizando un ejemplo ilustrativo fácil de entender se desarrollarán las técnicas esenciales. Segundo, se ilustrará el uso de la hoja de cálculo para indicar cómo puede uno manejar las técnicas en una aplicación a gran escala del mundo real.

14.2 UN PROYECTO TÍPICO: LA OPERACIÓN DE LA TARJETA DE CRÉDITO DE GLOBAL OIL

Nadie diría que esto es parecido a construir la Gran Pirámide, pero el traslado inminente de la operación de las tarjetas de crédito hacia Des Moines, Iowa, desde su actual oficina central en Dallas, es un proyecto importante tanto para Rebecca Goldstein como para Global Oil. La mesa directiva de Global ha establecido como fecha límite 22 semanas para que el traslado esté terminado. Becky es una de las personas que llevan a cabo una gerencia en el Grupo de Análisis de Operaciones. Está a cargo de planear el traslado, de verificar que todo resulte de acuerdo con el plan y de asegurarse de que el plazo fijado se cumpla.

El traslado es difícil de coordinar porque involucra muchas divisiones diferentes de la compañía. "Bienes raíces" tiene que seleccionar uno de tres sitios posibles para las oficinas. "Personal" tiene que determinar qué empleados de Dallas se mudarán, cuántos nuevos empleados se contratarán y quién los va a capacitar. El grupo de sistemas y la oficina del tesorero deben organizar y poner en práctica los procedimientos de operación y los arreglos financieros para la nueva operación. Los arquitectos tendrán que diseñar el espacio interior y supervisar las mejoras estructurales que se necesiten. Cada uno de los sitios que Global está considerando es un edificio existente, con la cantidad apropiada de espacio libre. Sin embargo, se deberán adquirir las divisiones entre oficinas, las instalaciones de computadoras, los muebles, y así sucesivamente.

Un segundo factor de complicación es que existe interdependencia entre las actividades. En otras palabras, algunas partes del proyecto no pueden iniciarse hasta que otras estén terminadas. Considere dos ejemplos obvios: Global no puede montar el interior de una oficina antes de que ésta sea diseñada. Tampoco puede contratar nuevos empleados hasta que haya determinado cuáles son los requerimientos de personal.

LA LISTA DE ACTIVIDADES

Becky sabe que PERT y CPM están especialmente diseñados para proyectos de este tipo, y no pierde tiempo en comenzar. El primer paso en el proceso es definir las actividades del proyecto y establecer las relaciones de precedencia apropiadas. Éste es un primer paso importante, ya que errores u omisiones en esta etapa pueden llevar a una programación desastrosamente imprecisa. La tabla 14.1 muestra la primera **lista de actividades** que Becky prepara para el traslado (las columnas llamadas "Tiempo" y "Recursos" son indicadores de elementos por considerar). Ésta es la parte *más importante* de cualquier proyecto PERT o CPM y usualmente se lleva a cabo invo-

TABLA 14.1 Primera lista de actividades

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	PREDECESORES INMEDIATOS	TIEMPO	RECURSOS
A	Seleccionar sitio de oficinas	—		
B	Crear plan organizacional y financiero	—		
C	Determinar requerimientos de personal	B		
D	Diseñar la instalación	A, C		
E	Construir el interior	D		
F	Seleccionar al personal que se va a transferir	C		
G	Contratar nuevos empleados	F		
H	Trasladar registros, personal clave, etc.	F		
I	Hacer arreglos financieros con instituciones de Des Moines	B		
J	Capacitar nuevo personal	H, E, G		

lucrando a varias personas, de forma que no se pasen por alto actividades importantes. Todo el trabajo debe ser un esfuerzo de equipo, no un esfuerzo individual.

Conceptualmente, la tabla 14.1 es sencilla. Cada actividad está colocada en una línea por separado y sus **predecesores inmediatos** están registrados en la misma línea. Los predecesores inmediatos de una actividad se refieren a aquellas funciones que deben estar terminadas antes de comenzar la actividad en cuestión. Por ejemplo, en la tabla 14.1 podemos ver que Global no puede comenzar la actividad C (determinar los requerimientos del personal) hasta que la actividad B (crear el plan organizacional y financiero) esté terminada. De manera similar, la actividad G (contratar nuevos empleados) no puede comenzar hasta que la actividad F (seleccionar el personal de Global que será transferido de Texas a Iowa) esté terminada. Esta actividad, F, a su vez no puede comenzarse hasta que la actividad C (determinar los requerimientos de personal) esté terminada.

La lista de actividades con sus predecesores inmediatos y las estimaciones de tiempo pendientes de determinar proveerán los ingredientes esenciales para responder las primeras cinco preguntas que se formulan al principio de este capítulo. En breve veremos cómo se utilizan PERT y CPM para producir estas respuestas. En la práctica, sin embargo, por lo general también se utiliza otro método gráfico: la gráfica de Gantt, para hacer frente a problemas semejantes. Por lo tanto, antes de volver al tema principal del capítulo, nos desviaremos un poco para ver este precursor de los métodos de redes (PERT y CPM).

LA GRÁFICA DE GANTT

La gráfica de Gantt fue desarrollada por Henry L. Gantt en 1918 y sigue siendo una herramienta popular en la programación de la producción y de proyectos. Su simplicidad y su claro despliegue gráfico la han establecido como un dispositivo útil para problemas simples de programación. La gráfica de Gantt para el problema de Becky aparece en la figura 14.1. Cada actividad está inscrita sobre el eje vertical. El eje horizontal es el tiempo, y la duración anticipada de cada actividad, así como la duración real, están representadas por una barra con la longitud correspondiente. La gráfica indica también *el tiempo más temprano (o próximo) posible de inicio* de cada actividad. Por ejemplo, la actividad C no puede comenzar antes del tiempo 5 ya que, de acuerdo con la tabla 14.1, la actividad B debe estar terminada antes de que la actividad C pueda comenzar. Conforme cada actividad (o parte de ella) es terminada, se sombrea la barra apropiada. De este modo, en cualquier momento en el tiempo está claro qué actividades están dentro del programa y cuáles no. La gráfica de Gantt de la figura 14.1 muestra que para la semana 13, las actividades D, E y H están atrasadas con respecto al programa, en tanto que G ya ha sido terminada (porque está toda sombreada) y por lo tanto está anticipándose al programa.

Este simple ejemplo muestra cómo se utiliza la gráfica de Gantt principalmente como dispositivo de registro para seguir el avance en el tiempo de las subtareas de un proyecto. Como

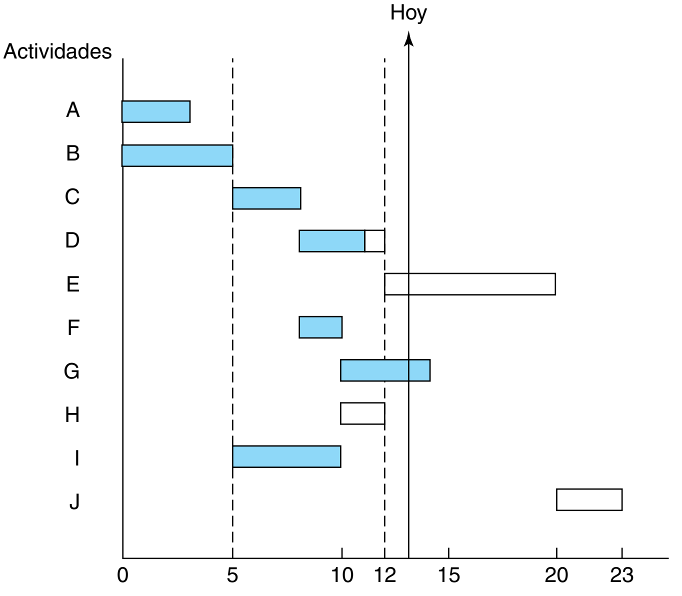


FIGURA 14.1
Una gráfica de Gantt

muestra la figura 14.1, podemos ver qué tareas individuales están dentro del programa, o atrasadas. Parece importante observar, llegados a este punto, que en el contexto de la gráfica de Gantt la frase "dentro del programa" significa "que ha sido terminada en un tiempo no posterior al tiempo más próximo de terminación". Por lo tanto, la figura 14.1 muestra que D y H pudieron haber sido terminadas, cuando mucho, para la semana 12. Dado que no están terminadas para la semana 13 están, en ese sentido, atrasadas con respecto al programa. Como veremos, esto es un concepto demasiado simple para saber si una actividad está dentro del programa. Un punto de vista apropiado sería que el *proyecto general* está siendo atrasado en relación con una fecha de entrega objetivo. La gráfica de Gantt omite revelar cierta información importante necesaria para responder a esta pregunta. Por ejemplo, la gráfica de Gantt no revela cuáles actividades son *predecesores inmediatos* de otras actividades. En la figura 14.1 podría parecer que F e I son predecesores inmediatos de G, ya que G puede comenzar en la semana 10 y F e I terminan en la semana 10. Sin embargo, la tabla 14.1 nos dice que sólo F es predecesor inmediato de G. Un retraso en I *no* afectaría el tiempo de comienzo potencial de G, o de hecho, de cualquier otra actividad. Es este tipo de información sobre el "predecesor inmediato" la que debe utilizarse para deducir el efecto sobre el tiempo de terminación del proyecto general. Este último tipo de información es de obvia importancia para el administrador. La debilidad general de las gráficas de Gantt se refleja en su inutilidad para hacer dichas inferencias. Ahora veremos que la representación de red contiene la información de predecesor inmediato que necesitamos.

EL DIAGRAMA DE RED

En un **diagrama de red** de PERT, cada actividad está representada por una flecha llamada **rama** o **arco**. El principio y fin de cada actividad están indicados por un círculo, que se llama **nodo**. El término **evento** también es utilizado en conexión con los nodos. Un evento representa la terminación de las actividades que llegan a un nodo. Remitiéndonos a la lista de actividades de la tabla 14.1, podemos ver que "seleccionar sitio de oficinas" se denomina como actividad A. Cuando se termina esta **actividad**, ocurre el *evento* "sitio de oficinas seleccionado".

Construcción del diagrama de red La figura 14.2 muestra un diagrama de red para las actividades A a C. Enfatizamos que los números asignados a los nodos son arbitrarios. Se utilizan simplemente para identificar eventos, y no implican nada sobre relaciones de precedencia. De hecho, conforme vayamos desarrollando el diagrama de red de este proyecto, varias veces iremos dando un número nuevo al nodo donde termina la actividad C, pero *siempre se mantendrán las correctas relaciones de precedencia*. En el diagrama de red, cada actividad debe iniciar en el nodo donde sus predecesores inmediatos terminaron. Por ejemplo, en la figura 14.2, la actividad C comienza en el nodo 3, porque su predecesor inmediato, la actividad B, terminó ahí. Podemos ver, sin embargo, que surgen complicaciones cuando intentamos agregar la actividad D al diagrama de red. Tanto A como C son predecesores inmediatos de D, y ya que deseamos

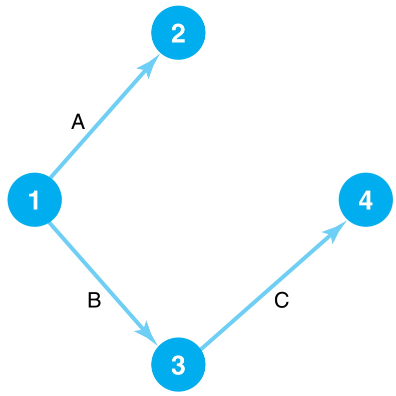


FIGURA 14.2
Diagrama de red para las actividades A a C

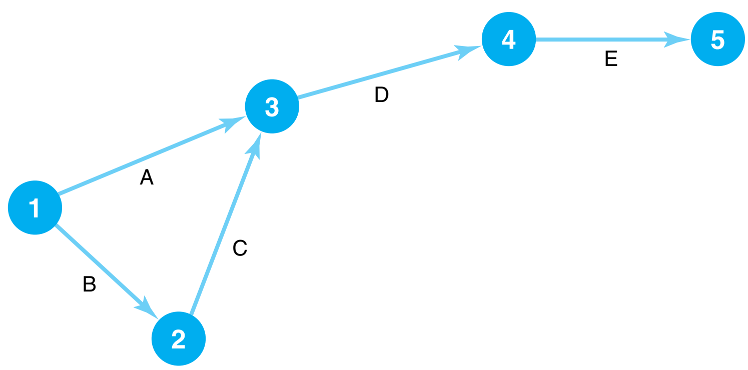


FIGURA 14.3
Un diagrama parcial de red

mostrar cualquier actividad —tal como D— sólo una vez en nuestro diagrama, se deben combinar los nodos ② y ④ en la figura 14.2, y D deberá comenzar desde este nuevo nodo. Esto se muestra en la figura 14.3. Observe que ahora el nodo ③ representa el evento de que ambas actividades, A y C, han sido terminadas. Vea que la actividad E, que sólo tiene a D como predecesor inmediato, puede agregarse sin mucha dificultad. Sin embargo, cuando intentamos agregar la actividad F, surge un nuevo problema. Debido a que F tiene a C como predecesor inmediato, emanaría del nodo ③ (de la figura 14.3). No obstante, como podemos ver esto implicaría que F también tuviera a A como predecesor inmediato, lo cual es incorrecto.

El uso de actividades ficticias Este dilema en la construcción del diagrama se resuelve introduciendo una **actividad ficticia**, que en la figura 14.4 aparece representada por una línea punteada en el diagrama de red. La actividad ficticia es falsa en el sentido de que no requiere tiempo o recursos. Sólo provee un elemento pedagógico, que nos permite dibujar una representación de red que mantenga correctamente las relaciones de precedencia apropiadas. Por lo tanto, la figura 14.4 indica que la actividad D puede comenzar sólo después de que tanto la actividad A como la C hayan sido terminadas. De manera similar, la actividad F sólo puede ocurrir después de que C esté terminada.

El procedimiento de agregar una actividad ficticia puede generalizarse como sigue. Suponga que deseamos agregar una actividad A a la red, comenzando en el nodo N, pero no todas las actividades que involucra el nodo N son predecesores inmediatos de la actividad. Cree un nuevo nodo M, con una actividad ficticia que vaya desde el nodo M hasta el nodo N. Tome aquellas actividades que actualmente entran en el nodo N y que son predecesores inmediatos de la actividad A y cambie su dirección para que entren al nodo M. Ahora haga que la actividad A se inicie en el nodo M. Las actividades ficticias pueden evitarse totalmente si, en vez de asociar las actividades en los arcos (AA), las asociamos con las actividades en los nodos (AN). Un ejemplo de este planteamiento de actividad en el nodo se presenta en el cuadro que sigue.

La figura 14.5 muestra el diagrama de red para la primera lista de actividades según como se presentó en la tabla 14.1 Observamos que las actividades G y H comienzan ambas en el nodo ⑥ y terminan en el ⑦. Esto no constituye un problema al representar las relaciones de precedencia apropiadas, ya que sólo la actividad J comienza en el nodo ⑦. Sin embargo, esto po-

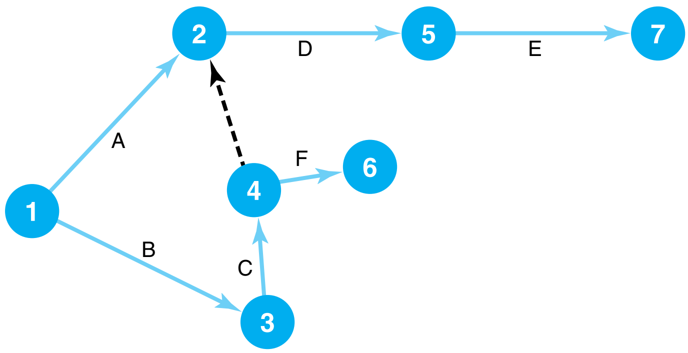


FIGURA 14.4
Introducción de una actividad ficticia

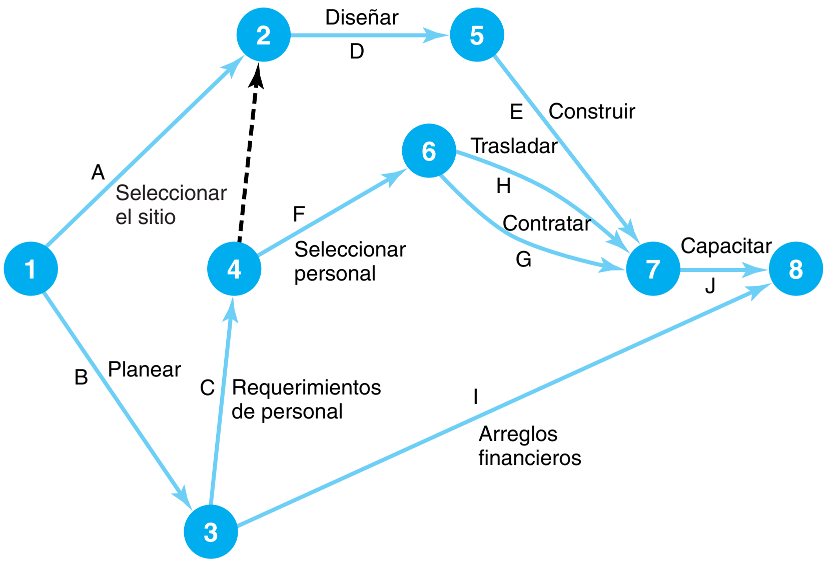


FIGURA 14.5
Diagrama de red para la primera lista de actividades del traslado a Des Moines

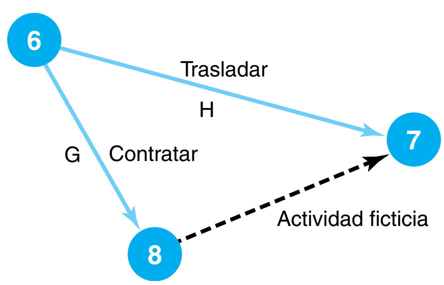


FIGURA 14.6
Introducción de una segunda actividad ficticia

dría causar un problema para ciertos paquetes de *software* usados para resolver problemas PERT y CPM. En algunos de estos programas, cada actividad está identificada por el número de su nodo tanto de *comienzo* como de *terminación*. Si va a utilizarse un programa de este tipo, la representación de G y H en la figura 14.5 llevaría al programa a considerarlos una misma actividad. Esto sería incorrecto, dado que de hecho las actividades G y H no son las mismas. Para resolver esta situación se puede utilizar una actividad ficticia. La figura 14.6 ilustra el procedimiento. Ya que la actividad ficticia no requiere tiempo, se mantienen las relaciones correctas de tiempo y de precedentes. Esta nueva representación aparece en la figura 14.7. Muchos paquetes de *software* no requieren de la creación de estas actividades ficticias. Por lo tanto, para nuestros propósitos, sirven principalmente al objetivo pedagógico de representar correctamente las relaciones de precedencia (es decir, como se hizo en la figura 14.4).

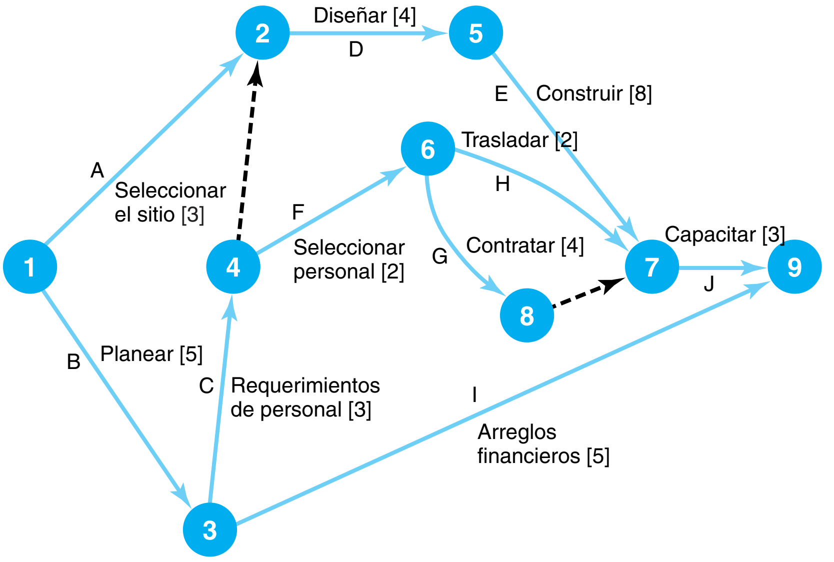
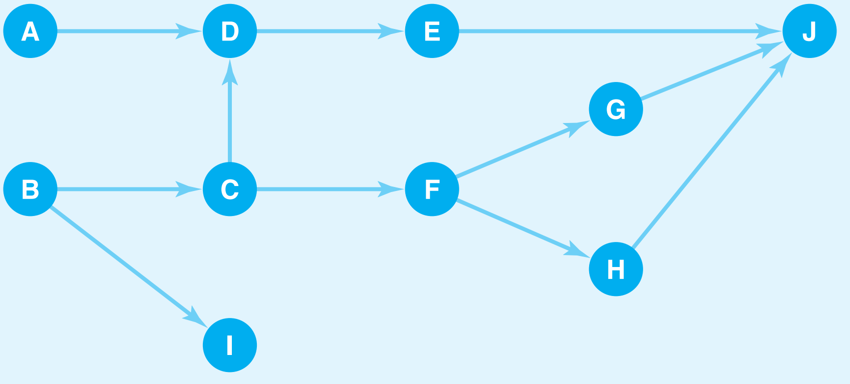


FIGURA 14.7

Diagrama de red con tiempos esperados de actividad

Un ejemplo de actividad en los nodos

En el enfoque de actividad en los nodos para representar el proyecto como una red, las actividades están relacionadas con los nodos de la red, en tanto que los arcos de la red muestran las relaciones de precedencia. La red de Global Oil de la figura 14.5 se representaría como se muestra abajo. Por ejemplo, la actividad J tiene a las actividades E, G y H como predecesores inmediatos porque hay arcos que entran a J desde los nodos marcados E, G y H. Observe que no hay ninguna dificultad especial en hacer a A y C predecesores inmediatos de D, y a C (pero no a A) un predecesor inmediato de F.



14.3 LA RUTA CRÍTICA: CUMPLIR CON LA FECHA DE ENTREGA A LA DIRECCIÓN

La lista de actividades y un diagrama de red apropiado son elementos útiles para representar las relaciones de precedencia entre las actividades de un proyecto. Recuerde que la dirección ha establecido una fecha objetivo de 22 semanas para que el proyecto general quede terminado. Antes de que Becky pueda decir si puede o no cumplir este objetivo, tendrá que incorporar estimaciones de tiempo en su proceso.

El procedimiento PERT-CPM requiere que la administración proporcione una estimación del tiempo esperado que tomará terminar cada actividad de la lista. Vamos a suponer que Becky

TABLA 14.2 Primera lista de actividades con tiempos esperados (en semanas)

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	PREDECESORES INMEDIATOS	TIEMPO ESPERADO DE LA ACTIVIDAD (SEMANAS)	RECURSOS
A	Seleccionar sitio de oficinas	—	3	
B	Crear plan organizacional y financiero	—	5	
C	Determinar los requerimientos de personal	B	3	
D	Diseñar la instalación	A, C	4	
E	Construir el interior	D	8	
F	Seleccionar el personal a transferir	C	2	
G	Contratar nuevos empleados	F	4	
H	Trasladar registros, personal clave, etc.	F	2	
I	Hacer arreglos financieros con instituciones de Des Moines	B	5	
J	Capacitar al nuevo personal	H, E, G	3	

ha trabajado con los departamentos apropiados en Global para llegar a las estimaciones de tiempo esperado (en semanas) que aparecen en la tabla 14.2. (En la sección 14.4 analizaremos con mayor detalle la forma en que se prepararon estas estimaciones de tiempo.) La figura 14.7 muestra el diagrama de red con los tiempos esperados de actividad agregados entre corchetes.

CÁLCULO DE LA RUTA CRÍTICA

De la tabla 14.2 usted puede ver (mediante la suma de los tiempos esperados de actividad individuales) que el tiempo total requerido para completar todas las actividades individuales sería de 39 semanas. Sin embargo, el calendario total de tiempo requerido para completar el proyecto entero claramente puede ser menor que 39 semanas, ya que muchas actividades pueden llevarse a cabo simultáneamente. Por ejemplo, la figura 14.7 muestra que las actividades A y B pueden iniciarse al mismo tiempo. La actividad A toma 3 semanas y la B toma 5 semanas. Si la administración se organiza para comenzar ambas actividades al mismo tiempo (en el momento 0 del calendario), ambas estarán terminadas para el momento = 5 del calendario. Para obtener una predicción del tiempo de calendario mínimo de la duración del proyecto total, debemos encontrar lo que se conoce como *ruta crítica* en la red.

Una **ruta** se puede definir como una secuencia de actividades conectadas, que nos llevan del nodo de inicio ① al nodo de terminación ⑨. Por ejemplo, la secuencia de actividades B-I, que requiere 10 semanas para terminarse, es una ruta. También lo es B-C-D-E-J, que requiere 23 semanas para terminarse. Usted puede identificar otras varias rutas en la figura 14.7. Para dar por concluido el proyecto, deben estar terminadas las actividades de *todas la rutas*. En este sentido podemos decir que "todas las rutas deben recorrerse". Por lo tanto, acabamos de ver que nuestro proyecto tomará *por lo menos* 23 semanas para terminarse, ya que se debe recorrer la ruta B-C-D-E-J. Sin embargo, deben recorrerse numerosas rutas más, y algunas de éstas pueden incluso requerir más tiempo. Nuestra tarea será analizar el tiempo de calendario total requerido para que se recorran todas las rutas. Por lo tanto, deseamos determinar la *ruta más larga* desde el comienzo hasta el final. Esta ruta, llamada la **ruta crítica**, determinará la duración total del proyecto, porque ninguna otra ruta será más larga. Si las actividades en la ruta más larga se atrasan, entonces, debido a que estas actividades deben ser terminadas, todo el proyecto completo estará retrasado. Por esta razón, las actividades de la ruta crítica se conocen como **actividades críticas** del proyecto. Éste subconjunto de actividades es el que debe mantenerse dentro de programa.

Éste es el problema opuesto al de la sección 6.8 (el problema de la ruta más corta). Aquí, la ruta más larga desde el principio (inicio) hasta el final (terminación) es la que se busca. Podemos ya sea cambiar este problema PERT a un modelo de la ruta más corta y utilizar el algoritmo de la sección 6.8, o bien cambiar el algoritmo para que se ajuste al problema. En este caso, es más fácil cambiar el algoritmo.

Tiempos de inicio y de terminación más próximos Otra diferencia entre el problema de la ruta más corta y esta ruta más larga (ruta crítica) es que el interés no está sólo en la ruta más larga de la red, sino en los tiempos más próximos y más lejanos en que la actividad puede comenzar sin afectar la solución presente. Por lo tanto, lo que se necesita es un *análisis de sensibilidad* de cada actividad y a partir de ahí, encontrar los tiempos de inicio (y de terminación) más próximos y más lejanos de cada actividad. Ahora especificaremos los pasos empleados para encontrar una ruta crítica. Será fundamental en este proceso el **tiempo de inicio más próximo** de cada actividad. Para ilustrar esta idea, considere la actividad D, "diseñar la instalación". Ahora suponga que el proyecto se inicia en el momento cero y pregúntese a sí mismo: "¿Cuál es el tiempo más próximo en que puede comenzar la actividad D?" Claramente, no puede comenzar hasta que la actividad A esté terminada. Por lo tanto, no puede empezar antes del tiempo = 3. Sin embargo, tampoco puede comenzar antes de que la actividad ficticia (que requiere 0 tiempo) esté terminada. Dado que la actividad ficticia no puede comenzar hasta que B y C estén terminadas (un total de 8 semanas), vemos que D no puede comenzar hasta que hayan pasado 8 semanas. En este cálculo, es crucial observar que las actividades A y B comienzan en el momento 0. Después de 3 semanas, A está terminada, pero B todavía necesita otras 2 semanas. Después de un total de 5 semanas, B está terminada y C puede comenzar. Después de otras 3 semanas, un total de 8 desde el comienzo, C está terminada. Por lo tanto, después de 8 semanas, tanto A como C están terminadas y puede comenzar C. En otras palabras,

$$\text{tiempo de inicio más próximo para la actividad D} = 8 \text{ semanas}$$

Otro concepto importante es el **tiempo de terminación más próximo** de cada actividad. Si determinamos que

$$\begin{aligned} \text{TIP} &= \text{tiempo de inicio más próximo para una actividad dada} \\ \text{TTP} &= \text{tiempo de terminación más próximo para una actividad dada} \\ t &= \text{tiempo esperado de actividad para una actividad dada} \end{aligned}$$

entonces, para una actividad dada, la relación entre el tiempo más próximo de inicio y el tiempo más próximo de terminación es

$$\text{TTP} = \text{TIP} + t$$

Por ejemplo, acabamos de mostrar que para la actividad D tenemos TIP = 8. Por lo tanto, para la actividad D,

$$\begin{aligned} \text{TTP} &= \text{TIP} + t \\ &= 8 + 4 = 12 \end{aligned}$$

Ahora recordemos que cada actividad comienza en un nodo. Sabemos que una actividad dada que sale de un nodo no puede comenzar hasta que *todas* las actividades que llegan a ese nodo hayan sido terminadas. Esta observación conduce a la regla siguiente.

Regla del tiempo de inicio más próximo: El TIP para una actividad que sale de un nodo particular es el ***mayor*** de los TTP de todas las actividades que llegan a ese nodo.

Vamos a aplicar esta regla a los nodos ①, ②, ③, y ④ de la red de Becky, figura 14.7. El resultado se muestra en la figura 14.8. Escribimos entre corchetes los tiempos más próximos de inicio y de terminación de cada actividad, junto a la letra de la actividad, como se muestra en la figura 14.8. Observe que la regla de tiempo de inicio más próximo aplicada a la actividad D señala que TIP para la actividad D es igual al valor más grande de los TTP de las dos actividades precedentes C (a través de la actividad ficticia) y A. Por lo tanto, el TIP de D es el mayor de los dos valores [8, 3], el cual es 8.

Continuando hacia cada nodo en un **paso hacia delante** a través de toda la red, se calculan entonces los valores [TIP, TTP] para cada actividad. El resultado se muestra en la figura 14.9. Observe que el tiempo de terminación más próximo para J es de 23 semanas. Esto responde la primera de las preguntas hechas en la sección 14.1: "¿Cuál es la fecha esperada de terminación del proyecto?"

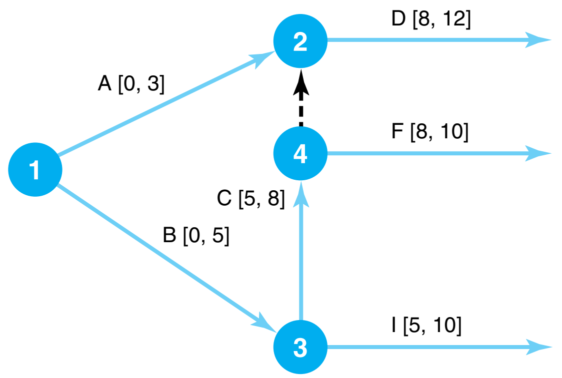


FIGURA 14.8
Regla del tiempo de inicio más próximo

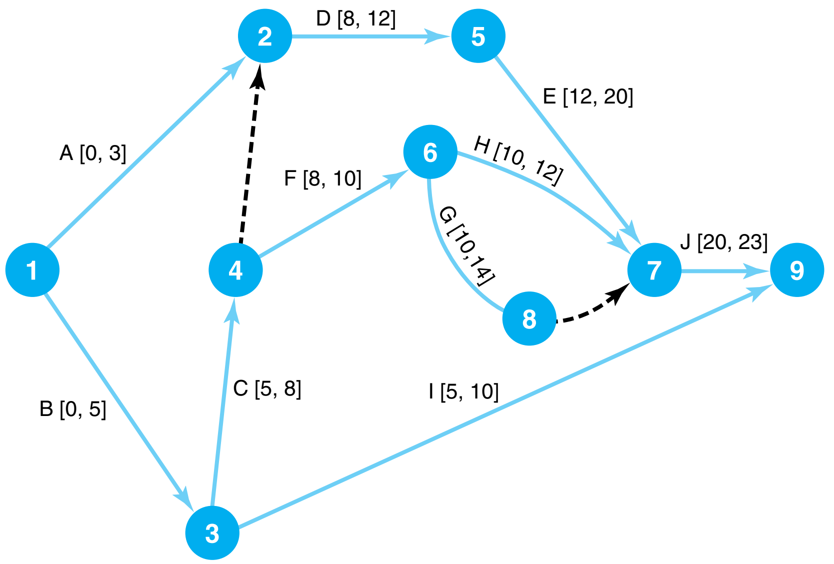


FIGURA 14.9
Red de Global Oil que muestra los tiempos más próximos de inicio y de terminación

Tiempos más lejanos de inicio y de terminación A fin de identificar las posibles fechas de inicio y de terminación, así como las actividades de la ruta crítica y el tiempo que se pueden retrasar las actividades no críticas sin afectar la fecha de terminación general (en respuesta a la tercera, cuarta y quinta preguntas de la sección 14.1), ahora procederemos con un cálculo de **paso hacia atrás.** La idea es que, ya que tenemos una fecha de terminación objetivo (23 semanas desde el inicio del proyecto), podemos trabajar hacia atrás a partir de esta fecha, determinando la fecha *más tardía* en que cada actividad puede terminarse sin retrasar el proyecto completo. El paso hacia atrás comienza en el nodo de terminación, nodo 9 y después recorremos la red hacia atrás, calculando lo que se conoce como **tiempo de inicio más lejano** y **tiempo de terminación más lejano** de cada actividad. En símbolos,

$$\text{TIL} = \text{tiempo de inicio más lejano para una actividad dada}$$
$$\text{TTL} = \text{tiempo de terminación más lejano para una actividad dada}$$

La relación entre estas cantidades es

$$\text{TIL} = \text{TTL} - t$$

Para la actividad J, definimos el tiempo de terminación más lejano como igual a su tiempo de terminación más próximo, que es 23. Por lo tanto, para la actividad J,

$$\text{TIL} = \text{TTL} - t = 23 - 3 = 20$$

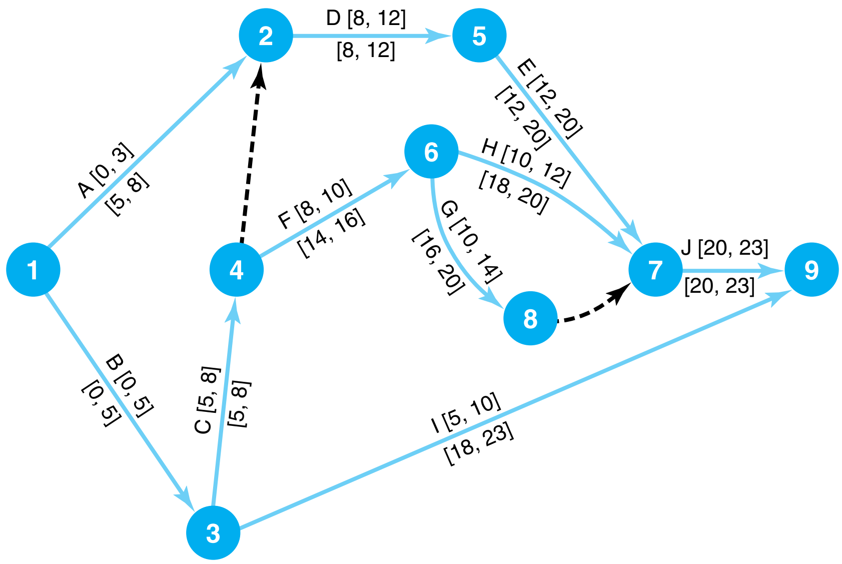


FIGURA 14.10
Red de Global Oil que muestra bajo las actividades los tiempos más lejanos de inicio y de terminación, TIL y TTL

Dado que el tiempo de inicio más lejano para la actividad J es 20, lo más tarde que las actividades E, H y G pueden terminar es 20. Por lo tanto, lo más tarde que E puede comenzar es $20 - 8 = 12$, lo más tarde que H puede comenzar es $20 - 2 = 18$, y lo más tarde que G puede comenzar es $20 - 4 = 16$. Es un poco más complicado determinar el tiempo de terminación más lejano de la actividad F. Aplicamos la siguiente regla general:

> ***Regla del tiempo de terminación más lejano***: El TTL para una actividad que entra a un nodo particular es el ***menor*** de los TIL para todas las actividades que salen de ese nodo.

Por lo tanto, para la actividad F, que entra al nodo 6, aplicamos la regla para ver que TTL = 16, porque los tiempos de inicio más lejanos de las actividades que abandonan el nodo 6 (actividades H y G) son 18 y 16. La red completa con los datos de TIL y TTL aparece en la figura 14.10. Estos datos aparecen entre corchetes en el arco para cada actividad, directamente debajo de los TIP y TTP.

Holguras y ruta crítica Con base en la figura 14.10, el siguiente paso en el algoritmo es identificar otro valor importante, la holgura o tiempo libre, asociado con cada actividad. **Holgura** es la cantidad de tiempo que una actividad puede retrasarse sin afectar la fecha de terminación del proyecto general. *Holgura* es el mismo concepto explicado en la programación lineal, y es el tiempo adicional que se puede gastar en esa ruta sin afectar la duración de la ruta crítica. Una manera fácil y rápida de revisarla es que cada actividad de la ruta crítica debe tener una misma holgura, es decir 0. Para cada actividad, el valor de la holgura se calcula como

$$\text{holgura} = \text{TIL} - \text{TIP} = \text{TTL} - \text{TTP}$$

Por ejemplo, la holgura para la actividad G está dada por

$$\begin{aligned}\text{holgura para} \quad &= \text{TIL para G} - \text{TIP para G}\\ &= 16 - 10\\ &= 6\end{aligned}$$

y el mismo valor está dado por

$$\text{TTL para G} - \text{TTP para G} = 20 - 14 = 6$$

Esto significa que la actividad G puede retrasarse hasta 6 semanas más allá de su tiempo de inicio más próximo sin retrasar el proyecto general. Por otro lado, la holgura asociada con la actividad C es

$$\begin{aligned}\text{holgura para C} &= \text{TIL para C} - \text{TIP para C}\\ &= 5 - 5\\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, la actividad C no tiene holgura y debe comenzarse según el programa en la semana 5. *Dado que esta actividad no puede retrasarse sin afectar el proyecto general, es una actividad crítica y está sobre la ruta crítica*.

Las rutas críticas de PERT también pueden tener soluciones óptimas alternativas (de nuevo, igual que en la programación lineal). Si la actividad F tomara 8 semanas, entonces la ruta B-C-F-G-J también sería una ruta crítica.

Las actividades de la ruta crítica son aquellas con cero holgura.

Método de hoja de cálculo para la red La solución de hoja de cálculo (GLOBAL.XLS) de este problema se realiza más fácilmente usando un procedimiento con actividades en los nodos (presentado en el recuadro de la página 664) que se muestra en la figura 14.11. La columna (E): Tiempo de terminación más próximo (TTP) es la columna (C): Tiempo de actividad más la columna (D): Tiempo de inicio más próximo (TIP). De manera similar, la columna (F): Tiempo de inicio más lejano (TIL) es la columna (G): Tiempo de terminación más lejano (TTL) menos la columna (C): Tiempo de actividad. La columna (H): Holgura, podría ser la columna (F): Tiempo de inicio más lejano (TIL) menos la columna (D): Tiempo de inicio más próximo (TIP), o de manera equivalente la columna (G): Tiempo de terminación más lejano (TTL) menos la columna (E): Tiempo de terminación más próximo (TTP). La fórmula para la mínima duración del proyecto en la celda E15 es =MAX(E2:E12), el mayor de los tiempos de terminación más próximos.

La parte crítica en la creación de la hoja de cálculo es escribir la información derivada del diagrama de red. Por ejemplo, dado que el tiempo de terminación más lejano de la actividad F es el menor de los tiempos de inicio más lejanos de las actividades G, H y K, la fórmula en la celda G7 es =MIN(F8,F9,F12) como se muestra en la figura 14.11. Dado que el tiempo de inicio más próximo de la actividad D es el mayor de los tiempos de terminación más próximos de las actividades A y C, la fórmula en la celda D5 es =MAX(E2,E4). Observe que la palabra "Sí" está en la columna "¿Crítica?" para aquellas actividades con cero holgura. Por lo tanto, podemos ver a partir de este resultado de hoja de cálculo que la ruta crítica del proyecto de Becky es B-C-D-E-J. El tiempo de terminación mínimo general es de 23 semanas, que es la suma de los tiempos de la ruta crítica, así como el tiempo de terminación más próximo para la última actividad (J). La figura 14.11 también provee respuestas a las preguntas 3, 4 y 5 formuladas en la sección 14.1. En otras palabras, hasta este punto hemos respondido las siguientes preguntas de esa sección:

1. ¿Cuál es la fecha esperada de terminación del proyecto?

Respuesta: 23 semanas.

3. ¿Cuáles son las fechas de inicio y terminación programadas para cada actividad específica?

Respuesta: Se puede programar que una actividad comience en cualquiera de las fechas que se encuentran entre el "inicio más próximo" y el "inicio más lejano". La fecha programada de terminación será "fecha de inicio + tiempo esperado de actividad". Por ejemplo, la actividad G puede programarse para comenzar en cualquier punto entre el momento = 10 y el momento = 16. Como se muestra en la tabla 14.2, el tiempo esperado de actividad es de 4 semanas. Por lo tanto, la fecha de terminación programada será "fecha de inicio + 4".

4. ¿Qué actividades son *críticas*, en el sentido de que deben ser terminadas exactamente como fueron programadas, a fin de cumplir el objetivo de terminación general del proyecto?

Respuesta: Las actividades en la ruta crítica a saber son: B, C, D, E, J.

5. ¿Cuánto tiempo pueden retrasarse las actividades *no críticas*, antes de que se incurra en un retraso en la fecha de terminación general?

Respuesta: Se puede comenzar cualquier actividad hasta la fecha de "inicio más lejano" sin retrasar la terminación general del proyecto.

D11 = =MAX(E6,E8,E9)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Actividad	Descripción	Tiempo de actividad	Tiempo de inicio más próximo (TIP)	Tiempo de terminación más próximo (TTP)	Tiempo de inicio más lejano (TIL)	Tiempo de terminación más lejano (TTL)	Holgura	¿Crítica?
2	A	Seleccionar el sitio de oficinas	3	0	3	5	8	5	No
3	B	Crear plan	5	0	5	0	5	0	Sí
4	C	Requerimientos de personal	3	5	8	5	8	0	Sí
5	D	Diseñar instalaciones	4	8	12	8	12	0	Sí
6	E	Construir	8	12	20	12	20	0	Sí
7	F	Seleccionar personal	2	8	10	14	16	6	No
8	G	Contratar nuevo personal	4	10	14	16	20	6	No
9	H	Trasladar registros	2	10	12	18	20	8	No
10	I	Hacer arreglos financieros	5	5	10	18	23	13	No
11	J	Capacitar	3	20	23	20	23	0	Sí
12									
13		Duración mínima del proyecto			23				

Celda	Fórmula	Cópiese a
D4	=MAX(E3)	—
D5	=MAX(E2,E4)	—
D6	=MAX(E5)	—
D7	=MAX(E4)	—
D8	=MAX(E7)	—
D9	=MAX(E7)	—
D10	=MAX(E3)	—
D11	=MAX(E6,E8,E9)	—
E2	=D2+C2	E3:E11
F2	=G2−C2	F3:F11
G2	=MIN(F5)	—
G3	=MIN(F4,F10)	—
G4	=MIN(F5,F7)	—
G5	=MIN(F6)	—
G6	=MIN(F11)	—
G7	=MIN(F8,F9)	—
G8	=MIN(F11)	—
G9	=MIN(F11)	—
G10	=E13	—
G11	=E13	—
H2	=F2−D2	H3:H11
I2	=SI(H2=0,“SI”,“No”)	I3:I11
E13	=MAX(E2:E11)	—

FIGURA 14.11
Resumen de programación en hoja de cálculo para Global Oil

Tres preguntas: 2, 6 y 7, quedan por responder. Pero primero, antes de continuar, vamos a ver un panorama general de lo que hemos aprendido. Gracias al análisis de la ruta crítica, queda claro que Becky tiene un problema. La mesa directiva quiere que la operación de tarjetas de crédito comience a funcionar en Des Moines en 22 semanas, y con el plan actual se requieren 23 semanas.

MANERAS DE REDUCIR LA DURACIÓN DEL PROYECTO

Hay dos métodos básicos para reducir el tiempo requerido para completar un proyecto:

1. *Un análisis estratégico*. Aquí el analista pregunta: “¿Este proyecto debe hacerse de la manera en que está diagramado actualmente?” En particular, “¿Todas las actividades de la ruta crítica deben realizarse en el orden especificado?” ¿Podemos hacer arreglos para realizar algunas de estas actividades en forma diferente a la de la ruta crítica?
2. *Un planteamiento táctico*. En este método el analista asume que el diagrama actual es apropiado y trabaja en la reducción del tiempo de ciertas actividades en la ruta crítica dedicándoles más recursos. Los tiempos esperados actuales suponen una cierta asignación de re-

cursos. Por ejemplo, las ocho semanas para construcción (actividad E) suponen un día de trabajo normal de ocho horas. El contratista puede terminar el trabajo más rápidamente trabajando tiempo extraordinario, pero con un incremento del costo.

El método táctico nos llevará a considerar modelos CPM que serán analizados en la sección 14.6. Por ahora nos ocuparemos de las llamadas preguntas estratégicas.

Un análisis estratégico Becky comienza con un análisis estratégico, dado que está ansiosa de mantener el costo del traslado tan bajo como sea posible. Este método es análogo al análisis "¿Qué pasa si?" realizado en hojas de cálculo. Después de cierto estudio, repentinamente se da cuenta de que la red actual supone que la actividad J (la capacitación de los nuevos empleados) debe efectuarse en el nuevo edificio (después de que E esté terminada), y después de que los registros y el personal clave sean trasladados (después de terminar H). Tras volverlo a pensar, ella cree que estos requerimientos pueden cambiarse. Primero, J puede ejecutarse de manera independiente de H. La especificación previa de que H debería ser un predecesor inmediato de J simplemente era incorrecta. Es más, ella cree que puede obtener una instalación de capacitación alterna arreglando el uso de un salón de clases excedente en Des Moines a un costo mínimo. Puede entonces tener a los nuevos empleados capacitados y listos para comenzar al momento en que la construcción termine. Por otra parte, tendrá que agregar otra actividad a la lista de actividades: obtener una instalación para la capacitación (que se identificará como actividad K). Aunque ella siente que esta reorganización puede ser útil, es posible que en esta red redefinida se haya creado una nueva ruta crítica con un tiempo mínimo todavía insatisfactorio (es decir, mayor que 22 semanas).

Resultado de la hoja de cálculo para la red redefinida La figura 14.12 muestra la lista de actividades redefinida, bajo la forma de un diagrama de actividades en los arcos (AA). Observe que a las actividades ficticias se les ha dado una duración normal (tiempo esperado de actividad) de 0. Algunas de las entradas (duración de recorte, costo normal y costo de recorte) no necesitan ser especificados para este análisis en particular. Becky sólo tiene que hacer unas pocas modificaciones a los datos de entrada partiendo de su definición anterior de la red. Por lo tanto, debe añadir la actividad K y cambiar el número de los nodos de terminación para las actividades E, G y H. La figura 14.13 muestra el diagrama de red para el proyecto redefinido en el diagrama de actividades en los nodos (AN).

Becky entonces integra la información a la hoja de cálculo (la hoja "Redefinido" de la misma GLOBAL.XLS) para resolver el problema, y se producen los resultados que aparecen en la figura 14.14. Aquí vemos que el proyecto redefinido puede terminarse en 20 semanas (la suma de los tiempos de la ruta crítica), así que puede cumplirse la fecha límite señalada por la dirección. También resulta patente que la actividad "capacitar" (J) ya no aparece en la ruta crítica. A pesar del hecho de que se necesitan tres semanas para adecuar una instalación de capacitación, la actividad J tiene una holgura de tres semanas. La solución de hoja de cálculo muestra que la

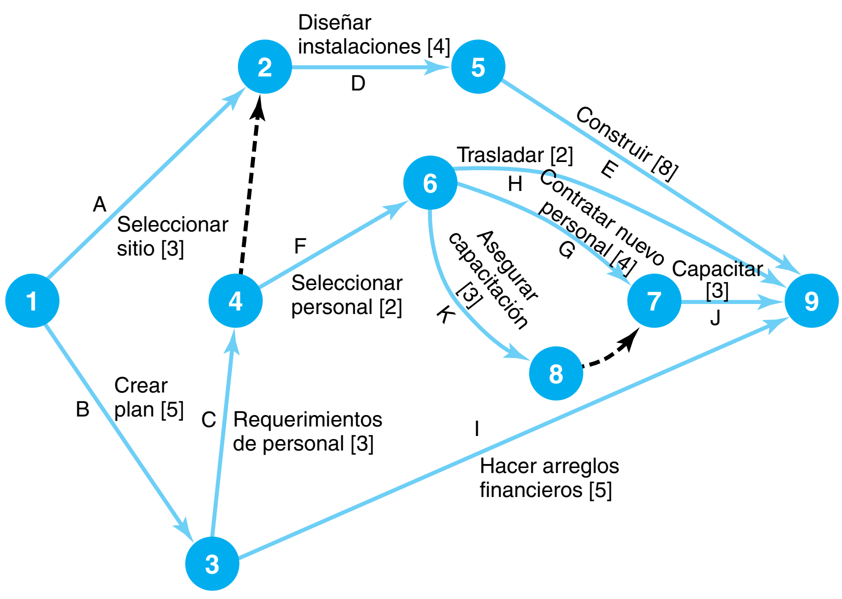


FIGURA 14.12
Diagrama de red AA para la lista de actividades redefinida

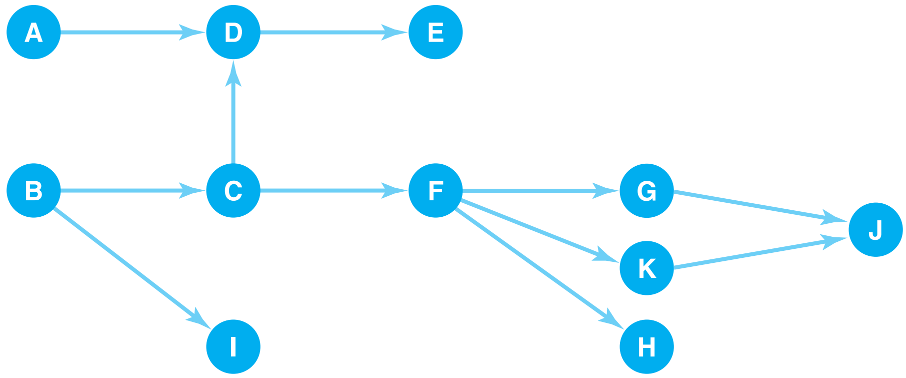


FIGURA 14.13

Diagrama de red AN para el proyecto redefinido

G7 = =MIN(F8,F9,F12)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Actividad	Descripción	Tiempo de actividad	Tiempo de inicio más próximo (TIP)	Tiempo de terminación más próximo (TTP)	Tiempo de inicio más lejano (TIL)	Tiempo de terminación más lejano (TTL)	Holgura	¿Crítica?
2	A	Seleccionar el sitio de oficinas	3	0	3	5	8	5	No
3	B	Crear plan	5	0	5	0	5	0	Sí
4	C	Requerimientos de personal	3	5	8	5	8	0	Sí
5	D	Diseñar instalaciones	4	8	12	8	12	0	Sí
6	E	Construir	8	12	20	12	20	0	Sí
7	F	Seleccionar personal	2	8	10	11	13	3	No
8	G	Contratar nuevo personal	4	10	14	13	17	3	No
9	H	Trasladar registros	2	10	12	18	20	8	No
10	I	Hacer arreglos financieros	5	5	10	15	20	10	No
11	J	Capacitar	3	14	17	17	20	3	No
12	K	Asegurar capacitación	3	10	13	14	17	4	No
13									
14		Duración mínima del proyecto			20				

Celda	Fórmula	Cópiese a
D4	=MAX(E3)	—
D5	=MAX(E2,E4)	—
D6	=MAX(E5)	—
D7	=MAX(E4)	—
D8	=MAX(E4)	—
D9	=MAX(E7)	—
D10	=MAX(E3)	—
D11	=MAX(E8,E12)	—
D12	=MAX(E7)	—
E2	=D2+C2	E3:E12
F2	=G2−C2	F3:F12
G2	=MIN(F5)	—
G3	=MIN(F4,F10)	—
G4	=MIN(F5,F7)	—
G5	=MIN(F6)	—
G6	=E14	—
G7	=MIN(F8,F9,F12)	—
G8	=MIN(F11)	—
G9	=E14	—
G10	=E14	—
G11	=E14	—
G12	=MIN(F11)	—
H2	=F2−D2	H3:H12
I2	=SI(H2=0,“SI”,“No”)	I3:I12
E14	=MAX(E2:E12)	—

FIGURA 14.14

Solución de hoja de cálculo para el proyecto redefinido ruta crítica del proyecto redefinido es B-C-D-E. (Recuerde que "Sí" en la columna "¿Crítica?" indica que la actividad está sobre la ruta crítica.)

14.4 VARIABILIDAD EN LOS TIEMPOS DE LAS ACTIVIDADES

Ahora consideremos la segunda pregunta expresada en la introducción: "¿Cuál es la variabilidad potencial en la fecha esperada de terminación del proyecto?" Hasta ahora, hemos estado actuando como si los tiempos de actividades y los valores derivados de TIP (Tiempo de inicio más próximo), TIL (Tiempo de inicio más lejano), TTP (Tiempo de terminación más próximo) y TTL (Tiempo de terminación más lejano) fueran todos determinísticos. Esto puede no ser estrictamente correcto. En vista de este hecho, PERT emplea una fórmula especial para estimar los tiempos de actividades. Ahora presentaremos los detalles, y al hacerlo se verá que el método PERT puede utilizarse también para calcular la probabilidad de que el proyecto sea terminado en cualquier fecha particular.

ESTIMACIÓN DEL TIEMPO ESPERADO DE LAS ACTIVIDADES

El sistema PERT para estimar los tiempos de las actividades requiere personas que conozcan las actividades lo bastante bien como para producir tres estimaciones del tiempo para cada actividad:

1. **Tiempo optimista** (denotado como a): el tiempo mínimo. Todo tiene que salir perfectamente para lograr este tiempo.
2. **Tiempo más probable** (denotado como m): el tiempo más factible. El tiempo requerido bajo circunstancias normales.
3. **Tiempo pesimista** (denotado como b): el tiempo máximo. Una versión de la Ley de Murphy es que si algo puede salir mal, saldrá mal. El tiempo pesimista es el tiempo requerido cuando la Ley de Murphy entra en vigor.

Vea, por ejemplo, la actividad E, construir el interior. Becky y el contratista general examinan cuidadosamente cada fase del proyecto de construcción y llegan a las estimaciones siguientes:

$$
\begin{aligned}
a &= 4 \\
m &= 7 \\
b &= 16
\end{aligned}
$$

El valor relativamente grande de b es causado por la posibilidad de un retraso en la entrega de la unidad de aire acondicionado para la computadora. Si esta unidad se retrasa, toda la actividad se retrasa. Es más, en este caso, dado que E está en la ruta crítica, un retraso en esta actividad retrasará todo el proyecto general.

En el desarrollo original del método PERT (hacia fines de los años cincuenta), el procedimiento para estimar el valor esperado de los tiempos de actividad estaba motivado por la hipótesis de que el tiempo de actividad era una variable aleatoria con una distribución de probabilidad en particular. Esta distribución (la **distribución beta**) tiene un valor mínimo y uno máximo, a diferencia de la distribución normal, que tiene un rango de valores infinito. También es capaz de asumir gran variedad de formas, de nuevo en oposición con la distribución normal, que es siempre simétrica alrededor de su valor más probable. En la figura 14.15 aparece una distribución beta típica. El valor esperado de una distribución beta es aproximadamente $(a + 4m + b)/6$; por lo tanto, la fórmula utilizada para estimar el tiempo esperado de actividad es

$$
\text{estimación del tiempo esperado de actividad} = \frac{a + 4m + b}{6} \tag{14.1}
$$

Observe que la estimación es un promedio ponderado de los valores de a, m y b, donde los coeficientes (1/6, 4/6, 1/6) suman 1. Esto significa que la estimación siempre quedará entre a y b. Por lo tanto, para la actividad E,

$$
\text{estimación del tiempo esperado de actividad} = \frac{4 + 4(7) + 16}{6} = 8
$$

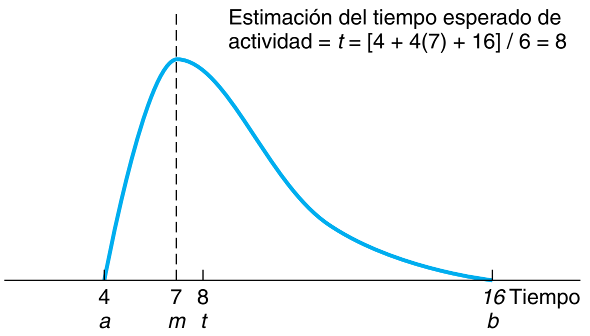


FIGURA 14.15
Distribución beta unimodal

TABLA 14.3 Estimados de tiempo

ACTIVIDAD	a	m	b	$(a + 4m + b)/6$ (VALOR ESPERADO)	$(b - a)/6$ (DESV. ESTÁNDAR)	$[(b - a)/6]^2$ (VARIANZA)
A	1	3	5	3	2/3	4/9
B	3	4.5	9	5	1	1
C	2	3	4	3	1/3	1/9
D	2	4	6	4	2/3	4/9
E	4	7	16	8	2	4
F	1	1.5	5	2	2/3	4/9
G	2.5	3.5	7.5	4	5/6	25/36
H	1	2	3	2	1/3	1/9
I	4	5	6	5	1/3	1/9
J	1.5	3	4.5	3	1/2	1/4
K	1	3	5	3	2/3	4/9

Trabajando con el personal apropiado en Global Oil, Becky utilizó la ecuación (14.1) para estimar cada uno de los tiempos esperados de actividad que se presentaron en la tabla 14.2 y que se utilizaron subsecuentemente en el análisis de la ruta crítica.

Estimación de la desviación estándar del tiempo de actividad La desviación estándar del tiempo de actividad se estima suponiendo que hay seis desviaciones estándar entre los tiempos optimista y pesimista:

$$\text{estimación de la desviación estándar del tiempo de actividad} = \frac{b - a}{6} \qquad \textbf{(14.2)}$$

Por lo tanto, para la actividad E,

$$\text{estimación de la desviación estándar del tiempo de actividad} = \frac{16 - 4}{6} = 2$$

La tabla 14.3 muestra las tres estimaciones (a, m, b), los tiempos esperados de actividad, la desviación estándar de los tiempos de actividad y la *varianza* de los tiempos de actividad para la lista de actividades redefinida. La varianza es simplemente el cuadrado de la desviación estándar. Es útil registrar la varianza de cada actividad, debido a que estos valores serán utilizados para realizar enunciados sobre la probabilidad de terminar el proyecto general en una fecha específica.

Por supuesto que, en una aplicación, es posible utilizar cualquier procedimiento que parezca apropiado para estimar el valor esperado y la desviación estándar del tiempo de actividad. De hecho, en algunas circunstancias puede haber datos disponibles y se pueden utilizar procedimientos estadísticos para estimar estos parámetros del modelo.

PROBABILIDAD DE TERMINAR EL PROYECTO A TIEMPO

El hecho de que los tiempos de actividad sean variables aleatorias implica que el tiempo de terminación del proyecto es también una variable aleatoria. Esto es, hay una variabilidad potencial en el tiempo de terminación general. Incluso a pesar de que el proyecto redefinido tiene una terminación *esperada* de 20 semanas, no hay garantía de que será terminado realmente en 20 semanas. Si *por casualidad* varias actividades toman más tiempo que el esperado, el proyecto podría no ser terminado dentro del programa de 22 semanas deseado. En general, sería útil conocer la probabilidad de que el proyecto sea terminado dentro de un tiempo específico. En particular, a Becky le gustaría conocer la probabilidad de que el traslado estará terminado en un lapso de 22 semanas.

El análisis procede como sigue:

1. Sea T igual al tiempo total que se llevarán las actividades de la ruta crítica.

2. Encuentre la probabilidad de que el valor de T resulte menor que o igual a cualquier valor específico de interés. En particular, para el proyecto de Becky, encontraríamos Prob$\{T \leq 22\}$. Se puede encontrar fácilmente una buena aproximación de esta probabilidad si son válidas las siguientes dos suposiciones:

a. *Los tiempos de las actividades son variables aleatorias independientes*. Ésta es una suposición válida para la mayor parte de las redes PERT y parece razonable para el problema de Becky. No hay razón para creer que el tiempo para construir el interior dependa del tiempo de diseño, y así sucesivamente.

b. *La variable aleatoria* T *tiene una distribución aproximadamente normal.* Esta hipótesis se apoya en el *teorema del límite central*, que en términos generales establece que la suma de variables aleatorias independientes tiene una distribución aproximadamente normal.

Ahora, recordando que nuestro objetivo es encontrar Prob$\{T \leq 22\}$, donde T es el tiempo en la ruta crítica, deseamos convertir a T en una variable aleatoria estándar normal y utilizar la tabla A.0 del apéndice A para encontrar Prob$\{T \leq 22\}$. El primer paso de este proceso es encontrar la desviación estándar de T. Para hacer esto necesitamos la varianza de T. Cuando los tiempos de las actividades son independientes, sabemos que la varianza del tiempo total en la ruta crítica es igual a la suma de las varianzas de los tiempos de las actividades en la ruta crítica. Por lo tanto, para el problema de Becky,

$$\text{var } T = \begin{pmatrix}\text{varianza de}\\ \text{la actividad B}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{varianza de}\\ \text{la actividad C}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{varianza de}\\ \text{la actividad D}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{varianza de}\\ \text{la actividad E}\end{pmatrix}$$

Utilizando los valores numéricos de la tabla 14.3 obtenemos

$$\text{var } T = 1 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 4 = \frac{50}{9}$$

Finalmente,

$$\text{desv. estándar. } T = \sqrt{(\text{var } T)} = \sqrt{\frac{50}{9}} = 2.357$$

Ahora procedemos a convertir T en una variable aleatoria estándar normal, Z, de la manera usual: $Z = \frac{T - \mu}{\sigma}$. Recordando que 20 semanas es la media (es decir, el tiempo esperado de terminación), tenemos que

$$\begin{aligned}\text{Prob}\{T \leq 22\} &= \text{Prob}\left\{\frac{T - 20}{2.357} \leq \frac{22 - 20}{2.357}\right\}\\ &= \text{Prob}\{Z \leq 0.8485\}\end{aligned}$$

Si consultamos la tabla A.0 al final del texto, para el área bajo una curva normal a partir del extremo izquierdo hasta el punto con una desviación estándar de 0.8485 por encima de la media, encontramos que la respuesta es de aproximadamente 0.80. Por lo tanto, hay una probabilidad de aproximadamente 80% de que la ruta crítica será terminada en menos de 22 semanas.

Este análisis muestra cómo responder la segunda de las preguntas realizadas en la introducción. En particular, muestra cómo encontrar la probabilidad de que la *ruta crítica* será terminada en *cualquier* tiempo determinado. Ilustra la importancia de considerar la variabilidad en los tiempos de actividad individuales, cuando se consideran los tiempos de terminación generales del proyecto. El análisis del problema de Becky indica que, utilizando el tiempo esperado como nuestro "pronóstico del mundo real", la duración esperada del proyecto será de 20 semanas y, si es así, será terminada con 2 semanas de anticipación a la fecha deseada. El análisis de incertidumbre anterior arroja luz adicional en esta estimación. Muestra una considerable probabilidad (es decir, 0.2 = 1 – 0.8) de que *la ruta crítica* no quede terminada para la fecha de terminación deseada. Lo que se implica aquí es que hay *por lo menos* una probabilidad de 0.2 de que el proyecto general pueda no ser terminado en la fecha deseada. El modificador "por lo menos" ha sido empleado debido al siguiente factor de complicación: debido a la aleatoriedad, alguna otra ruta, estimada como no crítica, podría en realidad tomar más tiempo para ser terminada que la supuesta ruta crítica.

Como un ejemplo de cómo esta incertidumbre puede funcionar en el mundo empresarial/educativo, la San Diego State University y el Georgia Tech contrataron a empresas de construcción para edificar torres de estacionamiento. Las empresas constructoras hicieron dos ofertas: una si se utilizaban gráficas PERT y otra más baja, si *no* se utilizaban gráficas PERT. En la última oferta, las empresas no se comprometerían a una fecha de terminación de las estructuras, de forma que si se necesitaban trabajadores en algún otro proyecto (que sí tuviera un vencimiento), pudieran ser retirados de los proyectos de las universidades durante varios días o semanas, para emplearlos en alguna otra parte. A cambio de esta incertidumbre, las instituciones educativas obtuvieron costos de construcción menores, por haber ayudado a los contratistas en su equilibrio de personal.

PRUEBA DE LAS SUPOSICIONES CON SIMULACIÓN EN HOJA DE CÁLCULO

Para proyectos pequeños, no es demasiado engorroso utilizar un programa de hoja de cálculo para hacer un análisis de la ruta crítica, como hemos mostrado previamente en las figuras 14.11 y 14.14. Una vez insertadas las relaciones básicas, es muy sencillo modificar los tiempos de actividad y ver qué efecto tiene en la duración mínima del proyecto y en las actividades de la ruta crítica. Haciendo aleatorios los tiempos de actividad mediante Crystal Ball y volviendo a obtener los resultados en la hoja de cálculo (mediante su característica "Single Step"), uno puede tener una idea de la variabilidad tanto de la duración del proyecto como de la ruta crítica. La figura 14.16 muestra un ejemplo (la hoja de trabajo "Aleatorio" (o "Random") de la misma GLOBAL.XLS). Observe que todos los tiempos de las actividades ocurren entre sus tiempos pesimista (a) y optimista (b), pero que la ruta crítica es diferente, en este caso B-C-F-G-J. Este resultado demuestra que la ruta con la mayor duración *esperada* (B-C-D-E) puede no resultar ser la ruta crítica. Este hecho implica que la duración esperada del proyecto puede ser mayor que la calculada mediante el análisis PERT.[2]

FIGURA 14.16

Tiempos de actividad simulados para Global Oil

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	**Actividad**	**Descripción**	**Tiempo de actividad**	**Tiempo de inicio más próximo (TIP)**	**Tiempo de terminación más próximo (TTP)**	**Tiempo de Inicio más lejano (TIL)**	**Tiempo de terminación más lejano (TTL)**	**Holgura**	**¿Crítica?**
3	A	Seleccionar el sitio de oficinas	4	0	4	4	7	4	No
4	B	Crear plan	3	0	3	0	3	0	Sí
5	C	Requerimientos de personal	2	3	6	3	6	0	Sí
6	D	Diseñar instalaciones	3	6	9	7	11	2	No
7	E	Construir	6	9	15	11	17	2	No
8	F	Seleccionar personal	3	6	9	6	9	0	Sí
9	G	Contratar nuevo personal	5	9	13	9	13	0	Sí
10	H	Trasladar registros	2	9	11	14	17	6	No
11	I	Hacer arreglos financieros	4	3	8	12	17	9	No
12	J	Capacitar	4	13	17	13	17	0	Sí
13	K	Asegurar capacitación	2	9	11	11	13	3	No
14									
15		Duración mínima del proyecto			17				
16									

[2]El resultado clave necesario para demostrar esto es que el valor esperado del valor máximo de dos variables aleatorias es mayor que o igual al máximo de los valores esperados: $E[\max(X, Y)] \geq \max(E[X], E[Y])$.

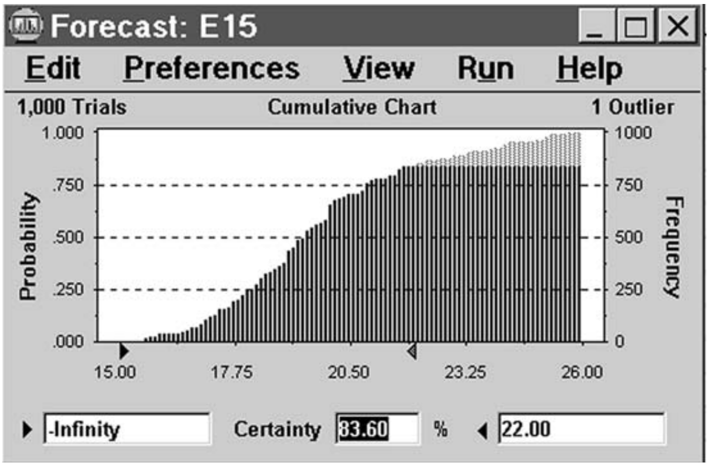


FIGURA 14.17

Distribución de la duración del proyecto

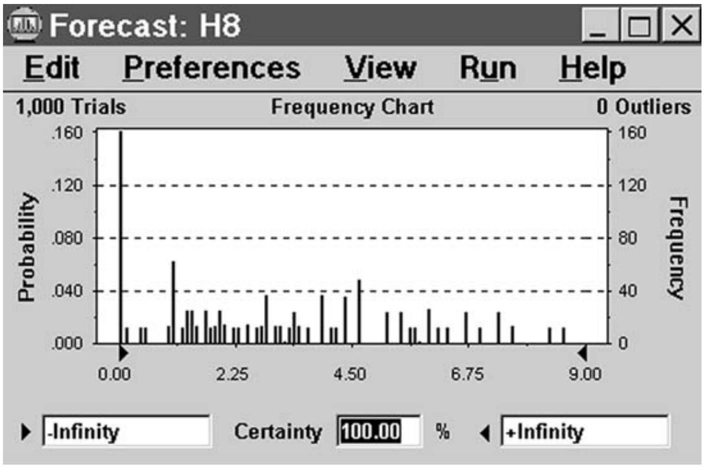


FIGURA 14.18

Distribución de la holgura para la actividad F

Para estimar la duración esperada real del proyecto, deberíamos volver a obtener los resultados en la hoja de cálculo muchas veces y promediar las duraciones mínimas del proyecto obtenidas en cada nuevo cálculo. Los complementos de Crystal Ball llevan a cabo fácilmente este procedimiento. Dado que Crystal Ball incluye la distribución beta en su Distribution Gallery, y que el análisis PERT de los tiempos de actividad se basó en la distribución beta, indicamos que los valores en la columna C deben ser tomados de las distribuciones beta apropiadas. La figura 14.17 muestra la distribución de las duraciones de proyecto mínimas, calculadas por Crystal Ball, con base en una muestra de 1,000 iteraciones. La duración del proyecto promedio estimada es de hecho menor que la que fue calculada mediante el análisis PERT, aunque sólo ligeramente (19.76 en comparación con 20.0). Crystal Ball también facilita calcular la probabilidad de que la duración del proyecto sea menor que o igual a cualquier valor objetivo determinado. La figura 14.17 muestra que para un valor objetivo de 22 semanas, la probabilidad es de 83.6%, ligeramente superior al 80% calculado mediante el análisis PERT. En este caso, por lo menos, parecería que las hipótesis simplificadoras de PERT están justificadas.

Crystal Ball también facilita generar histogramas como el que se muestra en la figura 14.18. Éste es un histograma de la holgura de la actividad F. Aunque la holgura *esperada* está cerca del valor de análisis PERT de tres semanas, el histograma muestra que hay considerable variación alrededor de este valor promedio. Note en forma particular, que existe una pequeña probabilidad de que la holgura se acerque a cero. Si la holgura es cero, entonces F queda en la ruta crítica. Si la holgura está cerca de cero, entonces el programa de F puede ampliarse un poco sin retrasar el proyecto completo. Esto significa que la actividad F *puede* convertirse en una actividad crítica. Ésta es una información que el análisis PERT, con su gran holgura de tres semanas para la actividad F, podría ocultar.

14.5 RESUMEN A LA MITAD DEL CAPÍTULO: PERT

Para usar el método PERT, el analista debe proveer las siguientes entradas:

1. Una lista de las actividades que constituyen el proyecto.
2. Los predecesores inmediatos para cada actividad.
3. El valor esperado de cada tiempo de actividad [utilizando $t = (a + 4m + b)/6$].
4. La desviación estándar de cada tiempo de actividad [utilizando la desviación estándar $t = (b - a)/6$].

El procedimiento de PERT utiliza las estimaciones pesimista, más probable y optimista de los tiempos de las actividades para obtener el valor esperado y la desviación estándar de cada actividad. La desviación estándar se requiere sólo si el analista desea hacer enunciados de probabilidad sobre la terminación de este proyecto en una fecha determinada.

El análisis utiliza las entradas enumeradas arriba para

1. Calcular la ruta crítica.
2. Calcular el tiempo mínimo esperado en el cual se puede terminar el proyecto.
3. Mostrar valores de holgura para cada actividad, junto con el tiempo esperado más lejano en el cual una actividad puede comenzar (o terminar) sin retrasar el proyecto.
4. Calcular la probabilidad de que la ruta crítica actual se termine para un fecha específica, si se proveen estimaciones sobre la desviación estándar.

Si el proyecto no puede ser terminado (o es improbable que lo sea) para la fecha deseada, el proyecto debe ser redefinido ya sea mediante

1. Un análisis estratégico, en el cual la red del proyecto es modificada mediante la introducción de nuevas actividades o el cambio de las relaciones entre actividades existentes.
2. Un análisis táctico, en el cual se cambian los tiempos de actividad mediante la inyección de recursos adicionales.

Finalmente, podemos observar que PERT no sólo es un sistema de planeación. Ahora usted puede ver que PERT puede utilizarse también para vigilar el progreso de un proyecto. La administración puede comparar los tiempos reales de las actividades conforme ocurren con aquellos utilizados en el proceso de planeación. Si, por ejemplo, la actividad B tomara 6 o 7 semanas, en vez de las 5 semanas utilizadas en el diagrama de red, Becky sabría que el proyecto está retrasado en comparación con el programa. Esto le daría la oportunidad de asignar más recursos a alguna otra actividad en la ruta crítica, en un esfuerzo por acortarla y cumplir la fecha límite general.

La identificación de la ruta crítica y la información inmediata dan a la administración una poderosa herramienta para manejar el difícil problema de llevar a cabo un proyecto complicado conforme al programa.

14.6 CPM Y EL EQUILIBRIO ENTRE TIEMPO Y COSTO

Como acabamos de ver, PERT proporciona un método útil para el análisis de problemas de programación frente a la *incertidumbre de tiempos de las actividades*. Dicha incertidumbre ocurrirá a menudo en proyectos nuevos o únicos, donde hay poca experiencia previa de tiempos y costos con la cual trabajar. En otras clases de proyectos puede que existan datos históricos considerables mediante los cuales uno puede hacer buenas estimaciones de los requerimientos de tiempo y recursos. En dichos casos puede ser de interés tratar más explícitamente con costos, en el sentido de analizar las posibilidades de desplazar recursos a fin de reducir el tiempo de terminación. El concepto de que existe un posible equilibrio entre el tiempo que toma terminar una actividad y el costo de los recursos dedicados a esa actividad, es la base de un modelo que originalmente formó parte del método CPM.

El modelo supone que el costo es una función lineal del tiempo. Vea, por ejemplo, la figura 14.19. Esta figura muestra que la administración tiene la oportunidad de apuntar a un tiempo de actividad cualquiera entre un valor mínimo y uno máximo. La elección de un tiempo de actividad implica un costo de actividad, como está especificado en el diagrama.

Dada la disponibilidad de semejante función de equilibrio entre tiempo y costo para cada una de las actividades en el proyecto, la administración tiene la oportunidad de seleccionar ca-

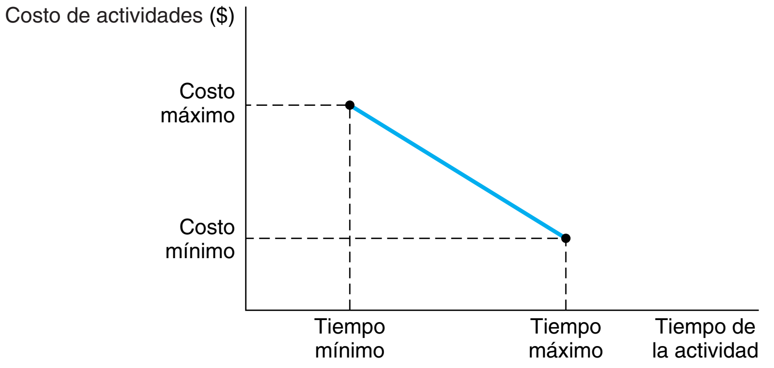


FIGURA 14.19
Función de equilibrio tiempo-costo

ACTIVIDAD	PREDECESOR INMEDIATO	TIEMPO NORMAL (HR)
DPI (Diseñar el procesador de información)	—	32
EPI (Escribir el procesador de información)	DPI	40
DPA (Diseñar el paquete de análisis)	—	50
EPA (Escribir el paquete de análisis)	DPA	24
INT (Introducir el sistema)	EPI, EPA	120

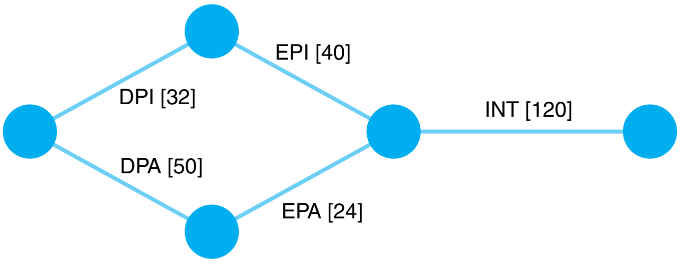


FIGURA 14.20
Lista de actividades y diagrama de red para el proyecto de análisis financiero

da tiempo de actividad (dentro de ciertos límites) e incurrir en el costo asociado. Claramente, la elección de los tiempos de actividad individuales afectará el tiempo de terminación del proyecto. La pregunta entonces es: "¿Qué tiempos de actividades deberán seleccionarse, a fin de que produzcan el tiempo deseado de terminación del proyecto a un costo mínimo?" Como respuesta a esta pregunta se presentará el método CPM, en el contexto de la creación de un paquete de análisis financiero por parte del Grupo de Análisis Operacional en Global.

PROYECTO DE ANÁLISIS FINANCIERO PARA MERCADOTECNIA AL MENUDEO

Además del traslado a Des Moines, Becky es responsable de un nuevo paquete de análisis financiero que se utilizará en la sección de mercadotecnia al menudeo de Global. El programa se utiliza para evaluar los puntos de venta potenciales (estaciones de gasolina) en función de su localización y otras características. El diseño del sistema está completo. La programación en computadora todavía está por hacerse, y el paquete debe ser introducido a la sección de mercadotecnia al menudeo.

La figura 14.20 muestra la lista de actividades y el diagrama de red de este proyecto. El tiempo que se muestra es denominado **tiempo normal**. Esto corresponde al tiempo máximo mostrado en la figura 14.19. Recuerde que aquí estamos suponiendo que los tiempos de las actividades pueden estimarse con gran precisión, y por lo tanto el "tiempo normal" es un valor conocido. De la figura 14.20 queda claro que la ruta más larga por la red es DPA-EPA-INT, y por lo tanto, ésta es la ruta crítica. El tiempo de terminación más próximo del proyecto es de 194 horas.

TABLA 14.4 Datos tiempo-costo del proyecto de análisis financiero

ACTIVIDAD	(1) TIEMPO NORMAL	(2) COSTO NORMAL ($)	(3) TIEMPO DE RECORTE	(4) COSTO DE RECORTE ($)	(5) HORAS DE RECORTE MÁXIMAS	(6) COSTO POR HORA DE RECORTE ($)
DPI	32	640	20	800	12	13.33
EPI	40	480	30	720	10	24.00
DPA	50	1000	30	1200	20	10.00
EPA	24	288	15	360	9	8.00
INT	120	4800	70	5600	50	16.00
TOTAL		$7208				

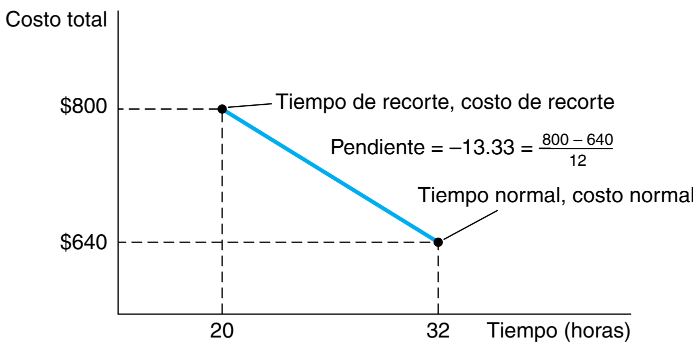


FIGURA 14.21
Función de equilibrio tiempo-costo para el DPI

Datos de actividad requerida El sistema CPM está basado en cuatro elementos de datos de entrada por cada actividad:

1. **Tiempo normal:** el tiempo máximo para la actividad.
2. **Costo normal:** el costo requerido para lograr el tiempo normal.
3. **Tiempo de recorte:** el tiempo mínimo para la actividad.
4. **Costo de recorte:** el costo requerido para lograr el tiempo de recorte.

Estos datos para el proyecto de análisis financiero se presentan en las primeras cuatro columnas de la tabla 14.4. La quinta columna muestra las horas de recorte máximas, definidas por

$$\text{horas de recorte máximas} = \text{tiempo normal} - \text{tiempo de recorte}$$

La figura 14.21 muestra cómo se utilizan estos datos para crear la función de equilibrio tiempo-costo para la actividad DPI, que es: diseñar el procesador de información.

Observe que, de acuerdo con la tabla 14.4, el uso de todos los tiempos normales lleva a un costo total del proyecto de $7,208. También observe que la última columna de la tabla 14.4 muestra cuánto cuesta por hora (como se calculó en la figura 14.21) reducir cada actividad a menos de su tiempo normal. En la jerga del CPM, el proceso de reducir el tiempo de actividad se llama **recorte**. Por ejemplo, la administración podría escoger tener terminado el DPI en 31 horas, en vez de las 32 horas normales, mediante un costo marginal de $13.33. El tiempo normal de 32 horas cuesta $640, y un tiempo de 31 horas costaría por lo tanto 640 + 13.33 = $653.33.

RECORTE DEL PROYECTO

Hemos observado que, utilizando sólo el tiempo normal para cada actividad, el tiempo de terminación más próximo de este proyecto es de 194 horas (a lo largo de la ruta crítica DPA-EPA-INT). La administración está ahora en posición de determinar el método de costo mínimo para reducir este tiempo a niveles específicos. Para reducir el tiempo de proyecto a 193,

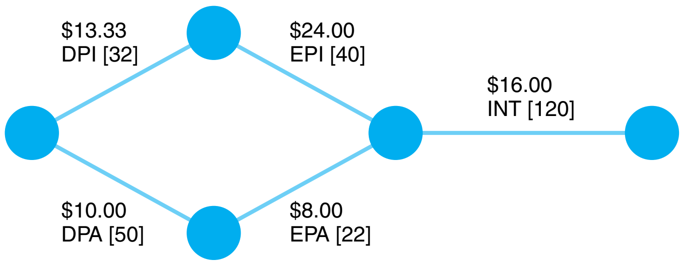


FIGURA 14.22

Costos marginales de recorte del proyecto de análisis financiero

Becky recortaría una hora a una actividad en la ruta crítica. Dado que cuesta menos por hora recortar el EPA que cualquiera de las otras dos actividades en la ruta crítica ($8 < $10 y $8 < $16), Becky primero recortaría una hora al EPA. Esta decisión da como resultado un tiempo de proyecto de 193 horas, una ruta crítica de DPA-EPA-INT y un costo total de proyecto de $7,216 (= $7,208 + $8). Si Becky quiere lograr un tiempo de 192 horas, se aplicaría exactamente el mismo análisis, y recortaría otra hora al EPA, incurriéndose así en un costo marginal de $8.

Si Becky ha recortado dos horas al EPA para lograr un tiempo de proyecto de 192 horas, y todavía quiere recortar otra hora al proyecto (para lograr 191), el análisis se hace más complicado. La figura 14.22 muestra la situación. La cifra en dólares en el diagrama es el costo marginal de recorte. Observe que ahora hay dos rutas críticas, DPI-EPI-INT y DPA-EPA-INT, y que ambas requieren 192 horas. Recortando una hora a una de las cuatro actividades (DPI, EPI, DPA o EPA) se acortaría una ruta a 191 horas, pero todavía se mantendría en 192 el tiempo del proyecto, debido a que aún habría una ruta crítica de 192 horas. Un tiempo de 191 horas se lograría sólo recortando actividades de ambas rutas. Si Becky recortara una hora en DPI y en EPA reduciría ambas rutas a 191 horas, y le costaría $13.33 + $8.00 = $21.33. De manera alterna, se podría recortar INT en una hora a un costo de $16.00. ¿Puede usted detectar alguna otra alternativa a considerar?

Aunque en cualquier red CPM es posible hacer este tipo de análisis de costo marginal, está claro que en una red complicada sería difícil y tedioso llevarlo a cabo. Esta consideración nos lleva a una formulación de programación lineal para el problema.

UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

El problema de obtener un tiempo de proyecto específico a un costo mínimo puede formularse como un problema de programación lineal. La figura 14.23 muestra la formulación de hoja de cálculo y la solución del problema de análisis financiero (GLOBFIN.XLS) con un límite de 184 horas en el tiempo de proyecto. Para comprender esta formulación, sea que

$$\text{HRAEPI} = \text{horas recortadas en la actividad EPI}$$

$$\text{TIPEPI} = \text{tiempo de inicio más próximo para la actividad EPI}$$

$$\text{TTPINT} = \text{tiempo de terminación más próximo para la actividad INT}$$

Las otras variables de decisión siguen este mismo patrón. A partir de estas definiciones se deduce que

1. La función objetivo es el costo total de recortar la red. Éste es el objetivo apropiado. El costo de terminar el proyecto en el tiempo normal ya está determinado. Usted puede considerar que el problema de la administración consiste en decidir cuánto (y dónde) recortar para obtener el tiempo de terminación más próximo deseado con el costo adicional mínimo.

2. Las restricciones en las celdas B9:D12 establecen límites para el tiempo de inicio más próximo para las actividades EPI, EPA e INT. Por ejemplo, si se vuelve a escribir la primera restricción (TIPEPI), cuya fórmula está en B9:D9, nos da

$$\text{TIPEPI} \geq 32 - \text{HRAEPI}$$

Observamos que, puesto que 32 es el tiempo normal para DPI y HRADPI es la cantidad que se recorta a DPI, el lado derecho es el tiempo que tomará la actividad DPI después de haber sido recortada. Por lo tanto, esta restricción determina que el tiempo de inicio más próximo para EPI debe ser $\geq$ el tiempo de actividad modificado de DPI. Ya que DPI es *el único* predecesor de EPI, B11 = =I2+C2-G2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		HRADPI	HRAEPI	HRADPA	HRAEPA	HRAINT	TIPEPI	TIPEPA	TIPINT	TTPINT
2	Monto	0	0	0	2	8	32	50	72	184
3	Costo por unidad	$ 13.33	$ 24.00	$ 10.00	$ 8.00	$ 16.00				
4	Tiempo máximo de recorte	12	10	20	9	50				
5										
6	Costo total	144								
7										
8	*Restricciones*									
9	Tiempo de inicio más próximo EPI	32	>=	32						
10	Tiempo de inicio más próximo EPA	50	>=	50						
11	Tiempo de inicio más próximo INT(EPI)	40	>=	40						
12	Tiempo de inicio más próximo INT(EPA)	24	>=	24						
13	Definición de TTPINT	120	=	120						
14	Tiempo de terminación más próximo; meta para INT	184	<=	184						
15										

Celda	Fórmula	Cópiese a
B6	=SUMAPRODUCTO(B2:F2,B3:F3)	—
B9	=B2+G2	—
B10	=H2+D2	—
B11	=I2+C2−G2	—
B12	=I2+E2−H2	—
B13	=J2+F2−I2	—
B14	=J2	—

FIGURA 14.23

Solución de programación lineal del problema de análisis financiero

sabemos que el tiempo de inicio más próximo para EPI es exactamente este tiempo de actividad modificado de DPI. Usted por lo tanto esperará ver

$$\text{TIPEPI} = 32 - \text{HRADPI}$$

Se utiliza una restricción $\geq$ en vez de una restricción $=$ porque, en general, podría haber varias rutas que lleven a un nodo, y el tiempo de inicio más próximo de una actividad que sale de ese nodo está determinado por la ruta que llega con el mayor tiempo. Esto está ilustrado por las dos restricciones para TIPINT. Reescribiendo estas restricciones obtenemos

$$\text{Celdas B11:D11} \rightarrow \text{TIPINT} \geq 40 - \text{HRAEPI} + \text{TIPEPI}$$
$$\text{Celdas B12:D12} \rightarrow \text{TIPINT} \geq 24 - \text{HRAEPA} + \text{TIPEPA}$$

La primera restricción indica que INT no puede comenzar hasta que EPI esté terminada, y la segunda hace una indicación similar para EPA. A menudo se dará el caso de que sólo una de estas restricciones estará activa en una solución óptima.

3. Las celdas B13:D13 contienen la definición del tiempo de terminación más próximo para la actividad INT:

$$\text{TTPINT} = \text{TIPINT} + \underbrace{120 - \text{HRAINT}}_{\substack{\text{tiempo de actividad de} \\ \text{INT después del recorte}}}$$

4. La última restricción (celdas B14:D14) establece un límite superior en el tiempo de proyecto que queremos alcanzar. Esta restricción depende del hecho de que el tiempo de terminación de la actividad INT determina el tiempo de terminación del proyecto total. En general, se requeriría de una restricción similar para cada una de las actividades que lleguen al nodo terminal. Aquí sólo tenemos una actividad de ese tipo, que es precisamente INT.

5. Por último, necesitamos agregar algunas restricciones en forma directa en el cuadro de diálogo Solver que limiten el monto de recorte para cada actividad. El límite está dado originalmente en la columna 5 de la tabla 14.4, "Horas de recorte máximas". Para Solver, solamente indicamos que B2:F2 $<=$ B4:F4.

La solución en la figura 14.23 muestra que EPA debe ser recortada dos horas e INT ocho horas para lograr una reducción a mínimo costo de 10 horas en el tiempo de terminación del proyecto (es decir, el valor óptimo de TTPINT es 184, y éste es el tiempo de terminación del proyecto). Sin embargo, como es usual en los resultados de programación lineal, esto es sólo una pequeña parte de la información disponible. Por ejemplo, la figura 14.24 nos muestra que costará \$16 recortar una hora adicional a la red (precio sombreado en " Tiempo de terminación más

Microsoft Excel 8.0 a Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [globfin.xls]184 hrs
Informe creado: 3/14/97 10:08:10 a.m.

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Reducción permisible
$B$2	Monto HRADPI	0	5.33	13.33	1E+30	5.33
$C$2	Monto HRAEPI	0	16	24	1E+30	16
$D$2	Monto HRADPA	0	2	10	1E+30	2
$E$2	Monto HRAEPA	2	0	8	2	5.33
$F$2	Monto HRAINT	8	0	16	5.33	8
$G$2	Monto TIPEPI	32	0	0	5.33	8
$H$2	Monto TIPEPA	50	0	0	2	8
$I$2	Monto TIPINT	72	0	0	5.33	8
$J$2	Monto TTPINT	184	0	0	16	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Precio sombra	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Reducción permisible
$B$9	Tiempo de inicio más próximo EPI HRADPI	32	8	32	2	7
$B$10	Tiempo de inicio más próximo EPA HRADPI	50	8	50	7	2
$B$11	Tiempo de inicio más próximo INT(EPI) HRADPI	40	8	40	2	7
$B$12	Tiempo de inicio más próximo INT(EPA) HRADPI	24	8	24	7	2
$B$13	Definición de TTPINT HRADPI	120	16	120	42	8
$B$14	Tiempo de terminación más próximo; meta para INT HRADPI	184	-16	184	8	42

FIGURA 14.24

Informe de sensibilidad para el problema de análisis financiero

próximo; meta para INT”). Los rangos del lado derecho muestran que este costo de $16 por hora se sostienen durante un decremento de otras 42 horas. En este problema simple usted puede ver que este tipo de información de sensibilidad en programación lineal puede ser una guía útil para la administración en su intento por controlar el avance de grandes proyectos.

Como conclusión de esta sección, recordaremos la sexta de las preguntas formuladas en la sección 14.1: “¿Cómo pueden concentrarse más eficientemente los recursos en actividades, a fin de acelerar la terminación del proyecto?” En esta sección hemos visto que en un contexto donde el tiempo y el costo están adecuadamente definidos, como en el modelo CPM, el *recorte del proyecto* permite a la administración responder esta pregunta.

Ahora procederemos a analizar la última pregunta formulada en la sección 14.1: “¿Qué control se debe ejercer en el flujo de gastos para las diversas actividades a lo largo del proyecto, a fin de que el presupuesto general se pueda cumplir?”

14.7 ADMINISTRACIÓN DEL COSTO DEL PROYECTO: PERT/COSTO

Lo atractivo de un proyecto depende generalmente de sus ingresos y costos totales. (Excepto que, si el proyecto es de larga duración, pudiera ser necesario tomar en cuenta el valor del dinero a través del tiempo, a fin de expresar costos y/o rendimientos en dólares al momento presente.) Una vez que se ha seleccionado un proyecto, una efectiva administración de los costos incluye dos funciones importantes: planeación y control.

PLANEACIÓN DE LOS COSTOS PARA EL PROYECTO DE TARJETAS DE CRÉDITO: EL SISTEMA PERT/COSTO

Los grandes proyectos pueden influir de manera importante en la situación financiera de una empresa. La necesidad de pagar las diversas actividades crea una demanda tanto en el presupuesto general de la empresa como en el flujo de efectivo diario. Obviamente, los tiempos en los cuales las actividades están programadas determinan cuándo ocurren las demandas sobre el presupuesto. Éste es un buen ejemplo de cómo los modelos de las ciencias de la administración pueden interconec-

CÁPSULA DE APLICACIÓN — Administración de proyectos en la Guerra del Golfo Pérsico

El 27 de febrero de 1991, el presidente Bush declaró: "¡Dijimos que la agresión no se toleraría, y la agresión no fue tolerada!" El conflicto armado en el escenario de operaciones en Kuwait finalizó como una de las victorias militares más resonantes de la historia. ¿Qué función jugó la administración de proyectos en la exitosa ejecución de esta operación militar, y particularmente en esas fatídicas 100 horas de lucha en tierra?

El general Schwarzkopf ordenó que la comunidad encargada de la logística mantuviera una provisión de 60 días de material a la mano. Esto incluía provisiones médicas, combustible diesel, gasolina para motores, y así sucesivamente. Examinando tan sólo las provisiones médicas, la mejor estimación inicial fue de 26,352 toneladas. Después la cifra fue modificada, con base en los resultados específicos de las operaciones en Kuwait. Por ejemplo, la cantidad de solución salina para rehidratación del personal fue mayor a la requerida en Europa (debido al clima árido). También resultaron insuficientes las unidades de refrigeración disponibles para almacenar sangre de manera adecuada. Se proyectó que las fuerzas terrestres de Estados Unidos utilizarían 1,600,000 galones de combustible diesel y 180,000 galones de gasolina para motor al día, pero cuando las fuerzas pasaran a la ofensiva estas cifras se duplicarían. Las unidades de combate usualmente sólo llevan provisiones para uno o dos días, y por lo tanto dependen mucho de una fuente continua de nuevas provisiones. La unidad de combate está especialmente diseñada para tener movilidad y supervivencia en el campo de batalla, no para almacenar extraordinarias cantidades de provisiones.

Uno de los resultados más exitosos fue una técnica de reabastecimiento, que redujo a la mitad (de seis a tres horas) el tiempo de reabastecimiento de una brigada pesada, y permitió que tanto la unidad de aprovisionamiento como la unidad de combate se estuvieran moviendo durante actividades de reabastecimiento. La minimización del tiempo de reabastecimiento tiene tres ventajas principales. Primero, incrementa la seguridad. (Mientras los vehículos están reunidos para su reabastecimiento, están más sujetos a detección por parte del enemigo.) Segundo, los vehículos de aprovisionamiento pueden hacer más viajes de ida y vuelta en un tiempo determinado. Tercero, el comandante táctico tiene más flexibilidad al planear debido a que las actividades de reabastecimiento toman menos tiempo.

Un dicho famoso en el ejército de Estados Unidos señala que "los tácticos ganan las batallas, pero los de logística son los que ganan las guerras". De todas formas, la exitosa ejecución de los numerosos detalles de un proyecto tan complejo como "Tormenta del Desierto" es una parte muy importante que permitió que la victoria fuera tan decisiva (véase Staats).

tarse. Primero, un modelo de red PERT se realiza para el traslado de Global Oil, después quizás se utiliza un modelo de programación lineal para recortar el proyecto a un marco temporal apropiado, y finalmente puede hacerse un modelo financiero de hoja de cálculo como ayuda en la planeación financiera. Entonces, el resultado de cada modelo se convierte en la entrada del siguiente, siendo por lo tanto fundamental revisar en forma constante la precisión de los resultados del modelo.

Es importante que una empresa sea capaz de anticipar las demandas presupuestarias, a fin de poder manejarlas económica y efectivamente. El sistema **PERT/Costo** está diseñado para ayudar a la administración a anticipar dichas demandas de una forma clara y consistente. PERT/Costo es esencialmente un método alternativo para la contabilidad de costos. Por lo general, los sistemas de contabilidad de costos están organizados con base en centros de costos (por ejemplo, por departamentos). El sistema PERT/Costo está organizado con base en un proyecto donde los elementos básicos de control son las actividades.

A fin de aplicar el sistema PERT/Costo al proyecto del traslado de la operación de tarjetas de crédito a Des Moines, ahora Becky debe completar la tabla 14.2 llenando la última columna, llamada "Recursos". Es una estimación del costo total "esperado" para completar cada actividad. En la tabla 14.5 se presentan estos costos de actividad esperados, junto con los tiempos de actividad esperados, el tiempo de inicio más próximo y el tiempo de inicio más lejano para el proyecto redefinido de las tarjetas de crédito. Los datos de inicio más próximo y más lejano fueron tomados de la solución de la hoja de cálculo, figura 14.14.

El objetivo del sistema PERT/Costo es elaborar una gráfica de las demandas presupuestarias con el transcurso del tiempo. Esto hace necesario saber cómo se gastarán los fondos durante la vida de la actividad. Por ejemplo, las demandas presupuestarias son diferentes si los $32,000 de la actividad E, construir el interior, se entregan al principio del periodo de ocho semanas de la actividad, o al final de éste. PERT/Costo hace la suposición de que los gastos ocurren uniformemente durante toda la vida de la actividad; esto es, para E ocurre una demanda presupuestaria de $4,000 durante cada una de las ocho semanas. La tabla 14.6 muestra las demandas presupuestarias en función del tiempo, si es que todas las actividades comenzaran en su *tiempo de inicio más próximo*. Esta tabla fue construida asignando una fila a cada actividad y registrando las demandas de presupuesto para esa actividad en la columna apropiada (semana), según fueran determinadas por el tiempo de inicio más próximo. Al formar esta tabla, los "tiempos de inicio más próximo" se interpretan como si se refirieran al final de la semana apropiada. Por lo tanto, la actividad B comienza en el momento 0 (el final de la semana 0 = comienzo de la semana 1) y requiere cinco semanas para terminarse. Esto significa que la actividad C, como se muestra en la tabla 14.6, no puede comenzar hasta el final de la semana 5. Dura tres semanas y hace una demanda presupuestaria de $600 a la semana. Esta información está resumida en la tercera hilera de la tabla 14.6.

TABLA 14.5 Necesidades de recursos para el producto rediseñado

ACTIVIDAD	TIEMPO ESPERADO	TIEMPO DE INICIO MÁS PRÓXIMO	TIEMPO DE INICIO MÁS LEJANO	TOTAL DE RECURSOS REQUERIDOS ($)
A	3	0	5	2,100
B	5	0	0	5,000
C	3	5	5	1,800
D	4	8	8	4,800
E	8	12	12	32,000
F	2	8	11	1,000
G	4	10	13	2,800
H	2	10	18	7,000
I	5	5	15	4,000
J	3	14	17	30,000
K	3	10	14	1,500
Total				$92,000

El costo semanal total está determinado por la suma de la columna, es decir, sumando las demandas presupuestarias de todas las actividades durante la semana. Por ejemplo, la demanda presupuestaria durante la decimotercera semana es de $5,200, es decir la suma de $4,000 de E, $700 de G y $500 de K.

El costo acumulado del proyecto se encuentra precisamente acumulando los costos semanales desde el principio del proyecto. Por ejemplo, observe que el costo total es $1,700 para cada una de las tres primeras semanas. El costo total del proyecto después de tres semanas es por lo tanto de $5,100. El costo total al final del proyecto (semana 20) debe ser, por supuesto, el costo global de todo el proyecto.

La tabla 14.17 crea el perfil de las demandas presupuestarias a lo largo del tiempo, en el caso de que cada actividad comience en su *tiempo de inicio más lejano*.

La información en las tablas 14.6 y 14.7 aparece combinada en la figura 14.25. La línea superior es una gráfica de los costos del tiempo de inicio más próximo de la tabla 14.6, y la línea inferior es una gráfica de los costos de los tiempos de inicio más lejanos de la tabla 14.7. El área sombreada entre las líneas muestra el área de posibles presupuestos acumulados para los costos totales del proyecto, si el proyecto es terminado a tiempo. El hecho de que las demandas reales al presupuesto deben quedar dentro de la envoltura creada por los tiempos de inicio más próximo y más lejano facilita a la administración anticipar sus gastos acumulados. Por ejemplo, Becky puede ver que, para el final de la semana 12, Global Oil tendrá que haber gastado entre $14,200 y $28,100.

Hemos avanzado paso a paso a través de los cálculos del presupuesto en el sistema de planeación PERT/Costo, ya que es un ejercicio útil desde el punto de vista pedagógico. En la práctica, estos cálculos por lo general se hacen en computadora. La figura 14.26 muestra el resultado de computadora correspondiente a las tablas 14.6 y 14.7.

CONTROL DE LOS COSTOS DEL PROYECTO

La idea que fundamenta cualquier sistema de control es comparar el *desempeño real* con el *desempeño planeado* y, si fuera necesario, llevar a cabo acciones correctivas. Por ejemplo, el termostato de su casa es un sistema de control, que opera continuamente en el tiempo comparando la temperatura real con la temperatura deseada y activando o desactivando la calefacción (aire acondicionado) según sea necesario.

El sistema PERT/Costo compara los costos reales y los costos presupuestados del proyecto a intervalos regulares, de manera que la administración tenga una indicación inmediata si el proyecto no se está desempeñando de acuerdo con el plan. La administración estará entonces en posición de tomar las medidas apropiadas.

TABLA 14.6 Demandas presupuestarias: tiempos de inicio más próximos

	COSTO POR SEMANA ($)																			
ACTIVIDAD	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	700	700	700																	
B	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000															
C						600	600	600												
D									1,200	1,200	1,200	1,200								
E													4,000	4,000	4,000	4,000	4,000	4,000	4,000	4,000
F									500	500										
G											700	700	700	700						
H											3,500	3,500								
I						800	800	800	800	800										
J															10,000	10,000	10,000			
K											500	500	500							
Costo semanal	1,700	1,700	1,700	1,000	1,000	1,400	1,400	1,400	2,500	2,500	5,900	5,900	5,200	4,700	14,000	14,000	14,000	4,000	4,000	4,000
Costo acumulado del proyecto	1,700	3,400	5,100	6,100	7,100	8,500	9,900	11,300	13,800	16,300	22,200	28,100	33,500	38,000	52,000	66,000	80,000	84,000	88,000	92,000

TABLA 14.7 Demandas presupuestarias: tiempos de inicio más lejanos

	COSTO POR SEMANA ($)																			
ACTIVIDAD	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A						700	700	700												
B	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000															
C						600	600	600												
D									1,200	1,200	1,200	1,200								
E													4,000	4,000	4,000	4,000	4,000	4,000	4,000	4,000
F												500	500							
G														700	700	700	700			
H																			3,500	3,500
I																800	800	800	800	800
J																		10,000	10,000	10,000
K															500	500	500			
Costo semanal	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,300	1,300	1,300	1,200	1,200	1,200	1,700	4,500	4,700	5,200	6,000	6,000	14,800	18,300	18,300
Costo acumulado del proyecto	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000	6,300	7,600	8,900	10,100	11,300	12,500	14,200	18,700	23,400	28,600	34,600	40,600	55,400	73,700	92,000

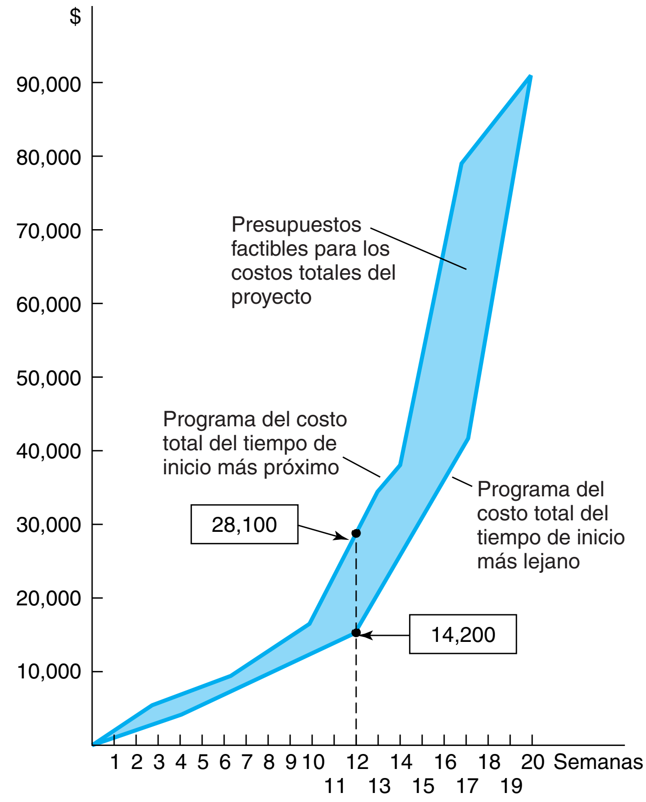


FIGURA 14.25

Demandas presupuestarias acumuladas contra el tiempo

PERFIL DEL USO DE LOS RECURSOS DE ACUERDO CON LOS TIEMPOS DE INICIO MÁS PRÓXIMOS

Intervalo de tiempo		Uso de los recursos	
Del final de la semana	Al final de la semana	Semanal	Acumulado
0.00→	3.00	1700.00	5100.00
3.00→	5.00	1000.00	7100.00
5.00→	8.00	1400.00	11300.00
8.00→	10.00	2500.00	16300.00
10.00→	12.00	5900.00	28100.00
12.00→	13.00	5200.00	33300.00
13.00→	14.00	4700.00	38000.00
14.00→	17.00	14000.00	80000.00
17.00→	20.00	4000.00	92000.00

PERFIL DEL USO DE LOS RECURSOS DE ACUERDO CON LOS TIEMPOS DE INICIO MÁS LEJANOS

Intervalo de tiempo		Uso de los recursos	
Del final de la semana	Al final de la semana	Semanal	Acumulado
0.00→	5.00	1000.00	5000.00
5.00→	8.00	1300.00	8900.00
8.00→	11.00	1200.00	12500.00
11.00→	12.00	1700.00	14200.00
12.00→	13.00	4500.00	18700.00
13.00→	14.00	4700.00	23400.00
14.00→	15.00	5200.00	28600.00
15.00→	17.00	6000.00	40600.00
17.00→	18.00	14800.00	55400.00
18.00→	20.00	18300.00	92000.00

FIGURA 14.26

Análisis de computadora de las demandas presupuestarias

TABLA 14.8 Costos del proyecto después de 11 semanas

ACTIVIDAD	(1) PERCENTAJE COMPLETO	(2) PRESUPUESTO ($)	(3) $[(1)/100] \times (2)$ COSTO PRESUPUESTADO A LA FECHA ($)	(4) COSTO REAL A LA FECHA ($)	(5) (4)−(3) EXCEDENTES DE COSTO A LA FECHA ($)
A	100	2,100	2,100	2,300	200
B	100	5,000	5,000	4,900	(100)
C	100	1,800	1,800	1,800	0
D	75	4,800	3,600	4,600	1,000
E	0	32,000	0	0	0
F	100	1,000	1,000	1,200	200
G	25	2,800	700	1,400	700
H	50	7,000	3,500	5,400	1,900
I	20	4,000	800	500	(300)
J	0	30,000	0	0	0
K	0	1,500	0	0	0
Total		92,000	18,500	22,100	3,600

El informe de control PERT/Costo La tabla 14.8 contiene un *informe de control* PERT/Costo preparado 11 semanas después del comienzo del proyecto redefinido para trasladar la operación de tarjetas de crédito a Des Moines. Los encabezados de las columnas indican cómo está preparado el informe. La columna (4), el costo real, y la columna (3), el costo presupuestado, proveen la información básica utilizada en la función de control. El costo real, columna (4), se explica a sí misma. *El costo presupuestado, columna (3), se calcula sobre la hipótesis de que el porcentaje del presupuesto utilizado por una actividad es igual al porcentaje terminado de la actividad.* Por lo tanto, cuando una actividad está terminada en 50%, su costo presupuestado es 50% del presupuesto completo (columna [2]) para esa actividad. Observe que si una actividad está terminada, la entrada en la columna (1) es 100, lo cual significa que la entrada en la columna (3) será igual a la entrada en la columna (2).

Considere, por ejemplo, la actividad A, "Seleccionar el sitio de oficinas". Podemos ver, de la columna (1) de la tabla 14.8, que esta actividad, para el final de la semana 11, está 100% completa. Por lo tanto, su costo presupuestado, columna (3), es igual a su presupuesto completo (columna [2]) de $2,100. Ya que el costo real es de $2,300, se ha excedido el costo por $200. Esta cantidad está registrada en la última columna. Una interpretación similar se aplica a la actividad I, "Hacer arreglos financieros". Está completa en 20% y tiene un presupuesto de $4,000; por lo tanto, su costo presupuestado es de $800 ($\$800 = 0.20 \times \$4000$). Ya que solamente se han gastado $500, hay un superávit presupuestal de $300. El paréntesis en la última columna indica superávit en el presupuesto.

En esta situación, ya que las actividades A y F ya están terminadas, sus excedentes sobre el presupuesto no pueden ser corregidos. Sin embargo, las actividades D, G y H, ninguna de las cuales está completa todavía, están mostrando excedentes considerables a la fecha, y estas actividades deben ser revisadas de inmediato. Este tipo de intervención administrativa periódica a menudo es necesaria para mantener el proyecto total dentro del presupuesto.

Problemas potenciales de aplicación Aunque PERT/Costo puede significar un procedimiento de control efectivo, es bueno estar consciente de posibles problemas de aplicación. Por ejemplo, el registro requerido de datos puede involucrar un esfuerzo considerable, especialmente cuando hay en proceso muchos proyectos con bastantes actividades. Es más, algunos costos, como los gastos generales, pueden ser comunes para varias actividades. La asignación de dichos costos comunes puede ser problemática. Finalmente, como fue mencionado al principio de la sección 14.7, el sistema PERT/Costo difiere en su organización de los sistemas típicos de contabilidad de costos. Para manejar un sistema PERT/Costo orientado a las actividades es necesario revisar en forma significativa la orientación del centro de costo departamental que es común. Dicho rediseño puede ser costoso tanto política como materialmente.

14.8 NOTAS SOBRE LA APLICACIÓN

Aproximadamente 40 años después de su invención, el concepto de la ruta crítica forma parte importante de la práctica actual. Casi siempre que se tenga un proyecto grande con muchas actividades interrelacionadas, se encontrará que está en uso un programa y un sistema de información basados en la red. Con el transcurso del tiempo, han ido desapareciendo las distinciones entre PERT y CPM. Las empresas han desarrollado sus propios modelos internos computarizados, que incorporan aquellas características de los sistemas PERT y CPM originales y que son importantes para su actividad específica. Desde hace ya varios años el EDS (Electronic Data System) ha estado utilizando AutoCAD (un programa automático de diseño) para dibujar gráficas PERT para los clientes. Los administradores encuentran que esta ayuda visual les facilita a ellos y a sus clientes el hecho de mantener los proyectos bajo control, a localizar rápidamente problemas posibles y saber que funciona como un buen dispositivo de comunicación. Las gráficas son impresas sobre varias páginas, con lo que se crea una gran "bandera" que puede ser colocada en la pared de la oficina.

Es común pensar en utilizar métodos de ruta crítica en grandes proyectos únicos (por ejemplo, el transbordador espacial de Estados Unidos). Sin embargo, los métodos pueden aplicarse, y de hecho se aplican, a actividades que ocurren a intervalos periódicos. Un buen ejemplo de dicha actividad es una revisión mayor de una draga excavadora en una mina de carbón particular. Este mantenimiento debe ser llevado a cabo siguiendo un programa razonablemente periódico, y es de máxima importancia porque cuando la draga excavadora no funciona, la mina tampoco funciona. La empresa puede utilizar, y utiliza, el diagrama de red del examen anterior para planear la revisión por venir. La red juega un papel importante al asegurar que todos aquellos involucrados comprendan los diversos pasos y su interrelación, así como asegurar que todas las piezas y materiales requeridos estén disponibles cuando se necesiten. Dada la rotación de personal y las fallas humanas, la red sirve como una forma conveniente para capturar las "experiencias". Las actividades asociadas con la revisión varían de vez en cuando, por lo que el diagrama deberá ser redefinido, pero la versión anterior por lo general es un buen punto de partida.

Para nuestra empresa que ha servido como ejemplo, la estimación de la variabilidad del tiempo no es parte importante en la creación de su red PERT-CPM. De hecho, se apoya en una sola mejor estimación, en vez de las tres que forman parte del método PERT. El elemento principal al desarrollar un plan económico para la revisión es la disponibilidad de trabajadores diestros (eléctricos, ingenieros, y así sucesivamente). Cada vez que se deba llevar a cabo una revisión, las tareas variarán en algún punto, y por lo tanto la demanda de trabajadores variará de un año a otro. Además, la oferta de trabajadores disponibles dentro de la empresa varía de una ocasión a otra dependiendo del nivel de otras actividades. Por lo general, la operación de planeación involucra la ejecución del modelo bajo una diversidad de hipótesis. Las alternativas pueden incluir empleados normales trabajando horas ordinarias, empleados normales doblando turno (es decir, trabajando dos turnos), trabajadores externos, y así sucesivamente. Dichos cálculos pueden dejar claro, por ejemplo, que vale la pena gastar $20,000 en tiempo extraordinario para electricistas, si ello pone la mina otra vez en operación un día antes.

La computadora ha tenido un importante impacto en el uso del CPM y del PERT. Grandes proyectos de construcción pueden requerir de 1,000 o más nodos. En los sesenta no era raro encontrar el diagrama de red de un proyecto semejante dispuesto durante el tiempo que tardaba el mismo en tres de las paredes de una habitación dedicada para este propósito. Cambios importantes en el plan eran una molestia mayor por sí mismos, y la comunicación entre los múltiples contratistas resultaba engorrosa. La computadora ha cambiado todo eso. El análisis ahora se lleva a cabo por computadora. Hay una gran variedad de *software* para microcomputadora (por ejemplo, Harvard Project Manager, InstaPlan, MacProject II, Microsoft's Project for Windows) que ayudarán en la administración de proyectos, combinando PERT y CPM con información presupuestaria y de control. Es un asunto bastante simple utilizar el *software* para trazar los cuadros (combinando de hecho actividades y eventos) y después conectarlos apuntando a las actividades que les preceden. El programa hace el resto (determinación de la ruta crítica, de los tiempos más próximos y más lejanos de inicio y de terminación). Múltiples ejecuciones que abarcan la vida del proyecto están a la orden del día. En las primeras fases es importante asegurar que los pedidos para los principales componentes serán colocados con suficiente anticipación. Los sistemas complicados (es decir, generadores, hornos, etc.) pueden tener un tiempo de entrega de varios años. Una actualización periódica basada en informes de los proveedores, permite a los administradores ver cuándo es necesario acelerar un pedido. La nueva información es integrada al modelo, y el programa es vuelto a ejecutar con una base semanal. Obviamente, la información obtenida de dichas ejecuciones influye en la asignación de recursos. Puede incluso afectar al diseño del proyecto. Si un informe de control de costos, más o menos como el que aparece en la tabla 14.8, indica rápidamente serios excedentes en costos, podrían rediseñadarse fracciones posteriores del proyecto. Por ejemplo, una empresa informó volver a trabajar el diseño de una planta de calefacción con base en una caldera en vez de dos, después de que el costo de excavación y piloteado se excedió mucho en comparación con el presupuesto. Este cambio permitió que la empresa terminara el proyecto a tiempo *y* dentro del presupuesto.

14.9 RESUMEN

Este capítulo se ocupó del papel que desempeñan el PERT y el CPM en la administración de proyectos. El concepto fundamental es representar el proyecto como una red. La sección 14.2 mostró cómo utilizar una lista de actividades para construir un diagrama de red para el proyecto, donde la lista de actividades identifica cada actividad del proyecto y a sus predecesores inmediatos. La sección 14.3 mostró cómo se utiliza el diagrama de red y los tiempos esperados de actividad para determinar la ruta crítica, que es la ruta más larga a través de la red. En el proceso, se definieron los términos *tiempo de inicio más próximo, tiempo de inicio más lejano, tiempo de terminación más próximo* y *tiempo de terminación más lejano*.

En la sección 14.4 se hizo una introducción sobre la noción de variabilidad en los tiempos de actividad. Se trataron dos temas principales: el sistema PERT para estimar tiempos y la probabilidad de que todas las actividades en la ruta crítica fueran terminadas para una fecha específica. El sistema PERT para estimar el tiempo se basa en la hipótesis de que el tiempo de actividad tiene una distribución beta. Utiliza estimaciones: optimista, más probable y pesimista del tiempo para deducir el tiempo esperado de actividad y la desviación estándar del tiempo de actividad.

A la administración le gustaría saber cuál es la probabilidad de que el proyecto en consideración estará terminado para una fecha específica. Si uno supone que los tiempos de actividad son independientes, y que la suma de los tiempos de actividad en la ruta crítica tiene una distribución normal, es un ejercicio simple calcular *la probabilidad de que la ruta crítica esté terminada para una fecha específica*. Ésta no es la probabilidad de que el proyecto quede terminado para una fecha específica, ya que el efecto de la aleatoriedad podría convertir una ruta supuestamente no crítica en ruta crítica. Sin embargo, nos da una estimación alta de la probabilidad de que el proyecto completo estará terminado para una fecha específica.

La sección 14.6 presentó el marco del CPM para analizar el problema de equilibrio tiempo-costo. La cantidad de tiempo que toma una actividad está determinada por el nivel de recursos dedicados a esa actividad. El modelo en esta sección emplea la noción del recorte de proyectos. El modelo está diseñado para ayudar a la administración a seleccionar un tiempo de terminación para cada actividad, de forma tal que se cumpla la fecha de terminación específica del proyecto completo a un costo mínimo. La entrada básica para el modelo es un conjunto de funciones, una por cada actividad. Cada función representa el costo de la actividad como una función lineal del tiempo de actividad, dentro de límites específicos en el tiempo. Esto datos se utilizan entonces ya sea en un análisis de costo marginal o en un modelo de programación lineal, para seleccionar los mejores tiempos de las actividades.

La sección 14.7 consideró la administración de costos del proyecto a través del sistema PERT/Costo. Trató tanto con la planeación de los costos como con el modelo de control de los mismos. El modelo de planeación produce una gráfica de las demandas presupuestarias posibles como una función del tiempo. Esta gráfica está elaborada a partir de los perfiles de uso de los recursos con base en los tiempos de inicio más próximo y más lejano.

El modelo de control de los costos de proyecto es un sistema para comparar los costos reales con los presupuestados. El modelo de costo presupuestado utiliza el supuesto de que para actividades parcialmente completas, el costo presupuestado es igual al presupuesto para la actividad completa, multiplicado por la proporción de la actividad ya terminada. El modelo permite a la administración reconocer excedentes de costo en varias actividades, antes de que éstas sean terminadas.

Términos clave

Actividad. Un trabajo que debe ser terminado como parte del proyecto.

Actividad ficticia. Una actividad imaginaria, que no requiere tiempo y es utilizada para mantener las relaciones de precedencia adecuadas en un diagrama de red PERT utilizando AA.

Actividades críticas. Actividades en la ruta crítica.

Costo de recorte. El costo requerido para lograr el tiempo de recorte.

Costo normal. El costo requerido para lograr el tiempo normal.

CPM. Siglas de Critical Path Method (Método de la ruta crítica), un método para programación y control de proyectos.

Diagrama de red. Método gráfico para representar un proyecto con nodos y arcos.

Distribución beta. Una distribución de probabilidad utilizada para modelar los tiempos de actividad en PERT.

Evento. La terminación de todas las actividades que llevan a un nodo en una red PERT utilizando AA.

Holgura. El tiempo que una actividad puede retrasarse respecto a su tiempo de inicio más próximo sin retrasar la terminación de todo el proyecto.

Lista de actividades. Una lista de los trabajos en un proyecto con sus predecesores inmediatos, tiempos esperados y recursos necesarios.

Nodo. Un círculo en una red PERT, que indica la terminación de ciertas actividades y el inicio de otras (en AA) o la actividad en sí (AN).

Paso hacia adelante. El proceso de moverse a lo largo de la red desde el principio hasta el final, calculando el tiempo de inicio más próximo y el tiempo de terminación más próximo de cada actividad.

Paso hacia atrás. El proceso de moverse hacia atrás a lo largo de la red desde el final hacia el principio, calculando el tiempo de terminación más lejano y luego el tiempo de inicio más lejano de cada actividad.

PERT. Siglas correspondientes a Program Evaluation and Review Technique (Técnica de evaluación y revisión de programas), un método para programación y control de proyectos.

PERT/Costo. Un sistema para determinar patrones factibles en el flujo de efectivo durante un proyecto.

Predecesores inmediatos. Aquellas actividades que deben ser terminadas inmediatamente antes del comienzo de la actividad en cuestión.

Rama. Línea en una red PERT que indica una actividad en los arcos (AA) o la precedencia de una actividad en los nodos (AN). También se le llama *arco*.

Recorte. Un término en CPM para describir el proceso de reducir el tiempo que se requiere para completar una actividad.

Ruta. Una secuencia de actividades que van del nodo de inicio hasta el nodo de terminación de una red.

Ruta crítica. Una secuencia de actividades que determinan la ruta más larga a través de una red, la cual proporciona el tiempo mínimo en el que todo un proyecto puede ser concluido.

Tiempo de inicio más lejano. En una red PERT, el último momento en el cual una actividad puede comenzar, sin retrasar la terminación de todo el proyecto.

Tiempo de inicio más próximo. En una red PERT, el momento más próximo en el cual una actividad puede comenzar.

Tiempo de recorte. En CPM, el tiempo mínimo posible para terminar la actividad, correspondiente a la concentración máxima de los recursos.

Tiempo de terminación más lejano. El momento más lejano en el cual se puede terminar una actividad sin retrasar la terminación de todo el proyecto.

Tiempo de terminación más próximo. En una red PERT, el momento más próximo en el que una actividad puede terminarse.

Tiempo más probable. El tiempo requerido para terminar una actividad bajo circunstancias normales.

Tiempo normal. En CPM, el tiempo máximo para terminar la actividad, correspondiente al uso mínimo de los recursos.

Tiempo optimista. El tiempo requerido para completar una actividad si todo va a la perfección.

Tiempo pesimista. El tiempo requerido para terminar una actividad bajo las condiciones más desfavorables.

Ejercicios de repaso

Verdadero-Falso

1. **V F** En un diagrama de red PERT que utiliza AA, cada actividad está representada por un círculo llamado nodo.
2. **V F** El término *evento* se utiliza para referirse a nodos en una red PERT que utiliza AA.
3. **V F** Para una correcta representación de red en la siguiente lista de actividades se requiere una actividad ficticia.

ACTIVIDAD	PREDECESORES INMEDIATOS
1	—
2	—
3	1
4	2, 3
5	2
6	5

4. **V F** El tiempo de terminación más próximo para una actividad depende del tiempo de terminación más próximo del proyecto.
5. **V F** El tiempo de terminación más lejano para una actividad depende del tiempo de terminación más próximo del proyecto.
6. **V F** Todas las actividades en la ruta crítica tienen su tiempo de terminación más lejano igual a su tiempo de inicio más próximo.
7. **V F** Un análisis estratégico de una red PERT se concentra en la distribución de recursos para reducir el tiempo en la ruta crítica.
8. **V F** La probabilidad de terminar el proyecto para el tiempo T es igual a la probabilidad de terminar la ruta crítica para el tiempo T.
9. **V F** La desviación estándar de un tiempo de actividad se estima como $(b - a)/6$, donde b es el tiempo pesimista y a es el optimista.
10. **V F** El método CPM para el equilibrio tiempo-costo supone que el costo es una función lineal del tiempo.
11. **V F** La formulación en programación lineal del problema de recorte de la red minimiza el costo total del recorte sujeto a un límite superior de duración del proyecto.
12. **V F** En el modelo PERT/Costo, el costo total programado para el tiempo de inicio más próximo es menor que o igual al costo programado del tiempo de inicio más lejano.
13. **V F** Las variabilidades en tiempo, que llevan a un tiempo total mayor que el esperado en la ruta crítica, siempre aumentarán el tiempo de terminación del proyecto.
14. **V F** Si una actividad no crítica es retrasada más allá de su tiempo de holgura, sin cambiar alguno de los demás factores, la fecha de terminación del proyecto será extendida.
15. **V F** Las gráficas de Gantt proveen información útil sobre el predecesor inmediato.

Opción múltiple

16. De todas las rutas en la red, la ruta crítica
    - **a.** tiene el tiempo esperado máximo
    - **b.** tiene el tiempo esperado mínimo
    - **c.** tiene el tiempo real máximo
    - **d.** tiene el tiempo real mínimo
17. El tiempo de inicio más próximo (TIP) para una actividad que abandona el nodo C (en el método AA)
    - **a.** es el máximo de los tiempos de terminación más próximos para todas las actividades que llegan al nodo C.
    - **b.** es igual al tiempo de terminación más próximo para la misma actividad, menos su tiempo esperado de actividad
    - **c.** depende de todas las rutas que van desde el principio hasta el nodo C.
    - **d.** todo lo anterior
18. El tiempo de terminación más lejano (TTL) para una actividad que entra al nodo H (en el método AA)
    - **a.** iguala el máximo de los tiempos de inicio más lejanos de todas las actividades que abandonan el nodo H
    - **b.** depende del tiempo de terminación más lejano del proyecto
    - **c.** es igual al tiempo de inicio más lejano menos el tiempo de dicha actividad
    - **d.** nada de lo anterior
19. La holgura para la actividad G
    - **a.** es igual al TTL para G − TIL para G
    - **b.** es igual al TTP para G − TIP para G
    - **c.** es igual al TIL para G − TIP para G
    - **d.** nada de lo anterior
20. La estimación de los tiempos esperados de actividad en una red PERT
    - **a.** hace uso de tres estimaciones
    - **b.** pone el mayor coeficiente de ponderación en la estimación de tiempo más probable
    - **c.** está motivado por la distribución beta
    - **d.** todo lo anterior
21. El cálculo de la probabilidad de que la ruta crítica será terminada para el tiempo T
    - **a.** supone que los tiempos de actividad son estadísticamente independientes
    - **b.** supone que el tiempo total de la ruta crítica tiene aproximadamente una distribución beta
    - **c.** requiere conocimientos sobre la desviación estándar de todas las actividades de la red
    - **d.** todo lo anterior

22. En la función de intercambio tiempo-costo de CPM
- **a.** el costo en tiempo normal es de 0
- **b.** dentro del rango de tiempos posibles, el costo de la actividad se incrementa linealmente conforme el tiempo aumenta
- **c.** el costo decrece linealmente conforme el tiempo aumenta
- **d.** nada de lo anterior

23. El costo marginal de recortar una red podría cambiar cuando
- **a.** la actividad que es recortada alcanza su tiempo de recorte
- **b.** la actividad que es recortada alcanza un punto donde otra ruta es también crítica
- **c.** tanto a como b

24. Las ideas fundamentales en los modelos PL de recorte de costos en red son
- **a.** el tiempo de actividad es igual al tiempo normal + tiempo de recorte
- **b.** el tiempo de inicio más próximo para una actividad que abandona un nodo equivale al máximo de los tiempos de terminación más próximos de las actividades que abandonan el nodo
- **c.** el tiempo de terminación más próximo es igual al tiempo de terminación más lejano, menos el tiempo de actividad
- **d.** nada de lo anterior

25. El modelo PERT/Costo supone que
- **a.** cada actividad logra su tiempo optimista
- **b.** los costos están uniformemente distribuidos en la vida de la actividad
- **c.** los tiempos de actividad son estadísticamente independientes
- **d.** nada de lo anterior

26. El informe de control PERT/Costo
- **a.** requiere un presupuesto para cada actividad
- **b.** requiere un informe sobre el porcentaje de terminación de cada actividad
- **c.** calcula los excedentes de costo
- **d.** todo lo anterior

Respuestas

1.	F	**8.**	F	**15.**	F	**21.**	a
2.	V	**9.**	V	**16.**	a	**22.**	c
3.	V	**10.**	V	**17.**	d	**23.**	c
4.	F	**11.**	V	**18.**	b	**24.**	d
5.	V	**12.**	F	**19.**	c	**25.**	b
6.	F	**13.**	V	**20.**	d	**26.**	d
7.	F	**14.**	V				

Problemas

•• **14-1.** Build-Rite Construction Company ha identificado 10 actividades que tienen lugar en la construcción de una casa. Son
1. Paredes y techo (erigir los marcos de las paredes y las vigas del techo).
2. Cimientos (colocar la losa de cimentación).
3. Maderaje del techo (poner las vigas del techo).
4. Las cubiertas del techo (instalar el recubrimiento del techo sobre los maderos).
5. Instalación eléctrica (instalar el alambrado eléctrico).
6. Ripias del techo (poner las ripias [o tejas de madera] del techo)
7. Recubrimientos exteriores (poner los recubrimientos exteriores).
8. Ventanas (instalar las ventanas)
9. Pintar (pintar el exterior y el interior)
10. Paneles interiores de las paredes (colocar los paneles interiores de las paredes).

Además, por lo general se siguen las costumbres siguientes:
1. La instalación eléctrica se realiza desde el lado interior de la pared, en tanto que las ventanas son montadas después de que se ha erigido el marco de las paredes.
2. Los paneles interiores de las paredes y los recubrimientos exteriores son colocados sobre las ventanas.
3. No se empieza a pintar hasta que la casa está impermeabilizada.
   (a) Haga un lista que muestre cada actividad y sus predecesores inmediatos.

14-2. Quacker Mills contrata pasantes de ingeniería y los hace "cursar" seis experiencias (actividades) administrativas para prepararlos para que lleguen a ser gerentes de planta. Hay tres disciplinas y dos posiciones (principiantes y avanzados) en cada disciplina. Estas seis actividades se muestran en la siguiente tabla. Además, una persona que no haya sido ingeniero de línea de producción no puede ser jefe de departamento, ni alguien que no haya sido supervisor puede ser programador de la línea de producción.

Haga una lista de actividades mostrando cada actividad y sus predecesores inmediatos.

TABLA 14.9

	DISCIPLINA		
	Ingeniería de Planta	Supervisión de línea	Planeación de la producción
Principiante	Ingeniero de la línea de producción 1	Supervisor 2	Asistente del programador de la línea de producción 3
Avanzado	Ingeniero de planta 4	Jefe de departamento 5	Programador de la línea de producción 6

14-3. Construya el diagrama de red utilizando actividad en el arco para el sistema de construcción de casas usado por Build-Rate Construction Company en el problema 14-1.

14-4. Construya el diagrama de red CPM (AN) para las actividades dadas en la siguiente tabla.

TABLA 14.10

ACTIVIDAD	PREDECESORES INMEDIATOS
1	—
2	—
3	2
4	1, 3
5	2
6	1, 5
7	1, 5
8	2
9	4, 6
10	6
11	7, 8
12	9, 10, 11

14-5. Build-Rate ha estimado los tiempos dados en la tabla adjunta como necesarios para terminar cada una de las tareas involucradas en la construcción de una casa. Para cada actividad, encuentre

(a) el tiempo de inicio más próximo
(b) el tiempo de terminación más próximo
(c) el tiempo de inicio más lejano
(d) el tiempo de terminación más lejano
(e) la holgura

Además, identifique la ruta crítica.

TABLA 14.11

NÚMERO DE ACTIVIDAD	ACTIVIDAD	PREDECESORES INMEDIATOS	TIEMPO ESPERADO (DAYS)
1	Paredes y techo	2	5
2	Cimientos	—	3
3	Maderaje del techo	1	2
4	Recubrimento del techo	3	3
5	Instalación eléctrica	1	4
6	Ripias del techo	4	8
7	Recubrimientos exteriores	8	5
8	Ventanas	1	2
9	Pintura	6, 7, 10	2
10	Paneles de las paredes interiores	8, 5	3

••**14-6.** Como administrador de proyecto, usted se enfrenta con la red de actividad y con los tiempos esperados de actividad que se muestran en la figura 14.27. Para cada actividad, encuentre
(a) el tiempo de inicio más próximo
(b) el tiempo de terminación más próximo
(c) el tiempo de inicio más lejano
(d) el tiempo de terminación más lejano
(e) la holgura
Además, identifique la ruta crítica.

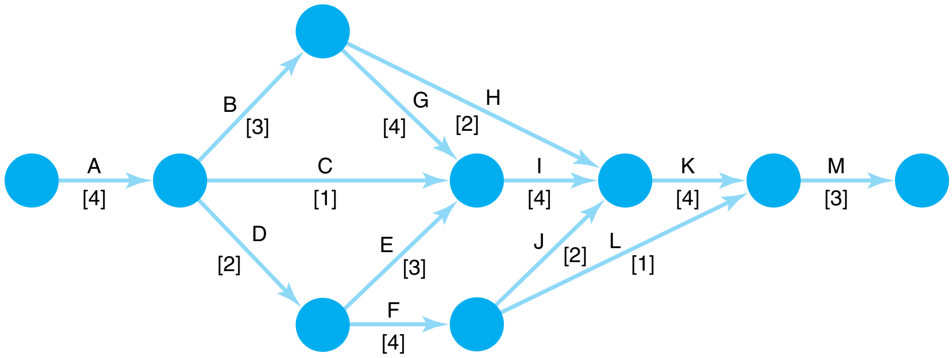


FIGURA 14.27

••**14-7.** Imagine que se le solicita como asesor de producción. La planta utiliza actualmente un método PERT-CPM para una corrida de producción descrita por la red de actividades de la figura 14.28. Sin embargo, con base en su evaluación, los predecesores inmediatos de cada actividad se muestran en la siguiente tabla.

ACTIVIDAD	PREDECESORES INMEDIATOS
A	—
B	—
C	A
D	B
E	B
F	C
G	D
H	E
I	G
J	E
K	H
L	F
M	L, I, K, J

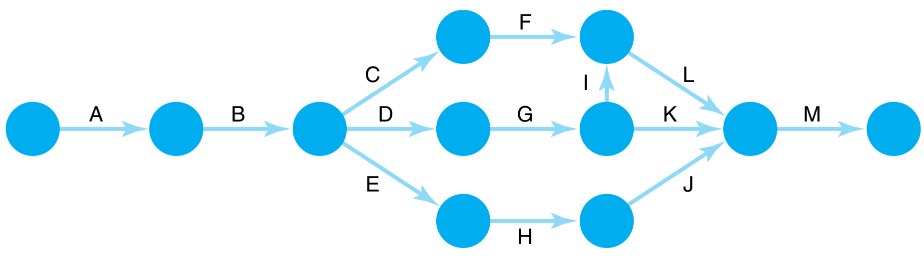


FIGURA 14.28

(a) Trace la red de actividades revisada.
(b) Calcule los tiempos de inicio y terminación más próximos y más lejanos de la red revisada, con base en la hipótesis de que cada actividad toma una hora más que su predecesor alfabético (es decir, A = 1 hora, B = 2 horas, etc.).
(c) Encuentre la holgura de cada actividad. Identifique la ruta crítica.
(d) ¿Cuánto tiempo menos dura la corrida de producción usando esta red de actividades revisada que lo que dura con la red original?

•••14-8. Considere la red y tiempos de actividad que se muestran en la figura 14.29. A usted le gustaría reducir el tiempo mínimo para terminar el proyecto. Suponga que usted puede reducir el tiempo de actividad tanto como quiera siempre que se incremente alguna otra actividad o actividades en la misma cantidad. Por ejemplo, usted puede reducir una hora a G, si aumenta media hora a C y D. Suponga que se permiten tiempos de actividad igual a cero.

(a) Encuentre la ruta crítica actual y el tiempo mínimo requerido para terminar el proyecto.

(b) Distribuya de nuevo los tiempos para lograr el tiempo mínimo posible de terminación del proyecto. Observe que en esta red, el total de todos los tiempos de actividad debe ser igual al total de 20 horas presente.

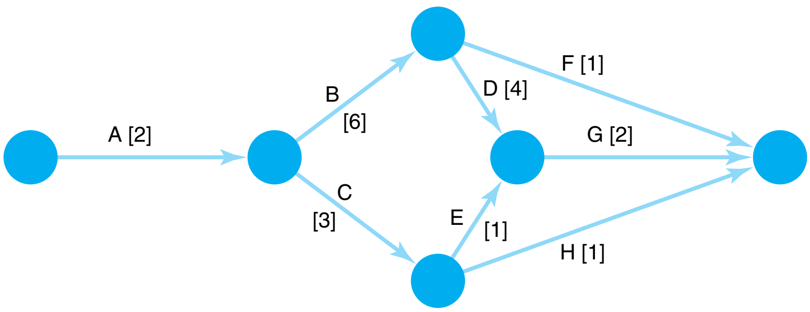


FIGURA 14.29

14-9. En base al historial de la empresa, la administración de Build-Rite ha determinado que los tiempos optimista, más probable y pesimista de cada actividad se muestran en la siguiente tabla. Calcule el tiempo esperado de actividad y la desviación estándar de cada una.

NÚMERO DE LA ACTIVIDAD	ACTIVIDAD	TIEMPO OPTIMISTA (DÍAS) *a*	TIEMPO MÁS PROBABLE (DÍAS) *m*	TIEMPO PESIMISTA (DÍAS) *b*
1	Paredes y techo	3	5	7
2	Cimientos	2	3	4
3	Maderaje del techo	1	2	3
4	Recubrimiento del techo	1	2	9
5	Instalación eléctrica	4	4	4
6	Ripias del techo	4	8	12
7	Recubrimientos exteriores	1	3	17
8	Ventanas	1	2	3
9	Pintura	2	2	2
10	Paneles de las paredes interiores	2	3	4

••14-10. Con base en la red de actividades mostrada en la figura 14.30 y los tiempos de actividad asociados expuestos en la tabla siguiente, calcule el valor esperado y la desviación estándar de cada tiempo de actividad.

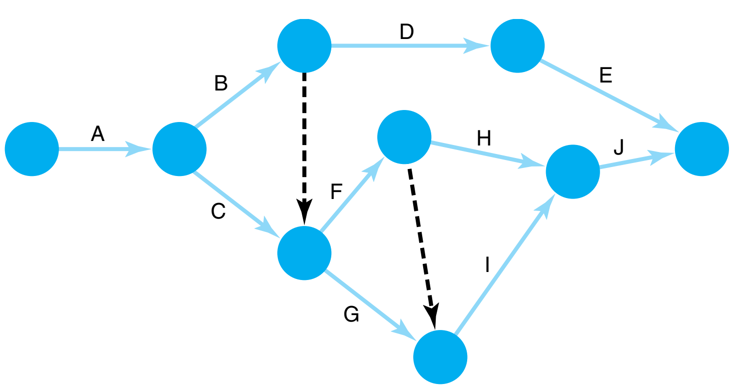


FIGURA 14.30

(a) Encuentre los tiempos de inicio más próximos, los tiempos de terminación más próximos, los tiempos de inicio más lejanos, los tiempos de terminación más lejanos y la holgura de cada actividad.
(b) Especifique la ruta crítica.

ACTIVIDAD	OPTIMISTA	MÁS PROBABLE	PESIMISTA
A	2	3	4
B	2	4	6
C	1	2	3
D	1	3	5
E	2	3	4
F	1	4	7
G	2	2	2
H	2	5	8
I	1	3	5
J	2	3	4

••**14-11.** Suponga que los tiempos de actividad en la red de actividades de Build-Rite (véase el problema 14-1, 14-5, y 14-9) son independientes unos de otros y que la suma de cualquier combinación de tiempos de actividad tiene una distribución normal.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las actividades en la ruta crítica actual estén terminadas en 12 días?
(b) ¿Dentro de 25 días?
(c) ¿Es ésta la misma probabilidad que aquélla en la que la casa debe estar terminada en 25 días? Comente su respuesta.

14-12. Para la red en el problema 14-10, responda las siguientes preguntas:
(a) Bajo las hipótesis usuales, encuentre la probabilidad de que las actividades en la ruta crítica estarán terminadas dentro de 20 semanas.
(b) ¿Cuántas semanas se deberían dar para tener una probabilidad de 95% de terminar la ruta crítica a tiempo?

••**14-13.** Los ingenieros de Build-Rite han calculado el costo de terminar cada actividad en tiempo tanto normal como de recorte, donde los valores para el tiempo normal y el tiempo de recorte, respectivamente, corresponden a las estimaciones de tiempo esperado y tiempo optimista de la tabla en el problema 14-9. Los resultados se dan en la siguiente tabla.
(a) Especifique el tiempo normal, el costo normal, el tiempo de recorte, el costo de recorte, los días máximos de recorte y el costo por día de recorte de cada actividad. Suponga relaciones de costo lineales.
(b) Calcule el costo esperado del proyecto (con base en el tiempo normal).
(c) Suponga que la empresa tiene que reducir el tiempo de terminación en siete días. ¿Cuánto costaría esta reducción?
(d) ¿Cuánto costaría reducir el tiempo de terminación en 11 días?

NÚMERO	ACTIVIDAD	COSTO NORMAL ($)	COSTO DE RECORTE ($)
1	Paredes y techo	50	72
2	Cimientos	20	30
3	Maderaje del techo	15	30
4	Recubrimiento del techo	8	20
5	Instalación eléctrica	30	30
6	Ripias del techo	13	21
7	Recubrimientos exteriores	45	65
8	Ventanas	45	52
9	Pintura	40	40
10	Paneles de las paredes interiores	22	34

•••**14-14.** Considere la red de actividades del problema 14.10. Las siguientes son estimaciones de costos para terminación en tiempo de recorte y en tiempo normal, donde los tiempos corresponden a los tiempos optimista y esperado, respectivamente.

ACTIVIDAD	COSTO DE RECORTE ($)	COSTO NORMAL ($)
A	20	12
B	50	40
C	40	30
D	20	14
E	60	45
F	35	20
G	30	30
H	25	10
I	30	15
J	12	10

(a) Prepare una tabla que muestre el tiempo normal, el costo normal, el tiempo de recorte, el costo de recorte, las semanas máximas de recorte y el costo por semana de recorte de todas las actividades.

(b) ¿Cuál sería el costo mínimo del proyecto si se tuviera que terminar en

(i) 19 semanas?

(ii) 18 semanas?

(iii) 17 semanas?

(c) Formule un modelo de programación lineal que calcule el costo adicional de reducir el tiempo de terminación a nueve semanas. ¿Cuál es la mejor manera de lograr la reducción? ¿Cuál es el costo adicional?

•••**14-15.** Remítase a los problemas 14-3 y 14-13 y formule un modelo de programación lineal que permita a Build-Rite evaluar el costo de recortar su red de actividades en *x* horas.

•••**14-16.** Considere la red de actividades y los tiempos de actividad normales que se muestran en la figura 14.31, así como los datos de la siguiente tabla.

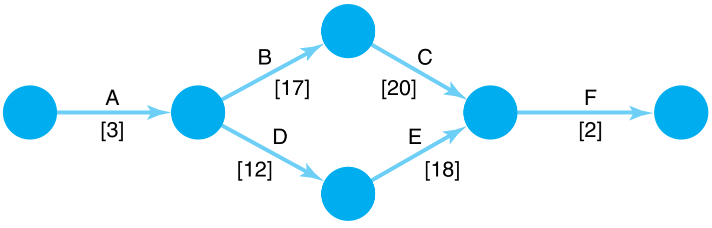


FIGURA 14.31

ACTIVIDAD	COSTO/UNIDAD DE CORTE ($)	MÁXIMO DE UNIDAD DE CORTE
A	10	2
B	20	8
C	5	5
D	5	5
E	15	2
F	—	0

(a) Encuentre la ruta crítica y el tiempo mínimo requerido para terminar el proyecto.

(b) Prepare una tabla que muestre qué actividades recortar conforme la duración del proyecto decrece.

••**14-17.** Utilice los costos normales del problema 14-13 y los datos de tiempo del problema 14-5 para construir tablas de costos de inicio próximo e inicio lejano y la gráfica de gastos acumulados contra el tiempo para Build-Rate.

••**14-18.** Los recursos requeridos para las actividades en el problema 14-6 están dados en la tabla siguiente. Construya tablas de costos de inicio próximo y lejano, y una gráfica de las demandas acumuladas al presupuesto a través del tiempo para ambos programas.

ACTIVIDAD	TOTAL DE RECURSOS REQUERIDOS ($)
A	2,800
B	3,000
C	900
D	3,000
E	6,000
F	12,000
G	3,200
H	3,200
I	7,200
J	7,000
K	2,400
L	2,000
M	4,500

••14-19. El registro de los datos históricos de los gastos de Build-Rite al final del día 15 es como sigue:

TABLA 14.12

NÚMERO DE ACTIVIDAD	ACTIVIDAD	COSTO INCURRIDO A LA FECHA ($)
2	Cimientos	22
1	Paredes y techo	46
3	Maderaje del techo	15
4	Cubiertas del techo	10
6	Ripias del techo	4.50
5	Instalación eléctrica	20
8	Ventanas	22.50
10	Paneles de las paredes interiores	20
7	Recubrimientos exteriores	40
9	Pintura	0

Evalúe los costos del proyecto actuales con base en la hipótesis de que los costos presupuestados son los costos normales dados en el problema 14-13, que el tiempo requerido es como se dio en el problema 14-5 y que

(a) todas las actividades comienzan en la fecha más próxima posible, o

(b) todas las actividades comienzan en la fecha de inicio más lejana posible.

En ambos casos, suponga que el costo presupuestado es igual al presupuesto de la actividad terminada multiplicado por la proporción del presupuesto de la actividad que se realiza.

14-20. Revise los datos para el problema 14-18. Prepare un análisis del costo del proyecto a la fecha, si las cifras en la siguiente tabla representan el estado al final de la octava unidad de tiempo. Suponga que el costo presupuestado es igual al presupuesto para la actividad terminada, multiplicado por la proporción de la actividad que ha sido completada.

TABLA 14.13

ACTIVIDAD	% TERMINADO	COSTO A LA FECHA ($)
A	100	2700
B	100	3200
C	100	900
D	100	3500
E	50	2000
F	70	8000
G	20	700
H	50	1700
I	0	0
J	0	1000
K	0	0
L	0	500
M	0	0

•••**14-21.** Ésta es una versión más compleja del problema 14-8. Como supervisor de producción de Hurricane Fan Company, usted ha utilizado técnicas PERT-CPM para programar sus corridas de producción. Su red y tiempos de actividades actuales aparecen en la figura 14.32. Un asesor de producción ha señalado que, debido a la similitud en las habilidades de trabajo necesarias para cada actividad, los recursos son perfectamente transferibles entre actividades (es decir, el tiempo requerido para una actividad puede reducirse en cualquier cantidad, incrementando en la misma cantidad el tiempo requerido para otro trabajo). Si el asesor está en lo correcto, ¿cuánto puede reducirse el tiempo requerido para cada corrida de producción?

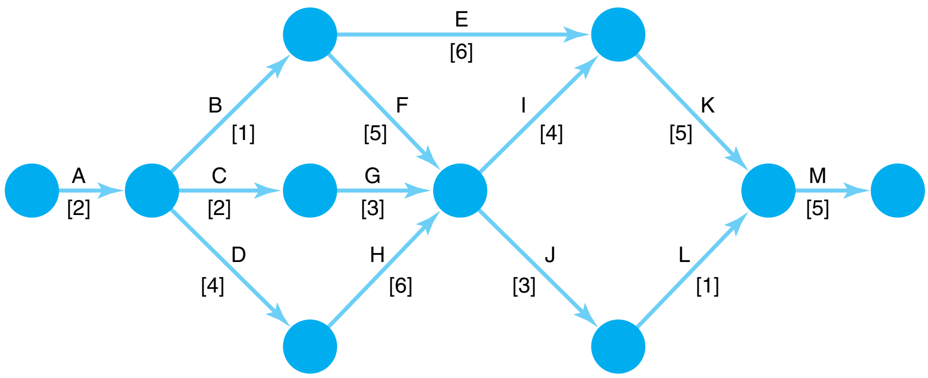


FIGURA 14.32

•••**14-22.** Este problema es un examen posterior de las hipótesis PERT. Considere un proyecto con cinco actividades y las relaciones de precedencia establecidas en la tabla siguiente. La columna Rango indica el rango posible de días que podría tomar completar una actividad.

(a) Suponga que cualquier tiempo dentro del rango es igualmente probable (es decir, una distribución uniforme). Utilice el análisis PERT estándar y calcule la duración esperada del proyecto. Calcule también la probabilidad de que el proyecto sea terminado en la duración esperada del proyecto + 5 días. Utilice el hecho de que si el rango es de a a b entonces el tiempo medio es $\frac{(a+b)}{2}$ y la varianza del tiempo es $\frac{(b-a)^2}{12}$.

TABLA 14.14

ACTIVIDAD	PREDECESORES	RANGO
A	ninguno	20 a 60
B	ninguno	25 a 29
C	A	20 a 60
D	B	25 a 29
E	D	25 a 29

(b) Ahora genere una hoja de cálculo para simular el proyecto (utilizando Crystal Ball o @Risk si están disponibles). Simule 100 ensayos y calcule la duración media del proyecto. ¿Es mayor o menor que en su respuesta anterior? ¿Por qué?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto esté terminado antes del tiempo esperado en el inciso (a) + 5 días? ¿Es mayor o menor que su respuesta anterior? ¿Por qué?

•••**14-23.** Este problema es el mismo que el problema 14-22, pero ahora suponga que los tiempos de actividad están distribuidos normalmente con las siguientes medias y desviaciones estándar:

TABLA 14.15

ACTIVIDAD	MEDIA	DESVIACIÓN ESTÁNDAR
A	40	11.5
B	27	1.15
C	40	11.5
D	27	1.15
E	27	1.15

(a) Utilice el análisis PERT estándar y calcule la duración esperada del proyecto. También calcule la probabilidad de que el proyecto esté terminado en la duración esperada del proyecto + 5 días. ¿Es su respuesta igual a la del inciso (1) del problema 14-22? ¿Por qué?

(b) Ahora elabore una hoja de cálculo para simular el proyecto (utilizando Crystal Ball o @Risk, si están disponibles). Simule 100 ensayos y calcule la duración media del proyecto. ¿Es mayor o menor que en su respuesta anterior? ¿Por qué?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto sea terminado antes del tiempo esperado del inciso (a) + 5 días. ¿Es mayor o menor que en su respuesta anterior? ¿Por qué?

(d) ¿Qué tan sensible es el análisis de simulación a la forma de la distribución de los tiempos de actividad (uniforme en el problema 14-22, normal en el problema 14-23)?

Referencias

Rafael Andreu y Albert Corominas, "SUCCESS92: A DSS for Scheduling the Olympic Games", en *Interfaces*, 19, núm. 5 (1989), pp. 1-12.

Richard Staats, "Desert Storm: A Re-examination of the Ground War in the Persian Gulf, and the Key Role Played by OR", en *OR/MS Today* (diciembre de 1991), pp. 42-56.

APÉNDICE

A

Conceptos básicos de probabilidad

I INTRODUCCIÓN

La teoría de las probabilidades es la rama de las matemáticas que se utiliza para modelar la incertidumbre que tiene lugar en la naturaleza, la ciencia y los negocios. Los biólogos utilizan las probabilidades para representar la evolución genética; los físicos, para construir modelos sobre el comportamiento de los electrones en los átomos, y los economistas para representar el comportamiento de las cotizaciones en la bolsa. Textos como éste a menudo utilizan juegos de azar simples para motivar el aprendizaje de las probabilidades. Por ejemplo, podemos utilizar las probabilidades para simular el resultado cuando se tira al aire un par de dados. El propósito fundamental de la teoría de las probabilidades es permitirnos usar lo que conocemos sobre eventos inciertos simples para después poder calcular la probabilidad de eventos inciertos más complicados. Por lo tanto, podemos utilizar nuestro modelo de la probabilidad de resultados específicos al lanzar un par de dados para calcular la posibilidad de ganar.

VARIABLES ALEATORIAS

Es imposible hablar de probabilidades sin hablar de variables aleatorias. Desafortunadamente, es difícil hablar de manera precisa sobre variables aleatorias sin adentrarse en detalles más abstractos de lo que este breve apéndice permite, o lo que realmente se requiere para este texto. Para nuestros propósitos, considere una variable aleatoria como un evento incierto que asume un valor numérico; por ejemplo, la cara que queda arriba después de lanzar un dado, la cantidad de trajes de baño vendidos por Spiegel durante el mes de julio, el precio de las acciones de Intel al final de la próxima semana, la cantidad de días nevados en 2003 en Nome, Alaska, y así sucesivamente.

TIPOS DE PROBABILIDADES

Existen dos tipos básicos de modelos de probabilidad: discretos y continuos. La diferencia entre ambos no es importante en lo que se refiere a los conceptos utilizados en las ciencias de la administración. Sin embargo, cada tipo requiere el uso de una rama de las matemáticas diferente. La aritmética es todo lo que realmente necesitamos para manejar probabilidades discretas, pero para las variables aleatorias continuas se debe utilizar el cálculo integral y diferencial.

II PROBABILIDADES DISCRETAS

A. LA FUNCIÓN DE MASA DE LAS PROBABILIDADES (FMP)

Las probabilidades discretas se definen con la función de masa de las probabilidades, f(x). Específicamente, f(x) es la probabilidad de que la variable aleatoria de interés asuma el valor x. Considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Una distribución uniforme discreta. Suponga que continuamos con el ejemplo de lanzar un dado, y que cada cara del dado tiene iguales posibilidades de aparecer. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= 1/6 \quad (x=1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ &= 0 \quad \text{(en cualquier otro caso)} \end{aligned}$$

La función de masa de las probabilidades para este caso aparece en la figura A.1(a).

Ejemplo 2: Una distribución arbitraria discreta. Suponga que una urna contiene cinco pelotas idénticas, excepto por el número que tienen escrito. Dos pelotas tienen el 23 escrito y las otras tres tienen escrito el 37. Suponga que se elige una pelota al azar, esto es, que cada pelota tiene iguales posibilidades de ser elegida. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= 2/5 \quad (x=23) \\ &= 3/5 \quad (x=37) \\ &= 0 \quad \text{(en cualquier otro caso)} \end{aligned}$$

Observamos que $f(x) \geq 0$ y que $\Sigma f(x) = 1$. Estas dos condiciones deben mantenerse para cualquier función de masa de las probabilidades.

Ejemplo 3: La distribución binomial. Esta distribución se utiliza para representar los resultados de una serie de ensayos independientes, cuando en cada ensayo ocurre o no un evento específico. (Véase la sección V-B, página A-11, para una definición de la independencia.) Encontramos la distribución binomial en el capítulo 11, donde se utilizó para determinar la probabilidad de que un cliente con reservación se presentara al vuelo en el sistema de administración de ingresos de una aerolínea. Esta distribución tiene dos parámetros: n, el número de ensayos, y p, la probabilidad de que el evento ocurra en cada ensayo. Es obvio que $(1 - p)$ es la probabilidad de que el evento no ocurra. (El ejemplo estándar es el lanzamiento de una moneda; el evento es que caiga en cara, y se asume que $p = 0.5$.) La distribución binomial es utilizada entonces para calcular la probabilidad de que el evento ocurra x veces en n ensayos; por ejemplo, que salga siete veces cara en 10 lanzamientos de una moneda. La función de masa de las probabilidades para una distribución binomial es

$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (x=0, 1, \cdots, n) \\ &= 0 \quad \text{(en cualquier otro caso)} \end{aligned}$$

Aquí el símbolo $\binom{n}{x}$ es la cantidad de formas en que uno puede seleccionar x elementos de un conjunto de n elementos. Se calcula como sigue:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} = \frac{(n)\,(n-1)\cdots(1)}{[(x)\,(x-1)\cdots(1)]\,[(n-x)\,(n-x-1)\cdots(1)]}$$

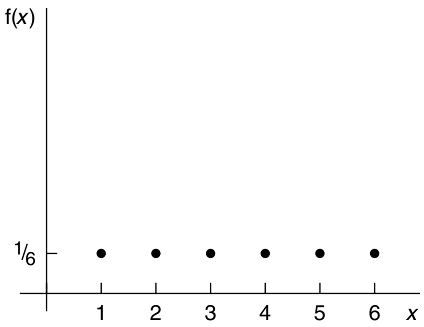
Por ejemplo, podemos ver que la probabilidad de que la moneda caiga siete veces en cara en 10 lanzamientos, siendo que la probabilidad de que salga cara en un solo lanzamiento es de 0.5 (es decir, $p = 0.5$), es

$$f(7) = \frac{(10)\,(9)\,(8)}{(3)\,(2)\,(1)} (0.5^7)\,(0.5^3) = 0.117$$

Ejemplo 4: La distribución de Poisson. Esta distribución se utiliza a menudo para modelar la cantidad de llegadas en un intervalo de tiempo específico en un sistema de líneas de espera (capítulo 12). La función de masa de las probabilidades es

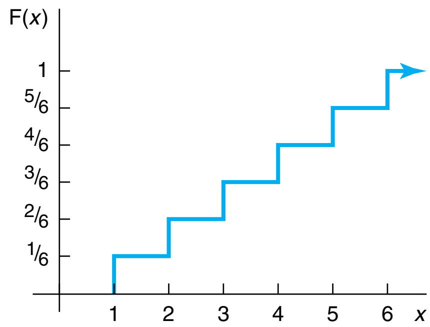
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-M} M^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \cdots) \\ &= 0 \quad \text{(en cualquier otro caso)} \end{aligned}$$

Donde M es un parámetro determinado por el administrador.



(a) Función de masa de las probabilidades

FIGURA A.1 (a)



(b) Función de distribución acumulada

FIGURA A.1 (b)

B. LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA (FDA)

La función de distribución acumulada F(x) es la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor menor que o igual a x. Dado que la función de masa de las probabilidades, f(x), es la probabilidad de que la variable aleatoria asuma el valor x, es obvio que

$$F(x) = \sum_{j=-\infty}^{x} f(j)$$

Ejemplo 1 (continuación): Distribución uniforme discreta. Si la variable aleatoria es el valor resultante de lanzar un dado, entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && (x < 1) \\ &= 1/6 && (1 \leq x < 2) \\ &= 2/6 && (2 \leq x < 3) \\ &= 3/6 && (3 \leq x < 4) \\ &= 4/6 && (4 \leq x < 5) \\ &= 5/6 && (5 \leq x < 6) \\ &= 1 && (6 \leq x) \end{aligned}$$

La función de distribución acumulada de esta distribución se muestra en la figura A.1(b).

Ejemplo 2 (continuación): Distribución arbitraria discreta.

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && (x < 23) \\ &= 2/5 && (23 \leq x < 37) \\ &= 1 && (37 \leq x) \end{aligned}$$

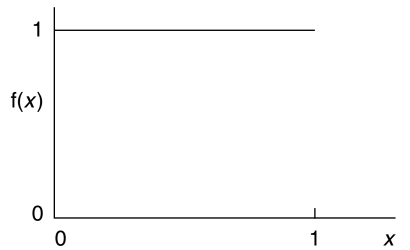
III PROBABILIDADES CONTINUAS

A. LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE LAS PROBABILIDADES

Las probabilidades continuas se definen mediante la función de densidad de las probabilidades (fdp). Si f(x) es la función de densidad de las probabilidades de una variable aleatoria, entonces sabemos que f(x) ≥ 0 para todas las x, y

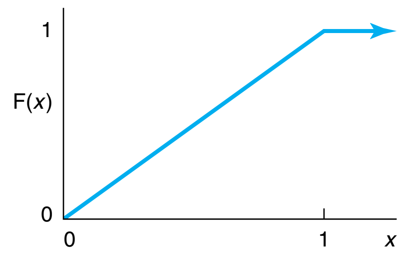
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Ésta es la analogía continua del hecho de que la función de masa de las probabilidades para una variable discreta siempre es mayor que o igual a cero y que su suma debe ser 1.



(a) Función de densidad de las probabilidades

FIGURA A.2 (a)



(b) Función de distribución acumulada

FIGURA A.2 (b)

B. LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA

La función de distribución acumulada conserva su definición para las variables aleatorias tanto continuas como discretas; esto es, F(x) es la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor menor que o igual a x. Para variables aleatorias continuas, la relación entre la función de densidad de las probabilidades (fdp) y la función de distribución acumulada (FDA) es como sigue

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(r)dr$$

Aquí integramos la función de densidad de $-\infty$ para x con el fin de determinar la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor que o igual a x. Con las probabilidades discretas el concepto es el mismo, pero se suma la función de masa de las probabilidades en vez de integrar la función de densidad de las probabilidades.

C. EJEMPLOS IMPORTANTES

Aquí describiremos tres distribuciones que tienen un papel importante en este texto y en problemas de aplicaciones empresariales.

Ejemplo 5: La distribución continua uniforme. La distribución uniforme en el intervalo de 0 a 1 desempeña un papel crucial en la simulación, ya que se utiliza para generar variables aleatorias (véase el capítulo 11).

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && (x < 0) \\ &= 1 && (0 \le x \le 1) \\ &= 0 && (1 < x) \end{aligned}$$

Entonces, por definición

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(r)dr \\ &= 0 && (x < 0) \\ &= x && (0 \le x \le 1) \\ &= 1 && (1 \le x) \end{aligned}$$

Las figuras A.2(a) y (b) muestran la función de densidad de las probabilidades y la función de distribución acumulada de la distribución continua uniforme.

Ejemplo 6: La distribución exponencial. La distribución exponencial se utiliza para describir el tiempo interarribos entre eventos en la mayoría de los sistemas de colas o líneas de espera (capítulo 12). Es una distribución de un solo parámetro. El parámetro se identifica típicamente por λ. La función de densidad de probabilidades toma la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && (x < 0) \\ &= \lambda e^{-\lambda x} && (0 \le x) \end{aligned}$$

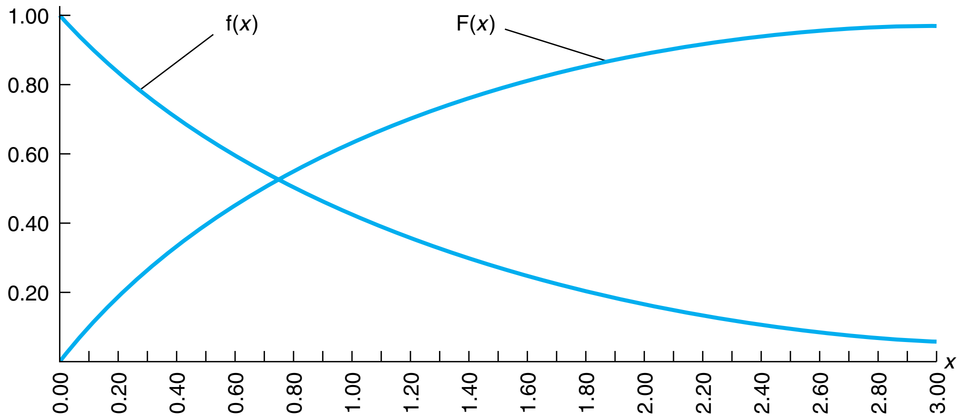


FIGURA A.3

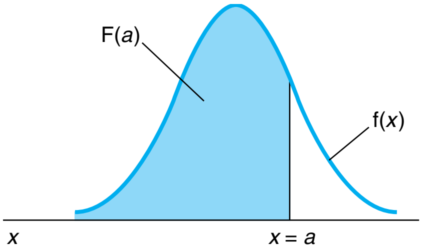


FIGURA A.4

Utilizando la definición para la función de distribución acumulada, vemos que

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \qquad\qquad (x < 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \quad (0 \leq x) \end{aligned}$$

La figura A.3 muestra la función de densidad de las probabilidades y la función de distribución acumulada para una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$.

Ejemplo 7: La distribución normal. La distribución normal desempeña un papel fundamental en las probabilidades y en estadística. En este texto aparece en muchos lugares; por ejemplo, en el capítulo 11 es utilizada para representar una demanda incierta, y en el capítulo 14 representa la probabilidad de que un proyecto será terminado para una fecha específica.

La distribución normal es una distribución de dos parámetros. Los parámetros son μ, la media, y σ, la desviación estándar, que debe ser mayor que 0. Existe, por supuesto, una expresión matemática para la función de densidad de las probabilidades normal, pero no la mostraremos aquí, ya que nunca se hace uso directo de esta expresión. La función de densidad de las probabilidades de la distribución normal no es integrable en forma cerrada; esto es,

$$\int_{-\infty}^{x} f(r)dr$$

no puede escribirse como una combinación de funciones elementales de x, donde $f(r)$ es una distribución normal. Para evaluar $F(x)$, la función de distribución acumulada, de la distribución normal (representada gráficamente en la figura A.4), se utilizan las tablas como la A.0. La siguiente sección está dedicada al uso de la tabla A.0 para determinar los valores de las probabilidades normales.

D. CÓMO UTILIZAR LA TABLA NORMAL

La distribución normal estándar La tabla A.0 puede utilizarse para encontrar valores para la función de distribución acumulada, $F(x)$, de la distribución normal con una media μ y una desviación estándar σ. (Véase la sección IV, pág. A7, para una definición de μ y de σ.) En realidad, la tabla proporciona valores para $F(x)$ para una distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. (En un momento mostraremos cómo se puede utilizar esta tabla para encontrar valores para la

TABLA A.0 Áreas para la distribución estándar normal

LAS ENTRADAS EN LA TABLA DAN EL ÁREA BAJO LA CURVA ENTRE LAS DESVIACIONES ESTÁNDAR MEDIA Y *Z* POR ENCIMA DE LA MEDIA. POR EJEMPLO, PARA *Z* = 1.25, EL ÁREA BAJO LA CURVA ENTRE LA MEDIA Y Z ES 0.3944.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4986	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Reimpreso con permiso de Richard I. Levin y Charles A. Kirkpatrick, *Quantitative Approaches to Management,* 3a. edición, MacGraw-Hill, Inc., Nueva York, NY, 1975.

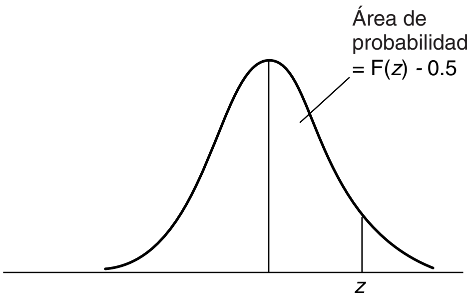


FIGURA A.5

función de distribución acumulada de cualquier distribución normal.) Los valores en la tabla A.0 son las probabilidades de que una variable aleatoria normal estándar (VANE) asuma un valor entre la media, 0, y el valor de z mostrado a través de los encabezados de las filas y columnas. Por lo tanto, al observar las fila 0.4 y la columna 0.05, descubrimos que una variable aleatoria normal estándar asume un valor entre 0 y 0.45 con probabilidad de 0.1736.

Utilizando esta tabla junto con el hecho de que una variable aleatoria normal estándar es simétrica alrededor de la media, nos permite encontrar la probabilidad de que una variable aleatoria normal estándar caiga en cualquier rango de números. Aquí hay algunos ejemplos (tomar como referencia la figura adjunta podría dar alguna ayuda visual para comprender el cálculo).

$$\text{Prob}\{\text{VANE} \leq 0.45\} = 0.5 + 0.1736 = 0.6736$$
$$\text{Prob}\{\text{VANE} > 0.45\} = 1.0 - 0.6736 = 0.3264$$
$$\text{Prob}\{\text{VANE} \leq -0.45\} = 0.5 - 0.1736 = 0.3264$$

Probablemente usted habrá observado que hay muchas maneras de calcular estos resultados. Por ejemplo, sabemos que Prob{VANE ≤ -0.45} = 0.3264 a partir del hecho de que Prob{VANE > 0.45} = 0.3264 y de que la distribución normal es simétrica respecto a la media.

Cualquier variable aleatoria normal (VAN) Supongamos una variable aleatoria normal, con media μ y desviación estándar σ. Para encontrar la probabilidad de que esta variable aleatoria ocurra dentro de un rango de valores, hacemos uso de la relación fundamental.

$$\text{Prob}\{\text{VAN} \leq x\} = \text{Prob}\{\text{VANE} \leq (x - \mu)/\sigma\}$$

He aquí un ejemplo. Suponga que VAN tiene $\mu = 50$ y $\sigma = 100$ y queremos encontrar la probabilidad de que VAN ≤ 95. Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}\text{Prob}\{\text{VAN} \leq 95\} &= \text{Prob}\{\text{VANE} \leq (95-50)/100\}\\ &= \text{Prob}\{\text{VANE} \leq 0.45\} = 0.6736.\end{aligned}$$

Este procedimiento se convierte en algo que se realiza en forma automática con un poco de práctica.

IV VALORES ESPERADOS

El costo o utilidad esperados es a menudo el objetivo en decisiones bajo incertidumbre; esto es, en problemas de decisión en los cuales la retribución de una decisión es una variable aleatoria. Primero introduciremos el valor esperado de una variable aleatoria, y después procederemos con el valor esperado de una función de una variable aleatoria.

A. VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA

El valor esperado de una variable aleatoria —digamos, X— comúnmente se escribe como E(X). Se le conoce como la media de la variable aleatoria y es identificado sobre todo mediante la letra griega μ. Definiremos E(X) para variables aleatorias tanto discretas como continuas.

Variables aleatorias discretas Para una variable aleatoria discreta, donde f(x) es la función de masa de las probabilidades,

$$\text{E}(X) = \mu = \sum_{-\infty}^{\infty} x\text{f}(x)$$

He aquí algunos ejemplos.

Ejemplo 1 (continuación): Distribución discreta uniforme.

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = 3.5$$

Es interesante observar que el valor esperado de una variable aleatoria no tiene que ser alguno de los valores que la variable aleatoria puede asumir. Por ejemplo, un dado no puede tener el valor 3.5. Una interpretación física es que el valor esperado es el centro de gravedad de la función de masa de las probabilidades. Esto es, si usted piensa en las probabilidades de una función de masa de las probabilidades como en coeficientes y coloca un punto de apoyo bajo el valor esperado, la función de masa de las probabilidades se equilibrará. El valor esperado tiene una segunda interpretación intuitiva. Piense en una serie de observaciones independientes de una variable aleatoria. Si usted calcula el promedio de los valores, esperaría que quedara cerca del valor esperado.

Ejemplo 2 (continuación): Distribución arbitraria discreta.

$$E(X) = 23\left(\frac{2}{5}\right) + 37\left(\frac{3}{5}\right) = 31.4$$

Ejemplo 3 (continuación): Distribución binomial. Aquí enunciaremos, sin demostrarlo, que para una variable aleatoria binomial, X, con parámetros n y p,

$$E(X) = np$$

Este resultado es intuitivamente atrayente. Si lanzamos 10 veces una moneda al aire, en promedio podríamos esperar sacar cinco caras.

Ejemplo 4 (continuación): Distribución de Poisson. El valor esperado de la distribución de Poisson es M. La varianza es también M. Estos resultados se deducen fácilmente, pero las deducciones no son lo importante de nuestro propósito.

Variables aleatorias continuas La definición del valor esperado de una variable aleatoria continua es esencialmente la misma que para el caso de las variables discretas. Aquí, sin embargo, debemos utilizar la función de densidad de probabilidades y la integración, esto es

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$$

Ejemplo 5 (continuación): Distribución uniforme continua.

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Es fácil ver que $\frac{1}{2}$ es el centro de gravedad de la función de densidad que se muestra en la figura A.2(a).

Ejemplo 6 (continuación): Distribución exponencial.

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = 1/\lambda$$

Esta integración requiere una técnica conocida como integración por partes, y los detalles se han omitido.

B. VALOR ESPERADO DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA

El Concepto General Supongamos que $G(x)$ es cualquier función definida sobre x. Entonces, para una variable aleatoria discreta X, con función de masa de las probabilidades $f(x)$, el valor esperado de $G(x)$, $E[G(X)]$, se define como sigue:

$$E[G(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} G(x)f(x)$$

Una definición similar, utilizando integrales, es válida para las variables aleatorias continuas.

Tenemos dos razones de importancia para interesarnos en el valor esperado de las funciones de variables aleatorias. Una de ellas es definir la varianza de una variable aleatoria, y la otra es definir los costos o utilidades que se esperan. Estos temas son analizados en las secciones siguientes.

Varianza y desviación estándar de una variable aleatoria La varianza es una medida de la dispersión de la distribución de una variable aleatoria. Se denota comúnmente como σ^2 y se define como sigue:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))^2] = \sum_{-\infty}^{\infty}(x-\mathrm{E}(X))^2\mathrm{f}(x)$$

La varianza juega un papel importante en la estadística. Es la medida más popular de dispersión de la distribución de una variable aleatoria, y es uno de los dos parámetros de la distribución normal (véase el ejemplo 7 en la página A-5). Para llegar a comprender la interpretación de la varianza como medida de dispersión, considere dos variables aleatorias X y Y. Sea $\mathrm{f}_X(x)$ la función de masa de las probabilidades para X, y $\mathrm{f}_Y(y)$ la función de masa de las probabilidades para Y. Sean

$$\mathrm{f}_X(x) = \frac{1}{2} \qquad (x = 4, 6)$$
$$= 0 \qquad \text{(en cualquier otro caso)}$$

y

$$\mathrm{f}_Y(y) = \frac{1}{2} \qquad (y = 1, 9)$$
$$= 0 \qquad \text{(en cualquier otro caso)}$$

Observe que ambas variables aleatorias tienen un valor esperado igual a cinco. Usted debería ser capaz de verificar que $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = 1$ y $\mathrm{Var}\ (Y) = \sigma^2 = 16$. La noción intuitiva es que una variable aleatoria tiene una mayor probabilidad de estar más allá de la media y tener una varianza mayor. Esta noción coincide con este ejemplo.

La desviación estándar, identificada sobre todo como σ, es simplemente la raíz cuadrada de la varianza, esto es,

$$\text{Desviación estándar de } X = (\text{Varianza de } X)^{1/2}$$

o

$$\sigma = (\sigma^2)^{1/2}$$

C. RENDIMIENTO ESPERADO

En la mayor parte de las aplicaciones empresariales, la administración está interesada en los rendimientos (o costos) asociados con la ocurrencia de un evento aleatorio.

Variables aleatorias discretas Para calcular el rendimiento esperado, determinamos que $\mathrm{R}(x)$ sea el rendimiento si la variable aleatoria x ocurre y utilizamos la definición estándar para el valor esperado de una función de una variable aleatoria.

$$\mathrm{E}[\mathrm{R}(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{R}(x)\mathrm{f}(x)$$

Ejemplo 1 (continuación): Distribución uniforme discreta. Un jugador se ofrece a pagarle \$10 multiplicados por el valor en la cara del dado, si sale 3, 4, 5 o 6, y nada si sale 1 o un 2. ¿Cuál es el valor esperado de este juego?

x	R(x)	f(x)	R(x)f(x)
1	0	$\frac{1}{6}$	0
2	0	$\frac{1}{6}$	0
3	30	$\frac{1}{6}$	5
4	40	$\frac{1}{6}$	$6\frac{2}{3}$
5	50	$\frac{1}{6}$	$8\frac{1}{3}$
6	60	$\frac{1}{6}$	10
Valor esperado = ΣR(x)f(x) = 30			

Variables aleatorias continuas El concepto de encontrar el valor esperado de la función R(X) es igual que en el caso de las variables discretas. Como siempre, en el caso de las variables continuas, debemos utilizar la integración y la función de densidad de las probabilidades.

Ejemplo 5 (continuación): Distribución uniforme continua. Observaremos una variable aleatoria de una distribución uniforme continua en el intervalo de 0 a 1. Un jugador ofrece pagar 0 si el valor está entre 0 y 0.2, y \$10 multiplicados por el valor de la variable aleatoria, si el valor es mayor que 0.2 y menor que o igual a 1. Es obvio que

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(x) &= 0 \qquad\qquad (x \le 0.2) \\ &= 10x \qquad (0.2 < x \le 1) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathrm{R}(x)] &= \int_0^{.2} 0\cdot 1\cdot dx + \int_{.2}^{1} 10x\cdot 1\cdot dx = 10\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0.2}^{1} \\ &= 4.8 \end{aligned}$$

V DISTRIBUCIONES CON MÚLTIPLES VARIABLES

Esta sección presenta las matemáticas y conceptos utilizados cuando hay más de una variable aleatoria en consideración. Tales situaciones son comunes en la práctica. En una red PERT (capítulo 14), el tiempo requerido para terminar una ruta en un proyecto es igual a la suma de los tiempos requeridos para terminar cada actividad en esa ruta. De manera similar, el rendimiento de una cartera de acciones (capítulo 8) es igual a la suma de los rendimientos de las acciones individuales que contiene la cartera.

Las variables aleatorias múltiples se presentan en el apéndice 10.1 en el análisis del teorema de Bayes, aunque el término no se menciona ahí. A continuación será útil referirnos a dicho análisis.

A. DISTRIBUCIONES CONJUNTAS

Variables aleatorias discretas Es útil presentar alguna nueva notación en el análisis de las variables aleatorias multivariadas. Sea

$\mathrm{f}_{X,Y}(x, y)$ = la probabilidad de que la variable aleatoria X asuma el valor x y la variable aleatoria Y asuma el valor y.

Entonces $\mathrm{f}_{X,Y}(x, y)$ es la función de masa de las probabilidades *conjunta* para las variables aleatorias X y Y. La palabra "y" es importante en esta definición. Indica que deben ocurrir ambos eventos (x, y).

El siguiente juego fue presentado en el apéndice 10.1.

1. Se tira un dado
2. El valor del dado se usa para determinar de cuál de las tres urnas se sacará una pelota. Suponga que cada una de las pelotas en una urna particular tiene iguales posibilidades de salir.

Los detalles se resumen en la siguiente tabla.

DADO	URNA	CONTENIDO DE LA URNA
1	1	28 pelotas blancas y 72 negras
2 o 3	2	40 pelotas blancas 60 negras
4 o 5 o 6	3	92 pelotas blancas 8 negras

Este juego puede utilizarse ahora para ilustrar una función de masa de las probabilidades que sea conjunta. Haga que X sea el valor de la urna escogida; $Y = 1$ si se selecciona una pelota blanca y $Y = 2$ si se selecciona una pelota negra. Los valores de $f_{X,Y}(x, y)$ se presentan a continuación.

X	$Y = 1$	$Y = 2$
1	$(1/6)(28/100) = .0467$	$(1/6)(72/100) = .12$
2	$(2/6)(40/100) = .1333$	$(2/6)(60/100) = .20$
3	$(3/6)(92/100) = .4600$	$(3/6)(8/100) = .04$

Estos valores fueron deducidos a partir de la definición de probabilidad condicional:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$$

En el apéndice 10.1 se puede encontrar un análisis de esta relación.

Variables aleatorias continuas También existen distribuciones multivariadas para variables aleatorias continuas. De hecho, la ecuación que define la relación entre probabilidades conjuntas y condicionales se utiliza para definir funciones de densidad de probabilidades conjuntas y funciones de densidad de probabilidades condicionales.

B. VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES

Dos variables aleatorias, X y Y, son independientes si

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Debido a que, en general

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)$$

podemos ver que X y Y son independientes si

$$f_{X|Y}(x|y) = f_x(x)$$

La última ecuación dice que el hecho de saber que la variable aleatoria Y asume el valor y no nos dice nada sobre la probabilidad de que X asumirá el valor x. En otras palabras, X y Y son independientes.

C. EXPECTATIVA Y VARIANZA DE SUMAS

El valor esperado de X + Y. Siempre es cierto (ya sea que X y Y sean independientes o no) que

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

La varianza de $X + Y$ La varianza de $(X + Y)$ se define como sigue:

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$$

o

$$\sigma^2_{(X+Y)} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y + 2\sigma_{XY}$$

La covarianza de X y Y En la expresión anterior, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ es la covarianza de X y Y. Se identifica como σ_{XY} y se define como sigue:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = \mathrm{E}([X-\mathrm{E}(X)][Y-\mathrm{E}(Y)])$$

La covarianza de X y Y es una indicación de cómo se relacionan X y Y entre sí, pero es difícil tener una sensación intuitiva de lo que significa tener un valor de covarianza particular. Para lograr lo anterior es más adecuado el coeficiente de correlación. Observe, sin embargo, que cuando X y Y son variables aleatorias independientes, $\sigma_{XY} = 0$.

El coeficiente de correlación de X y Y El coeficiente de correlación de X y Y se identifica generalmente como ρ_{XY} y se define como sigue

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{[\mathrm{StdDev}(X)]\,[\mathrm{StdDev}(Y)]} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

El coeficiente de correlación puede tomar valores de -1 a 1. Un valor positivo elevado sugiere que X y Y tienden a moverse juntos; esto es, cuando X es grande entonces Y tiende a ser también grande. Los valores negativos sugieren que X y Y se mueven en dirección opuesta; esto es, cuando X es grande Y tiende a ser pequeña. Si $\sigma_{XY} = 0$, se dice que no hay correlación entre X y Y.

La expectativa y la varianza de la suma de varias variables aleatorias Sea

$$Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Esto es, Z es la suma de N variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Entonces

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}(X_i)$$

Puesto en palabras, el valor esperado de la suma es igual a la suma de los valores esperados.

$$\mathrm{Var}(Z) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^{N} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Puesto otra vez en palabras, la varianza de la suma es igual a la suma de las varianzas, más dos veces la suma de las covarianzas de todas las parejas posibles de variables aleatorias.

APÉNDICE

B

Características de Excel que son útiles para la construcción de modelos

Éste es un resumen de las características que tiene Excel y que nos pueden servir para la construcción de modelos. Está dispuesto en un formato con una lista de tareas al margen, y al lado derecho aparecen los pasos para ejecutar esas tareas. Si en la lista usted ve una tarea que no le es familiar, o le gustaría hacer una revisión rápida, simplemente siga las instrucciones. En Ayuda en línea de Excel se encuentran resúmenes más completos sobre los temas.

Donde aparezca “Win” significa Excel de Windows instalado en computadoras compatibles con Windows, y “Mac” significa Excel de Macintosh instalado en computadoras compatibles con Apple. Aparte de algunas diferencias menores en apariencia, diálogos e interacciones con el sistema operativo, ambas versiones de Excel son prácticamente idénticas. Una excepción sería los métodos abreviados a través del teclado. Ambas versiones utilizan el método abreviado mediante combinaciones de dos teclas (y en ocasiones de tres), identificadas aquí como “nombre_de_la_primera_tecla” + “nombre_de_la_segunda_tecla”. En muchos casos, un método abreviado de teclado Win que incluya la tecla “Ctrl”, como “Ctrl+z”, se ejecuta en Mac sustituyendo Ctrl por la tecla Comando, esto es, la tecla “ ”, como “ +z”. La figura B.1 despliega una ventana típica de Excel. Sus componentes principales aparecen con etiquetas para una referencia futura.

CONFIGURACIÓN DE LA HOJA DE TRABAJO

Herramientas Opciones Ver

Cada una de las características mostradas en la figura B.2(a) se puede controlar al seleccionar el elemento “Opciones...” del menú Herramientas, y después se oprime la ceja. Ver en la figura B.2(b). Si se marca un cuadro, el elemento aparecerá en el despliegue en pantalla de la hoja de trabajo. (Para controlar la salida de *impresora* de características similares, como líneas de cuadrícula,

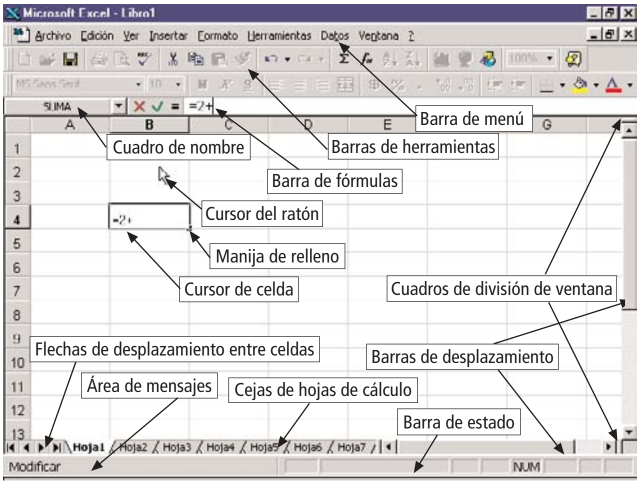
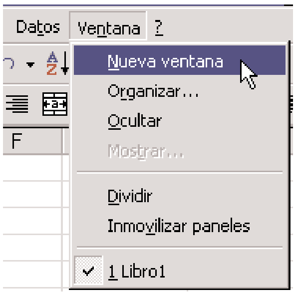


FIGURA B.1
Organización de la ventana de Excel



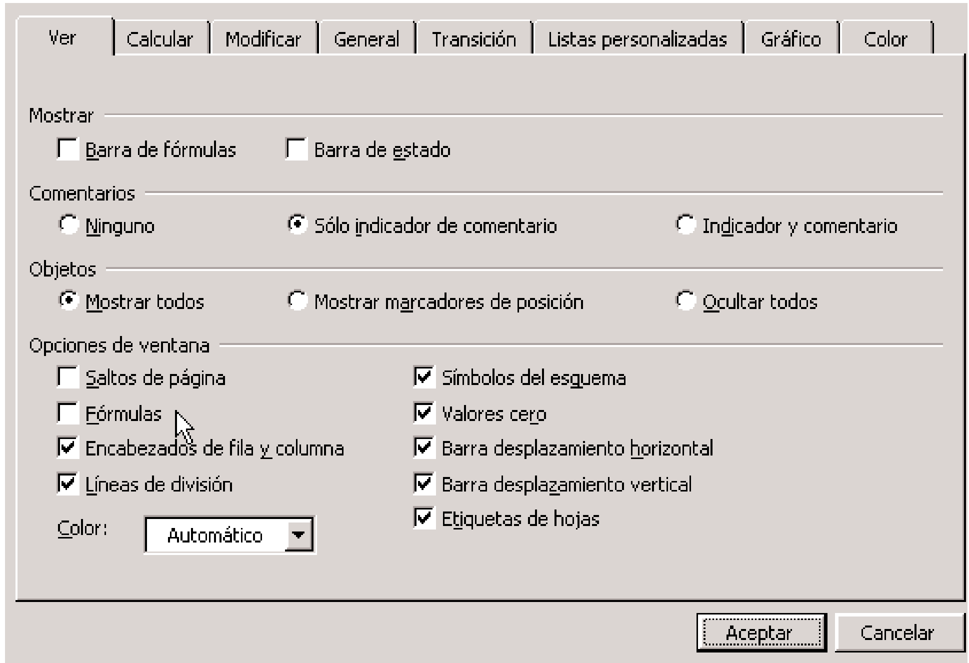


FIGURA B.2(a)

Opciones

FIGURA B.2(b)

Opciones Ver

utilice las opciones de Configurar página de Excel). En la figura aparecen las opciones predeterminadas. Al colocarse una marca en el cuadro Fórmulas, bajo el cursor en la figura B.2(b), todos los contenidos de celda de la hoja de cálculo serán remplazados por sus fórmulas, cuando sea aplicable.

Herramientas Opciones General...

Cada una de las características en la figura B3 puede controlarse al seleccionar el elemento "Opciones..." del menú Herramientas, y luego la ceja General. Se sugiere que utilice valores predeterminados similares a los de la figura.

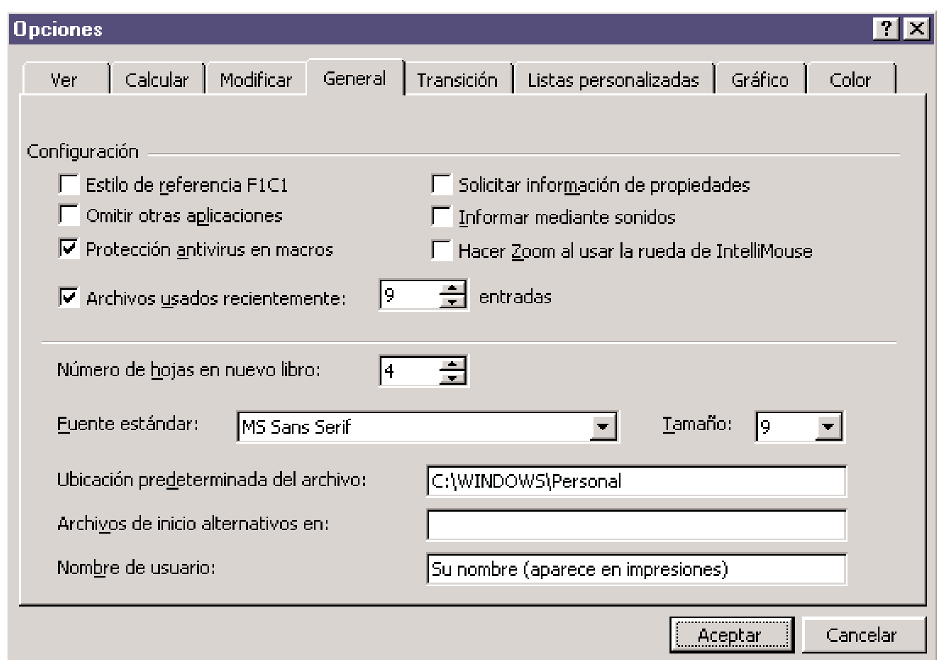


FIGURA B.3

Opciones General

Para Mac, se sugiere que "active" el comando Subrayar, como se muestra en la figura B.4. Es útil para métodos abreviados a través del teclado.

Herramientas Opciones Transición...

Cada una de las características de la figura B.5 puede controlarse al seleccionar la ceja Transición. Se sugiere que defina la tecla de menú alterna como el carácter "/", que le permitirá presionar "/", seguido por las letras subrayadas en los elementos de selección del menú, como un rápido método abreviado para escoger los menús. El tipo de archivo Excel sugerido para guardar asegura una mayor compatibilidad con formatos anteriores, a costa de crear archivos de tamaño mayor y de la pérdida de algunas características de Excel 97. Al quitar la marca en la opción "Teclas de desplazamiento para transición" se produce una aplicación más predecible de los métodos abreviados de teclado de Excel y es lo que se recomienda.

Herramientas Opciones Modificar...

Cada una de las características de la figura B.6 se puede controlar al elegir la ceja Modificar. Se sugiere que coloque una marca en la opción "Modificar en celda" para permitir la edición de las entradas de las celdas, sin necesidad de ir a la Barra de Fórmulas (sólo haga doble clic en el punto donde desea comenzar la edición en la celda). Quitando la marca en la opción "Mover selección después de Entrar" permite múltiples proyecciones "¿Qué pasaría si?" en una sola celda de entrada del modelo, sin necesidad de mover el cursor.

Herramientas Opciones Calcular...

Cada una de las características de la figura B.7 se puede controlar al seleccionar la ceja Calcular. Si usted crea tablas de datos grandes o incluso enormes modelos de hoja de trabajo, al seleccionar "Automático excepto tablas" o "Manual", respectivamente, mejorarán los tiempos de respuesta al editar hojas de trabajo. En cualquier caso, Excel le indicará cada vez que la hoja de cálculo necesite recalcular las tablas o las fórmulas, mediante la aparición de "Calcular" en la Barra de mensajes, como se ve en la figura B.8.

FIGURA B.4

Comando Subrayar "activado" en Macintosh.

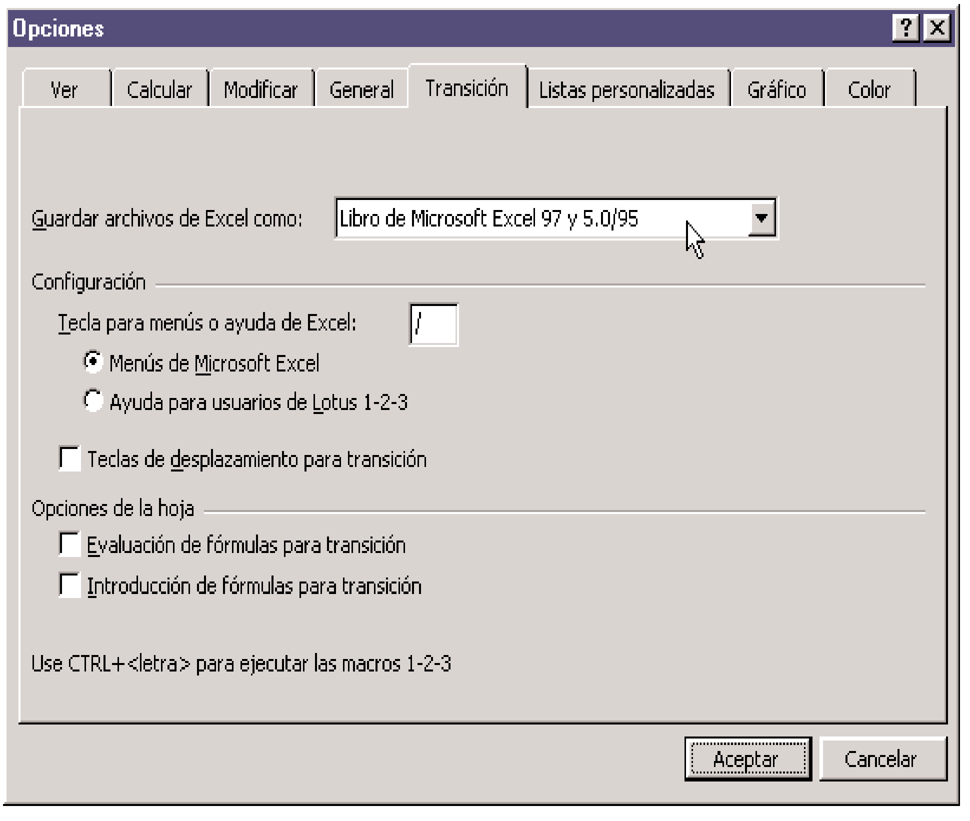


FIGURA B.5

Opciones Transición

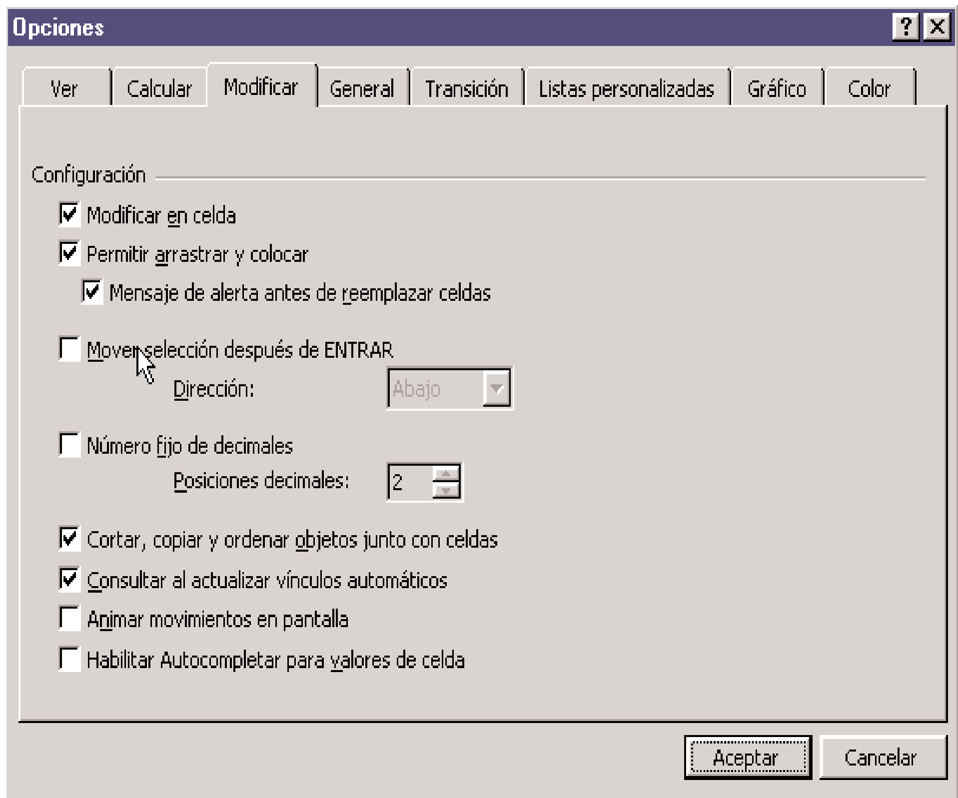


FIGURA B.6

Opciones Modificar

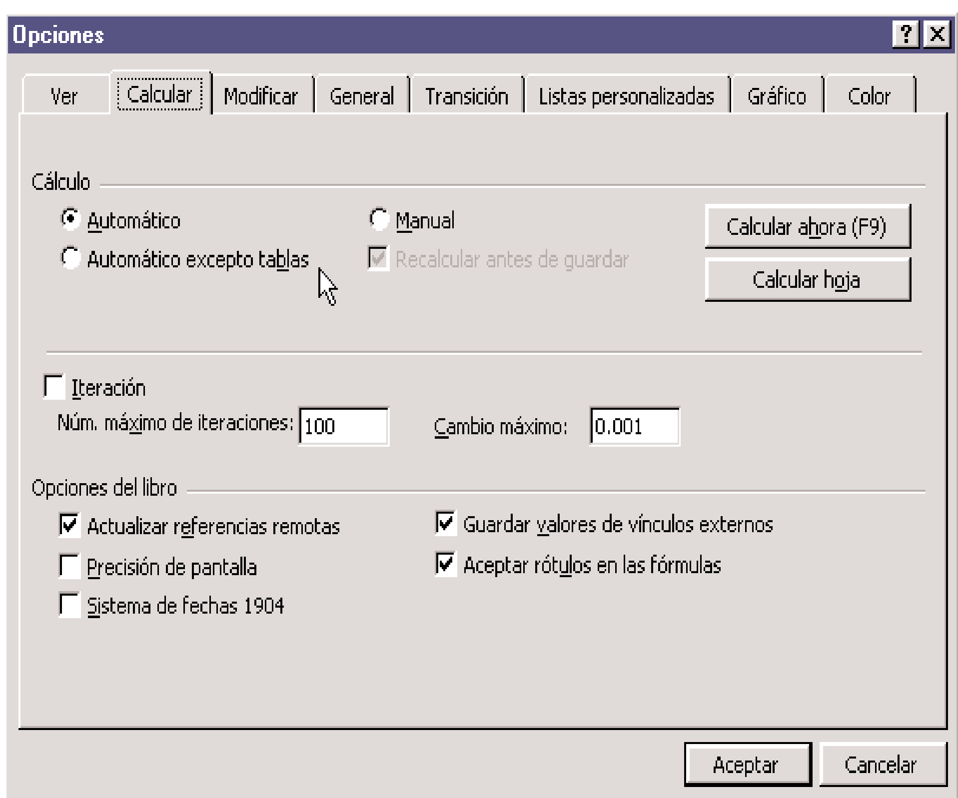


FIGURA B.7

Opciones Calcular

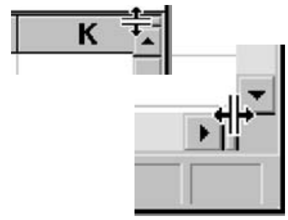
FIGURA B.8

Calculate Mensaje

Cuando sea necesario, la hoja de cálculo puede volverse a calcular manualmente oprimiendo la tecla F9 (Win o Mac), o mediante la combinación de teclas Ctrl+= (Win o Mac) o +=(Mac).

MANEJO DE VENTANAS Y HOJAS DE TRABAJO

Paneles múltiples



Una hoja de trabajo puede dividirse en dos paneles, colocando el cursor del ratón sobre uno de los cuadros Ventana, luego en Dividir hasta que cambie a la forma ✥ y después arrastrándolo dentro de la misma ventana. Si se repite esto en el otro cuadro de división de ventana se producen otros dos paneles, como se muestra en la figura B.9. Aparecerán barras de desplazamiento adicionales para permitir un desplazamiento independiente de filas y columnas por los paneles. Cuando se coloca el cursor del ratón sobre una barra de panel hasta que cambia a ✥ y después se hace doble clic, entonces se desaparecerá el panel. *Nota*: El comando Dividir del menú Ventana es equivalente a utilizar los cuadros de división de ventana.

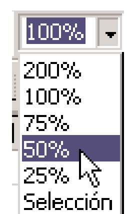
FIGURA B.9

Ventana de múltiples paneles

Inmovilización de paneles

El elemento Inmovilizar paneles del menú Ventana es similar al uso de los paneles en la figura B.9. En este caso, sin embargo, los paneles arriba y a la izquierda del cursor de celda no se pueden desplazar. Esta característica se utiliza a menudo para fijar en su lugar encabezados de columna y de fila mientras se desplaza en los grandes modelos que existen de hoja de trabajo. Coloque el cursor de celda en la celda superior izquierda del área que no se va a inmovilizar (y que se va a desplazar) y seleccione Inmovilizar paneles del menú Ventana. Las filas 1 y 2 y la columna A permanecerán inmóviles, en el ejemplo que se muestra en la figura B.10.

Zoom de hojas de trabajo



La herramienta Zoom (Acercamiento/alejamiento) puede utilizarse para aumentar o disminuir el tamaño del despliegue de la hoja de trabajo. Al seleccionar porcentajes pequeños se desplegarán más celdas de la hoja de trabajo en la ventana. Al seleccionar un rango de celdas y escoger de la lista el elemento Selección, se ajustará el aumento para que las celdas seleccionadas llenen exactamente la pantalla. Al seleccionar “100%” el despliegue de la hoja de trabajo volverá a su estado normal.

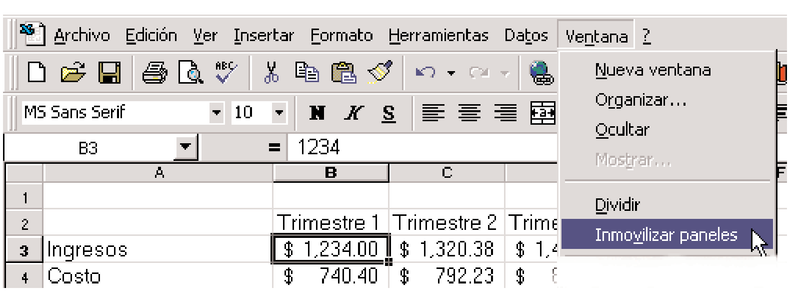


FIGURA B.10

Inmovilización de paneles

Ventanas múltiples

Al seleccionar el elemento Nueva ventana del menú Ventana, como se muestra en la figura B.11a, se abrirá una segunda ventana en el libro de trabajo activo, misma que puede ser movida y desplazada con independencia de la primera ventana. Sin embargo, ambas son ventanas que muestran el contenido del *mismo* libro de trabajo subyacente. Al seleccionar el elemento Organizar del menú Ventana, ahora mostrado en la figura B.11b, y hacer clic en la opción Mosaico del cuadro Organizar ventanas se dividirá la pantalla en áreas de igual tamaño, una para cada ventana, como se muestra en la figura B.12.

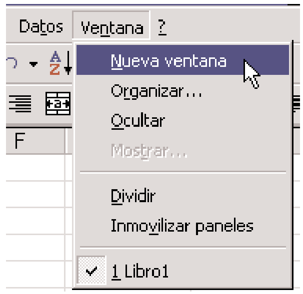


FIGURA B.11(a)

Creación de una nueva ventana

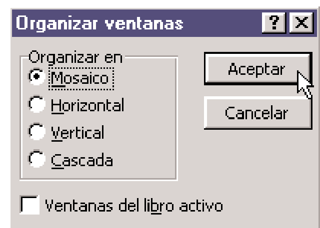


FIGURA B.11(b)

Organización de ventanas

El tener varias ventanas en un mismo libro de trabajo ofrece una flexibilidad adicional, por ejemplo, al desplegar otras hojas de trabajo de ese mismo libro de trabajo. Además, cada ventana puede dividirse en paneles, con una gran variedad de opciones de vista para modelos de hoja de trabajo grandes. En el ejemplo de la figura B.12, aparecen tanto las hojas de trabajo como sus fórmulas al hacer que la ventana del lado derecho muestre las fórmulas de la hoja de trabajo.

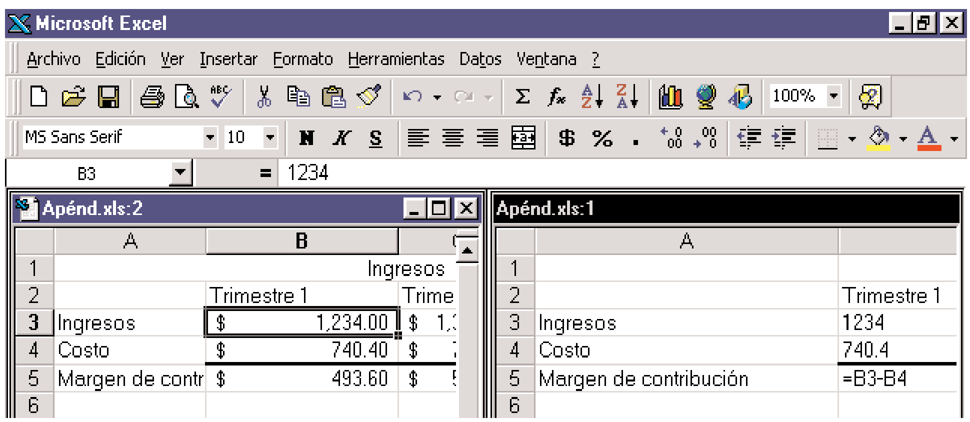


FIGURA B.12

Dos ventanas en mosaico

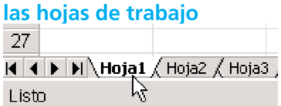
Cómo ocultar ventanas

Pueden ocultarse ventanas temporalmente para eliminarlas de la vista, seleccionando el comando Ocultar en el menú Ventana. El elemento Mostrar en el mismo menú invierte esta operación, para hacer aparecer de nuevo la ventana.

Cómo ocultar hojas de trabajo

Igual que las ventanas, las hojas de trabajo de un libro de trabajo se pueden ocultar por conveniencia. Al seleccionar el elemento "Hoja Ocultar" del menú Formato se ocultará la hoja de trabajo activa. El comando adyacente Mostrar en el mismo menú, invertirá la operación. (Véase la figura B.13.)

Cómo dar nuevo nombre a las hojas de trabajo



Al seleccionar "Hoja Cambiar nombre" en el menú Formato (o al hacer doble clic en la ceja de nombre de la hoja de trabajo), se hace posible editar el nombre predeterminado para la hoja de trabajo; vea la figura B.14.

SELECCIÓN DE CELDAS

Para seleccionar una fila o columna de celdas, haga clic en el encabezado de fila o columna, como se muestra en la figura B.15. Para seleccionar varias filas o columnas contiguas, haga clic y arrastre sobre los encabezados de fila o columna como se muestra en la figura B.16. Para seleccionar toda la hoja de trabajo, haga clic en el cuadro en blanco de la esquina superior izquierda de la cuadrícula de la hoja de trabajo, como se muestra en la figura B.17. Para seleccionar un rango de celdas, haga clic y arrastre sobre dicho rango, como se muestra en la figura B.18, o

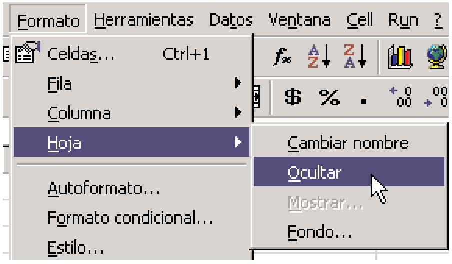


FIGURA B.13

Cómo ocultar la hoja de trabajo activa

FIGURA B.14

Cómo cambiar de nombre a la hoja de trabajo

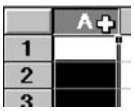


FIGURA B.15

Selección de una fila o columna

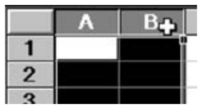


FIGURA B.16

Selección de varias filas o columnas contiguas

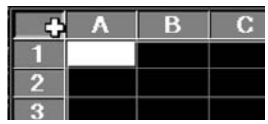


FIGURA B.17

Selección de toda la hoja de trabajo

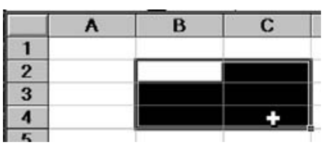


FIGURA B.18

Selección de un rango de celdas

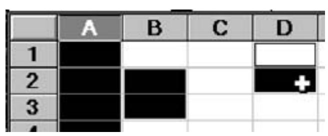


FIGURA B.19

Selecciones no contiguas

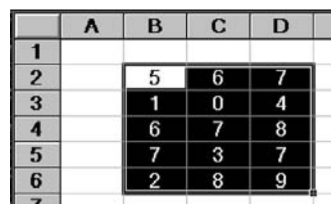


FIGURA B.20

Cómo seleccionar un rango rectangular

1. Seleccione la primera celda,
2. Oprima y mantenga oprimida la tecla Mayús (en otros teclados: SHIFT), o también oprima la tecla F8, para activar el modo Extender,
3. Oprima las teclas de flechas para extender la selección, y
4. Suelte la tecla Mayús, u oprima la tecla F8, para desactivar el modo Extender.

Para seleccionar celdas, filas o columnas no contiguas, haga clic y arrastre sobre el primer conjunto de celdas, filas o columnas. Después, mientras sostiene oprimida la tecla Ctrl (Win) o la tecla Comando (Mac), use el ratón para arrastrar sobre el siguiente conjunto de celdas, filas o columnas, y así sucesivamente (observe la figura B.19).

De manera alternativa,

1. Seleccione la primera celda o rango de celdas,
2. Oprima Mayús+F8 para activar el modo Agregar,
3. Seleccione la primera celda de la siguiente selección,
4. Oprima la tecla F8 para activar el modo Extender,
5. Repita los pasos 2, 3 y 4 anteriores para cada nueva selección, y
6. Oprima la tecla F8 para desactivar el modo Agregar.

Para seleccionar un rango rectangular, seleccione cualquier celda dentro del rango rectangular de celdas no vacías, como se muestra en la figura B.20. Oprima Ctrl+Mayús+8. (Utilice la tecla “8” del teclado principal, no del teclado numérico.)

Para mover el cursor de celda al borde de un rango, seleccione la primera celda dentro del rango, oprima Ctrl+FLECHA (Win o Mac), u oprima Comando+FLECHA (Mac) donde "FLECHA" es una tecla de flecha del teclado en la dirección deseada (izquierda, derecha, arriba o abajo). (La opción Teclas de desplazamiento para transición en Opciones deberá estar "desactivada" para que funcionen todas las teclas de flecha).

Para seleccionar celdas desde el cursor de celda hasta el borde del rango, seleccione la primera celda del rango, oprima Ctrl+Mayús+FLECHA (Win o Mac), o también oprima Comando+Mayús+FLECHA (Mac), donde "FLECHA" es la tecla de flecha del teclado en la dirección deseada (izquierda, derecha, arriba o abajo). (Deberá estar "desactivada" la opción Teclas de desplazamiento para transición en Opciones). Al repetir el comando con la dirección de tecla de flecha opuesta, se invertirá la dirección anterior, dependiendo de la tecla de FLECHA oprimida. Entonces, al oprimir Mayús+FLECHA aumentará la selección en la dirección de la FLECHA. Con el cursor de celda comenzando en la celda B2, en el ejemplo de la figura B.21 se oprimió Ctrl+Mayús+↓. Si se oprimiera entonces Mayús+←, la selección se extendería hasta incluir A2:B4.

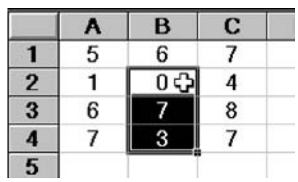


FIGURA B.21

Extensión de selecciones

Edición del contenido de las celdas

EDICIÓN DE CELDAS

La edición de la fórmula o contenido de una celda se realiza seleccionando la celda, haciendo clic en la Barra de fórmulas y suprimiendo (con la tecla Supr o Retroceso) o insertando caracteres (escribiendo). Oprima la tecla Intro (o haga clic en la herramienta ) para terminar la edición de la celda, u oprima la tecla ESC (o haga clic en la herramienta ) para cancelar la edición de la celda, volviendo al contenido anterior. De manera alterna, haga doble clic en la celda para editar directamente en el interior de la celda misma, como se muestra en la figura B.22 (disponible sólo si así se configura en Opciones Modificar; vea la figura B.6).

Haga clic en la herramienta  durante la entrada de fórmulas para insertar una función predefinida de Excel a través del Asistente para funciones, que se describirá más tarde.

Al hacer clic en el cuadro Nombre se insertará la última función utilizada [en el ejemplo de la figura B.23, se insertaría la función SI()]; al hacer clic en la flecha de despliegue del cuadro Nombre se presentará una lista de las funciones utilizadas recientemente, para su inserción en la fórmula.

FIGURA B.22

Edición de celdas

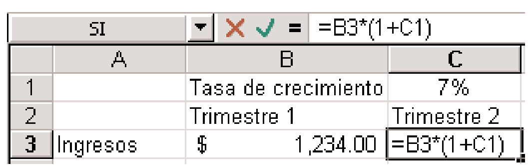
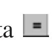


FIGURA B.23

Edición de fórmulas

Como se muestra en la figura B.24, al hacer clic en la herramienta  se abre la celda para edición de la fórmula y se despliega la barra Resultado de la fórmula. Cuando está a la vista, esta barra despliega el valor de la fórmula conforme usted la escribe, como se muestra en la figura B.25.

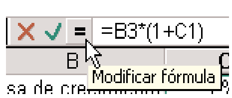


FIGURA B.24

Herramienta Modificar fórmula

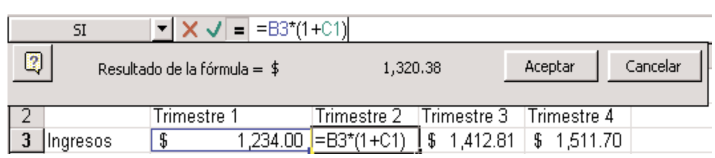


FIGURA B.25

Barra Resultado de la fórmula

En las fórmulas, las referencias absolutas de las celdas son identificadas mediante signos de dólar ($) antes del número de fila y/o antes de la letra de la columna. Por ejemplo, $E$5 es una referencia absoluta. Cuando se incluye en una fórmula que está siendo copiada o cortada, siempre se referirá a la misma celda E5, sin importar dónde se pegue la fórmula. Las referencias absolutas pueden aplicarse sólo a la fila o sólo a la columna. Por ejemplo, E$5 se referirá siempre a la fila 5, sin importar dónde esté pegada. De manera similar, $E5 siempre se referirá a la columna E, sin importar dónde esté pegada. Esto es útil cuando se utilizan los comandos Rellenar hacia abajo o Rellenar hacia la derecha. Los caracteres $ pueden ser escritos directamente en las fórmulas al escribir las referencias de celda, o usted puede resaltar la dirección o direcciones de celda de la fórmula y oprimir la tecla F4 (en Win) o la combinación de teclas Comando+t (Mac) para insertar automáticamente los caracteres $.

Referencias de celda absolutas

En las fórmulas, cuando no se utilizan caracteres $ en las direcciones de celda que aparecen en la fórmula, las referencias son relativas, lo que hace que Excel recuerde la referencia de celda relativa precisamente en la celda en la cual está contenida la fórmula o referencia. Cuando se utiliza una fórmula con referencias relativas y es copiada (a través del comando Rellenar o Copiar y Pegar), hace que Excel actualice esas referencias para que sean relativas en su nueva localización. Por ejemplo, si la fórmula en la celda G10 es =F10+G9, y esa fórmula es copiada a la celda G11, la fórmula en G11 se convierte en =F11+G10, porque cuando se copia se conservan las referencias relativas.

Referencias de celda relativas

En el menú Edición, o a través de Ctrl-x (Win) o Comando+x (Mac), o a través de la herramienta , el comando de cortar le permite retirar contenido y formato de una celda o rango de celdas seleccionados, o retirar el texto de la Barra de fórmulas al Portapapeles, por lo general como preparación para pegarlo en algún otro lado.

Cortar 

En el menú Edición, o a través de Ctrl-c (Win) o Comando+c (Mac), o a través de la herramienta , el comando copiar le permite copiar el contenido y formato de una celda o rango de celdas seleccionado, o copiar texto de la Barra de fórmulas del Portapapeles

Copiar 

En el menú Edición, o a través de Ctrl-v (Win) o Comando+v (Mac), o a través de la herramienta , el comando Pegar coloca una selección del Portapapeles comenzando en la celda activa, escribiendo sobre cualquier contenido de la celda y formato existente, o, si el punto de inserción está activo en la Barra de fórmulas, inserta texto del Portapapeles.

Pegar 

Si coloca el cursor sobre el borde de una selección y después hace clic y lo arrastra, la selección será movida al nuevo lugar, como si se hubiera cortado y pegado, como se muestra en la figura B.26. Si mantiene oprimido Mayús y hace clic y arrastra, será insertado en el nuevo sitio. Si mantiene oprimido Ctrl (Win) o Comando (Mac) y hace clic y arrastra, la selección será copiada y pegada.

Cómo mover/copiar un rango de celdas

Copiar imagen, es utilizado para insertar elementos de Excel como una "imagen" en otras aplicaciones. Seleccione el objeto gráfico o el rango de celdas que desea copiar como un objeto de imagen. Oprima la tecla Mayús y seleccione Copiar imagen del menú Edición. Aparecerá un cuadro de diálogo para seleccionar las opciones Copiar imagen. (Véanse las figuras B.27[a] y [b].)

Copiar imagen

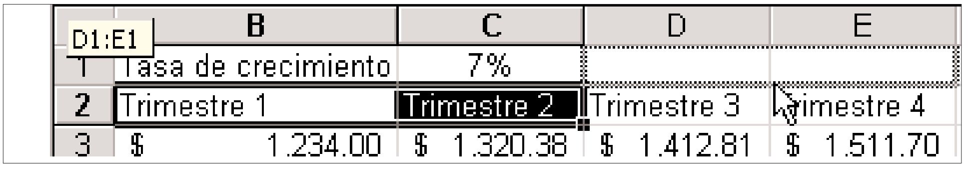


FIGURA B.26

Cómo mover o copiar celdas seleccionadas

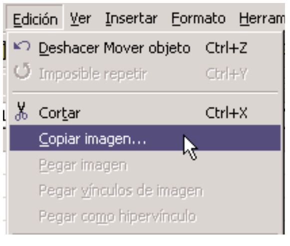


FIGURA B.27(a)

Copiar imagen

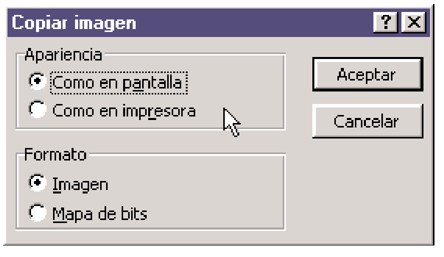


FIGURA B.27(b)

Opciones Copiar imagen

La opción “Como en pantalla” copia la imagen justo como aparece en la pantalla, incluyendo las líneas de cuadrícula (si existen) a otra hoja de trabajo o a otra aplicación, vía el Portapapeles. El formato “metatexto” predeterminado de Imagen requiere menos memoria, pero tal vez no imprima adecuadamente las fuentes en impresoras que carezcan de fuentes dimensionables si el objeto es vuelto a dimensionar. El formato opcional Mapa de bits requiere más memoria y tiene menor resolución, pero si el objeto es vuelto a dimensionar imprimirá adecuadamente en cualquier impresora.

La opción “Como en impresora” copia la imagen a otra hoja de trabajo o a otra aplicación vía el Portapapeles, como aparecería si fuera impreso. Las líneas de cuadrícula y los encabezados de fila y de columna también serán copiados, si se determina así la impresión en la opción Configurar página de la hoja de trabajo.

Cómo deshacer o rehacer un comando

La mayoría de los comandos de Excel pueden ser deshechos o vueltos a aplicar en otra selección, haciendo clic en una de las dos herramientas que se muestran, respectivamente. Las teclas abreviadas son Ctrl+z (Deshacer) y Ctrl+y (Repetir) para Win y Command+z (Deshacer) y Command+y (Repetir) para Mac. Las versiones más recientes de Excel aceptan varios niveles para los comandos Deshacer y Repetir; la lista de comandos aparecerá usando los botones de flecha de despliegue.

Menús abreviados

Cuando se hace clic en el botón derecho del ratón (Win) o cuando se hace clic en Comando+Opción+botón_del_ratón (Mac) se presenta un menú de comandos comunes. Dependiendo del sitio al que esté apuntando el cursor del ratón (celda, objeto, gráfica, barra de herramientas, encabezado de fila o columna, etcétera), se desplegará uno de varios menús abreviados. La figura B.28 muestra dos ejemplos, uno con comandos para celda y otro con comandos para columna.

CÓMO RELLENAR CELDAS

Rellenar hacia la izquierda/derecha/arriba/abajo

En el menú Edición, Rellenar es útil para copiar fórmulas y otros contenidos de celda a celdas adyacentes y a la izquierda/derecha/arriba/abajo de la(s) celda(s) fuente. (Véase la figura B.29.) Escriba la primera entrada, seleccione el rango de celdas a rellenar (incluyendo la primera entrada), y entonces del menú Edición seleccione Rellenar hacia la izquierda/derecha/arriba/abajo para rellenar el resto de las celdas seleccionadas.

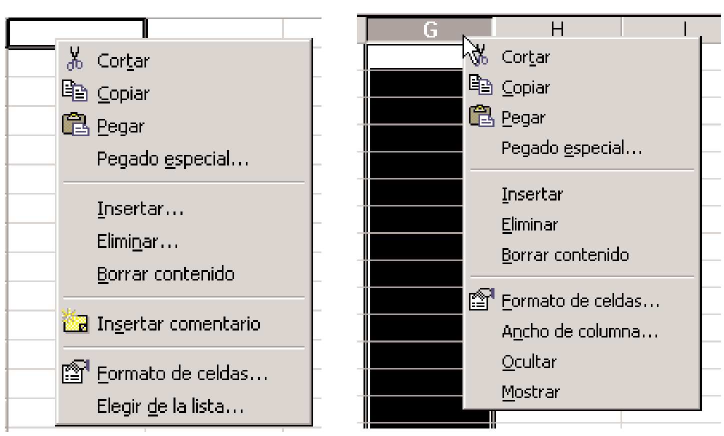


FIGURA B.28
Menús abreviados

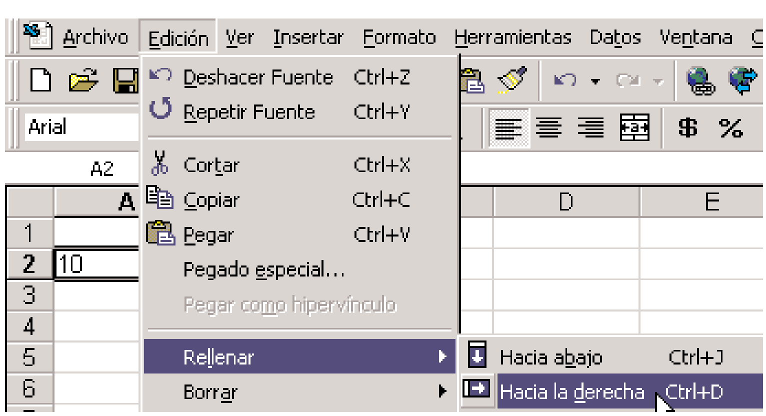


FIGURA B.29
Cómo rellenar celdas

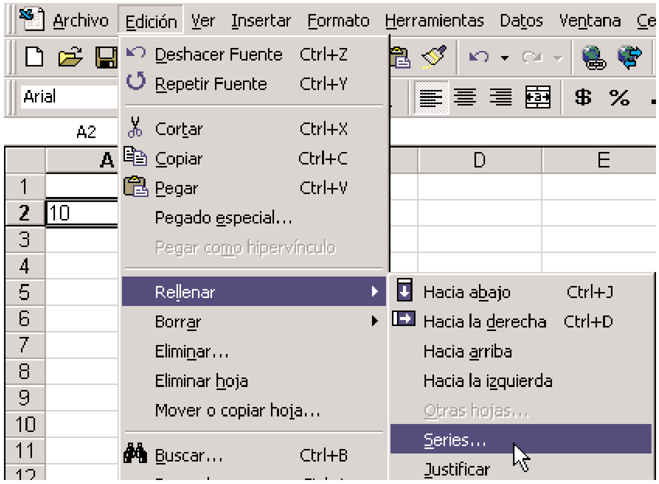


FIGURA B.30(a)
Rellenar Series

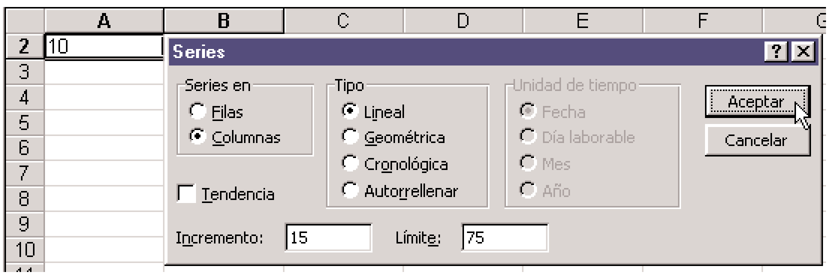


FIGURA B.30(b)
Opciones Rellenar Series

Rellenar Series

Siendo útil para copiar una progresión de valores a partir de la celda fuente, este comando rellena una fila o columna con números o fechas en un orden específico, como se muestra en la figura B.30(a). Seleccione la celda donde comenzará la serie, y seleccione "Rellenar Series..." del menú Edición.

Defina si la serie debe progresar en una fila o en una columna; el tipo de serie: lineal, de crecimiento, o de fecha, y si es de fecha, la unidad a usarse. Especifique el "Incremento" y el "Límite," y haga clic en Aceptar. De manera alternativa, primero resalte el rango de celdas a rellenar con la serie, luego omita el Límite en el cuadro de diálogo, y haga clic en Aceptar. (La mayoría de los rellenos de series comunes se puede manejar más fácilmente con el método abreviado Autorrellenar, que se describe a continuación.) El ejemplo en la figura B.30(b) crea una columna de valores comenzando por 10, incrementando cada entrada de fila por 15 y deteniéndose en 75.

Autorrellenar

Seleccione una o más celdas que contengan una serie parcial de datos. Mueva el cursor sobre la opción Rellenar en la parte inferior derecha de la selección, hasta que cambie a una cruz, como se muestra en la figura B.31(a).

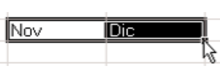


FIGURA B.31(a)
Autorrellenar

Después (en este ejemplo), haga clic y arrastre hacia la derecha para rellenar las celdas seleccionadas (escribiendo sobre el contenido anterior de todas las celdas por las que arrastre). Si ha seleccionado una serie de números reconocible o una serie común de entradas de texto, Excel hará el "Autorrelleno" del resto de la serie, como se muestra en la figura B.31(b).

FIGURA B.31(b)
Autorrellenar

Para evitar la opción Autorrellenar y simplemente copiar las celdas, oprima Ctrl al hacer clic y arrastrar. Si oprime Mayús mientras hace clic y arrastra, se insertarán nuevas celdas vacías, en vez de volver a escribir sobre las ya existentes. También, como se muestra en la figura B.31(c), si arrastra la opción Rellenar dentro del rango de la selección y después suelta, entonces el contenido de las celdas en gris se borrará.

FIGURA B.31(c)

Borrado de celdas

Autorrellenar puede aplicarse a filas o columnas completas. (Si selecciona una fila o una columna, la opción Rellenar se moverá a la primera celda.)

La tabla siguiente muestra ejemplos de la operación de Autorrellenar en celdas seleccionadas.

Datos seleccionados	*Series creadas*
1, 2	3, 4, 5, 6, ...
1, 3	5, 7, 9, 11, ...
100, 95	90, 85, ...
Lun	Mar, Mier, Jue, ...
2° Trim.	3er. Trim., 4° Trim., 1er. Trim., 2° Trim., ...
1er. Per.	2° Per., 3er. Per., ...
Texto1, TextoA	Texto2, TextoA, Texto3, TextoA, ...
Ene-98, Abr-98	Jul-98, Oct-98, Ene-99, ...
1, 3, 4	5.66, 7.16, 8.66, ... (tendencia de mejor ajuste)

FORMATO DE CELDAS

Altura de la fila

Mueva lentamente el cursor sobre la línea que separa los encabezados de fila, hasta que se convierta en una cruz,  (figura B.32). Cuando haya cambiado, haga doble clic para autoajustar la altura (ver la sección Autoajustar), o haga clic y arrastre la línea a la nueva altura de la fila deseada.

Para definir la altura de la fila en un rango donde hay varias, seleccione los encabezados de fila, y arrastre una de las líneas de separación de filas. Todas las filas seleccionadas asumirán la misma altura. Alternativamente, puede definir la altura de la fila (de una fila o de un rango de filas seleccionadas) escogiendo "Fila Alto..." del menú Formato (figura B.32) y escribiendo el valor de la altura deseada (en "puntos" o medida de fuentes). Escribir "0" en la altura es lo mismo que seleccionar el elemento "Fila Ocultar". (Al seleccionar "Fila Mostrar" se invierte esta última operación).

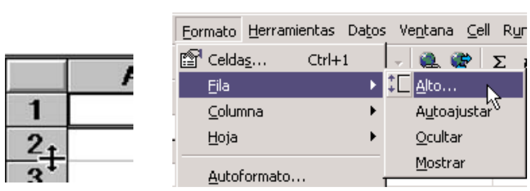


FIGURA B.32

Determinación de la altura de la fila

Ancho de la columna

Mueva lentamente el cursor sobre la línea que separa los encabezados de columna, hasta que se convierta en una cruz  (figura B.33). Cuando haya cambiado, haga doble clic para autoajustar (vea la sección Autoajustar que sigue), o haga clic y arrastre la línea al nuevo ancho de columna deseado.

Para definir el ancho de columna de un rango de varias columnas, seleccione los encabezados de columna, y arrastre una de las líneas de separación de columna. Todas las columnas seleccionadas asumirán el mismo ancho. Alternativamente, puede definir el ancho de columna (de una columna o de un rango de columnas seleccionadas) escogiendo "Columna Ancho..." del menú Formato (observe la figura B.33) y escriba el valor del ancho deseado (en cantidad de caracteres). Escribir "0" en el ancho de columna es equivalente a seleccionar el comando "Columna Ocultar". (Al seleccionar "Columna Mostrar" se invierte esta última operación.)

Autoajuste del ancho de la columna (Autoajuste del alto de la fila)

Mueva el cursor sobre la línea que separa los encabezados de columna hasta que se convierta en una cruz (figura B.33). Cuando haya cambiado, haga doble clic para dimensionar automáticamente la columna a un ancho igual al contenido de la celda más amplia en esa columna. O seleccione las celdas de interés en una columna y escoja el elemento "Columna Autoajustar a la selección" del menú Formato para ajustar la columna a un ancho igual al contenido de la celda seleccionada más amplia. (Estas operaciones, descritas para las columnas, funcionan de manera similar para cambiar la altura de las filas.)

Cómo dar formato a las celdas numéricas

Seleccione una celda, fila o columna, o seleccione un rango de celdas, filass o columnas, y si es aplicable, haga clic en una de las herramientas en la figura B.34 para aplicar estilos comunes

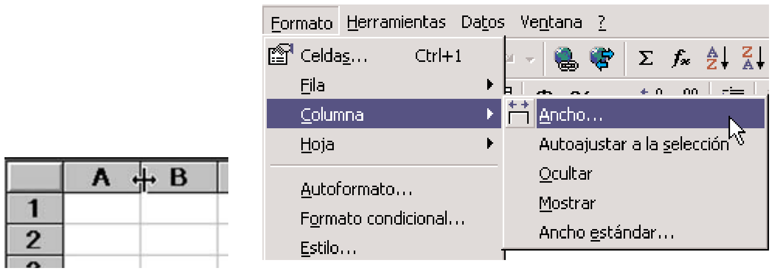


FIGURA B.33

Configuración del ancho de la columna

de formatos numéricos. Las dos herramientas de la derecha de la figura B.34 aumentan o reducen la precisión decimal desplegada en los números (el formato no altera la precisión interna de los números de Excel).

FIGURA B.34

Formato de celdas numéricas

Cómo cambiar las fuentes de la celda

Seleccione una celda, fila o columna, o seleccione un rango de celdas, filas o columnas, y haga clic en una de las herramientas en la figura B.35 para poner el contenido de las celdas en negritas, cursivas o subrayadas, o para seleccionar un elemento de fuente/tamaño de la lista adecuada.

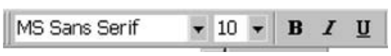


FIGURA B.35

Cómo cambiar la fuente de celda

Alineación de celdas

Seleccione una celda, fila o columna, y haga clic en una de las herramientas de la figura B.36 que definen la alineación.

FIGURA B.36

Herramientas de alineación de celda

La herramienta a mano derecha, que también se muestra en la figura B.37, combina las celdas seleccionadas y centra el contenido de la celda de la extrema izquierda en las celdas combinadas, lo cual es útil para leyendas. Combinar y centrar funciona también a través de filas. *Nota:* Para deshacer la operación de Combinar y centrar se debe utilizar el comando Formato de celdas, descrito más adelante.

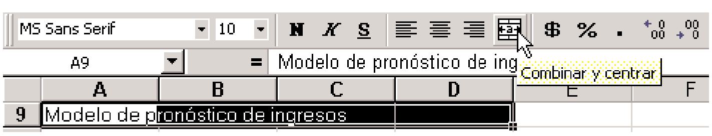


FIGURA B.37

Combinar y centrar a través de celdas

Bordes de celda

Seleccione una celda, fila o columna, o seleccione un rango de celdas, filas o columnas, y haga clic en una de las herramientas de la paleta de bordes desplegable que se muestra en la figura B.38 y que define estilos comunes de bordes. La última herramienta de borde que haya sido seleccionada se conservará como predeterminada para el próximo uso de la herramienta.

FIGURA B.38

Bordes de celda

Formato detallado de celdas

La figura B.39(a) muestra opciones de formato de celda más completas que las disponibles en la barra de herramientas. Seleccione una celda, fila o columna, o escoja un rango de celdas, filas o columnas, y seleccione "Celdas..." del menú Formato, o bien oprima Ctrl+1 (Win) o Comando+1 (Mac). En el cuadro haga clic en cada una de las cejas de formato deseadas, y seleccione la opción de formato dentro del cuadro.

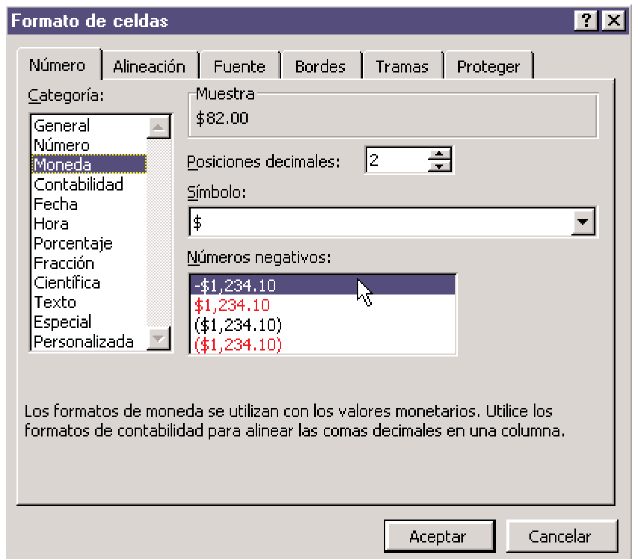


FIGURA B.39(a)

Opciones para formato detallado de celda

El formato de informes y la administración de modelos mejora si las leyendas o etiquetas largas *no* aparecen divididas entre celdas. Para leyendas largas utilice la ceja del cuadro Alineación para "Ajustar texto", es decir, poner cada leyenda dentro de su celda y, opcionalmente, para centrar las leyendas o títulos horizontal y verticalmente, como se muestra en el primer ejemplo de la figura B.39(b). *Nota*: Puede evitar el punto de salto de renglón de Ajustar texto y dar saltos manuales en el texto que se va a insertar oprimiendo Alt+Intro (Win) o también Opción+Comando+RETORNO (Mac) en otros lugares de la leyenda, como se muestra en el segundo ejemplo de la figura B.39(b).

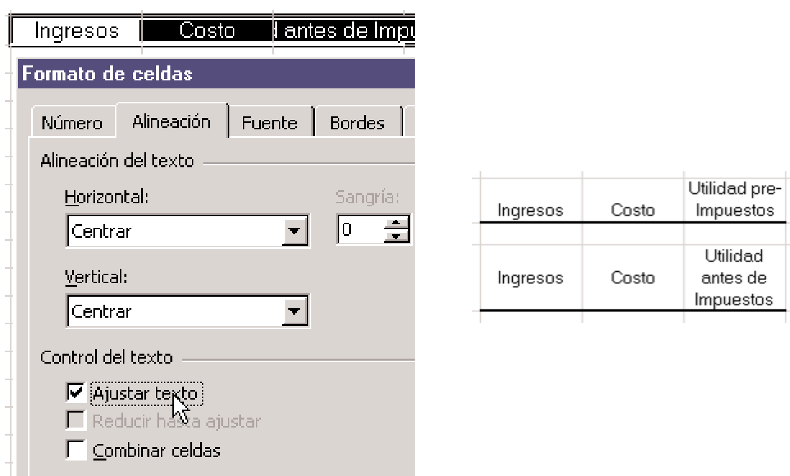


FIGURA B.39(b)

Cómo ajustar el renglón de las leyendas

Las celdas se pueden ajustar o combinarse en dirección vertical; un truco que a menudo resulta en modelos más compactos, como se muestra en la figura B.40.

Formatos de celda personalizados

Puede especificarse una variedad de formatos personalizados, como se ejemplifica en el formato de dólar con decimales de la figura B.41. El valor Muestra en el cuadro de diálogo indica la apariencia de las celdas seleccionadas. Los campos separados por ";" se aplican a positivo; negativo; y valores cero, respectivamente. Un formato personalizado ";;;" no desplegará el contenido de la celda. Excel también acepta expresiones condicionadas, encerradas en "[]" para seleccionar formatos alternativos. Asimismo, se puede seleccionar Formato condicional (en el menú Formato) para alterar la apariencia de las celdas según los valores que contengan. Remítase a la Ayuda de Excel para conocer ejemplos de las muchas opciones de formato disponibles.

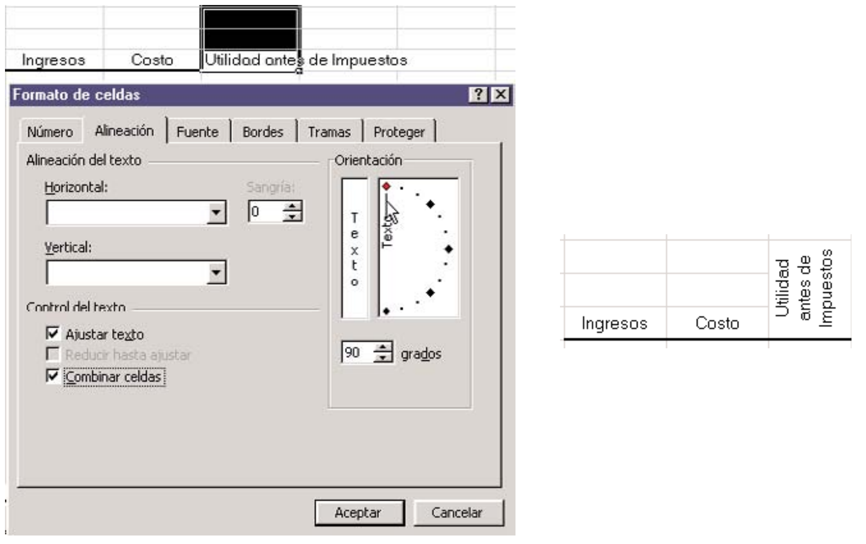


FIGURA B.40

Celdas ajustadas y combinadas verticalmente

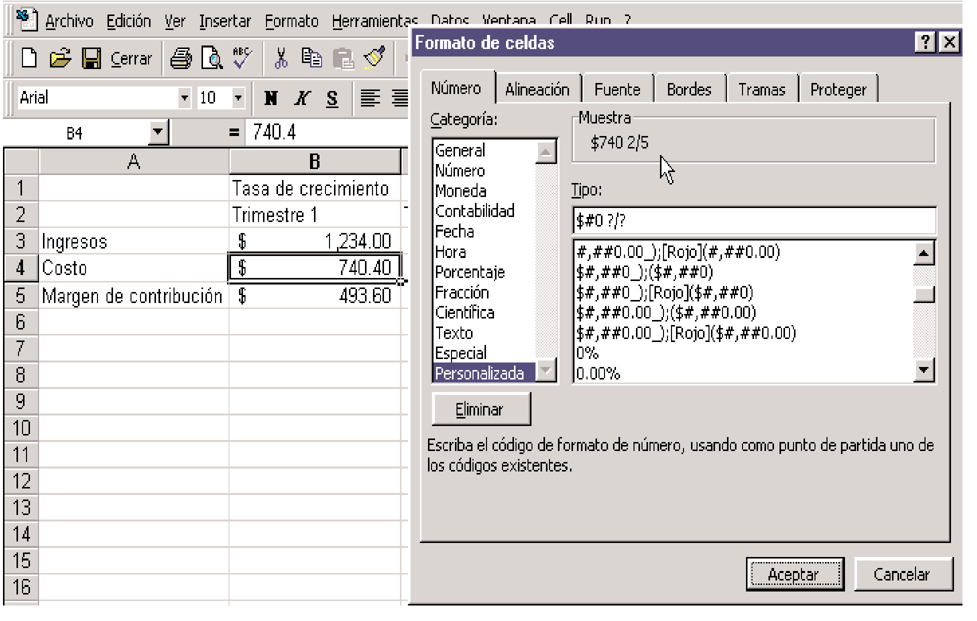


FIGURA B.41

Formato personalizado

Vestidura de celda

En un formato personalizado, una secuencia de caracteres entre comillas puede insertarse antes o después de cualquier campo, como se muestra en la figura B.42. Conocidos como “vestidura de celda”, estos caracteres serán desplegados junto con otra información de formato de la celda. Las vestiduras de celda y los formatos condicionales pueden utilizarse para la validación de datos, como se observa en los ejemplos siguientes. La primera columna se refiere a la entrada de celda y la segunda columna muestra cómo será desplegada.

Entrada de celda	Formato personalizado: $0.00;"Escriba un número positivo";"-"0"-"
123	$123.00
-123	Escriba un número positivo
0	-0-

Entrada de celda	Formato personalizado: [>1000]"Demasiado grande "0.00;[<100]0.00" Demasiado pequeño";0.00
1002	Too Big 1002.00
-10	-10.00 Too Small
333	333.00

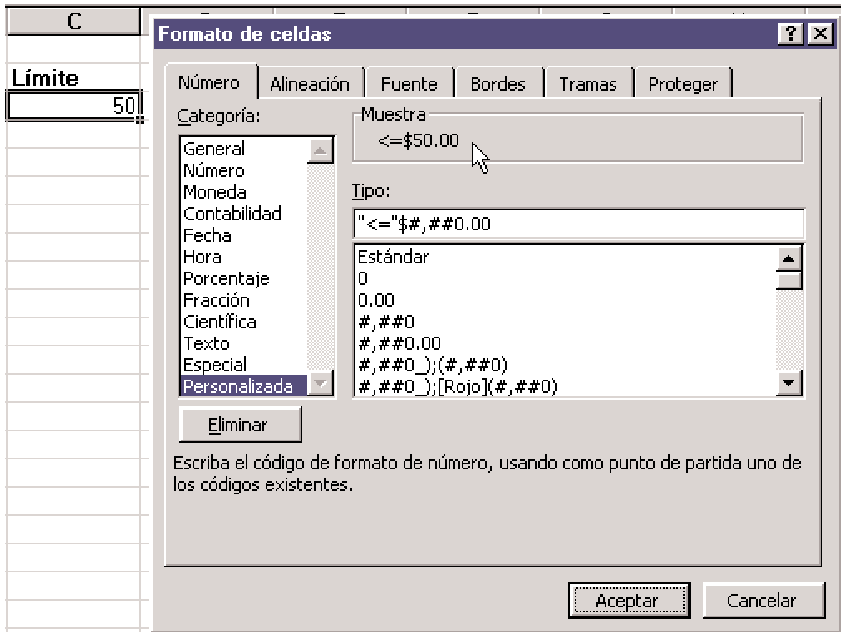


FIGURA B.42
Vestidura de celdas

Copiar Formato

Seleccione una celda con el formato deseado, haga clic en la herramienta Copiar formato y arrastre sobre un rango de celdas, para aplicarle el formato de la celda seleccionada. Para aplicar el formato de la celda en muchos lugares diferentes, haga doble clic en la herramienta Copiar formato. (Cuando haya terminado, cancele el proceso haciendo clic de nuevo sobre la herramienta.)

MATRICES DE CELDAS

Definición

Una matriz es simplemente un rango de celdas adyacentes en una hoja de trabajo de Excel. La notación de una matriz incluye la esquina superior izquierda, seguida por dos puntos(:), y luego por la dirección de la esquina inferior derecha. Por ejemplo, "A1:B3" denota una matriz, que tiene dos columnas de ancho y tres filas de largo. Esta matriz comienza en la celda A1, incluye las celdas A2, A3, B1, B2 y termina con la celda B3. Muchas funciones de Excel aceptarán matrices, esto es, rangos de celdas, como argumento de entrada, dado que el cálculo final produce un solo valor para la celda, como "=SUMA(A1:B3)", lo que sumará el contenido en las seis celdas en el rango dado.

La función SUMAPRODUCTO

La función SUMAPRODUCTO multiplica las celdas correspondientes en las matrices dadas (de igual tamaño) y devuelve la suma de esos productos, de ahí el nombre SUMAPRODUCTO. (Véase la figura B.43.) La fórmula se escribe dentro de la celda con la forma

=SUMAPRODUCTO(matriz_1,matriz_2,...)

donde matriz_1 y matriz_2 son las matrices cuyas celdas correspondientes usted desea multiplicar entre sí y después sumar los resultados. Los argumentos de la matriz deben tener las mismas dimensiones; esto es, la misma cantidad de filas y columnas de cada matriz (de lo contrario, SUMAPRODUCTO devolverá el mensaje de error "#VALOR!"). Por ejemplo, en la figura B.43, "P1, P2, P3" es el precio pagado por cada uno de los artículos y "Q1, Q2, Q3" es la cantidad correspondiente a cada artículo comprado. El Costo total es la suma de los tres cálculos "precio multiplicado por cantidad" correspondientes, esto es, 3*2 + 4*7 + 8*6. Especialmente en matrices más grandes, es más eficiente utilizar los rangos de las celdas en la función SUMAPRODUCTO que escribir una sola fórmula larga que contenga los cálculos intermedios. *Importante:* SUMAPRODUCTO considera las celdas de la matriz que no son numéricas como si contuvieran ceros.

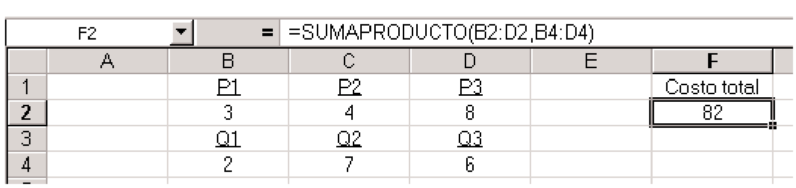


FIGURA B.43
Función SUMAPRODUCTO

La función BUSCARV

La función BUSCARV (la función BUSCARH es similar) se utiliza para asociar un valor dado con otro valor, según la definición dada en la matriz de celdas que comprende la tabla. La función BUSCARV tiene la siguiente sintaxis:

BUSCARV(valor_buscado; matriz_de_comparación; indicador_columnas; ordenado)

donde " valor_buscado" es el valor de entrada, " matriz_de_comparación" es la tabla de datos, " indicador_columnas" es el número de la columna donde se devolverán los valores resultantes, y si está presente, el valor FALSO de "rango_buscado" significa que el número a encontrar debe coincidir exactamente.

Los datos en la figura B.44 representan tasas de pólizas de seguros de automóvil para automovilistas metropolitanos y de pequeñas ciudades, en función de la edad del conductor. El rango B3:D7 en el ejemplo tiene el nombre "Tabla".

	B	C	D
2	Edad	Ciudad	Pueblo
3	16	$ 714.00	$ 630.00
4	18	$ 630.00	$ 588.00
5	21	$ 441.00	$ 420.00
6	25	$ 420.00	$ 420.00
7	60	$ 462.00	$ 462.00

FIGURA B.44

Ejemplo BUSCARV

Nota: Si no se especifica, "rango_buscado" está en VERDADERO de forma predeterminada; esto es, no se requiere una coincidencia exacta. En este caso predeterminado, los valores de la primera columna, B, deben aparecer en orden ascendente.

BUSCARV(16,Tabla,3) es igual a 630; esto es, un conductor de 16 años en un pueblo pequeño paga $630 por el seguro del automóvil.

BUSCARV(23,Tabla,2) es igual a 441; esto es, un conductor de 23 años en una gran ciudad pagará $441 por el seguro del automóvil. (En este ejemplo cualquier valor_buscado entre 21 y 24.999999 dará como resultado $441.)

BUSCARV(65,Table,3) es igual a 462. (En este ejemplo cualquier valor_buscado igual o mayor a 60 dará como resultado $462.)

BUSCARV(15,Tabla,2) es igual a #N/A, porque 15 es menos que el valor más pequeño de la columna B.

BUSCARV(23,Tabla,2,FALSO) es igual a #N/A, porque "rango_búsqueda" en FALSO requiere una coincidencia de edad perfecta.

Fórmulas matriciales: resultados de varias celdas

Como se vio en los ejemplos anteriores, una fórmula puede aceptar un rango de celdas, es decir una matriz, como entrada para el cálculo. Desafortunadamente, al construir las fórmulas es fácil destruir esta idea sencilla del uso de matrices de referencias de celdas. Por ejemplo, suponga que en vez de usar "=SUMA(A1:B3)" para sumar los seis valores de las celdas, desea calcular la "suma de los cuadrados", es decir, primero quiere elevar al cuadrado el contenido de las seis celdas, y después sumar esos valores cuadrados. La fórmula obvia "=SUMA(A1:B3^2)" no funcionará —Excel devolverá un mensaje de error "#VALOR!"— porque la operación intermedia de elevación al cuadrado (...^2) no acepta un argumento en forma de matriz. Excel aceptará construcciones semejantes si se configura la fórmula de la celda como una "fórmula matricial". Las fórmulas matriciales generalizan la noción de presentar las matrices de celdas como entrada para cálculos de fórmulas.

Una fórmula se configura como matricial oprimiendo las teclas Ctrl+Mayús al oprimir la tecla Intro para completar la entrada de la fórmula. Excel señalará la presencia de una fórmula matricial colocando corchetes a ambos lados de la misma. En el ejemplo anterior, la suma de los cuadrados de la matriz se puede calcular correctamente por medio de una fórmula matricial "{=SUMA(A1:B3^2)}".

Recuerde: Para crear una fórmula matricial, *debe* oprimir las teclas Ctrl+Mayús mientras oprime la tecla Intro para completar la entrada de la fórmula, *y* después, cada vez que edite la fórmula. *No* introduzca usted mismo las llaves.

Fórmulas matriciales: resultados de una sola celda

Además de permitir las matrices de celdas como entrada de fórmula, las fórmulas matriciales se utilizan también para calcular una matriz de resultados de fórmula; esto es, que una matriz de resultados sea almacenada en un rango de celdas objetivo. Aunque proporcionan los mismos resultados que si se copiara una fórmula normal a todas las celdas del rango objetivo, las fórmulas matriciales requieren menos memoria, calculan más rápido y son más fáciles de utilizar y mantener, especialmente en modelos grandes.

Para usar fórmulas matriciales con el fin de producir matrices de resultados, (1) seleccione el rango de celdas objetivo y tenga en cuenta que cada una de ellas recibirá uno de los valores de resultado de la matriz calculada; (2) cree la fórmula de la primera celda escribiendo y/o haciendo clic y arrastrando, como siempre; y (3) oprima las teclas Ctrl+Mayús mientras oprime Intro para terminar la entrada de la fórmula. Excel aplicará la fórmula a todas las celdas objetivo seleccionadas, utilizando los valores apropiados de cualesquiera rangos de celdas de entrada en la fórmula, si existen. Por ejemplo, en la figura B.45 fue seleccionado el rango de celdas objetivo B5:E5, y se escribió una sola fórmula de sustracción utilizando los rangos como argumentos.

FIGURA B.45

Ejemplo de fórmula matricial

SI = =B3:E3 B4:E4

	A	B	C	D	E
1		Tasa de crecimiento	7%		
2		Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
3	Ingresos	$ 1,234.00	$ 1,320.38	$ 1,412.81	$ 1,511.70
4	Costo	$ 740.40	$ 792.23	$ 847.68	$ 907.02
5	Margen de contribución	=B3:E3-B4:E4			

Se terminó la entrada de la fórmula sosteniendo oprimidas las teclas Ctrl+Mayús mientras se oprimía la tecla Intro, lo que hace que Excel evalúe la fórmula de cada celda objetivo seleccionada en el rango de resultados B5:C5, como se muestra en la figura B.46. *Recuerde:* Para utilizar fórmulas matriciales, deberá oprimir las teclas Ctrl+Mayús mientras oprime la tecla Intro cada vez que en el futuro edite esa fórmula matricial; de lo contrario, se convertirá en una fórmula normal (o dará un mensaje de error). Tampoco puede editar la fórmula para cualquier subconjunto de celdas en el resultado de la matriz; la edición sólo es permitida para el resultado total de la misma.

FIGURA B.46

Ejemplo de la fórmula matricial completa

D5 = {=B3:E3-B4:E4}

	A	B	C	D	E
3	Ingresos	$ 1,234.00	$ 1,320.38	$ 1,412.81	$ 1,511.70
4	Costo	$ 740.40	$ 792.23	$ 847.68	$ 907.02
5	Margen de contribución	$ 493.60	$ 528.15	$ 565.13	$ 604.68

Un ejemplo de fórmula matricial

Suponga que desea sustraer cada celda en la columna a la derecha de la figura B.47 de cada celda de la fila inferior, un requerimiento de varios modelos de optimización de redes que se vio en el capítulo 6.

FIGURA B.47

Un ejemplo de matriz

				10
				15
				35
				40
22	24	39	42	

El procedimiento normal utiliza la opción Transponer en el cuadro de diálogo Pegado especial del menú Edición para copiar la columna a mano derecha como una nueva fila pegada, y después lleva a cabo la sustracción de las celdas de las dos filas. Las fórmulas matriciales pueden hacer esto en una sola operación. Primero, resalte las celdas de resultado, B19:E19, y después cree la fórmula en la primera celda, B19, como se muestra en la figura B.48.

FIGURA B.48

Otro ejemplo de fórmula matricial

	B	C	D	E	F
14					10
15					15
16					35
17					40
18	22	24	39	42	
19	=B18:E18-TRANSPONER(F14:F17)				

Complete la fórmula oprimiendo Ctrl+Mayús mientras oprime la tecla Intro para producir el resultado de matriz en todas las celdas seleccionadas, como se muestra en la figura B.49.

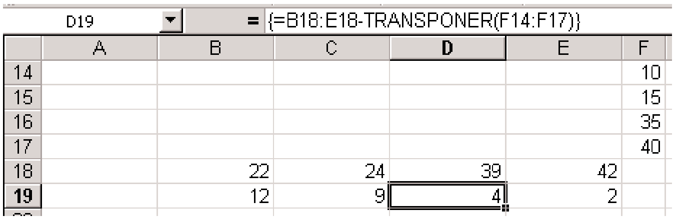


FIGURA B.49

Ejemplo de fórmula matricial completa

CÓMO DAR NOMBRE A LAS CELDAS

Cómo dar nombre a rangos de celdas

Seleccione la celda o el rango de celdas al que desea dar nombre, y seleccione "Nombre Definir..." del menú Insertar, como se muestra en la figura B.50.

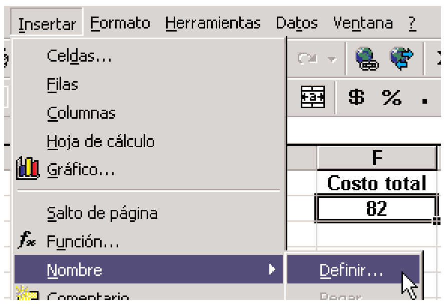


FIGURA B.50

Cómo dar nombre a una celda o rango de celdas

Excel dará una aproximación del nombre deseado si hay una celda cerca que contenga etiquetas de texto. En los nombres no están permitidos espacios (ni caracteres especiales), y por eso, a veces se utiliza un carácter de subrayado, en vez de espacio, como en "Costo_total" de la figura B.51. Haga clic en el botón Agregar para sumar el nombre a la lista de nombres ya definidos. Observe que los nombres son globales para un libro de trabajo; esto es, cada nombre definido tiene el nombre de su hoja de trabajo antes de la referencia o referencias de celda, de forma que se pueda hacer referencia a un nombre en una hoja de trabajo desde una celda de fórmula de otra hoja de trabajo.

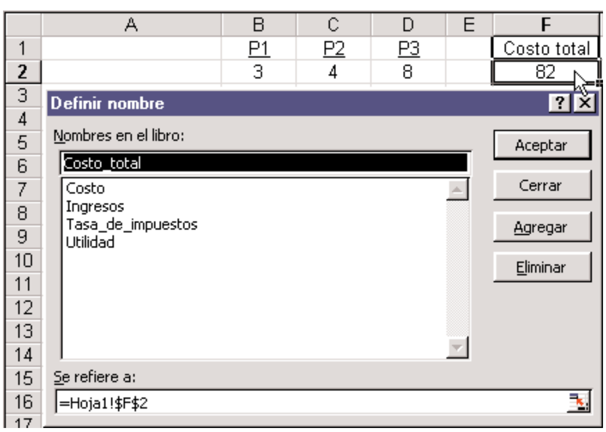


FIGURA B.51

"Costo_total" se refiere a la celda F2 en Hoja1

Alternativamente, para definir un nombre, seleccione la celda o celdas, y directamente en el cuadro Nombre escriba el nombre (figura B.52).

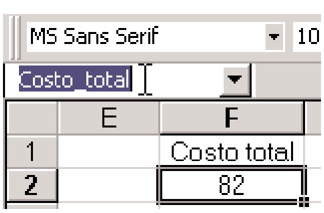


FIGURA B.52

El cuadro Nombre

Creación de Nombres

Si en las celdas adyacentes ya existen etiquetas de columna (o de fila), el nombre de las celdas puede darse directamente seleccionando las celdas y escogiendo "Nombre Crear..." del menú Insertar. (Véase la figura B.53.)

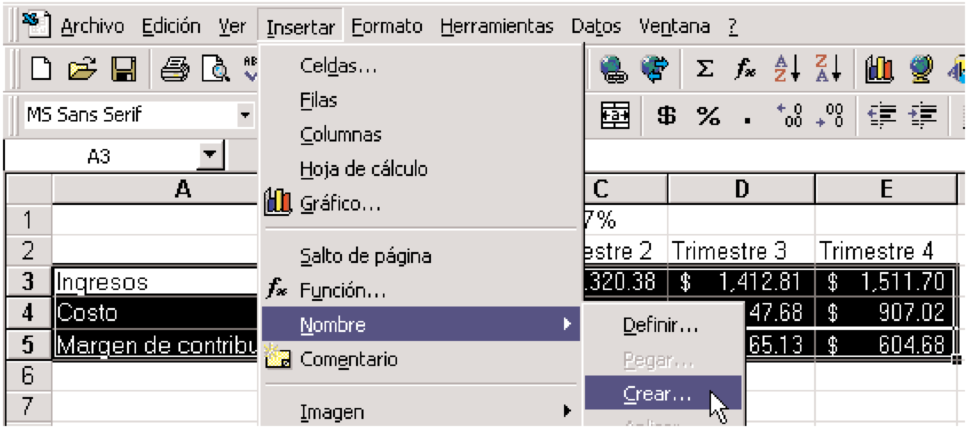


FIGURA B.53

Comando "Nombre Crear..."

Confirme o borre la propuesta de Excel en función a la localización de la etiqueta, como se muestra en la figura B.54. Al crear los nombres, Excel remplazará los espacios por subrayados, y desechará caracteres especiales. Observe que todos los nombres de todas las hojas en un libro de trabajo dado aparecerán listados en el cuadro de diálogo Definir nombre.

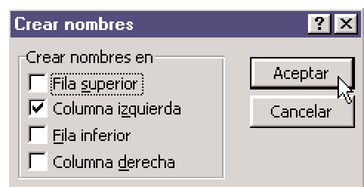


FIGURA B.54

Propuesta de Excel para la localización de los nombres

Uso de nombres en fórmulas

El uso de nombres hará que sus fórmulas sean más fáciles de comprender y ayudarán a documentar un modelo (figura B.55). Para utilizar un nombre previamente definido, puede escribirlo en forma directa, o seleccionarlo del cuadro Nombre asegurando así que quede definido y escrito correctamente.

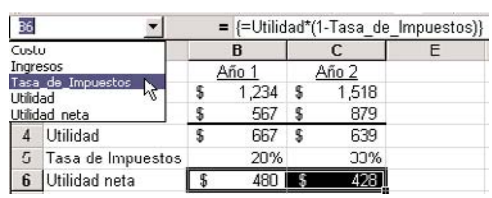


FIGURA B.55

El uso de nombres en fórmulas

Pegar lista de nombres

Para documentación, se puede pegar en la hoja de trabajo una lista de todos los nombres definidos, así como sus referencias de celda (figura B.56).

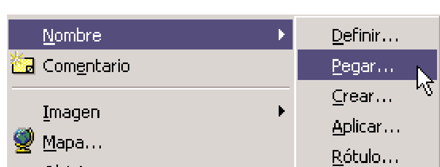


FIGURA B.56

Pegar lista de nombres

Primero, seleccione una celda en una región no utilizada de la hoja de trabajo, escoja el elemento "Nombre Pegar..." del menú Insertar y haga clic en el botón Pegar lista del cuadro de diálogo Pegar nombre (figura B.57.)

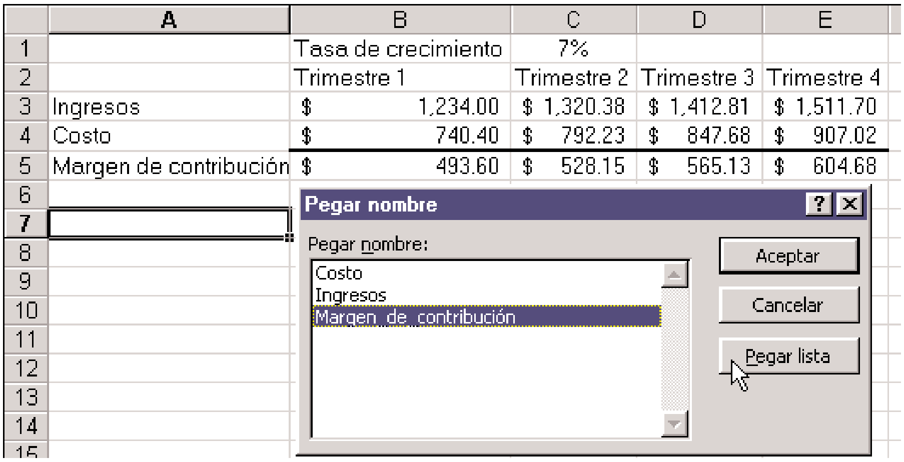


FIGURA B.57

Cuadro de diálogo Pegar nombre

En la hoja activa se pegará una lista de todos los nombres definidos en el libro de trabajo. Cada nombre incluye el nombre de la hoja de trabajo a la que hace referencia antecediendo el rango definido, a fin de evitar ambigüedades (figura B.58).

7	Margen_de_contribución	='Modelo Financiero'!$B$5:$E$5
8	Costo	='Modelo Financiero'!$B$4:$E$4
9	Ingresos	='Modelo Financiero'!$B$3:$E$3

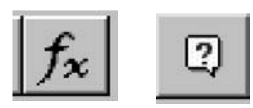
FIGURA B.58

Lista pegada de nombres definidos

ASISTENTES

Haciendo clic en la herramienta Pegar función se obtiene documentación detallada sobre las numerosas funciones interconstruidas en Excel (figura B.59). Haga clic en el botón Ayuda si desea documentación adicional sobre cualquier función seleccionada.

Asistente para funciones



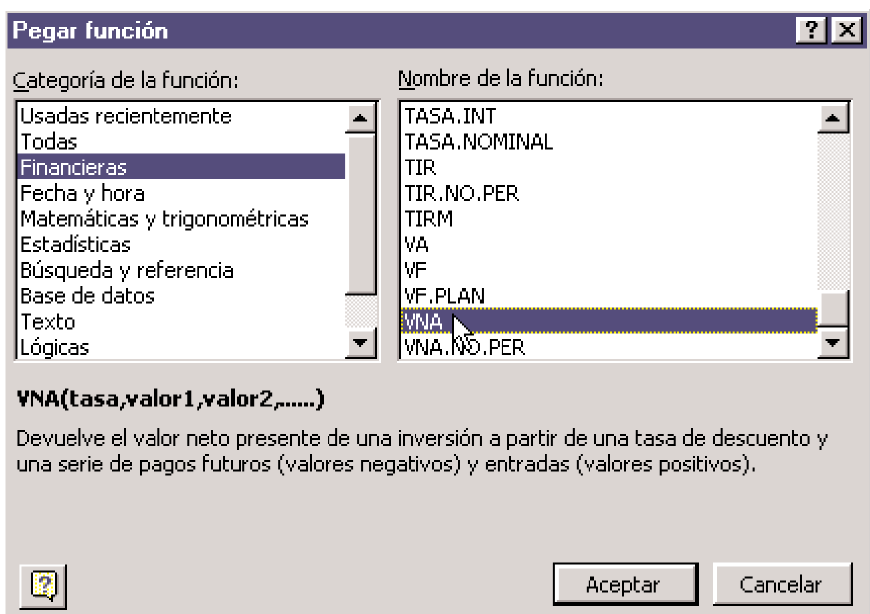


FIGURA B.59

Funciones interconstruidas en Excel

Al hacer clic en Aceptar se pega la función deseada en la barra de fórmulas y se abre la barra Resultado de la fórmula, como se muestra en la figura B.60. Aparecen listados los argumentos (los obligatorios están en negritas), y en el cuadro de diálogo se pueden insertar valores o rangos de celdas de muestra, a fin de elaborar la fórmula y ver el resultado calculado.

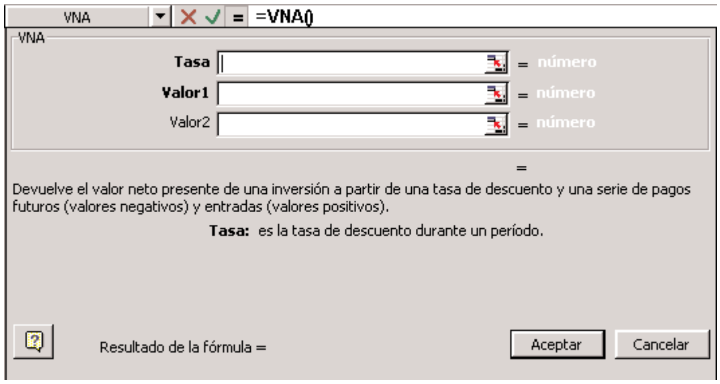


FIGURA B.60

Barra Resultado de la fórmula de la función VNA

Asistente para gráficos

Los gráficos (así llamados) en Excel quedan mejor utilizando el Asistente para gráficos, como se muestra en la figura B.61: (1) seleccione el rango de celdas de datos a graficar, (2) haga clic en la herramienta Asistente para gráficos y (3) siga los pasos de los cuatro cuadros de diálogo del Asistente para gráficos. Si desea documentación detallada de cualquier cuadro de diálogo, haga clic en el botón Ayuda.

Los gráficos a través del Asistente para gráficos se facilitan si la primera columna contiene los datos de "Eje de las *X*" (cuando cada serie de datos es una columna), o si la primera fila contiene los datos "Eje de las *X*" (cuando cada serie de datos es una fila). Aunque se puede trabajar con otras presentaciones, por lo general, antes de hacer clic en el Asistente para gráficos es más provechoso reorganizar los datos y colocar la leyenda "Eje de las *X*" al principio de la matriz de datos.

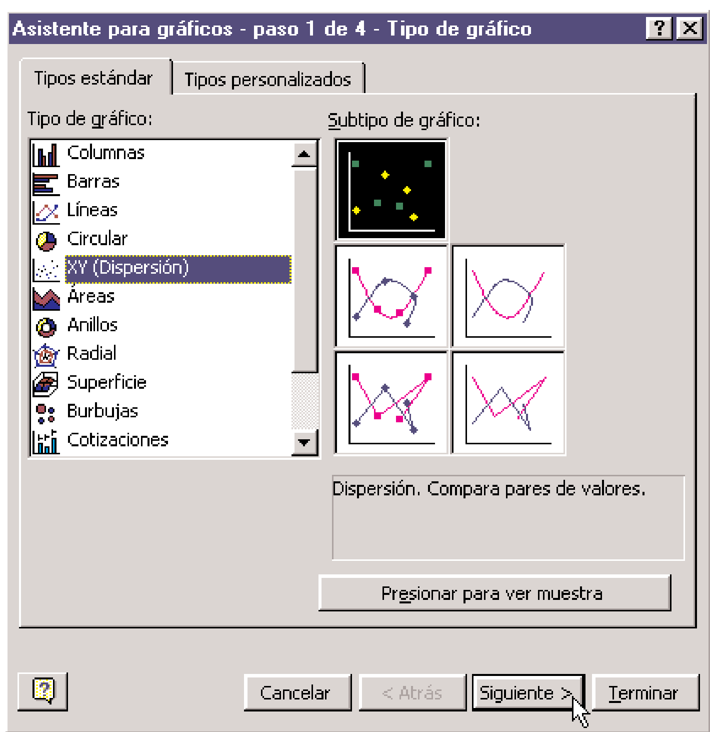


FIGURA B.61

Tipos de gráficos estándar

Importante: El tipo "Dispersión *XY*" de la figura B.61 es el *único* tipo de gráfico que traza los datos del eje *X* en una escala según sus valores. Todos los demás tipos de gráficos trazan los datos del eje *X* como si fueran categorías de datos; es decir, los datos del eje *X* se espacian igualmente, sin importar sus valores. Esto se ilustra en la figura B.62, en un gráfico "Línea" a la izquierda y un gráfico "Dispersión *XY*" con los mismos datos a la derecha.

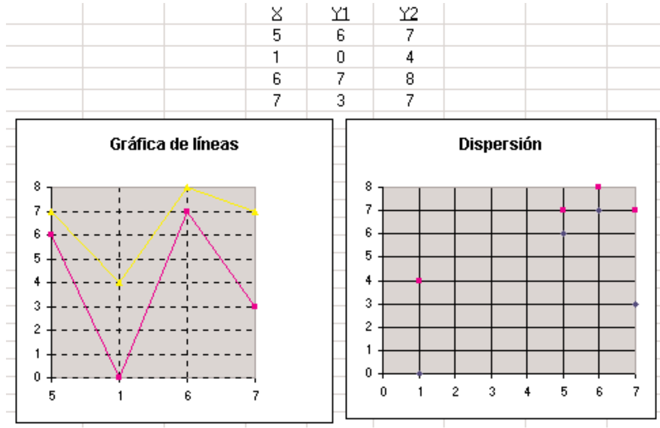


FIGURA B.62
Gráfico "Línea" y gráfico de dispersión

Asistente para convertir texto en columnas

Al pegar datos de otras aplicaciones, como Word en Excel, a menudo se obtiene una sola columna de texto, que es de poca utilidad si el texto contiene datos. Para dividir o "desglosar" los datos en columnas de Excel por separado, seleccione las celdas de texto en la única columna y seleccione el elemento "Texto en columnas" del menú Datos (figura B.63).

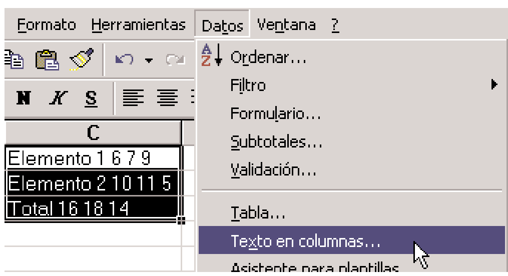


FIGURA B.63
Asistente para convertir texto en columnas

Seleccione una de las opciones de análisis lexicográfico en el paso 1 del Asistente para convertir "Texto en columnas..." como se muestra en la figura B.64. (Si está disponible, el formato preferible para los datos originales es "Delimitados", utilizando, por ejemplo, comas o tabulaciones. De lo contrario, la opción "De ancho fijo" permitirá que el análisis lexicográfico, en general, sea el correcto.)

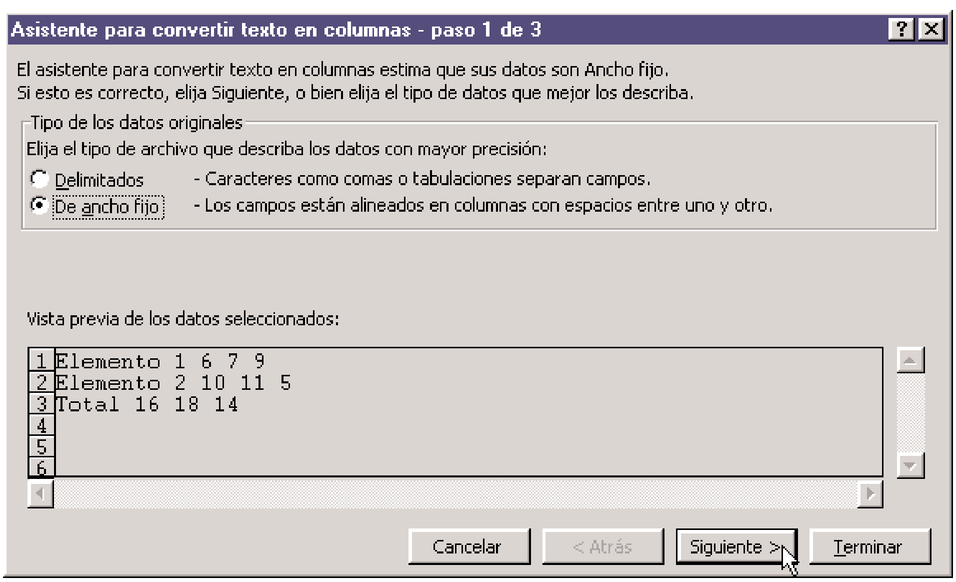


FIGURA B.64
Asistente para convertir "Texto en columnas...", paso 1

Complete apropiadamente el paso 2 en la figura B.65, y en el paso 3 seleccione las opciones del tipo de datos (no se muestran aquí).

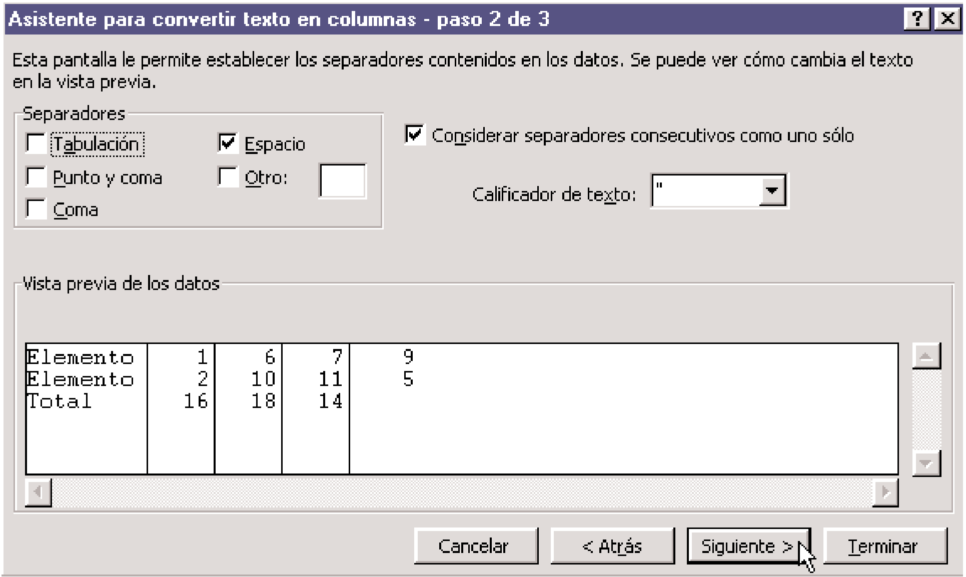


FIGURA B.65

Asistente para convertir "Texto en columnas...", paso 2

El desglose completo del texto en columnas aparece en la figura B.66. En caso de que el texto fuente no tenga un ancho fijo o no esté separado por delimitadores, los resultados podrán requerir algún arreglo manual.

FIGURA B.66

Desglose de datos en las columnas

C	D	E	F
Elemento 1	6	7	9
Elemento 2	10	11	5
Total	16	18	14

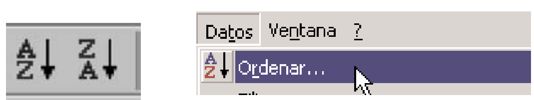
OTROS COMANDOS ÚTILES

Ordenamiento de filas

Las dos herramientas en la figura B.67(a) ordenan filas de la hoja de trabajo. Si un rango de celdas es seleccionado primero, entonces la clasificación se lleva a cabo sobre la columna a mano izquierda del rango seleccionado. Si no se selecciona un rango de celdas, entonces el bloque rectangular de celdas no vacías contiguas que rodea el cursor de celda es seleccionado automáticamente, y se lleva a cabo la clasificación en todas las filas de la columna que contiene la celda activa. Puesto que es fácil confundirse, está disponible un cuadro de diálogo de ayuda que se abre al seleccionar el elemento "Ordenar..." del menú Datos (figura B.67b).

FIGURA B.67(a) Y B67 (b)

Ordenamiento de filas



Herramienta Autosuma

Al colocar el cursor de celda en la parte inferior de una columna de celdas no vacías, o a la derecha de una fila de celdas no vacías, y hacer clic en la herramienta Autouma, se insertará la fórmula "=SUMA()" resaltando la estimación que Excel hace del rango de celdas a sumar (figura B.68). Si la estimación no es la correcta, antes de oprimir la celda Intro arrastre sobre el rango correcto.

FIGURA B.68

Estimación de Autosuma

	A	B	C
1	5	6	7
2	1	0	4
3	6	7	8
4	7	3	7
5		=SUMA(B1:B4)	
6			

Revisión ortográfica

Las entradas de celda de un rango de celdas o de una hoja de trabajo pueden ser revisadas ortográficamente, haciendo clic en la herramienta Ortografía o seleccionando “Ortografía...” del menú Herramientas (figura B.69).

FIGURA B.69

Comando Ortografía

Despliegue de las fórmulas de celda

Para desplegar e imprimir las fórmulas, se recomienda que seleccione el elemento “Mover o copiar hoja...” del menú Edición, como se muestra en la figura B.70, para hacer una copia completa (final, sin errores) de su hoja, como otra hoja más en su libro de trabajo (figura B.71).

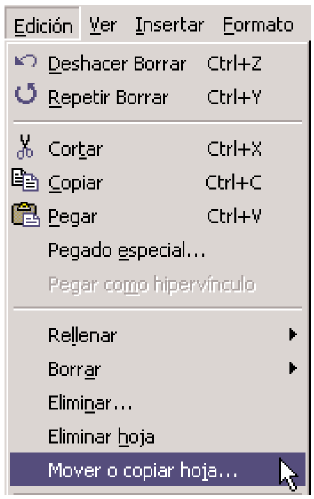


FIGURA B.70

“Mover o copiar hoja...”

Esto permite un ajuste independiente de fuentes, anchos de columna, y otras cosas para las fórmulas, que por lo general necesitan un formato diferente a la hoja de trabajo del modelo.

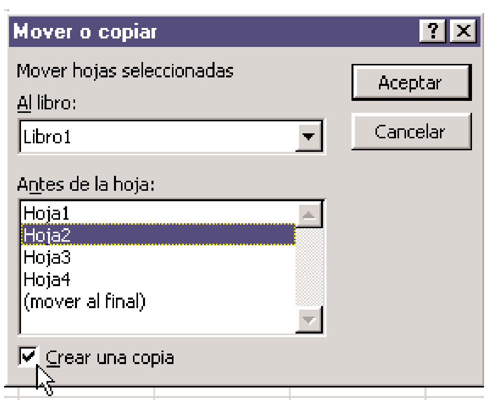


FIGURA B.71

Cómo copiar una hoja de trabajo

Pase a esa hoja copiada haciendo clic en la ceja. Haga doble clic en la ceja para remplazar el nombre predeterminado por algo más significativo, como “Hoja1 Fórmulas”, que se muestra en la figura B.72.

Seleccione el elemento “Opciones Gráficos...” del menú Herramientas y haga clic en el cuadro Fórmulas de la ficha Ver del cuadro de diálogo. A continuación, ajuste el ancho de las columnas para una mejor apariencia en la impresión, utilizando “Columna Autoajustar a la selección” del menú Formato antes descrito. Ajuste todos los formatos para una mejor apariencia.

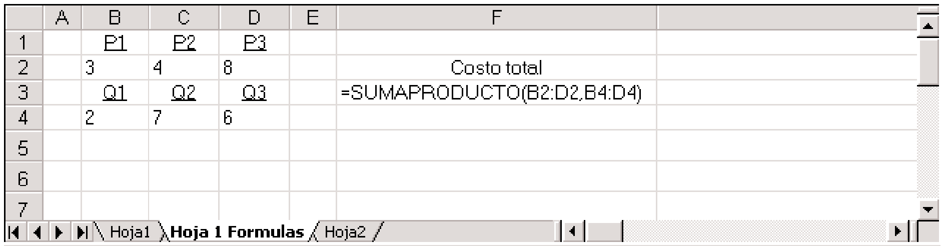


FIGURA B.72

Fórmulas de hoja de trabajo

Importante: Si en el futuro usted cambia su hoja de trabajo modelo original, deberá volver a sacar una copia de la hoja de trabajo del modelo actual —esta vez copiando las celdas modificadas y pegándolas a esta hoja— para documentar cualesquiera datos o fórmulas modificados.

Auditoría de fórmulas

Al seleccionar las celdas que contienen fórmulas y eligiendo uno de los elementos Auditoría del menú Herramientas, como se muestra en la figura B.73, aparecerá una representación visual de las referencias en celda de fórmulas, la cual resulta útil para la documentación y para corregir errores.

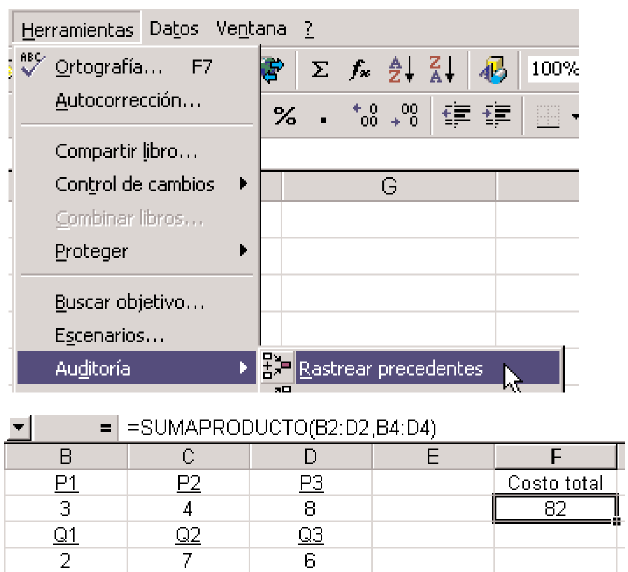


FIGURA B.73

Auditoría de fórmulas

Pegar de Excel a Word

Cuando el comando Pegar de Word se utiliza a partir del comando Copiar de Excel, se insertará en Word el contenido de las celdas en una tabla tipo hoja de cálculo. Mientras están en una Tabla de Word, el contenido de las celdas puede editarse como entidades independientes. Si el comando Pegar es utilizado después de un comando Copiar como imagen, la selección aparecerá como objeto gráfico que una vez pegado tiene opciones de edición limitadas, pero es fácil de mover o redimensionar.

Pegado especial

Este comando, mostrado en la figura B.74, es utilizado para cambiar las bases predeterminadas de un comando Pegar normal, es decir de pegar sólo fórmulas, sólo valores, sólo formato, etcétera. Puede también, haciendo clic en la opción Operación, sumar, sustraer y así sucesivamente, fórmulas o valores copiados en las entradas del área de pegado. Por ejemplo, para multiplicar los datos en E4:G4 por 150, coloque el 150 en una celda y cópielo. Seleccione las celdas E4:G4 y seleccione el elemento Pegado especial del menú Edición.

Haga clic en Operación de multiplicar en el cuadro de diálogo Pegado especial que se muestra en la figura B.75 y haga clic en Aceptar. Los elementos de datos objetivo serán multiplicados por la constante copiada, como se ve en la figura B.76.

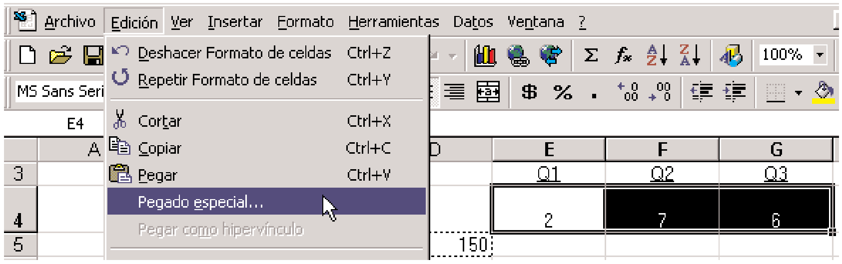


FIGURA B.74

Ejemplo de Pegado especial

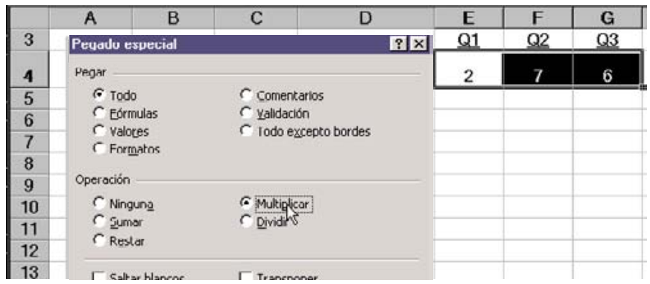


FIGURA B.75

Multiplicar por una celda copiada

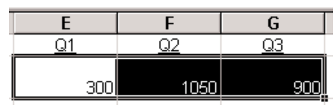


FIGURA B.76

Ejemplo de Pegado especial completo

Al copiar un rango de celdas, seleccionar Pegado especial y poner una marca en el cuadro Transponer, se pegan las columnas como filas y viceversa, hasta el máximo de 256 columnas en Excel. Haciendo clic en el botón Pegar vínculos se pega un puntero que apunta a las celdas seleccionadas (fuente) en otro lugar como vínculo "vivo" (capaz de actualización) a las celdas fuente (figura B.77).

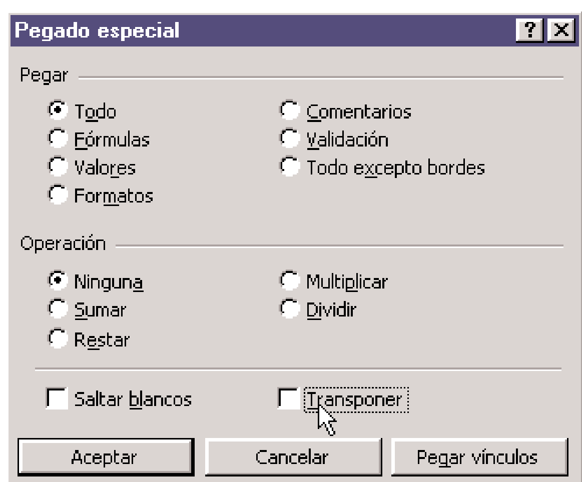


FIGURA B.77

Cuadro de diálogo Pegado especial

Pegar de Word a Excel

Si usted selecciona Pegado especial después de cortar/copiar un objeto de Microsoft Word o de una aplicación similar, el cuadro de diálogo Pegado especial cambiará a fin de reflejar el objeto en el Portapapeles (figura B.78). Pegar vínculos mantiene un vínculo "vivo" con el documento fuente. Un Objeto documento mantiene un vínculo OLE de Microsoft para permitir la edición futura del objeto en la aplicación original. Imagen (o Mapa de bits) copiará el elemento como un objeto gráfico. Normalmente, usted seleccionaría Texto, que pegará los caracteres escogidos a la celda o celdas.

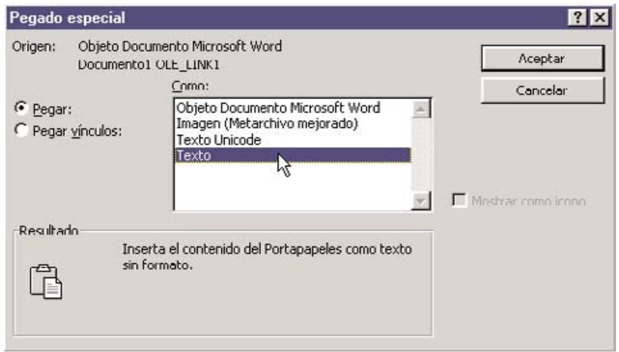
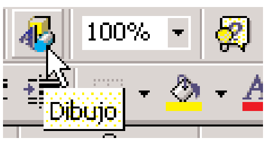


FIGURA B.78

Cómo pegar de Word a Excel

Barra de herramientas Dibujar



Las herramientas de dibujo son útiles para la documentación de un modelo de hoja de trabajo. Las herramientas de dibujo están en la barra de herramientas Dibujar. Para hacerla aparecer, haga clic en la herramienta Dibujar o seleccione el elemento Dibujar del menú Ver, como se muestra en la figura B.79. La barra de herramientas Dibujar puede ser cambiada de lugar haciendo clic en su extremo izquierdo y luego haciendo clic y arrastrándolo.

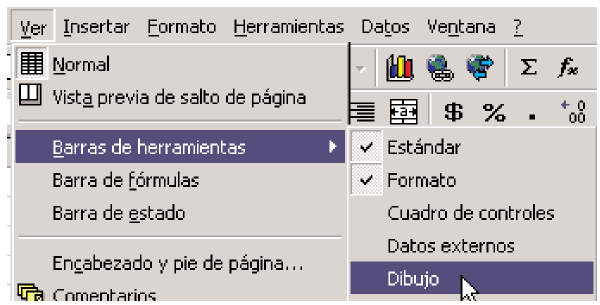


FIGURA B.79

Cómo desplegar la barra de herramientas Dibujar

El objeto Cuadro de texto flotante y las herramientas de flecha en la barra de herramientas Dibujar pueden utilizarse para anotar el resultado del modelo, o bien para presentar fórmulas críticas (copiando los caracteres de la barra de fórmulas al cuadro de texto), como se muestra en la figura B.80. Otras herramientas de dibujo en la barra de herramientas Dibujar pueden utilizarse para efectos y adornos más estilizados.

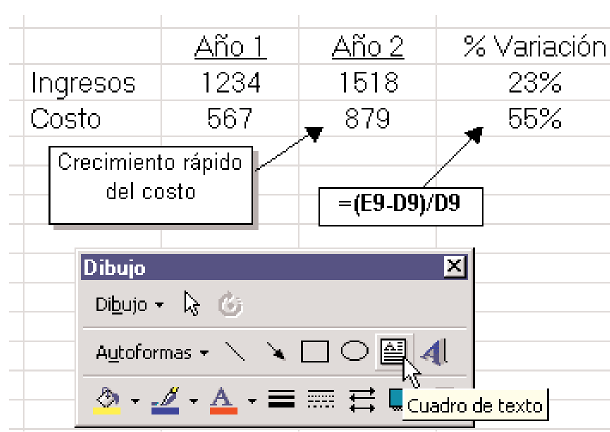


FIGURA B.80

Opción Cuadro de texto flotante en la barra de herramientas Dibujar

Cómo obtener ayuda

Excel tiene varias maneras de ayudar. La primera es el Ayudante de Office. (Nota: sosteniendo por algunos segundos el cursor sobre cualquier icono de herramienta hará que Excel muestre una breve descripción de la herramienta, como aparece en la figura B.81).

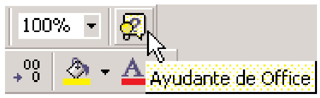


FIGURA B.81
Cómo obtener ayuda

Haciendo clic en la herramienta Ayudante de Office se abre un cuadro de diálogo que permite buscar en el sistema Ayuda una palabra clave, o bien mostrar una sugerencia, así como la configuración de las opciones del Ayudante de Office para indicar en qué tipos de acciones deberá aparecer y ofrecer ayuda (figura B.82).

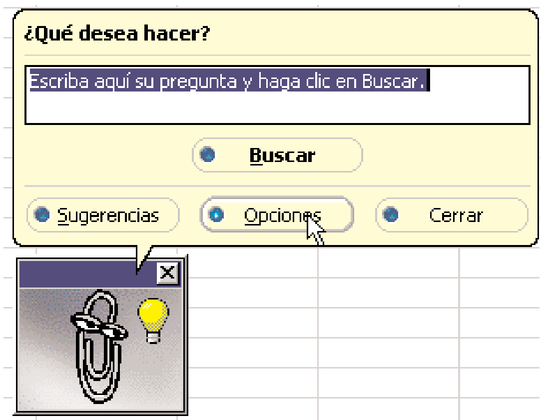


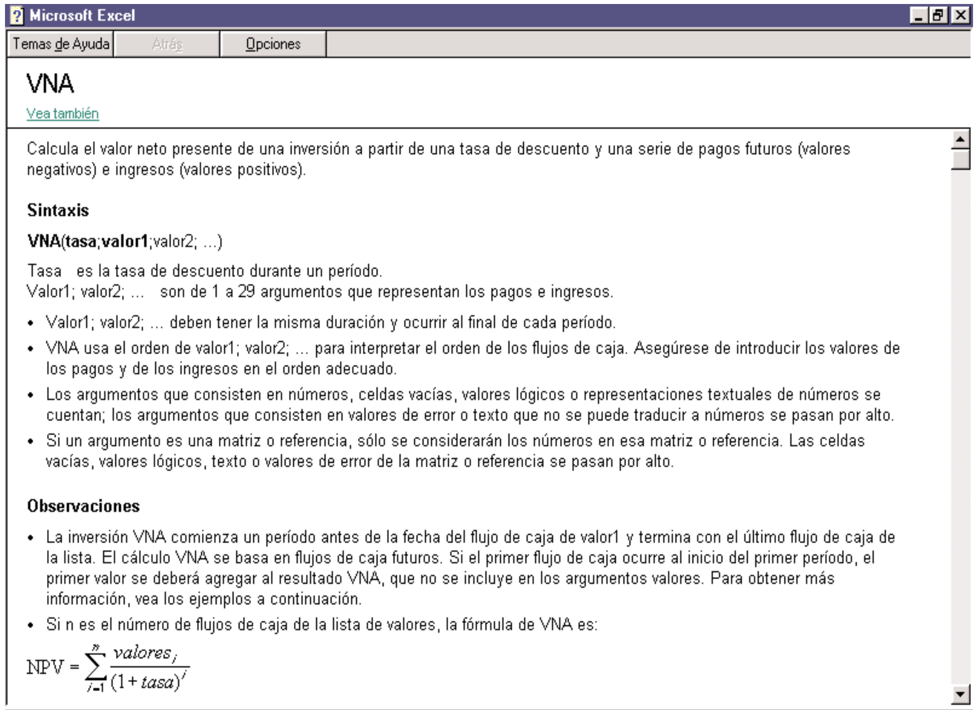
FIGURA B.82
Ayudante de Office

Haciendo clic en el elemento “¿Qué es esto?” en el menú Ayuda el cursor cambia mostrando un signo de interrogación  (Figura B.83).

FIGURA B.83
Elemento ¿Qué es esto?

El siguiente elemento en que usted haga clic hará aparecer el sistema Ayuda de Excel, que desplegará el tema de ayuda correspondiente al elemento sobre el cual se hizo clic. Ésta es una forma rápida de obtener más información sobre un elemento de menú o una herramienta.

El sistema completo Ayuda de Excel está disponible en el menú Ayuda (Win) o bajo el menú  (Mac). También aparece oprimiendo la tecla F1 (Win o Mac). Además de un índice de temas de ayuda, seleccionar el Ayudante de Office, escribir una frase y hacer clic en el botón Buscar permite una búsqueda a través del teclado. El ejemplo en la figura B.84 muestra el resultado de la búsqueda de la función VNA. Además de la documentación, el sistema Ayuda de Excel ofrece ejemplos y guías muy útiles cuando se despliegan temas de ayuda específicos.



Microsoft Excel

Temas de Ayuda | Atrás | Opciones

VNA

Vea también

Calcula el valor neto presente de una inversión a partir de una tasa de descuento y una serie de pagos futuros (valores negativos) e ingresos (valores positivos).

Sintaxis

VNA(**tasa**;**valor1**;valor2; ...)

Tasa es la tasa de descuento durante un período.
Valor1; valor2; ... son de 1 a 29 argumentos que representan los pagos e ingresos.

- Valor1; valor2; ... deben tener la misma duración y ocurrir al final de cada período.
- VNA usa el orden de valor1; valor2; ... para interpretar el orden de los flujos de caja. Asegúrese de introducir los valores de los pagos y de los ingresos en el orden adecuado.
- Los argumentos que consisten en números, celdas vacías, valores lógicos o representaciones textuales de números se cuentan; los argumentos que consisten en valores de error o texto que no se puede traducir a números se pasan por alto.
- Si un argumento es una matriz o referencia, sólo se considerarán los números en esa matriz o referencia. Las celdas vacías, valores lógicos, texto o valores de error de la matriz o referencia se pasan por alto.

Observaciones

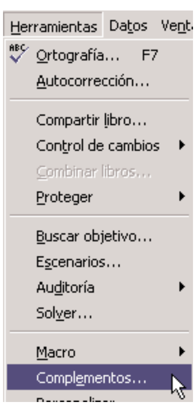
- La inversión VNA comienza un período antes de la fecha del flujo de caja de valor1 y termina con el último flujo de caja de la lista. El cálculo VNA se basa en flujos de caja futuros. Si el primer flujo de caja ocurre al inicio del primer período, el primer valor se deberá agregar al resultado VNA, que no se incluye en los argumentos valores. Para obtener más información, vea los ejemplos a continuación.
- Si n es el número de flujos de caja de la lista de valores, la fórmula de VNA es:

$$\text{NPV} = \sum_{j=1}^{n} \frac{valores_j}{(1+tasa)^j}$$

FIGURA B.84

Resultado de la búsqueda de la función VNA

Complementos



Excel puede soportar extensiones a su funcionalidad predeterminada bajo la forma de archivos "complementarios" que se manejan seleccionando "Complementos" en el menú Herramientas, como se muestra en la figura B.85. Complementos útiles son Herramientas para análisis, que contiene muchas funciones de análisis de datos financieros y estadísticos; el Asistente para búsquedas, que ayuda a configurar fórmulas BUSCARV; Autoguardar, para respaldar periódicamente su libro de trabajo; y Solver, un complemento requerido para optimizar modelos en hojas de trabajo.

Nota: La disponibilidad de los archivos listados en el cuadro de diálogo Complementos depende de la instalación. Por ejemplo, durante la instalación de *software* normal de Excel, vía el procedimiento "Instalar" de Microsoft, el complemento Solver *no* es instalado, a menos que se seleccione específicamente en una instalación Personalizada. Si Solver no está presente en el menú Herramientas o en el cuadro de diálogo Complementos, vuelva a ejecutar Instalar partiendo de sus discos originales Microsoft o CD-ROM para instalar personalmente Solver.

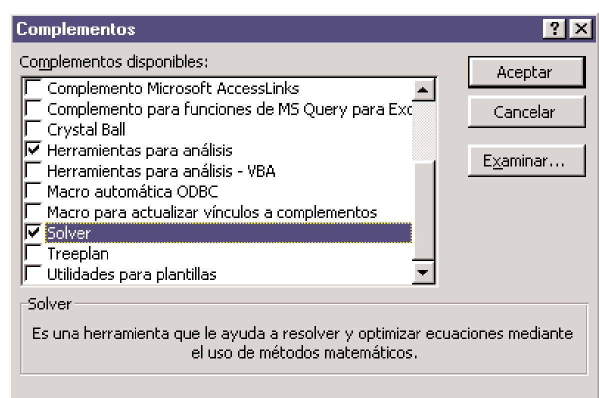


FIGURA B.85

Cuadro de diálogo Complementos

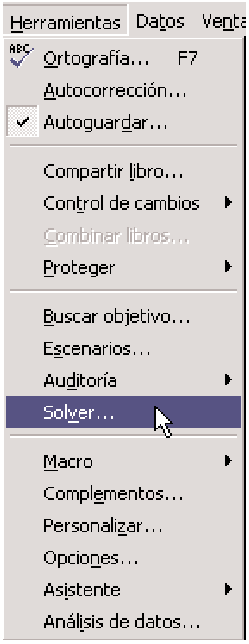
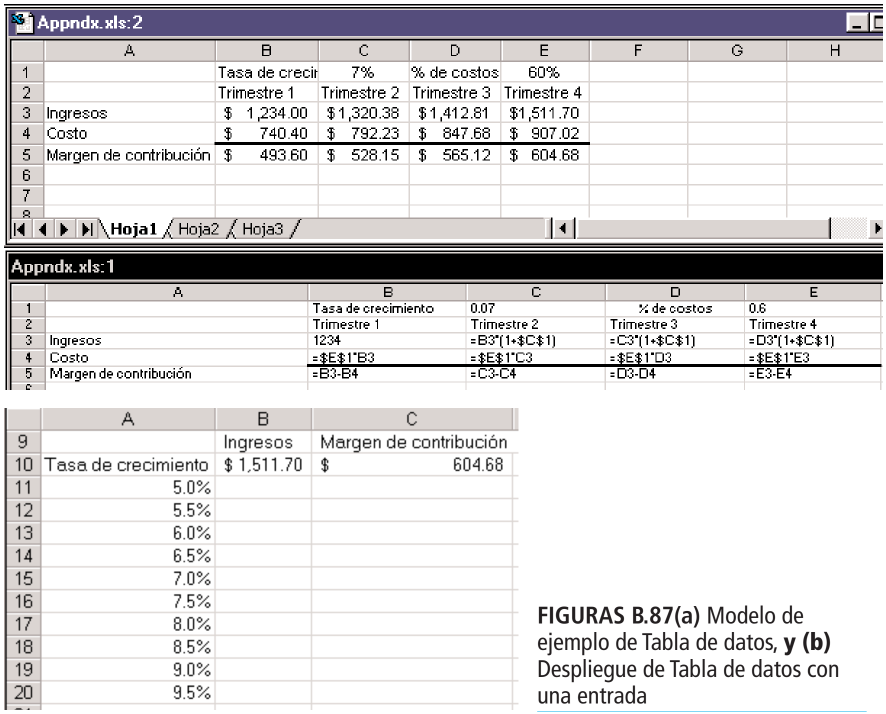


FIGURA B.86

Complementos comunes de Excel



FIGURAS B.87(a) Modelo de ejemplo de Tabla de datos, **y (b)** Despliegue de Tabla de datos con una entrada

Si los archivos de los complementos fueron instalados en su versión de Excel habilitando, por ejemplo, Herramientas para análisis, Autoguardar y Solver, entonces estas extensiones aumentarán la funcionalidad de Excel. Esto puede verificarse por la apariencia de los elementos en el menú Herramientas, como se muestra en la figura B.86.

Tabla de Datos (de una entrada)

Una tabla de datos de una entrada, conocida como Tabla de datos 1, es una escala de celdas que muestra los resultados de una o más fórmulas, cuando se sustituyen diferentes valores de un único parámetro. En el ejemplo en la figura B.87(a) y (b), queremos tabular diferentes ingresos y márgenes de contribución del trimestre 4 para el modelo, dado un conjunto de valores del parámetro Tasa de crecimiento. Las celdas B10:C10 contienen las fórmulas "=E3" y "=E5", respectivamente. Tabla de datos 1 remplazará cada una de las tasas de crecimiento en la columna A en la celda C1 —la celda de entrada— y tabulará los valores resultantes de salida del modelo en las celdas correspondientes bajo las fórmulas de las celdas B10:C10.

Para construir una tabla de datos de una entrada como la que se muestra en la figura B.87(b), escriba las fórmulas que se refieren a las celdas de resultados del modelo en la fila de arriba y una celda a la derecha de la columna de los valores del parámetro (B10:C10 en este ejemplo). Seleccione la escala de celdas que contiene las fórmulas de referencia y los valores de los parámetros a remplazar (en este caso, A10:C20), y seleccione "Tabla..." del menú Datos, como se muestra en la figura B.88.

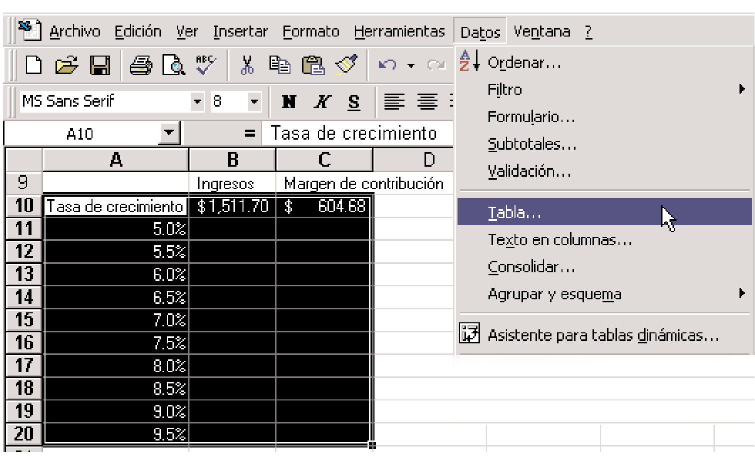


FIGURA B.88

Configuración de la Tabla de datos 1

Dado que los valores de los parámetros a remplazar aparecen en una columna, escriba la referencia a la celda de entrada en el cuadro de diálogo “Celda de entrada (columna)”, dejando “Celda de entrada (fila)” en blanco (figura B.89). Haga clic en Aceptar.

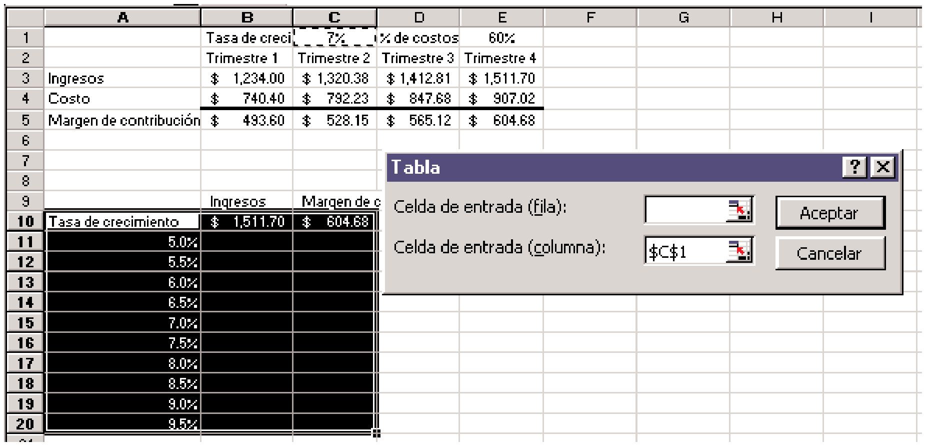


FIGURA B.89

Especificación de la celda de entrada en una tabla de datos de una entrada

La tabla final deberá parecerse a la que se muestra en la figura B.90.

	Ingresos	Margen de contribución
Tasa de crecimiento	$ 1,511.70	$ 604.68
5.0%	$ 1,428.51	$ 571.40
5.5%	$ 1,449.01	$ 579.61
6.0%	$ 1,469.71	$ 587.89
6.5%	$ 1,490.61	$ 596.24
7.0%	$ 1,511.70	$ 604.68
7.5%	$ 1,532.99	$ 613.20
8.0%	$ 1,554.48	$ 621.79
8.5%	$ 1,576.17	$ 630.47
9.0%	$ 1,598.07	$ 639.23
9.5%	$ 1,620.16	$ 648.06

FIGURA B.90

Tabla de datos final

Si los valores del parámetro de la tasa de crecimiento estuvieran originalmente en una fila en lugar de que fuera en una columna, entonces las referencias C1 se especificarían en “Celda de entrada (fila)” de la figura B.89. Esto se ilustra en un ejemplo en la sección 2.3. *Nota:* Se escriben referencias de celda tanto en “Celda de entrada (fila)” como en “Celda de entrada (columna)” en el cuadro de diálogo de la figura B.89, sólo en el caso de la tabla de datos con dos entradas, conocida como Tabla de datos 2, la cual se describe en la sección 2.4.

APÉNDICE

C

Sugerencias y mensajes de Solver

La siguiente lista contiene cuatro tipos de análisis de modelos que Solver puede llevar a cabo. La optimización con restricciones es la más general; los otros son casos especiales que giran en torno a la misma optimización con restricciones. Solver puede aplicar los cuatro tipos de análisis a formulaciones tanto lineales como no lineales.

1. **Encontrar una solución factible: No se da la dirección de celda en el cuadro Celda objetivo de Solver.** Si la dirección de celda en el cuadro Celda objetivo está vacía, Solver se detendrá cuando encuentre una solución factible al modelo; esto es, un conjunto de valores de las celdas cambiantes (las que se refieren al cuadro Cambiando las celdas) que satisfaga a todas las restricciones. Si todas las restricciones son funciones lineales de las celdas cambiantes, al seleccionar Adoptar modelo lineal en el cuadro de diálogo Opciones de Solver se acelerará el proceso de la solución factible.
2. **Encontrar un objetivo: No se da la dirección de celda en el cuadro Celda objetivo de Solver y sólo hay restricciones de igualdad, o se da un valor objetivo a la celda en dicho cuadro y no hay restricciones**. Esta formulación se conoce como modelo de búsqueda de objetivos. Solver maneja dos variantes para la búsqueda de metas: (a) la búsqueda tradicional de metas (resolver para encontrar un valor objetivo, si no hubieran restricciones), y (b) resolver para encontrar aquellos valores de las celdas cambiantes que satisfagan simultáneamente un sistema de restricciones, si no hubiera un valor objetivo. La posibilidad (a) es idéntica en concepto al comando Buscar objetivo de Excel, excepto que el método de búsqueda utiliza un procedimiento distinto. Para la posibilidad (b), Solver encuentra la solución al sistema de ecuaciones representado por las celdas de restricción con las celdas cambiantes como incógnitas. (Solver puede resolver también un sistema de ecuaciones y desigualdades, esto es, restricciones con límites superiores o inferiores. En este caso, Solver encuentra una solución factible, como se señaló arriba en el punto 1.) Si todas las restricciones son funciones lineales de las celdas cambiantes, al seleccionar Adoptar modelo lineal en el cuadro de diálogo Opciones de Solver se acelerará el proceso de solución.
3. **Encontrar un óptimo sin restricciones: Maximización o minimización de un modelo sin restricciones**. Esto a menudo se conoce como un modelo de "optimización sin restricciones" y tiene sentido sólo si la función objetivo es una función no lineal de las celdas cambiantes: la optimización de una función objetivo lineal sin restricciones producirá siempre un resultado no acotado. Solver resolverá para un punto a lo largo de la curva de la función objetivo,

donde la celda de la función objetivo alcance un máximo o un mínimo. Si la función objetivo (no lineal) tiene múltiples máximos o mínimos, Solver encontrará uno de ellos (un óptimo local), que pudiera no ser el óptimo global. El óptimo local particular encontrado por Solver depende de los valores iniciales de las celdas cambiantes. En el caso de un modelo no lineal con soluciones óptimas múltiples, la única manera de descubrir el óptimo global es resolver el modelo repetidamente, mediante alguna estrategia de búsqueda sistemática, con valores iniciales diferentes en las celdas cambiantes. Para modelos grandes (muchas celdas cambiantes), la búsqueda exhaustiva puede no resultar una estrategia práctica. Por lo tanto, en un modelo no lineal siempre existirá el riesgo de que no se puedan determinar los óptimos globales.

4. Encontrar un óptimo con restricciones: Maximización o minimización de un modelo con restricciones. El tipo de modelo más general y quizás más común involucra tanto restricciones como una celda de función objetivo que se maximizará o minimizará: un modelo de "optimización con restricciones". Si la celda de la función objetivo y todas las restricciones son funciones lineales de las celdas cambiantes, entonces se está hablando de un modelo de optimización lineal o de programación lineal, el cual puede ser optimizado más rápida y confiablemente, e incluso con mayor información de sensibilidad detallada cuando se selecciona la opción Adoptar modelo lineal en el cuadro de diálogo Opciones de Solver. De lo contrario, es un modelo de optimización no lineal.

En el caso de un modelo de optimización no lineal, Solver resolverá para un punto a lo largo de la curva de la función objetivo, donde la celda óptima alcanza un máximo o mínimo que satisface las restricciones. Si la función objetivo no lineal tiene varios máximos o mínimos que satisfacen las restricciones, Solver encontrará uno de ellos (un óptimo local), que pudiera no ser el óptimo global. El óptimo local particular encontrado por Solver que satisface las restricciones depende de los valores iniciales de las celdas cambiantes. En el caso de un modelo no lineal con múltiples óptimos, la única manera de descubrir el óptimo global es resolver el modelo repetidamente, mediante alguna estrategia de búsqueda con diferentes valores iniciales para las celdas cambiantes. Para modelos grandes (muchas celdas cambiantes) la búsqueda exhaustiva por lo general no resulta una estrategia práctica. Por lo tanto, en un modelo no lineal siempre existirá el riesgo de no poder encontrar el óptimo global que satisfaga todas las restricciones.

PROBLEMAS COMUNES EN MODELOS AL APLICAR SOLVER

Solver es un programa muy complejo que lleva a cabo cálculos complicados en un modelo de hoja de trabajo Excel. Como resultado, existen muchas oportunidades para que se presenten errores y otras dificultades en la formulación del modelo, las configuraciones del cuadro de diálogo de Solver, los procedimientos de optimización de Solver, y también la interpretación de los resultados. Es más, los errores o dificultades de solución *no* siempre dan como resultado mensajes de error de Solver, esto es una trampa que frecuentemente toma desprevenido al constructor de modelos. Aun cuando sí existan mensajes de error de Solver, su resolución por lo general no es sencilla. Por lo tanto, una poca de prevención, como la que se presenta en la siguiente lista respecto a "higiene" en la construcción de modelos, a menudo evitará muchas horas frustrantes intentando resolver dificultades de Solver una vez que éstas ocurren.

1. Muchas dificultades en la optimización de modelos en hojas de cálculo no están relacionadas con Solver, sino con una formulación incorrecta de los problemas. Si se desarrolla de antemano el modelo simbólico sobre el papel, se ayudará a resolver cualquier inconsistencia. A menudo, al escribir el modelo simbólico y hacer que la versión de hoja de trabajo de Excel lo refleje, se conduce a un modelo de estructura de hoja de trabajo limpia y fácil de trabajar, y que al final toma menos tiempo depurar.

2. La segunda dificultad más común es la presencia de restricciones inconsistentes, que generan un modelo restringido en exceso y sin soluciones factibles. Revise dos veces la dirección de todas las restricciones de desigualdad (se usó "<=" queriendo decir ">="). Intente evitar restricciones de igualdad, a menos que lo requiera la situación administrativa a modelar o que haya una interconexión de definiciones entre variables, por ejemplo, "Utilidad = Ingresos − Costo".

3. En el caso de modelos lineales, un error común es olvidar las restricciones de no negatividad en las celdas cambiantes cuando la lógica de la situación las hace necesarias.

4. Los modelos con escalas incorrectas causan insidiosas dificultades, porque a menudo no aparecen mensajes para poner de manifiesto este problema, o peor aún, los mensajes de error de Solver producidos pueden ser totalmente falsos. La optimización de modelos lineales, y especialmente de los no lineales por medio de Solver, son muy sensibles a las escalas de las cantidades del modelo. Evite en los modelos las unidades de medida que produzcan cantidades cuyas diferencias difieran por más de seis o siete órdenes de magnitud. Por ejemplo, un modelo que calcule el gasto por interés a través de la multiplicación de una tasa de interés de 12% por un saldo de préstamos de $60,500,000 produce más de ocho órdenes de magnitud (10^8) entre datos de la tasa de interés y el saldo de los préstamos. Esto llevará a una acumulación de errores por redondeo y/o por truncado cuando Solver optimice el modelo, lo que podría dar por resultado soluciones incorrectas de las celdas cambiantes o falsos mensajes de error. Es sencillo volver a dimensionar los datos del modelo con el fin reducir la amplitud y no se pierde ni la generalidad ni la precisión en los resultados. Para el ejemplo anterior, al redimensionar el saldo de préstamos (y todas las cantidades relacionadas de la hoja de trabajo) de manera que estén en millones de dólares y escribir $60.5 en la celda Saldo de préstamos, se reducen las amplitudes a sólo dos órdenes de magnitud. Para versiones de Excel anteriores a Excel 97, el comando Usar escala automática de Opciones de Solver no es *operativo* en el caso de que se encuentre seleccionado Adoptar modelo lineal; ya que este comando funciona sólo para modelos no lineales. Esta razón es suficiente para recomendarle que actualice las versiones anteriores de Excel a Excel 97. Incluso en modelos no lineales, no dependa de la característica de escala automática. Para algunos modelos no lineales y en circunstancias fuera de lo normal, la escala automática generada por Usar escala automática pudiera no ser suficiente para evitar el problema.

5. Finalmente, el uso de una función “SI()” de Excel, o de otras funciones relacionadas, que introducen discontinuidades en las celdas de la hoja de cálculo, muy probablemente invalidará el uso correcto de Solver, si la fórmula de la celda de la función objetivo o de cualquier fórmula de restricción depende directa o indirectamente de la celda o celdas que contengan este tipo de funciones. La función SI() no sólo cancela la linealidad, sino que es probable que introduzca discontinuidades en la región factible o en el conjunto de posibles valores de la función objetivo. Esto a su vez afecta las estimaciones de derivadas parciales calculadas internamente por Solver, que lo llevan hacia la optimalidad. Ni Solver ni algún procedimiento de optimización conocido están garantizados para manejar en todos los modelos tales discontinuidades de manera confiable. Por lo tanto, la inclusión de *cualquier* función de Excel, como SI(), en el modelo de la hoja de trabajo, que produzca una discontinuidad en la gráfica de los valores del resultado para los rangos válidos de las celdas cambiantes impide cualquier uso de Solver. Si la situación que se está modelando requiere el uso de una función SI(), considere la posibilidad de usar una formulación de programación de enteros (observe el capítulo 7).

SUGERENCIAS QUE SE DEBEN RECORDAR

- Para modelos no lineales, los valores de las celdas cambiantes de una corrida anterior de Solver, si la hubo, se convierten en valores iniciales de dichas celdas si Solver es ejecutado nuevamente; esto es, si es factible, Solver comienza a partir de donde terminó una corrida anterior de Solver. En contraste, para modelos lineales (Adoptar modelo lineal seleccionado en Opciones de Solver), los valores iniciales de las celdas cambiantes son ignorados, aun si producen una solución factible; Solver utilizará un procedimiento independiente para encontrar un conjunto inicial de valores factibles para las celdas cambiantes, que cambiará cualesquiera valores de dichas celdas cambiantes.
- Debido a que la precisión aritmética de los cálculos es finita, las restricciones no siempre pueden satisfacerse con exactitud. El valor Precisión en Opciones de Solver es utilizado para evaluar si una restricción es satisfecha adecuadamente. Para modelos lineales con escala apropiada (Adoptar modelo lineal seleccionado en Opciones de Solver), hay pocas razones para modificar el valor Precisión en Opciones de Solver. En cualquier caso, no aumente el valor Precisión en Opciones de Solver a un valor superior a 0.001, es decir, 1E-3, ni inferior a 0.00000001, es decir, 1E-8.
- Aunque es aceptable para Solver, no es buena práctica en la construcción de modelos poner fórmulas como entrada del lado derecho en el cuadro de diálogo Agregar Restricción o en el cuadro de diálogo Cambiar Restricción. Siempre ponga las referencias a las celdas de la hoja de cálculo en los cuadros de diálogo de Solver. También, debe tener en cuenta que hacer referencia a las celdas del lado derecho que contengan fórmulas puede causar problemas de interpretación en los informes de sensibilidad, sobre todo si durante la optimización la función objetivo o los valores de las celdas cambiantes están influidos por dichas fórmulas.
- Las restricciones de valores enteros o binarios sólo pueden definirse directamente en las variables de decisión (celdas cambiantes). Tampoco escriba las palabras “entero” ni “binario” en el cuadro de diálogo Restricción. En vez de ello, escoja “ent” o “bin” de la lista desplegable.

- La optimización de Solver de un modelo con restricciones de enteros es computacionalmente intensivo, y por lo tanto la convergencia es lenta. Para acelerar el tiempo de solución Solver utiliza un valor Tolerancia (establecido en Opciones de Solver), lo que permite encontrar un valor de la función objetivo "ligeramente" menor al óptimo. Por ejemplo, un valor predeterminado de Tolerancia = 5% significa que es aceptable una solución aproximada con un valor de la función objetivo dentro del 5% alrededor del óptimo real, satisfaciendo al mismo tiempo las restricciones (por ejemplo, en el caso de que los errores de estimación en los coeficientes del modelo produzcan soluciones de mayor precisión de un dudoso valor adicional administrativo). Al pasar por alto este valor predeterminado haciendo que Tolerancia = 0% se obliga a Solver a continuar optimizando el modelo hasta que se encuentre una solución de enteros óptima. Para modelos grandes, esta continuación puede aumentar el tiempo de resolución 10 o 100 veces, o mucho más. *Nota*: Solver utiliza Tolerancia sólo en modelos con restricciones de enteros. Vea la sección 7.6 para más detalles respecto a Tolerancia y su uso en el método de ramificación y acotamiento de Solver. Recuerde: en modelos de enteros el valor predeterminado de Tolerancia garantiza una solución dentro de 5% alrededor del óptimo.

Las sugerencias siguientes son para situaciones más difíciles, que pueden ser ignoradas sin peligro por la mayoría de los usuarios de Solver. Reflejan dificultades con Solver que rara vez se encuentran pero que se incluyen por razones de integridad:

- No utilice ningún nombre de rango definido que comience con "Solver" en su hoja de trabajo del modelo.
- No ejecute más que una instancia de Excel a la vez en su computadora, si planea ejecutar cualquier complemento, como Solver, durante cada instancia. (De lo contrario, pueden ocurrir conflictos DLL.)
- El uso de la característica Guardar modelo en Opciones de Solver para guardar varias formulaciones de modelo para una hoja de cálculo, es una opción que rara vez se necesita. Sin embargo, si se utiliza, no guarde el modelo en algún otro libro u hoja de trabajo. Guarde el modelo sólo en celdas vacías en la hoja de trabajo activa que contiene la formulación del modelo original de Excel a optimizar.
- Para modelos no lineales, en circunstancias fuera de lo común, el cambio del método de Derivadas en Opciones de Solver de la predeterminada "Progresivas" a la alternativa "Central", puede producir valores de informes de sensibilidad incorrectos.
- No grabe macros que incluyan optimización con Solver si la versión de Excel para su país no utiliza el "." Como separador de punto decimal en los números.
- No intente optimizar un modelo si la hoja o el libro de trabajo que lo contiene está protegido.
- No ejecute Solver mientras está en el modo Editar en grupo o Entrada de datos.
- No haga referencias en Cambiando las celdas en el cuadro de diálogo Parámetros de Solver a celdas que no estén en la hoja de trabajo activa que contiene su modelo.
- No intente especificar más de 16 rangos de matrices no contiguas para variables de decisión en el cuadro de diálogo Cambiando las celdas de Solver.
- Algunas versiones de Excel no aceptarán entradas al cuadro de diálogo, incluido a Solver, si la longitud total del enunciado es mayor que 255 caracteres. Esto puede ocurrir con nombres de rango largos y muchas matrices no contiguas, los cuales están especificados en el cuadro de diálogo Cambiando las celdas.

OPCIONES DE SOLVER

Se da información detallada sobre la configuración de Opciones de Solver en la sección 7.6 para el caso de la optimización de enteros y al final de la sección 8.5 para el caso de la optimización no lineal. A continuación se analiza la configuración de Convergencia bajo el título "Cómo interpretar los mensajes de Solver".

Para la optimización lineal, rara vez hay razones para alterar alguna de las opciones de Solver. Sin embargo, se logra una máxima precisión cuando Precisión es 1E-6 y se usa la opción de búsqueda Derivadas Centrales. Para fines experimentales, al seleccionar Mostrar resultado de iteraciones en Opciones de Solver se consigue que Solver haga una pausa después de visitar cada solución de punto extremo (de esquina). De esta manera, puede seguirse el camino que recorre el método símplex de Solver durante el proceso de solución.

CÓMO INTERPRETAR LOS MENSAJES DE SOLVER

Existen muchas combinaciones de formulaciones de modelo y de análisis de Solver que se deben comprender, cada una con su propio conjunto de dificultades potenciales y posibilidades de mensajes. Además de los cuatro tipos de análisis aplicados a las formulaciones de modelos lineales o no lineales antes expuestos, las formulaciones de modelos pueden incluir restricciones de no enteros o restricciones de enteros, o una combinación de ambos. Es más, para modelos no lineales, la fuente de la no linealidad puede estar en la función objetivo (con restricciones lineales), en las restricciones (con la función objetivo lineal) o en ambas. Esto lleva a 32 diferentes combinaciones de formulaciones de análisis que necesitan comprenderse (cuatro técnicas de análisis aplicadas a modelos lineales y a los tres tipos de modelos no lineales, cada uno de los cuales a su vez pueden tener o no restricciones de enteros), una tarea atemorizante, dada la casi docena de mensajes posibles de Solver para cada una de tales combinaciones. Sólo hablaremos de los mensajes de Solver más comunes.

Cuando Solver se detiene, la hoja de trabajo recibe los resultados de celdas cambiantes del último cálculo de Solver, y Excel vuelve a calcular la hoja de trabajo para actualizar todas las demás celdas que se afectan. Un cuadro de diálogo Resultados de Solver aparece con un mensaje que indica la condición que hizo que terminara la optimización de Solver. La sola aparición de este cuadro *no* significa que Solver haya encontrado la solución óptima; significa sólo que Solver ha terminado su procedimiento de optimización. Solver debe terminar con uno de sus mensajes de "terminación exitosa" antes que se concluya que *pudo* haber encontrado un valor óptimo. Repitiendo: la sola terminación del proceso de optimización de Solver *no* significa que se haya encontrado la solución óptima, e incluso si Solver termina con uno de sus mensajes de terminación exitosa, no *necesariamente* significa que se ha encontrado la solución óptima. Por ejemplo, un modelo lineal puede tener "óptimos alternativos", y sólo uno de ellos será encontrado por Solver, o Solver puede terminar exitosamente su optimización de un modelo no lineal en un óptimo local en vez del óptimo global.

El cuadro de diálogo Resultados de Solver que aparece después de que Solver termina su optimización despliega un mensaje de terminación. Haciendo clic en Aceptar se conservarán los valores finales de las celdas cambiantes que encontró Solver; haciendo clic en Cancelar se restablecerán los contenidos de celda existentes antes de que Solver se ejecutara. En la lista siguiente aparecen los mensajes más comunes de Solver y su significado. A fin de simplificar, la documentación del mensaje estará limitada al caso de la optimización de modelos con restricciones (el anterior análisis de modelos número 4).

MENSAJES DE TERMINACIÓN EXITOSA

Solver ha encontrado una solución. Se han satisfecho todas las restricciones y condiciones de optimalidad. Éste es el mensaje de terminación de Solver más deseable. Significa que todas las restricciones están satisfechas dentro de la opción Precisión de Opciones de Solver, y que un valor óptimo (máximo o mínimo) ha sido encontrado para la celda de la función objetivo del cuadro Celda objetivo. (Para un modelo de enteros, significa que se ha encontrado un valor óptimo dentro del porcentaje Tolerancia establecido alrededor del óptimo real. Vea más abajo.)

Para un modelo lineal (Adoptar modelo lineal seleccionado en Opciones de Solver), este mensaje significa que Solver ha encontrado, sin ambigüedad, una solución óptima. Es posible que haya otras soluciones con el mismo valor de la función objetivo, es decir, soluciones "óptimas alternativas". En este caso, matemáticamente, habrá una cantidad infinita de soluciones alternativas óptimas (cada una con valores diferentes de celdas cambiantes), todas las cuales producen el mismo valor óptimo de la celda de la función objetivo y satisfacen las restricciones. El conjunto infinito de soluciones óptimas alternativas involucrará combinaciones lineales de un conjunto finito de soluciones óptimas alternativas de puntos extremos (o vértices), y Solver ha descubierto una de entre varias soluciones óptimas en puntos extremos que satisface las restricciones.

Si la solución es no degenerada y el modelo es lineal, una entrada igual a cero de Incremento o reducción permisible en la porción de rango de Coeficiente objetivo del informe de sensibilidad de Solver, señala la existencia de soluciones alternativas óptimas. Aparte de esto, no se da ninguna información en los informes de Solver sobre los valores de celdas cambiantes de cualesquiera otras soluciones alternativas de punto extremo, y se requiere una estrategia de búsqueda repetida que vuelva a ejecutar Solver con valores de Coeficiente objetivo ligeramente diferentes, a fin de identificar los otros óptimos alternativos (en punto extremo).

Para un modelo no lineal (Adoptar modelo lineal no seleccionado), este mensaje de terminación significa que Solver ha encontrado una solución óptima *local*. Pueden existir otros conjuntos de valores para las celdas cambiantes que den los mismos valores (óptimos alternativos) o mejores (otros óptimos locales) de la celda de la función objetivo. En general, examinando los informes de Solver no hay manera de saber si la solución es un óptimo local o global, o si hay óptimos alternativos. La única manera de descubrir otros óptimos, y finalmente, el óptimo global, es resolviendo repetidamente el modelo a través de alguna estrategia de búsqueda sistemática que use nuevos valores iniciales de celdas cambiantes. Sin embargo, para modelos grandes (muchas celdas cambiantes), una búsqueda exhaustiva sobre el espacio de todos los posibles valores iniciales de las celdas cambiantes es análogo a una enumeración completa del modelo, es decir es una estrategia poco práctica. Por lo tanto, siempre existe el riesgo de que no se encuentre el óptimo global (o los óptimos globales, en el caso de soluciones alternativas óptimas) que satisfagan las restricciones. Entre más numerosas y complejas sean las relaciones en el modelo, más probable será que no se encuentre el óptimo (u óptimos) global(es). (Véase la sección 8.6 para un análisis más extenso.)

Incluso si se sabe matemáticamente que el conjunto de valores factibles de la función objetivo es unimodal (o sea que tiene sólo un óptimo, necesariamente global), la cercanía de la solución de terminación exitosa de Solver a la solución real está influida por la configuración de Opciones de Solver (por ejemplo, por el valor Precisión); por la forma de la función objetivo del modelo no lineal y/o las restricciones no lineales (con discontinuidades introducidas por enunciados SI() de Excel, o picos muy agudos, por nombrar dos); por los valores iniciales de las celdas cambiantes; por la tasa de convergencia del modelo hacia el óptimo, y finalmente, por la precisión aritmética interna de la computadora utilizada.

Para modelos lineales de enteros (cualquier modelo con al menos una restricción de enteros) con Tolerancia = X% (establecida en Opciones de Solver, donde lo predeterminado es 5%), Solver ha encontrado una solución que satisface las restricciones, cuyo valor de la función objetivo está *dentro* de X% alrededor del valor óptimo real. En particular, si Tolerancia = 0% y fue optimizado un modelo lineal de enteros (al menos una restricción de enteros y se elige Adoptar modelo lineal seleccionada en Opciones de Solver), Solver ha encontrado la verdadera solución de enteros óptima. Si Tolerancia = X% y fue optimizado un modelo de enteros no lineal, Solver ha encontrado una solución óptima local dentro del X% alrededor de la verdadera solución de enteros óptima local.

Solver ha llegado a la presente solución. Todas las restricciones se han satisfecho. Este mensaje debería aparecer sólo para modelos no lineales (Adoptar modelo lineal no seleccionado). De lo contrario, revise el modelo en busca de relaciones no lineales incorrectas o datos mal dimensionados.

Solver se ha detenido porque la celda de la función objetivo estaba cambiando muy lentamente durante las últimas iteraciones o soluciones de ensayo. Esto es, el valor en la celda de la función objetivo definida en Celda objetivo (o si la solución no es todavía factible), la suma de las violaciones a las restricciones está cambiando a una velocidad menor a la tolerancia de velocidad de convergencia en los últimos N ensayos de solución. (Antes de Excel 97, los valores de N y la tolerancia de corte de la velocidad de convergencia estaban fijos en valores no visibles en el *software* de Excel Solver y *no* se podían alterar; esto es, ninguna de las opciones que se obtuvieron en Opciones de Solver podían afectarlos. La evidencia indirecta sugiere que la tolerancia de convergencia era de aproximadamente 0.00001 y N era de aproximadamente 5. En Excel 97, el cuadro Convergencia en Opciones de Solver permite que se modifique la velocidad de convergencia, pero no el valor de N, que está fijo en 5. En Excel 97, si se reduce Convergencia de su valor predeterminado de 0.0001 a 0.00001 ello puede ayudar a permitir que un modelo que está emitiendo este mensaje continúe hasta encontrarse una solución óptima.)

Este mensaje de terminación significa que *puede ser* que se haya encontrado una solución óptima, pero que también es posible que Solver esté haciendo un progreso muy lento hacia la solución óptima, o que la opción Precisión en el cuadro de diálogo Opciones de Solver es demasiado reducida, o que los valores iniciales de las celdas cambiantes quedaron muy alejados de la solución óptima. Concretamente, Solver se detiene si el valor absoluto del cambio relativo en la función objetivo es inferior a la tasa de convergencia de las últimas N iteraciones. *Nota*: Un modelo no lineal mal dimensionado tiene más posibilidades de llegar a esta situación de detención o terminación, incluso si en el cuadro de diálogo Opciones está marcado Usar escala automática. Aunque la regla de escala de “seis o siete órdenes de magnitud” en modelos lineales por lo general es suficiente para modelos no lineales, para evitar esta condición en casos poco usuales, puede requerirse no más de cuatro o cinco órdenes de magnitud.

Si usted cree que su modelo (no lineal) está bien formulado y dimensionado y que Solver se ha detenido prematuramente, acepte los resultados finales (es decir, marque la opción "Guardar el resultado de Solver" en el cuadro de diálogo Resultados de Solver) e inmediatamente después vuelva a ejecutar Solver. El hecho de conservar los resultados de Solver dará como resultado que como valores iniciales de celdas cambiantes se utilicen los valores finales de Solver de la ejecución anterior, y entonces se conviertan en valores iniciales de la nueva ejecución. Esto le dará otras N iteraciones para ver si la tasa de convergencia mejora o si Solver final y lentamente converje a una solución que dé el mensaje deseable de terminación exitosa anterior. Es posible que se requieran muchas ejecuciones de Solver para salir de la meseta de convergencia lenta, si es que se sale de ella. Si esta estrategia falla, intente dar inicio al modelo con un conjunto completamente diferente de valores en las celdas cambiantes, tomando en cuenta que deben estar muy alejados de la zona de convergencia lenta. El modelo no lineal puede converger con más rapidez en un óptimo (local), si Solver se dirige a él desde una dirección distinta. De manera alternativa, en Excel 97 intente reducir el valor Convergencia en el cuadro de diálogo Opciones de Solver.

MENSAJES DE TERMINACIÓN NO EXITOSA

Solver no puede mejorar la solución presente. Todas las restricciones se han satisfecho.

Este mensaje, que rara vez aparece, debería mostrarse sólo en modelos no lineales (Adoptar modelo lineal no seleccionado en Opciones de Solver). Significa que, aunque todavía no se ha encontrado una solución óptima, Solver no puede encontrar un mejor conjunto de valores de celdas cambiantes que el que se muestra. Una causa posible es que el modelo esté degenerado y que Solver esté dando vueltas internamente debido a dificultades técnicas con el algoritmo de optimización no lineal interno de Solver. Si aparece este mensaje, compruebe para ver si algunas de las restricciones del modelo son redundantes, y por lo tanto pueden ser eliminadas del modelo sin afectar la solución óptima. Si las hay, al retirar las restricciones redundantes muy probablemente se reducirá o hará desaparecer la degeneración, y se eliminarán las vueltas internas. De lo contrario, hay pocas opciones disponibles, aparte de cambiar a otro paquete de *software* de optimización, cuyos algoritmos sean más inmunes a estas rarísimas dificultadas técnicas.

Solver no ha podido encontrar una solución factible. Supongamos que Solver fue incapaz de encontrar un conjunto de valores de las celdas cambiantes que satisficieran de manera simultánea todas las restricciones dentro del valor de Precisión de Opciones de Solver. Este mensaje frecuente es causado por lo general cuando las restricciones del modelo son inconsistentes, lo cual produce un modelo "restringido en exceso". Las causas más comunes son demasiadas restricciones de igualdad o seleccionar por error la dirección equivocada para una o más restricciones de desigualdad. Examine la hoja de trabajo en busca de posibles errores en fórmulas de restricción o en la elección de las restricciones.

También asegúrese de que el modelo esté dimensionado apropiadamente.

Para modelos no lineales (Adoptar modelo lineal no seleccionado en Opciones de Solver), puede suceder que Solver no pudiera encontrar una solución factible después de buscar alrededor de los valores iniciales de las celdas cambiantes). Intente dar inicio con valores completamente diferentes en las celdas cambiantes y vuelva a ejecutar Solver. Mejor aún, de ser posible inicie las celdas cambiantes del modelo con una solución factible que se sabe está cerca de la solución óptima, con base en los resultados del modelo que son similares o por conocimientos anteriores.

La versión de Excel 97 de Solver tiende a generar este mensaje incluso si el modelo es correcto y está desplegando una solución factible, o incluso la misma solución óptima. Si la solución que se muestra es factible, haga algo de lo siguiente: (a) vuelva a optimizar inmediatamente el modelo por segunda vez, o (b) reduzca el parámetro Precisión en Opciones de Solver y vuelva a optimizar el modelo. En el caso de un programa de enteros, si ninguna de las dos opciones anteriores funciona, intente reducir el parámetro Tolerancia en Opciones de Solver a 1%, o incluso a 0%, y vuelva a optimizar el modelo.

Solver no ha podido encontrar una solución factible. Solver ha encontrado un valor de error en una celda objetivo o de restricción . Una o más de las fórmulas del modelo le dieron a Excel un valor de error, como "#¡DIV/0!" o "#¡NUM!", en el último recálculo de Solver. En estas condiciones, Solver no puede encontrar nuevas soluciones de ensayo. Encuentre la celda que contiene el error y modifique la fórmula para evitar generar dichos errores, produciendo por lo tanto un valor numérico apropiado. También, piense en agregar más restricciones a fin de obligar a Solver a apartarse de regiones problemáticas. Por ejemplo, si un modelo no lineal tiene la celda A7 sin restricciones y el modelo tiene una fórmula en alguna otra celda que contiene la fórmula "LOG(A7)", entonces Solver pudiera intentar investigar el comportamiento del modelo utilizando valores de A7<=0 para los cuales la función LOG() no está definida. Puede ser necesario agregar una restricción, como A7>=0.0001 o A7>=.02 o similares, que obligue a Solver a evitar la región o regiones que generan errores.

Este mensaje aparecerá también si está presente un nombre de rango inválido en el cuadro de diálogo Parámetros de Solver.

Se ha detenido Solver a petición del usuario. Usted interrumpió el proceso de solución oprimiendo la tecla ESC (Windows) o Comando+. (Mac), o seleccionó Cancelar en el cuadro de diálogo Opciones de Solver cuando se seleccionó Mostrar resultados de iteraciones.

El problema es demasiado grande para que lo maneje Solver. Hay demasiadas celdas cambiantes o restricciones en el modelo. (Algunos mensajes similares, como "Demasiadas celdas ajustables" o "Demasiadas restricciones", son producidos por Solver en el cuadro de diálogo Parámetros de Solver). Solver de Excel de Microsoft limita la cantidad de variables de decisión (celdas cambiantes) para modelos lineales y no lineales a no más de 200.

Para modelos lineales (Adoptar modelo lineal seleccionado en Opciones de Solver), no hay límite para la cantidad de restricciones, siempre que haya suficiente memoria en la computadora para Solver. Sin embargo, un modelo lineal con más restricciones que variables de decisión (celdas cambiantes) puede estar restringido en exceso, o puede contener restricciones redundantes. Esto último refleja errores lógicos en el modelo y puede producir el mensaje "Solver no ha podido encontrar una solución factible". Aparte de aumentar el tiempo de solución, esto último por lo general es inofensivo, pero en circunstancias poco usuales puede provocar dificultades. (Observe el análisis en "Solver no puede mejorar la presente solución...".)

Para modelos no lineales, el límite es de 100 restricciones, más 100 restricciones del lado derecho de cota superior y 100 restricciones del lado derecho de cota inferior para las celdas cambiantes, y adicionalmente 200 restricciones de enteros en las variables de decisión, si las hay.

Los límites anteriores son más flexibles para versiones mejoradas del complemento Solver; dichas versiones son comercialmente disponibles con la empresa que lo creó: Frontline Systems (http://www.frontsys.com/).

No se han satisfecho las condiciones para "Adoptar modelo lineal". La opción Adoptar modelo lineal fue seleccionada en Opciones de Solver, y Solver calculó sus puntos de ensayo utilizando la extrapolación lineal para llegar a la solución que se muestra, pero el recálculo final de la hoja de cálculo muestra valores de las restricciones y/o de la celda de la función objetivo (Celda objetivo) que no coinciden con la extrapolación lineal. Revise la lógica del modelo para verificar la fuente de no linealidad y corrija el modelo, o aténgase a un modelo no lineal y abandone la optimización lineal; esto es, quite la marca en la opción Adoptar modelo lineal en Opciones de Solver.

Si al revisar la lógica del modelo resulta que es lineal, entonces vea si un mal dimensionamiento de las cantidades del modelo fue el que causó el (falso) mensaje. Las versiones de Excel anteriores a Excel 97 son más susceptibles a este mensaje. Si redimensionar los datos del modelo no resulta suficiente, actualícese a Excel 97 y muy probablemente se eliminará esta dificultad.

Si usted está seguro de que su modelo es lineal y está utilizando Excel 97, haga algo de lo siguiente: (a) por segunda vez vuelva a optimizar inmediatamente el modelo, o (b), reduzca el parámetro Precisión en Opciones de Solver y vuelva a optimizar el modelo. En el caso de un programa lineal de enteros, si ninguna de las dos opciones anteriores funciona, intente reducir el parámetro Tolerancia en Opciones de Solver a 1%, o incluso a 0%, y vuelva a optimizar el modelo.

Se ha alcanzado el límite máximo de tiempo o de iteración. El tiempo máximo permitido por el proceso de solución o la cantidad máxima de iteraciones (establecidos con los cuadros Tiempo máximo e Iteraciones en Opciones de Solver) se ha alcanzado, sin encontrarse una solución satisfactoria. Quizás sea necesario aumentar la cantidad máxima de iteraciones o el tiempo para los modelos grandes, pero primero examine los valores de la presente solución para tener una idea de los posibles problemas del modelo.

Los valores de la celda objetivo no convergen. La celda de la función objetivo (Celda objetivo) está aumentando (o disminuyendo) sin límite, aunque todas las restricciones están satisfechas. Los valores actuales en la hoja de trabajo probablemente indican cómo se logra la divergencia de esta solución. La causa más probable son restricciones omitidas en el modelo. Revise el modelo formal buscando restricciones olvidadas u otros errores lógicos, que invaliden una o más restricciones (por ejemplo, una dirección equivocada en una desigualdad, etcétera).

Para un modelo no lineal, la fórmula de la función objetivo puede estar especificada incorrectamente.

Problema por resolver y que está especificado de manera insuficiente. Imaginemos que la información necesaria para Solver fue omitida del cuadro de diálogo Parámetros de Solver; por ejemplo, no se especificaron las celdas cambiantes o faltó la celda objetivo en conjunción con las restricciones.

Ha ocurrido un problema interno no esperado, o se agotó la memoria disponible. Verifique que se ha escrito correctamente el modelo y que todas las celdas contienen valores numéricos. Éste es un mensaje "de tipo general" para dificultades que Solver no pudo identificar de otra manera. Una causa común de este mensaje es que un rango de celdas anteriormente válido en el cuadro de diálogo Parámetros de Solver ha sido invalidado por una supresión subsecuente de alguna de las filas o columnas a las que se hacía referencia en la hoja de cálculo. Es más probable que esto ocurra si los nombres de los rangos originalmente se utilizaron en el cuadro de diálogo Parámetros de Solver, haciendo que apareciera una cadena de error "#Ref!" para referencias, ahora indefinidas, a las columnas/filas suprimidas. Si es así, edite manualmente la cadena de error "#Ref!" y vuelva a especificar la escala de celdas o el nombre del rango válido. En versiones anteriores a Excel 97 un efecto colateral de este error "#Ref!" es que algunos de los botones del cuadro de diálogo Parámetros de Solver pueden hacer aparecer este mensaje si se hace clic sobre ellos, haciendo por lo tanto imposible eliminar o editar la cadena de error que causa el mensaje de error, lo cual es un dilema frustrante. La siguiente fórmula mágica deberá funcionar en este caso:

1. Cierre el cuadro de diálogo Parámetros de Solver.
2. Seleccione el elemento Nombre Definir del menú Insertar de Excel.
3. Escriba el solver_num del error o la cadena en el campo o espacio Nombres en el libro.
4. Escriba un 0 en el campo "Se refiere a", y haga clic en Aceptar.
5. Abra Solver y edite el campo de Parámetros de Solver como siempre.

Si es usuario de Windows 95 y sospecha que se ha acabado la memoria, guarde su libro de trabajo, salga de Excel, cierre aplicaciones y ventanas innecesarias y vuelva a abrir Excel para liberar la así llamada memoria USER y GDI. Si es usuario de Macintosh y sospecha que la memoria se ha terminado, guarde su libro de trabajo, salga de Excel, cierre aplicaciones y ventanas innecesarias, extienda el tamaño de memoria Preferida de la aplicación Excel a través del procedimiento Comando-i y vuelva a abrir Excel.

Índice

CONTRATO DE LICENCIA Y GARANTÍA LIMITADA

LEA CUIDADOSAMENTE LOS SIGUIENTES TÉRMINOS Y CONDICIONES ANTES DE ABRIR LA ENVOLTURA DE ESTE DISCO. ESTE DOCUMENTO LEGAL CONSTITUYE UN CONTRATO ENTRE USTED Y PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A. (LA COMPAÑÍA). POR EL HECHO DE ABRIR LA ENVOLTURA SELLADA DE ESTE DISCO, USTED ACEPTA LOS TÉRMINOS Y CONDICIONES DE ESTE CONTRATO. SI NO ESTÁ DE ACUERDO CON ESTOS TÉRMINOS Y CONDICIONES NO ABRA LA ENVOLTURA DEL DISCO. DEVUELVA DE INMEDIATO EL PAQUETE DEL DISCO SIN ABRIR Y TODOS LOS ARTÍCULOS QUE LO ACOMPAÑAN AL LUGAR DONDE LOS ADQUIRIÓ. ESTOS TÉRMINOS SE APLICAN A TODOS LOS PROGRAMAS PROTEGIDOS CON LICENCIA E INCLUIDOS EN EL DISCO, CON LA SALVEDAD DE QUE LAS CONDICIONES PARA EL USO DE CUALQUIER *SHAREWARE* O *FREEWARE* CONTENIDO EN LOS DISQUETES SERÁN LAS QUE APAREZCAN EN LA LICENCIA ELECTRÓNICA QUE HA SIDO INCLUIDA EN EL DISCO.

OTORGAMIENTO DE LICENCIA:
En consideración al pago de su cuota por la licencia, que forma parte del precio que usted pagó por este producto, y su aceptación para respetar los términos y condiciones de este contrato, la Compañía le otorga un derecho no exclusivo para usar y exhibir la copia del disco de datos adjunto (en lo sucesivo el *SOFTWARE*). La Compañía se reserva todos los derechos que no sean otorgados expresamente a usted bajo este contrato.

PROPIEDAD DEL *SOFTWARE*:
A usted solamente le pertenece el medio magnético o físico (el disco adjunto) donde el *SOFTWARE* está grabado o contenido, pero la Compañía conserva todos los derechos, títulos y propiedad sobre el *SOFTWARE* grabado en la(s) copia(s) del (de los) disco(s) original(es) y todas las copias subsecuentes, independientemente de la forma o medio en que el original u otras copias del mismo pudieran existir. Esta licencia no implica la venta del *SOFTWARE* original ni de alguna de sus copias a usted.

RESTRICCIONES SOBRE USO Y TRANSFERENCIA:
Este *SOFTWARE*, con los materiales impresos y el manual del usuario que lo acompañan (la documentación) están protegidos mediante derechos de autor y sólo se entregan a usted bajo licencia. Usted no podrá vender u otorgar licencias sobre copias del DISCO DE DATOS o de la documentación a otras personas, y tampoco podrá transferirlas o distribuirlas, salvo a los maestros y estudiantes de su escuela que sean usuarios del libro de texto en el cual haya sido incluido este *SOFTWARE*. Usted no podrá desensamblar, afectar la compilación, modificar, adaptar, traducir o crear obras derivadas a partir del *SOFTWARE* o de la documentación, sin previa autorización por escrito de la Compañía. A usted se le podrá imputar responsabilidad legal por cualquier infracción en materia de copias o derechos de autor, si se considera que éstas fueron ocasionadas o alentadas por su falta de cumplimiento a los términos de estas restricciones.

TERMINACIÓN:
Esta licencia estará en vigor mientras no sea rescindida. La licencia terminará automáticamente, sin necesidad de notificación de la Compañía, y se considerará nula o inválida si usted no cumple con cualquiera de las disposiciones o limitaciones contenidas en esta licencia. En ese caso, deberá destruir la documentación y todas las copias del *SOFTWARE*. Todas las disposiciones de este contrato, en lo referente a garantías, limitación de responsabilidades, restituciones o perjuicios, y los derechos de propiedad de usted, persistirán después de la terminación del mismo.

GARANTÍA LIMITADA Y RENUNCIA A LA GARANTÍA:
La Compañía garantiza que si el *SOFTWARE* se utiliza de acuerdo con la documentación, funcionará sustancialmente en conformidad con la descripción del *SOFTWARE* ahí contenida. La Compañía no garantiza que el *SOFTWARE* satisfaga los requisitos de usted o que la operación del *SOFTWARE* esté libre de interrupciones o errores. La Compañía garantiza que el medio en el cual se entrega el *SOFTWARE* está libre de defectos en términos de materiales y mano de obra, en condiciones de uso normal, por un periodo de treinta (30) días a partir de la fecha de compra. Bajo estas garantías limitadas, lo único que usted puede hacer, y la única obligación de la Compañía, es devolver el artículo amparado por la garantía para que se le entregue otro en su lugar. La sustitución de *SOFTWARE* o de medios realizada bajo la garantía no ampliará el periodo original de la misma. La garantía limitada antes descrita no se aplicará a ningún *SOFTWARE* que la Compañía considere, de buena fe, que ha sido objeto de uso indebido, descuido, instalación incorrecta, reparaciones, alteraciones o daños ocasionados por usted. CON EXCEPCIÓN DE LAS GARANTÍAS EXPRESADAS CON ANTERIORIDAD, LA COMPAÑÍA DESCONOCE CUALQUIER OTRA GARANTÍA, EXPRESA O IMPLÍCITA, INCLUYENDO SIN LÍMITE ALGUNO LAS GARANTÍAS IMPLÍCITAS DE COMERCIO Y CONVENIENCIA PARA UN PROPÓSITO PARTICULAR. SALVO POR LA GARANTÍA EXPRESA ANTES MENCIONADA, LA COMPAÑÍA NO ASEGURA, GARANTIZA O ASUME RESPONSABILIDAD ALGUNA POR LOS RESULTADOS DEL USO QUE SE LE DÉ A ESTE *SOFTWARE*, EN LO REFERENTE A SU CORRECCIÓN, PRECISIÓN, FIABILIDAD, ACTUALIDAD O CUALQUIER OTRO ATRIBUTO. EN NINGÚN CASO, LA COMPAÑÍA O SUS EMPLEADOS, AGENTES, PROVEEDORES O CONTRATISTAS ASUMIRÁN LA RESPONSABILIDAD POR CUALQUIER DAÑO INCIDENTAL, INDIRECTO, ESPECIAL O CONSECUENTE QUE SURJA A CAUSA DE LA LICENCIA OTORGADA BAJO ESTE CONTRATO O RELACIONADA CON ELLA, NI TAMPOCO POR LA PÉRDIDA DE USO, DATOS, INGRESOS O GANANCIAS, O CUALESQUIERA OTRAS PÉRDIDAS QUE SE PRESENTEN COMO RESULTADO DE DAÑOS A CUALQUIER PERSONA O A PROPIEDADES, O POR RECLAMACIONES DE TERCEROS, INCLUSO SI LA COMPAÑÍA O UN REPRESENTANTE AUTORIZADO DE LA MISMA HUBIERA SIDO ADVERTIDO ACERCA DE LA POSIBILIDAD DE QUE SE PRODUJERAN TALES DAÑOS.
ALGUNAS JURISDICCIONES NO PERMITEN LA LIMITACIÓN DE GARANTÍAS IMPLÍCITAS O LA RESPONSABILIDAD POR DAÑOS INCIDENTALES, INDIRECTOS, ESPECIALES O CONSECUENTES, POR LO CUAL LAS LIMITACIONES ANTERIORES PUEDEN NO SER APLICABLES EN EL CASO DE USTED. LAS GARANTÍAS DE ESTE CONTRATO LE CONFIEREN A USTED DERECHOS LEGALES ESPECÍFICOS, ADEMÁS DE OTROS DERECHOS QUE USTED PUEDE TENER Y QUE VARÍAN DE ACUERDO CON LA LEY LOCAL.

RECONOCIMIENTO
USTED RECONOCE QUE HA LEÍDO ESTE CONTRATO, LO HA ENTENDIDO Y ACEPTA SUJETARSE A SUS TÉRMINOS Y CONDICIONES. ACEPTA TAMBIÉN QUE ESTE CONTRATO ES LA DECLARACIÓN COMPLETA Y EXCLUSIVA DEL ACUERDO CONCERTADO ENTRE USTED Y LA COMPAÑÍA, Y QUE SUSTITUYE A CUALQUIER PROPUESTA O CONTRATO ANTERIOR, ORAL O ESCRITO, Y A CUALESQUIERA OTRAS COMUNICACIONES ENTRE USTED Y LA COMPAÑÍA O CUALQUIER REPRESENTANTE DE LA MISMA, EN RELACIÓN CON LA MATERIA DE ESTE CONTRATO.
Si usted tiene cualquier duda acerca de este contrato o desea comunicarse con la Compañía por cualquier razón, llame por favor al teléfono de servicio al cliente: 5387-0970.