Finanzas del Proyecto

Introducción a las Matemáticas Financieras

Carlos Mario Morales Castaño

Finanzas del proyecto

Introducción a las Matemáticas Financieras

Teléfono: 421.28.93
E_Mail: carlosmoralescastano@gmail.com
Impresión digital en Colombia.

Datos Catalográficos para citar este libro

Finanzas del proyecto: Introducción a las Matemáticas Financieras

Carlos Mario Morales C.
Centro Editorial Esumer. Medellín, 2014
ISBN: 978-958-8599-64-9
Formato 17x24 cm. Páginas: 288

Tabla de contenido

Relación de ejemplos y casos

Relación de gráficas

Relación de tablas

Presentación

De todas las funciones del gerente de proyectos, la gestión financiera es la de mayor importancia, considerando que durante todo el ciclo de vida del proyecto, debe tomar decisiones relacionadas con los recursos financieros.

En el aspecto financiero, el gerente debe decidir sobre: la factibilidad financiera: disponibilidad de los recursos monetarios durante el tiempo de ejecución y operación del proyecto; el presupuesto financiero: momento en que se utilizaran los recursos monetarios y la viabilidad de su uso; las proyecciones de ingresos y egresos y su impacto en los beneficios y rendimientos financieros esperados; además, debe evaluar los riesgos determinando el grado de certeza que se espera de las proyecciones bajo el contexto en que se desarrolla el proyecto y su impacto sobre los resultados financieros.

¿Cuál es el valor del proyecto?, ¿Cuáles es la proyección de los ingresos?, ¿Cuáles son los costos y gastos proyectados para su futura operación?, ¿Cuándo es prudente endeudarse para la realización del proyecto?, ¿Cuál es el costo del dinero?, ¿Qué rentabilidad se debe exigir a la inversión?, ¿Cuál es la estructura financiera más apropiada para el proyecto?, ¿Cuál es el riesgo financiero cuando se decide por una alternativa?; son preguntas que debe contestar el gerente para gestionar de manera óptima los proyectos de inversión, asegurando así la generación de valor al inversionista.

La matemática financiera es una herramienta que estudia el valor del dinero en el tiempo; la disciplina proporciona modelos matemáticos que permiten simular las operaciones financieras para apoyar al gerente de proyectos en la toma de decisiones para seleccionar las mejores formas de inversión y financiación; es decir, una herramienta para la planeación y gestión financiera eficiente y la generación de valor.

La generación de valor del inversionista tiene que ver con decisiones de financieras que aseguren rendimientos por encima del costo de los dineros comprometidos con las iniciativas de inversión.

El libro Finanzas del Proyecto trata los conceptos financieros básicos y sus aplicaciones más corrientes. Con él se busca facilitar el desarrollo de las competencias de los futuros especialistas en el este campo de la gerencia de proyectos; su estudio desarrollara en los profesionales su capacidad de realizar la simulación matemática de las operaciones financieras para ser utilizada en la planeación, evaluación y gestión de los proyectos o la administración de empresas orientadas bajo un modelo de gerencia de proyectos.

El libro está dividido en cinco unidades de aprendizaje. En la primera unidad se propone el estudio de los fundamentos de la disciplina: el valor del dinero en el tiempo, el concepto de equivalencia y el interés simple con sus aplicaciones más significativas. En la unidad dos se estudia el concepto de interés compuesto, además se estudia la diferenciación entre tasa de interés efectiva y tasa nominal, la equivalencia de tasas de interés, la ecuación de valor; y finalmente se analizan algunas operaciones financieras: depósitos a término fijo, inflación, deflación, devaluación, revaluación, tasas combinadas, tasa deflactada y la equivalencia de tasas referenciadas. La unidad tres propone el estudio de las operaciones financieras denominadas anualidades y gradientes; para cada caso, se plantean y analizan los modelos matemáticos para el cálculo de los valores presente y futuro, la tasa de interés, el plazo y las formas de pago. En la unidad cuatro se estudian las amortización de créditos y la capitalización de ahorros en sus diferentes modalidades. Finalmente en la unidad cinco se tratan los criterios de evaluación de proyectos: valor presente neto (VPN), costo anual equivalente (CAE), tasa interna de retorno (TIR), la tasa única de retorno (TUR) y la relación beneficio-costo (B/C); además se hace una introducción a los estudios de sensibilidad. Con estos contenidos, el texto ofrece a los estudiantes y profesionales, con orientación a la gerencia de proyectos, los fundamentos básicos y herramientas financieras para el ejercicio de su profesión.

El texto propone el estudio desde la dimensión práctica, sin dejar de lado el fundamento teórico. A partir de la teoría se realizan aplicaciones orientadas a situaciones empresariales, facilitando a los estudiantes la apropiación de la disciplina para su formación de acuerdo a los requerimientos del medio empresarial. Las lecturas de los capítulos serán la base teórica; pero no sé excluye que el estudiante apoye su aprendizaje en la consulta de la bibliografía y cibergrafía propuesta.

En lo práctico, en el libro se resuelven ejemplos y casos para cada una de las temáticas que se tratan; adicionalmente, el texto se acompaña del blog Finanzas del Proyecto, en el cual, para cada unidad de aprendizaje, se proponen ejercicios resueltos y propuestos de diferente nivel de complejidad.

El blog, al cual se puede acceder a través de http://finanzasdelproyecto.wordpress.com/, es un complemento del libro donde, aparte de los ejercicios resueltos y propuestos, se pueden consultar lecturas complementarias, presentaciones de cada una de las temáticas y la propuesta de evaluación de cada unidad.

Para la solución de los ejercicios y casos propuestos, metodológicamente, se propone el siguiente procedimiento básico: a) la Identificación del problema; b) la recopilación y ordenamiento de los datos; c) la escogencia y aplicación de modelo apropiado para el caso; y, finalmente d) la interpretación de los resultados encontrados. Se sugiere a los estudiantes adoptar una técnica y asumir una disciplina de estudio que le permita: apropiar los conceptos teóricos y la realización de las prácticas de acuerdo a los instructivos y recomendaciones.

A los docentes se les sugiere realizar evaluaciones integrales que verifiquen la apropiación de los conocimientos y desarrollo de las habilidades individuales; pero también el grado de responsabilidad y compromiso, la capacidad del trabajo en equipo, la creatividad e iniciativa, el compromiso, la tolerancia al cambio, la toma de riesgos calculados y la persistencia en el trabajo; valores propios y necesarios para cualquier profesional que aspire trabajar en gerencia de proyectos.

1 Interés

UNIDAD 1: INTERÉS

OBJETIVO

Al finalizar la unidad los estudiantes estarán en capacidad de conceptuar sobre el valor del dinero en el tiempo, el concepto de equivalencia, calcular operaciones financieras sencillas aplicando interés simple y realizar operaciones financieras y comerciales de descuento.

CONTENIDO

Introducción

1. *Valor del dinero en el tiempo*
2. *Interés*
3. *Interés anticipado y descuentos*

Introducción

La expresión: “No es lo mismo un millón de pesos de hoy, que un millón de pesos dentro de un año”, se utiliza para significar que el poseedor del dinero espera una recompensa por no utilizar su dinero y ponerlo a disposición de otro por un tiempo determinado. No es igual recibir la misma cantidad de dinero hoy que un tiempo después; es decir, no se puede afirmar que dichos valores sean equivalentes.

Dos cifras de dinero son equivalentes cuando a una persona le es indiferente recibir una suma de dinero hoy $(V_p: Valor\ presente)$ o recibir otra $(V_f: Valor\ futuro)$ al cabo de un tiempo. El Interés es el monto de dinero que hace equivalente el valor del dinero en el tiempo; dicho de otro modo, permite hacer equivalente dos cifras de dinero en el tiempo.

El concepto de interés es de uso amplio; esto ha conducido a que tenga múltiples denominaciones: valor del dinero en el tiempo, valor recibido o entregado por el uso del dinero, utilidad o ganancia que genera un capital, el precio que se paga por el uso del dinero, rendimiento de una inversión, entre otras.

En general, las operaciones financieras tienen en común el pago de un interés por el uso del dinero. Además, el precio del dinero (interés), como cualquier otro bien del mercado, sufre altas y bajas, como cualquier otra mercancía, dependiendo de las condiciones del mercado y variables como la inflación, devaluación y revaluación, entre otras. Además, el cálculo del valor del interés dependerá de las condiciones que se pacten en la operación financiera: tipo de interés, ya sea este simple o compuesto, monto de dinero, plazo, forma de pago, y tasa de interés.

En esta unidad se tratan los conceptos del valor del dinero en el tiempo y la equivalencia de valor; además, se estudian los modelos matemáticos para el cálculo del interés simple y su aplicación en diferentes casos, incluyendo las operaciones de descuento financieras y comerciales.

1. Valor del dinero en el tiempo

¿Por qué no es lo mismo recibir hoy $1´000.000, que esta misma cantidad dentro de un año? Las razones que explican por qué dos cantidades iguales de dinero no tienen el mismo valor en el tiempo; son:

- La primera tiene que ver con la pérdida del poder adquisitivo del dinero, ocasionado por el incremento generalizado de los precios, fenómeno económico conocido como inflación. En general, con la misma cantidad de dinero hoy se podrán adquirir mayor cantidad de bienes y servicios, que dentro de un año.
- La segunda tiene que ver con la capacidad que tiene el dinero de generar dinero. El dueño del millón de pesos los puede invertir obtenido rendimientos, lo que le permitirá recibir una mayor cantidad un año más tarde. Esto es lo que se denomina el costo de oportunidad.
- La tercera tiene que ver con el riesgo: más vale tener asegurado el millón de pesos hoy, y no la promesa de recibir el dinero dentro de un año. Por asumir este riesgo, el poseedor del dinero, en general, espera recibir una recompensa.

En resumen, el poseedor del dinero solo estará dispuesto a entregarlo en préstamo, si se le reconoce un monto adicional que le repare la pérdida de valor, más un rendimiento que lo compense por renunciar a su uso y por asumir el riesgo de recibir el capital un tiempo después.

2. Interés

Es la cantidad de dinero adicional por la cual un inversionista estará dispuesto a prestar su capital a un tercero. En otras palabras, la cantidad de dinero adicional que hace que dos cantidades de dinero sean equivalentes en el tiempo.

$$V_f = V_p + I \quad (1)$$

De donde:

V_f: Valor futuro de una cantidad presente
V_p: Valor presente
I: Interés

De acuerdo a lo que se pacte en la operación financiera, el interés se puede calcular de manera simple o compuesta. Bajo el acuerdo de interés simple, la liquidación de interés se realiza período a período, siempre sobre el monto inicial, independiente del momento en que dichos intereses sean pagados.

Por su parte, el acuerdo de interés compuesto conduce a que los intereses liquidados en cada período sean sumados al capital inicial, el resultado será la base para la nueva liquidación de intereses y así hasta el momento en que los intereses sean pagados o finalizada la operación; bajo esta modalidad se dice que los intereses se capitalizan.

2.1 Interés Simple

Cuando en una operación financiera se pacta interés simple el cálculo de la cantidad que se paga por el uso del dinero, se realiza al final de cada período de tiempo pactado sobre el monto de capital. En este caso, el interés no se capitaliza; es decir, no se suma al monto inicial, para calcular el interés del siguiente período. Además de acordar el tipo de interés en la operación financiera se debe pactar el monto de capital, el plazo de la operación, la forma de pago y la tasa de interés por período de tiempo que se pagara por el dinero.

2.2 Tasa de interés

Se define como el valor porcentual que se pacta por el uso del dinero para un período de tiempo determinado. La tasa de interés se aplica al capital, cada período, durante el tiempo que se acuerde como duración de la operación. En los siguientes ejemplos se ilustra la interpretación de las tasas de interés.

Ejemplos y Casos

1.1 – Tasa de Interés

a) 20% anual, significa que se pagará 0,2 pesos por cada peso, por cada año

b) 1,5% mensual, significa que se pagará 0,015 pesos por cada peso, por cada mes

c) 6% semestral, significa que se pagará 0,06 pesos por cada peso, por cada seis meses

d) 4% bimensual, significa que se pagará 0,04 pesos por cada peso, por cada dos meses

e) 45% bianual, significa que se pagará 0,45 pesos por cada peso, por cada dos años

2.3 Modelo de interés simple

El interés, bajo la modalidad simple, se calcula como el producto del capital inicial (V_p) por la tasa de interés (i) del período, por el número de períodos de tiempo pactados (n). El número de períodos será el resultado de dividir el plazo pactado por el período de liquidación del interés.

De esta forma, matemáticamente el cálculo del Interés se realiza como:

$$I = V_p \times i \times n \quad (2)$$

De donde:

V_p: Capital o monto principal
i: Tasa de interés pactada por período
n: Plazo pactado expresado en número de períodos de liquidación de intereses

2.4 Clases de interés simple

En la práctica no existe un criterio único para el cálculo del interés simple. La aplicación depende de los acuerdos de la operación financiera, del sector económico donde se realice o incluso de las costumbres comerciales. Dependiendo de la base en días que se utilice para el cálculo del interés, se distinguen dos tipos de aplicaciones.

2.4.1 Interés Ordinario

En esta aplicación para el cálculo del interés se toma como base un año de 360 días.

2.4.2 Interés Exacto

Contrario al interés ordinario, en este caso, el interés se calcula tomando como base un año de 365 días, o 366 cuando se trata de un año bisiesto.

Para ambas modalidades de cálculo, a su vez, las aplicaciones pueden tomar las variantes que se describen en la tabla 1.1

Tabla No 1.1 – Tipos de Interés

Interés Ordinario (Base de Cálculo 360)	Interés Bancario (Considera los días exactos en los cuales se ha utilizado el dinero y como base 360 días al año)	Tiempo exacto
	Interés Comercial (Considera indistintamente los meses de 30 días y como base 360 días al año)	Meses de 30 días
Interés Exacto (Base de Cálculo 365)	Interés Racional (Considera los días exactos en los cuales se utiliza el préstamo y como base los días exactos del año)	Tiempo exacto
	Racional sin Bisiesto (Considera los días exactos en los cuales se utiliza el préstamo y como base 365 días al año -No considera bisiestos-)	Tiempo exacto sin bisiesto
	Tiempo aproximado (Considera meses de 30 días y como base los días exactos del año (No tiene utilidad práctica))	Meses de 30 días

2.4.3 Ejemplos de cálculo del interés simple

Ejemplos y Casos

1.2 – INTERÉS SIMPLE BANCARIO

Sandra quiere conocer el interés que deberá pagar a una entidad bancaria durante el mes de febrero del año 2016 (bisiesto) por el préstamo de $1´000.000, si la entidad financiera para esa época cobrará una tasa de interés del 20% Anual.

Solución

Parámetros

- El monto o capital es: V_p =1´000.000
- La tasa de interés es: 20% anual.
- El período en que se causa el interés es una fracción: 29 días del mes de febrero de los 360 días del año.
- Considerando que la operación se realizará con un banco, se aplica interés bancario.

Cálculos

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula directamente utilizando la fórmula (2), como:

$$I = V_p \times i \times n$$

$$I = 1´000.000 \times 0{,}2 \times (29/360) = 16.111{,}11$$

Respuesta

El Interés que Sandra debe pagar al banco por el préstamo de un millón durante el mes de febrero del 2016 es: $16.111,11

1.3 – Interés Simple Comercial

Carmen quiere conocer el interés que deberá pagar por la financiación de un TV- LCD, cuyo precio es de $1´000.000, con una entidad comercial, por el mes de febrero del año 2016 (bisiesto), si la entidad para esa época cobra una tasa de interés del 20% Anual

Solución

Parámetros

- El monto o capital es: V_p =1´000.000
- La tasa de interés es: 20% anual; es decir, es lo que se cobrará por un año.
- El período en que se causa el interés es una fracción del año: 30 días del mes de febrero de los 360 días del año.
- Considerando que la operación se realiza con una entidad comercial, se aplica el interés comercial.

Cálculos

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula directamente utilizando la fórmula (2), como:

$$I = V_p \times i \times n$$

$$I = 1´000.000 \times 0{,}2 \times \left(\frac{30}{360}\right) = 16.666{,}66$$

Respuesta

El Interés que Carmen deberá pagar por la financiación del TV de un millón de pesos durante el mes de febrero del 2016 es: $16.666,66

1.4 – Interés Simple Racional

Juliana quiere conocer el interés que deberá pagar por un préstamo de un $1´000.000 durante el mes de febrero del año 2016 (bisiesto), si el prestamista cobra una tasa del 20% Anual y lo calcula con interés racional

Solución

Parámetros

- El monto o capital es: Vp =1´000.000
- La tasa de interés es: 20% anual; es decir, es lo que se cobrará por un año.
- El período en que se causa el interés es una fracción del año: 29 días del mes de febrero de los 366 días del año,
- De acuerdo al enunciado del caso se aplica interés racional.

Cálculos

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula directamente utilizando la fórmula (2), como:

$$I = V_p \times i \times n$$

$$I = 1´000.000 \times 0{,}2 \times \left(\frac{29}{366}\right) = 15.846{,}99$$

Respuesta

El Interés que Juliana deberá pagar por el préstamo de $1´000.000 durante el mes de febrero del 2016 es: $15.846,99

1.5 – Interés Simple Racional sin Bisiesto

Daniel quiere conocer el interés que deberá cancelar por un préstamo de $1´000.000 durante el mes de febrero del año 2016 (bisiesto), si el prestamista cobra una tasa del 20% Anual y realiza el cálculo con interés base 365 (tiempo exacto sin bisiesto)

Solución

Parámetros

- El monto o capital principal es: V_p =1´000.000
- La tasa de interés es: 20% anual.
- El período en que se causa el interés es una fracción del año: 28 días del mes de febrero de los 365 días del año.
- De acuerdo al enunciado del caso, se aplica interés tiempo exacto sin bisiesto.

Cálculos

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula directamente utilizando la fórmula (2), como:

$$I = V_p \times i \times n$$

$$I = 1´000.000 \times 0{,}2 \times \left(\frac{28}{365}\right) = 15.342{,}47$$

Respuesta

El Interés que Daniel deberá pagar por el préstamo de $1´000.000 durante el mes de febrero del 2016 es: $15.342,47

1.6 – Interés Simple Tiempo Aproximado

Santiago quiere conocer el interés que deberá pagar por un préstamo de $1´000.000 durante el mes de febrero del año 2016 (bisiesto), si el prestamista le cobra una tasa del 20% Anual y realiza el cálculo con interés exacto-tiempo aproximado

Solución

Parámetros

- El monto o capital principal es: V_p=1´000.000.
- La tasa de interés es: 20% anual; es decir, es lo que se cobrará por un año.
- El período en que se causa el interés es una fracción del año: 30 días del mes de febrero de los 366 días del año.
- De acuerdo al enunciado del caso se aplica el interés con tiempo aproximado.

Cálculos

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula directamente utilizando la fórmula (2), como:

$$I = V_p \times i \times n$$

$$I = 1´000.000 \times 0{,}2 \times \left(\frac{30}{366}\right) = 16.393{,}44$$

Respuesta

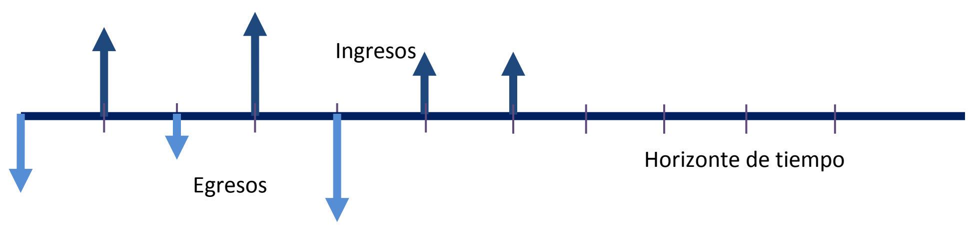
El Interés que Santiago deberá cancelar por el préstamo de $1´000.000 durante el mes de febrero del 2016 es: $16.393,44

2.5 Flujo de Caja: Representación gráfica de las operaciones financieras

Una forma fácil de comprender el alcance de las operaciones financieras es representar los movimientos de dinero que se producen en ella en una gráfica de tiempo.

En los gráficos de flujo de caja se puede visualizar los movimientos de dinero de las transacciones durante el tiempo que dure la operación. En dicha gráfica, el tiempo se representa por una recta horizontal, la cual para mayor entendimiento se divide en períodos; los egresos de dinero se representan con flechas hacia abajo; y los ingresos, por su parte, se representan con flechas hacia arriba; así como se muestra en la gráfica 1.1

Gráfica No 1.1 – Representación de las Operaciones Financieras



2.6 Capital Final – Valor futuro (V_f)

Como ya se definió el capital final que recibirá un prestamista o inversionista, o por el contrario, el que deberá pagar el que hace uso del dinero, corresponde al capital inicial más los intereses. Este valor se denomina valor final o valor futuro, y se representa como: V_f

$$V_f = V_p + I$$

Remplazando el valor de I de la fórmula (2) en la ecuación anterior, se obtiene:

$$V_f = V_p + (V_p \times i \times n)$$

Factorizando el valor común V_p, se obtiene:

$$V_f = V_p \ (1 + i \times n) \quad (3)$$

De donde:

V_p: Capital o monto principal pactado
V_f: Capital final o valor futuro
i: Tasa de interés pactada
n: Plazo pactado expresado en número de períodos de liquidación de intereses.

Ejemplos y Casos

1.7 – Valor Futuro – Interés Simple

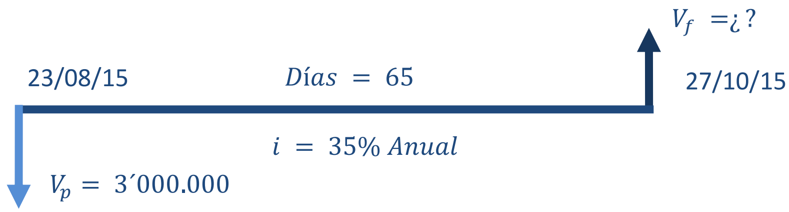
María Cristina quiere saber cuánto recibirá "exactamente", si presta a un amigo la suma de $3´000.000 entre el 23 de agosto hasta el 27 de octubre del 2015 y aplica una tasa de interés del 35% anual

Solución
Parámetros

- El monto o capital es: V_p=3´000.000
- La tasa de interés es: 35% Anual
- El tiempo en el cual se causan los intereses son los días entre 23.08.2015 y el 27.10.2015; es decir, 65 días; que es una fracción del año
- Considerando que ella quiere conocer el valor exacto entonces se aplica interés racional.

Representación gráfica

La transacción financiera se ilustra con el siguiente flujo de caja.



Cálculos
Con las anteriores consideraciones, el valor final se calcula directamente utilizando la fórmula (3), como:

$$V_f = V_p\,(1 + i \times n)$$

$$V_f = 3´000.000\left(1 + 0{,}35 \times \frac{65}{365}\right) = 3´186.986{,}30$$

Respuesta
El monto que recibirá María Cistina al final será de \$3´186.986,30; esto significa que obtendrá un interés de \$186.986,30. $(3´186.986{,}30 - 3´000.000)$

2.7 Capital Inicial – Valor presente (V_p)

Conocido el valor futuro, la tasa de interés y el número de períodos con los cuales se pacta la transacción financiera se puede calcular el capital inicial o valor presente involucrado en la operación financiera.

Despejando V_p de la fórmula (3), se obtiene:

$$V_p = \frac{V_f}{(1 + i \times n)} \quad (4)$$

Los símbolos tienen el mismo significado de la fórmula (3)

Ejemplos y Casos

1.8 – Valor Presente – Interés Simple

Juan debe pagar $600.000 de matrícula en la universidad el día 13 de diciembre. ¿Cuánto dinero debe depositar el 5 de agosto del mismo año en una cuenta de ahorros que paga un interés del 23% anual?

Solución

Parámetros

- El valor final que debe pagar es: V_f=600.000
- La tasa de interés es: 23% Anual.
- El tiempo en el cual se causan los intereses son los días entre 5 de agosto y el 13 de diciembre; es decir: 130 días; que es una fracción del año
- Considerando que la operación se realiza con un banco, se aplica interés bancario

Representación gráfica

La operación financiera se ilustra en el siguiente flujo de caja.

Cálculos

Con las anteriores consideraciones, el capital se calcula directamente utilizando la fórmula (4), como:

$$Vp = \frac{V_f}{(1 + i \times n)}$$

$$V_p = \frac{600.000}{\left(1 + \left(0{,}23 \times \frac{130}{360}\right)\right)} = 553.988{,}20$$

Respuesta

El monto que Juan debe depositar en la cuenta de ahorros el 5 de agosto es: $553.988,20

2.8 Tasa de interés (i)

Conocido el valor futuro, el capital inicial o valor presente y el número de períodos se puede calcular la tasa de interés a la cual se pacta la transacción financiera.

Despejando i de la ecuación (3), se obtiene:

$$i = \left(\frac{V_f}{V_p} - 1\right) \times \frac{1}{n} \quad (5)$$

Los símbolos tienen el mismo significado de la fórmula (3)

Ejemplos y Casos

1.9 – TASA DE INTERÉS – INTERÉS SIMPLE

Julián dueño de una pequeña empresa ha tenido excedentes por $3´000.000 durante el pasado período; él quiere conocer a que tasa de interés comercial dichos excedentes se convertirán en $3´500.000 en 6 meses

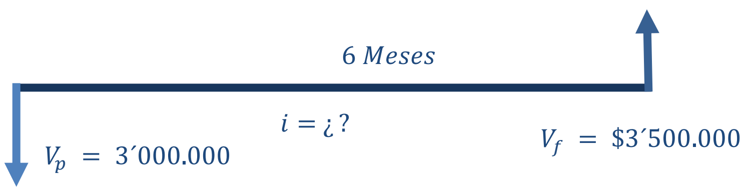
Solución

Parámetros

- El valor final es: V_f=3´500.000
- El capital inicial o valor presente: V_p=3´000.000
- El tiempo en el cual se causan los intereses son 6 meses, 180 días
- Se aplica interés comercial.

Representación Gráfica

La operación financiera se ilustra en el siguiente flujo de caja.



Cálculos

Con las anteriores consideraciones, la tasa de interés se calcula directamente utilizando la fórmula (5), como:

$$i = \left(\frac{V_f}{V_p} - 1\right) \times \frac{1}{n}$$

$$i = \left(\frac{3´500.000}{3´000.000} - 1\right) \times \frac{1}{\frac{180}{360}} = 0,3333 = 33,33\%$$

Respuesta

Juan deberá colocar su dinero a un interés del 33,33% anual

2.9 Numero de períodos (n)

Conocido el valor futuro, el capital inicial o valor presente y la tasa de interés se puede calcular el número de períodos a la cual está pactada la transacción financiera.

Despejando n de la ecuación (3), se obtiene:

$$n = \left(\frac{V_f}{V_p} - 1\right) \times \frac{1}{i} \quad (6)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la fórmula (3)

Ejemplos y Casos

1.10 – NÚMERO DE PERÍODOS- INTERÉS SIMPLE

Rubén dueño de una pequeña empresa ha tenido excedentes por $3´000.000 durante el pasado período; él quiere conocer durante cuántos días debe colocar este dinero para convertir estos excedentes en $4´500.000, si la entidad bancaria le reconoce un interés del 27% anual.

Solución

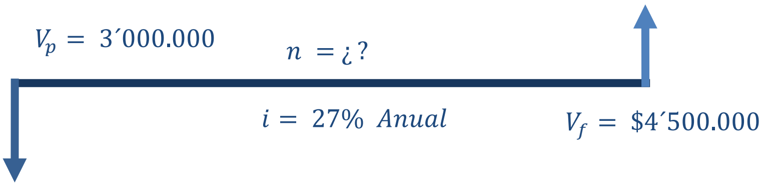
Parámetros

- El valor final es: V_f=4´500.000

- El capital inicial o valor presente: V_p=3´000.000
- Tasa de interés nominal anual es: i=27% Anual
- Se aplica interés bancario.

Representación Gráfica

La operación financiera se ilustra el siguiente flujo de caja.



Cálculos

Con las anteriores consideraciones, el número de períodos se calcula directamente utilizando la fórmula (6), como:

$$n = \left(\frac{V_f}{V_p} - 1\right) \times \frac{1}{i}$$

$$n = \left(\frac{4´500.000}{3´000.000} - 1\right) \times \frac{1}{0,27} = 1,852\ años = 666,66\ días$$

Respuesta

Rubén de colocar sus excedentes durante 666,66 días

3. Interés anticipado y descuentos

En algunas operaciones financieras es común que el cálculo del interés se haga de manera anticipada; es decir, causar el interés al principio de la operación; en este caso, se aplica la tasa de interés anticipada; la cual se representa con el símbolo (i_a).

Entre otras, las operaciones de descuento son transacciones donde se cobra el interés de manera anticipado. Este tipo de operaciones consiste en hacer efectivo de manera anticipada títulos valores que respaldan pagos futuros. Por ejemplo, cuando un comerciante vende en el mercado financiero pagarés o letras de cambio que respaldan las deudas de sus ventas a crédito; se dice que está realizando una operación de descuento. En este caso la entidad financiera donde se realiza el descuento cobra de manera anticipada un interés a cambio de poner a disposición del comerciante el dinero en efectivo. La tasa de interés a la cual se descuenta los títulos valores se denomina tasa de descuento y se representa con la letra "*d*"

Otra operación de descuento es aquella que se hace cuando los establecimientos comerciales conceden descuentos para motivar la compra, y el pago cumplido o anticipado de sus clientes. En estos casos el descuento se calcula utilizando, igualmente, la tasa de descuento, que se representa con la letra "*d*".

En los siguientes apartados se estudian estos dos tipos de operación.

3.1 Operaciones de Descuento

El descuento de títulos valores que respaldan pagos futuros son operaciones comunes en los mercados financieros. La operación consiste en volver líquido ante un tercero, usualmente una entidad financiera, un título valor que respalda un pago futuro.

El descuento (D) se calcula sobre el valor final o valor nominal del título valor V_f, aplicando la tasa de descuento (d) acordada en la operación y considerando el tiempo faltante para la maduración del título.

Teniendo en cuenta la anterior definición, matemáticamente el descuento se calcula como:

$$D = V_f \times d \times n \quad (7)$$

De donde:

D: Descuento
V_f: Valor final o nominal del título valor
d: Tasa de descuento
n: Número de períodos

Por su parte, el Valor Líquido (V_t) o valor de la transacción se calcula como el valor nominal menos el descuento:

$$V_t = V_f - D$$

Remplazando el valor D de la ecuación (7), en la expresión anterior, se obtiene:

$$V_t = V_f - (V_f \times d \times n)$$

Factorizando V_f,

$$V_t = V_f \times (1 - d \times n) \quad (8)$$

Los demás símbolos tienen el mismo significado que en la fórmula (7)

Despejando V_f de la fórmula (8) se obtiene el valor nominal del título valor, cuando se tiene la información de los demás parámetros

$$V_f = \frac{V_t}{(1 - d \times n)} \quad (9)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la fórmula (7)

Ejemplos y Casos

1.11 – Operaciones de Descuento 1

El 22 de abril del 2010 una pequeño comerciante compra mercancías por un valor de $8´000.000 para surtir su almacén; el pago de esta mercancía se realizará 3 meses después (22 de julio) y se respalda con una letra de cambio por valor nominal de \$8´000.000. El 25 de junio el proveedor, por problemas de liquidez, ofrece en venta la letra de cambio al Banco Medellín, el cual aplica una tasa de descuento del 27% Anual. ¿Cuánto recibirá el proveedor en esta operación?

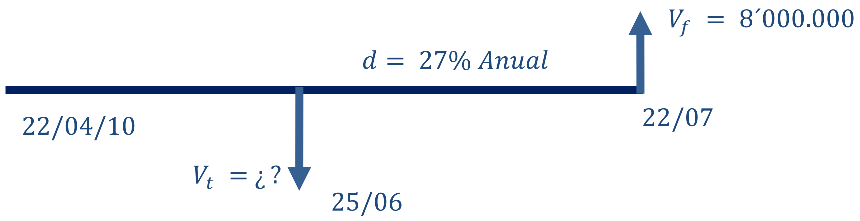
Solución

Parámetros

- El valor final es: $V_f = 8´000.000$
- El período en que se causa el descuento esta entre el 25/06 y 22/07, es decir: 27 días.
- Tasa de descuento: $d = 27\%\ Anual$
- Se aplica interés bancario.

Representación Gráfica

La operación financiera se ilustra en el siguiente flujo de caja.



Cálculos

Con las anteriores consideraciones, el Valor Liquido se calcula utilizando directamente la fórmula (8), como se muestra a continuación:

$$V_t = V_f \times (1 - d \times n)$$

$$V_t = 8´000.000 \times \left(1 - 0,27 \times \frac{27}{360}\right) = 7´838.000$$

Respuesta

El proveedor recibirá del Banco Medellín el 25 de junio un valor de \$7´838.000, a cambio del título que tiene un valor nominal de \$8´000.000

1.12 – Operaciones de Descuento 2

¿Cuál deberá ser el valor nominal de una letra de cambio que un comerciante descuenta en el Banco Medellín, cincuenta días antes de su vencimiento a una tasa del 25% Anual, si el comerciante recibe un valor de $125´450.000 al momento del descuento?

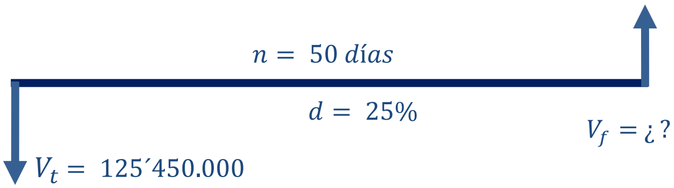
Solución

Parámetros

- El valor liquido es: V_t=125´450.000
- El tiempo en que se causa el descuento es: 50 días.
- Tasa de descuento: $d = 25\%\ anual$
- Interés bancario.

Representación Gráfica

La operación financiera se ilustra en el siguiente flujo de caja.



Cálculos

Con las anteriores consideraciones, el Valor Nominal se calcula utilizando directamente la fórmula (9), así como se muestra a continuación:

$$V_f = \frac{V_t}{(1 - d \times n)}$$

$$V_f = \frac{125´450.000}{\left(1 - 0{,}25 \times \frac{50}{360}\right)} = 129´962.589{,}9$$

Respuesta

El valor nominal de la letra de cambio debería ser de $129´962.589,9

3.2 Tasa de interés real en una operación de descuento

La tasa de descuento se aplica al valor final de la operación, a diferencia de la tasa de interés vencido que se aplica al capital inicial; en consecuencia, es lógico, que para un mismo valor, el interés sea diferente. Para calcular la tasa de interés efectiva que se cobra en una operación de descuento se debe aplicar la fórmula de interés (5), al resultado final de la operación de descuento. El cálculo se ilustra a través del siguiente ejemplo:

Ejemplos y Casos

1.13 – Tasa Efectiva en una Operación de Descuento

Si el Banco Medellín descuenta una letra de cambio de $6´000.000, 75 días antes del vencimiento al 26%. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva Anual que cobra el banco por esta operación?

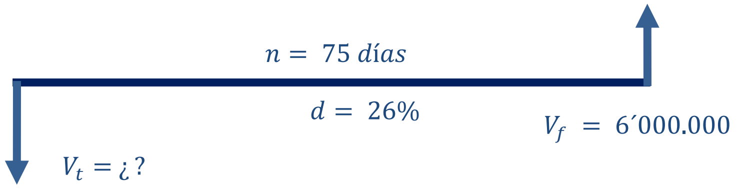
Solución

Parámetros

- El valor nominal es: V_f=6´000.000
- El tiempo en que se causa el descuento es: 75 $días$.
- Tasa de descuento: $d = 26\%\ anual$
- Interés bancario.

Representación Gráfica

Lo primero es calcular el valor líquido de la operación de descuento. La situación se ilustra gráficamente a continuación:



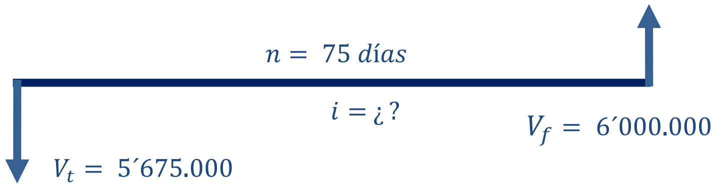
Cálculos

Con las anteriores consideraciones, el Valor líquido se calcula aplicando directamente la fórmula (8), como se muestra a continuación:

$$V_t = V_f \times (1 - d \times n)$$

$$V_t = 6´000.000 \times \left(1 - 0{,}26 \times \frac{75}{360}\right) = 5´675.000$$

De esta forma el Banco debe pagar $5´675.000 a cambio de recibir $6´000.000 75 días más tarde; con lo cual la tasa efectiva que está recibiendo por esta operación se puede calcular utilizando la fórmula (5)



Aplicando la fórmula (5), se obtiene:

$$i = \left(\frac{V_f}{V_p} - 1\right) \times \frac{1}{n}$$

$$i = \left(\frac{6´000.000}{5´675.000} - 1\right) \times \frac{1}{\frac{75}{360}} = 0{,}2748 = 27{,}48\%$$

Respuesta

La tasa de interés efectiva de la operación es: 27,48% anual, nótese que dicha tasa es superior a la tasa de descuento

3.3 Descuentos en Cadena

En las operaciones comerciales es común ofrecer descuentos con el fin de motivar las compras y el pronto pago cuando se realizan ventas a crédito. Lo normal es encontrar que los comerciantes ofrecen más de un descuento simultáneamente, todos ellos aplicables a una misma factura. Los descuentos más comunes en el mercado son:

- Descuento por volumen
- Descuento por pronto pago

- Descuento por embalaje
- Descuento por temporada
- Descuento por fidelidad

Cuando se aplican descuentos simultáneamente a una misma factura se aplica un "Descuento en Cadena". En la tabla No 1.2 se muestra la forma de calcular, el valor del descuento y el valor final de la factura, cuando se aplican varios descuentos de manera simultánea a una misma factura.

Tabla No 1.2 - Descuentos en Cadena

Valor factura antes del descuento	Tasa Descuento	Valor descuento (D)	Valor factura después del descuento (A_f)
A	d_1	$D_1 = Ad_1$	$A_1 = A - Ad_1 = A(1-d_1)$
$A(1-d_1)$	d_2	$D_2 = A(1-d_1)\, d_2$	$A_2 = A(1-d_1)-A(1-d_1)\, d_2 = A(1-d_1)(1-d_2)$
$A(1-d_1)(1-d_2)$	d_3	$D_3 = A(1-d_1)(1-d_2)\, d_3$	$A_3 =(A(1-d_1)(1-d_2)-A(1-d_1)(1-d_2)d_3)$ $= A(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)$
…	…	…	…
$A(1-d_1)(1-d_2)…(1-d_{n-1})$	d_n	$D_n = A(1-d_1)(1-d_2)… (1-d_{n-1})\, d_n$	$A_n = A(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)…(1-d_n)$

Fuente: BACA CURREA, Guillermo. (2002). Ingeniería Económica. Bogotá: Editorial Fondo Educativo Panamericano

De donde:

A: Valor inicial de la factura
d_n: Tasa de descuento n
D_n: Descuento total después de n descuentos
A_n: Valor de la factura final después de n descuentos

De la tabla, se puede establecer que el descuento total se calcula como:

$$D = A[1-(1-d_1)(1-d_2)\dots(1-d_{n-1})(1-d_n)] \quad (10)$$

El valor de la factura final, se calcula como:

$$A_f = A(1-d_1)(1-d_2)\ldots(1-d_n) \quad (11)$$

Finalmente la tasa de descuento promedio se obtiene de dividir el valor final de la factura con el valor inicial de la misma, de los cual resulta:

$$\bar{d} = 1-(1-d_1)(1-d_2)\ldots(1-d_n) \quad (12)$$

Ejemplos y Casos

1.14 – Descuentos en Cadena

Un comerciante quiere conocer la tasa de descuento promedio que se le otorga, el descuento total y el valor final de la factura, si realiza compras de mercancía por $120´350.000, a un fabricante que le concede los siguientes descuentos: por pronto pago: 15%; por compra al por mayor 20%; por fidelidad 3%; y por temporada: 5%

Solución

Parámetros

- El valor inicial de la factura es: $\mathrm{A} = 120´350.000$
- Descuento por pronto pago: $\mathrm{d}_1 = 15\%$
- Descuento por compra al por mayor: $\mathrm{d}_2 = 20\%$
- Descuento por fidelidad: $\mathrm{d}_3 = 3\%$
- Descuento por temporada: $\mathrm{d}_4 = 5\%$

Cálculos

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones el valor total del descuento se calcula con la fórmula (10):

$$D = A[1-(1-d_1)(1-d_2)\ldots(1-d_{n-1})(1-d_n)]$$

$$D = 120´350.000[1-(1-0{,}15)(1-0{,}20)(1-0{,}03)(1-0{,}05)] = 44´936.283$$

El valor de la factura final, se calcula con la fórmula (11), como:

$$A_f = A(1-d_1)(1-d_2)\ldots(1-d_n)$$

$$A_f = 120´350.000(1-0{,}15)(1-0{,}20)(1-0{,}03)(1-0{,}05) = 75´413.717$$

La tasa promedio de descuento, se calcula con la fórmula (12), como:

$$\bar{d} = 1 - (1 - d_1)(1 - d_2) \ldots (1 - d_n)$$

$$\bar{d} = 1 - (1 - 0{,}15)(1 - 0{,}20)(1 - 0{,}03)(1 - 0{,}05) = 0{,}3733 = 37{,}33\%$$

Respuesta

El comerciante obtendrá un descuento total de $44´936.283, el valor final de la factura será de $75´413.717 y la tasa promedio de descuento recibida es 37,33%

2 Interés Compuesto

UNIDAD 2: INTERÉS COMPUESTO

OBJETIVO

Al finalizar la unidad los estudiantes estarán en capacidad de conceptuar sobre el interés compuesto, deducir los modelos matemáticos que lo soportan y aplicarlos en operaciones financieras de ocurrencia común.

CONTENIDO

Introducción
1. *Concepto de interés compuesto*
2. *Modelos de interés compuesto*
3. *Tasas de interés*
4. *Equivalencia entre tasas de interés*
5. *Ecuación de valor*
6. *Operaciones financieras con aplicaciones de interés compuesto*

Introducción

El cálculo del interés, como se mencionó, depende de las condiciones que se pacten en la operación financiera. En la unidad 1 se estudió el cálculo del Interés para cuando se acuerda el pago de interés simple; en esta unidad se estudiaran las operaciones con acuerdo de pago de interés compuesto.

Diferente a lo visto hasta el momento, en las operaciones financieras donde se acuerda el pago de interés compuesto, para cada período de liquidación convenido los intereses calculados se agregan al capital, generando así un nuevo monto de capital base para el cálculo de los intereses del siguiente período; en estos casos, se dice que hay una capitalización de los intereses.

Teniendo en cuenta que en la vida cotidiana es común el uso del interés compuesto, los modelos matemáticos para el cálculo del Interés bajo esta modalidad, son una herramienta esencial para el cálculo y análisis de las operaciones financieras. En la unidad se desarrollan los modelos matemáticos para el cálculo del Interés y demás variables involucradas.

De otro lado, considerando que las condiciones acordadas en las operaciones financieras difieren en plazo, período de liquidación, forma de pago, etc., es necesario estudiar modelos que permitan determinar la equivalencia entre tasas de interés. En la unidad se estudiaran las equivalencias entre tasas de interés anticipadas y vencidas, tasas nominales y efectivas.

Finalmente en la unidad se analizan algunas operaciones financieras que de manera implícita o explícitamente tienen acordadas la aplicación de interés compuesto: inflación, deflación, devaluación, revaluación, depósitos a término definido, aceptaciones bancarias, entre otras.

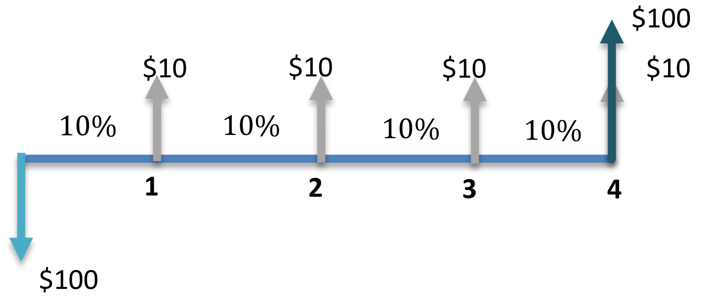
1. Concepto de interés compuesto

Bajo el modelo de interés simple, si se invierte un capital de $100 a una tasa de interés del 10% trimestral durante un año, la liquidación de los intereses será:

$$I = 100 \times 0{,}1 \times 4 = 40$$

Al cabo de un año el inversionista recibirá $140; $100 correspondiente al capital y $40 a los intereses. La situación de la liquidación de intereses bajo la modalidad de interés simple se ilustra en la gráfica No 2.1

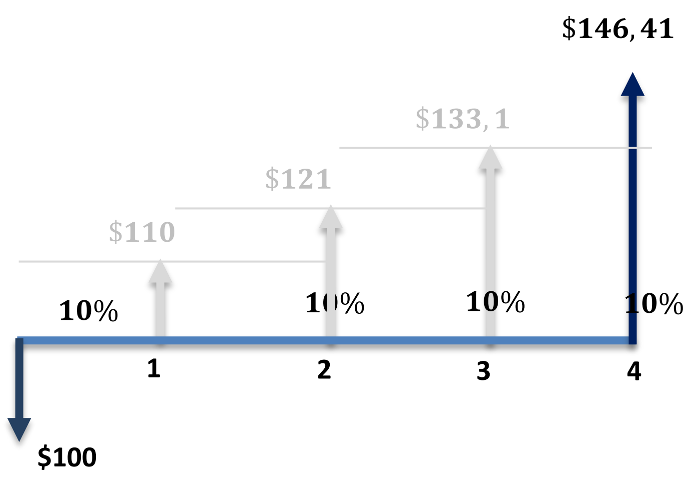
Gráfica No 2.1 – Causación del Interés Simple



De otro lado, si la inversión se hace a interés compuesto entonces al final del primer trimestre se liquidan los intereses $(100 \times 0{,}1 = 10)$ y estos se acumulan al capital para obtener un monto de $110 al cabo del primer período; y al final del segundo período la liquidación de los intereses se hará sobre este monto: $110 \times 0{,}1 = 11$ y seguidamente como en el período anterior estos se acumulan de nuevo al capital para obtener un nuevo monto de $121; y así sucesivamente hasta obtener en el cuarto período $146,41. En este caso, al cabo de un año el inversionista recibirá $146,41; $100 correspondiente al capital y $46,41 a los intereses.

La situación de la liquidación de intereses bajo la modalidad de interés compuesto se ilustra en la gráfica No 2.2.

Gráfica No 2.2 – Causación del Interés Compuesto



Para estas operaciones el intervalo en el cual se capitaliza el interés recibe el nombre de período de capitalización; y la frecuencia de capitalización el número de veces por año en que estas se realizan.

Similar al caso del interés simple, las variables involucradas en las operaciones financieras pactadas con interés compuesto son:

- Valor presente (V_p): capital o cantidad de dinero que se invierte o se presta a la fecha presente a una tasa de interés i, durante n períodos.

- Tasa de interés (i): tasa de interés efectiva que se aplica en cada período, durante el tiempo que dura la operación.
- Períodos (n): períodos de conversión o liquidación de intereses durante los cuales se invierte o se presta el capital (V_p).
- Valor futuro (V_f): cantidad de dinero de la cual se dispondrá al final de la operación; es equivale a un pago único futuro en n períodos a una tasa de interés i.

2. Modelos de interés compuesto

Para determinar los modelos de interés compuesto se consideran las condiciones acordadas en la operación financiera para las variables; capital inicial (V_p), tasa de interés (i), número de períodos (n), plazo, y valor equivalente final (V_f). Además, la consideración de que los intereses son capitalizados al final de los períodos de liquidación.

Para deducir los modelos matemáticos, se realizan los cálculos de Interés y valor futuro para cada período considerando las variables anteriores. En la tabla No 2.1, para el período 1, el interés se calcula como ($V_p \times i$) el cual se suma al capital inicial (V_p) para obtener el capital al final del período 1; este capital es el valor inicial del período 2: $V_p \times (1+i)$, para este período el interés se calculara como $V_p \times (1+i) \times i$, el cual deberá sumarse al capital inicial de ese período para obtener así el capital al final del período 2 o capital inicial del período 3, si se decide continuar con la inversión; este valor será: $V_{f2} = V_p(1+i)^2$. Si los cálculos se continúan hasta el período n, se obtiene el valor para este período, así como se ilustra en la tabla.

Tabla No 2.1 - Cálculo del valor final de una inversión acordada a interés compuesto

Período	Capital Inicial	Interés	Capital Final
1	V_p	$V_p \times i$	$V_f = V_p + V_p \times i$ $V_{f1} = V_p \times (1+i)$
2	$V_p(1+i)$	$V_p(1+i) \times i$	$V_{f2} = V_p(1+i) + V_p \times (1+i)$ $V_{f2} = V_p(1+i)^2$
3	$V_p(1+i)^2$	$V_p(1+i)^2 \times i$	$V_{f3} = V_p(1+i)^2 + V_p(1+i)^2 \times i$ $V_{f3} = V_p(1+i)^3$
….	…..	…..	…….
n	$V_p(1+i)^{n-1}$	$V_p(1+i)^{n-1} \times i$	$V_{fn} = V_p(1+i)^n$

Fuente: Adaptado de, BACA CURREA, Guillermo. (2002). Ingeniería Económica. Bogotá: Editorial Fondo Educativo Panamericano

El modelo deducido en la tabla No 2.1, da cuenta del valor futuro (V_f) de una inversión en función del capital inicial (V_p) cuando los intereses causados son capitalizados durante (n) períodos a una tasa de interés (i)

$$V_f = V_p(1+i)^n \quad (13)$$

De donde:

V_f: Valor futuro del capital en la operación
V_p: Valor presente del capital en la operación
i: Tasa de interés efectiva por período
n: Numero de períodos de liquidación o conversión pactados en la operación

El término $(1+i)^n$ es el factor que convierte un pago único presente (V_p) en un pago único futuro (V_f) equivalente, a una tasa de interés (i), durante (n) períodos.

De la fórmula (13) podemos deducir otros modelos que dan razón de variables como el Interés, valor presente, tasa de interés y número de períodos cuando se conocen los demás parámetros.

2.1 Valor futuro (V_f)

Dados el valor presente, tasa de interés y los períodos de conversión, el valor futuro de la inversión o pago se calcula directamente aplicando la fórmula (13).

Ejemplos y Casos

2.1 – INTERÉS COMPUESTO – VALOR FUTURO

¿Cuánto recibirá finalmente una persona que invierte $2 millones de pesos en un depósito a término fijo por tres años, si se le reconoce una tasa de interés del 6,5% semestral?

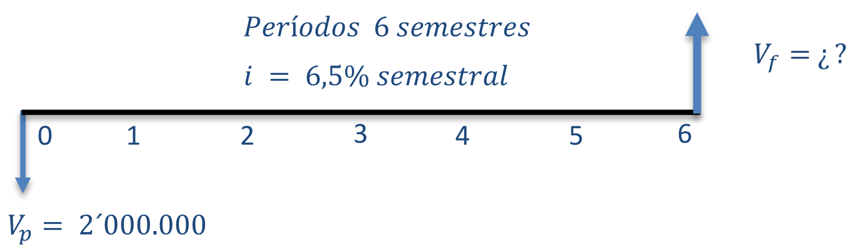
Solución

Parámetros

- Valor de la inversión: V_p=2´000.000
- Tasa de interés: i=6,5% semestral
- Pazo: 3 años
- Períodos de liquidación de intereses: semestral

Representación gráfica

En la siguiente Gráfica se ilustra la operación financiera.



Cálculos

Para determinar el valor final que recibirá la persona se aplica directamente la fórmula (13), utilizando los períodos de liquidación semestrales, considerando que la tasa de interés efectiva es semestral:

$$V_f \;\; = V_p(1+i)^n$$

$$V_f \;\; = \; 2´000.000(1+0{,}065)^6 = 2´918.284{,}59$$

Respuesta

El valor que finalmente recibirá la persona al cabo de los tres años es $2´918.284,59

Como se puede concluir de la solución del ejemplo anterior el período de conversión o liquidación de intereses debe coincidir con el período de aplicación de la tasa de interés. Para el caso, ya que la tasa aplica para períodos semestrales, el número de períodos debe, igualmente, expresarse en forma semestral.

2.2 Interés (I)

El interés causado (I) en una operación financiera se calcula como el valor final (V_f) menos el valor inicial (V_p) o capital. A partir de esta definición y la fórmula (13) a continuación se deduce la fórmula para el cálculo del interés (I).

$$I = V_f \; - \; V_p$$

Remplazando V_f de la fórmula (13) en la ecuación anterior, se obtiene:

$$I = V_p(1+i)^n - V_p$$

$$I = V_p[(1+i)^n - 1] \quad (14)$$

Los demás símbolos tienen el mismo significado que en la fórmula (13)

Ejemplos y Casos

2.2 – INTERÉS COMPUESTO – INTERÉS

El municipio de Medellín acuerda con el Banco Mundial un crédito por $ USD 800.000 el cual se destinara al saneamiento ambiental de la ciudad. Si para el préstamo se pactan las siguientes condiciones: tasa de interés del 6% anual, un plazo de 25 meses y pagos semestrales iguales ¿Qué interés finalmente deberá pagar la ciudad?

Solución

Parámetros

- Valor del préstamo: V_p= USD $800.000
- Tasa de interés pagare: : i=6,0% anual
- Pazo: 25 meses
- Períodos de conversión o liquidación de intereses: anual

Cálculos

Para determinar el Interés, lo primero que debe hacerse es calcular el Valor futuro del Capital lo cual se hace utilizando la fórmula (13); con este valor el Interés se calcula como la diferencia entre este valor y el valor inicial: $I = V_f - V_p$. Otra forma es utilizando de manera directa la fórmula (14)

$$I = V_p[(1+i)^n - 1]$$

$$I \; = \; 800.000\left[(1+0{,}06)^{\frac{25}{12}} - 1\right] = USD\ \$103.255{,}34$$

Respuesta

El interés que finalmente pagara el municipio es USD $103.255,34

2.3 Valor presente (V_p)

Dados el valor futuro, la tasa de interés y los períodos de conversión, el valor presente o capital involucrado en la operación financiera se puede calcular a partir de la fórmula (13)

$$V_f \; = \; V_p(1+i)^n$$

Despejando el valor de V_p, se obtiene:

$$V_p \;=\; \frac{V_f}{(1+i)^n} = V_f \times (1+i)^{-n} \quad (15)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la fórmula (13)

Ejemplos y Casos

2.3 – INTERÉS COMPUESTO – VALOR PRESENTE

¿Cuánto debe ahorrar un padre de familia el 1 de septiembre para pagar la matrícula de la universidad de su hijo el 31 de enero del año siguiente; si el costo de la matrícula es de $4´000.000 y la tasa de interés que le reconoce la entidad financiera es el 2% mensual?

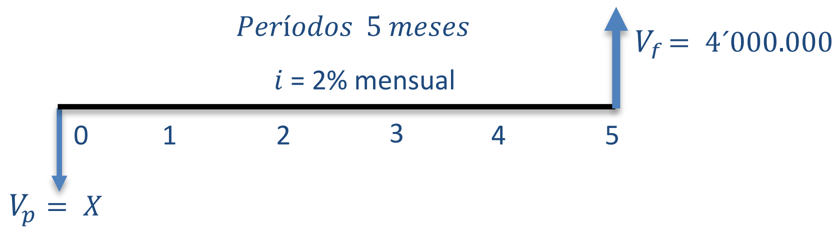
Solución

Parámetros

- Valor final: V_f= 4´000.000
- Tasa de interés pagare: : i=2% mensual
- Pazo: entre el 1 de septiembre y 31 de enero: 5 meses
- Períodos de liquidación: meses

Representación Gráfica

En la siguiente Gráfica se representa la operación, el padre debe ahorrar X cantidad de dinero para dentro de 5 meses obtener $4´000.000



Cálculos

Para determinar el valor que debe ahorrar el padre se aplica directamente la fórmula (15), utilizando los períodos de conversión mensuales, en consideración a que la tasa de interés es una tasa mensual

$$V_p = V_f(1+i)^{-n}$$

$$V_p = 4´000.000(1+0{,}02)^{-5} = 3´622.923{,}24$$

Respuesta
El valor que debe ahorrar el padre el 1 de septiembre es \$3´622.923,24

2.4 Número de períodos (n)

Conocidos el valor presente, el valor futuro y la tasa de interés, los períodos de conversión se hallan despejando n de la fórmula (13)

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

Al pasar a dividir el término que multiplica la incógnita, se obtiene:

$$\frac{V_f}{V_p} = (1+i)^n$$

Aplicando la función logaritmo en ambos lados de la ecuación:

$$\log\left(\frac{V_f}{V_p}\right) = \log(1+i)^n$$

Aplicando las propiedades de la función Logaritmo:

$$\log\left(\frac{V_f}{V_p}\right) = n\log(1+i)$$

Despejando n, se obtiene:

$$n = \frac{\log\left(\frac{V_f}{V_p}\right)}{\log(1+i)} \qquad (16)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la fórmula (13)

Ejemplos y Casos

2.4 – Interés compuesto – Número de Períodos

Un inversionista quiere conocer en cuanto tiempo se duplicara su inversión si acuerda una operación con una entidad financiera que reconoce una tasa de interés del 1.5% mensual.

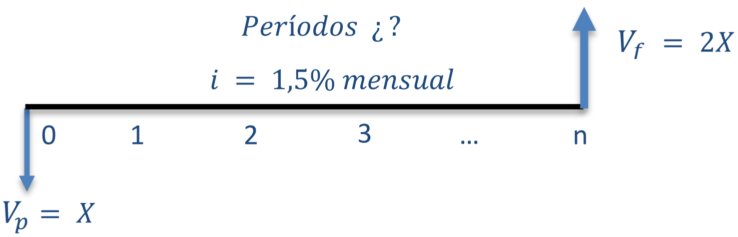
Solución

Parámetros

- Valor inicial de la inversión: $V_p = X$
- Valor final recibido: $V_f = 2X$
- Tasa de interés: : i=1,5% mensual
- Período de conversión o liquidación de intereses: mes

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Para determinar el número de períodos en los cuales se duplica la inversión se aplica directamente la fórmula (16)

$$n = \frac{\log\left(\frac{V_f}{V_p}\right)}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{2x}{x}\right)}{\log(1+0{,}015)} = \frac{\log(2)}{\log(1{,}015)} = 46{,}55$$

Respuesta

Para que el capital se duplique la inversión se deberá mantener mínimo 47 meses. El resultado se expresa en meses considerando que el período de liquidación de intereses es el mes.

2.5 Tasa de interés (i)

Conocidos el valor presente, el valor futuro y el número de períodos se puede determinar la tasa de interés a partir de la fórmula (13), despejando i.

$$V_f \;=\; V_p(1+i)^n$$

Pasando a dividir el término que multiplica la incógnita, se obtiene:

$$\frac{V_f}{V_p} \;=\; (1+i)^n$$

Aplicando raíz n en ambos lados de la ecuación:

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} = (1+i)$$

Pasando a restar el término que está sumado a la incógnita, se obtiene:

$$i = \left(\frac{V_f}{V_p}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (17)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la fórmula (13)

Ejemplos y Casos

2.5 – Interés compuesto – Tasa de Interés

Si una inversión de $2 Millones, realizada hace 15 años, tiene hoy un valor de $70 Millones. ¿Cuál fue la rentabilidad de la inversión? Exprésela en interés mensual, trimestral, semestral y anual.

Solución

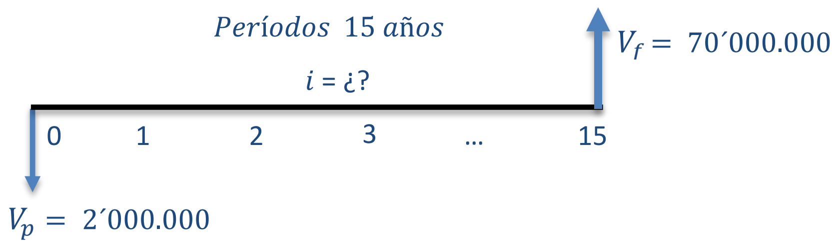
Parámetros

- Valor inicial de la inversión: $V_p = 2´000.000$
- Valor final de la inversión: $V_f = 70´000.000$
- Plazo de la inversión: 15 años
- Períodos de conversión: mes, trimestre, semestre y año.

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:

Durante 15 años la inversión inicial de 2´000.0000 se ha convertido en 70´000.000, se quiere conocer la tasa de interés expresada en diferentes períodos de capitalización: mes, trimestre, semestre y año



Cálculos

Para determinarla tasa de interés se aplica directamente la fórmula (17), considerando los períodos de conversión correspondientes.

a) Tasa de Interés anual

En este caso $n = 15$, considerando que se quiere conocer la tasa anual.

$$i = \left(\frac{V_f}{V_p}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$i = \left(\frac{70´000.000}{2´000.000}\right)^{\frac{1}{15}} - 1 = 0,2674 = 26,74\%\ anual$$

b) Tasa de Interés semestral

En este caso $n =\ 30$, considerando que se quiere conocer la tasa semestral.

$$i = \left(\frac{70´000.000}{2´000.000}\right)^{\frac{1}{30}} - 1 = 0,1258 = 12,58\%\ semestral$$

c) Tasa de Interés trimestral

En este caso $n =\ 60$, considerando que se quiere conocer la tasa trimestral.

$$i = \left(\frac{70´000.000}{2´000.000}\right)^{\frac{1}{60}} - 1 = 0,0610 = 6,10\%\ trimestral$$

d) Tasa de Interés mensual

En este caso $n =\ 180$, considerando que se quiere conocer la tasa mensual.

$$i = \left(\frac{70´000.000}{2´000.000}\right)^{\frac{1}{180}} - 1 = 0,0199 = 1,99\%\ mensual$$

Respuesta
La rentabilidad de la inversión es: $26,74\%\ anual$ o $12,58\%\ semestral$ o $6,10\%\ trimestral$ o $1,99\%\ mensual$

3. Tasas de Interés

3.1 Tasa Nominal

Es una tasa de interés de referencia que indica el número de capitalizaciones que se realizan durante un período de tiempo, usualmente un año. La tasa nominal se representa por la letra j, seguida por la letra N guion el período de capitalización como una letra minúscula, así como se indica en el ejemplo 2.6.

Por tratarse de una tasa de referencia cuando se requieran hacer cálculos, éstos se deben hacer con la tasa efectiva equivalente correspondiente. En el apartado 3.3 se estudia la conversión de tasas nominales en efectivas y viceversa.

Ejemplos y Casos

2.6 –TASA DE INTERÉS NOMINAL

a) j = 10% N-a. Tasa nominal del 10%, capitalizable anualmente, una por año

b) j = 25% N-t. Tasa nominal del 25%, capitalizable trimestralmente, cuatro por año

c) j = 30% N-s. Tasa nominal del 30%, capitalizable semestralmente, dos por año

d) j = 28% N-m. Tasa nominal del 28% capitalizable mensualmente, doce por año

e) j = 55% N-d. Tasa nominal del 55% capitalizable diariamente, trecientos sesenta por año

3.2 Tasa Efectiva

La tasa efectiva, a diferencia de la tasa nominal, indica la tasa de interés que efectivamente se está pagando por un capital, para el período de conversión o liquidación pactado. Como la capitalización del interés se produce cierta cantidad de veces al año; la tasa efectiva es mayor que la tasa nominal.

La tasa nominal comúnmente esta referenciada a un período de un año, e indica varias liquidaciones de intereses en dicho plazo; por su parte, la tasa efectiva mide el rendimiento efectivo en el período en que se realiza el pago o cobro.

La tasa efectiva se representa por la letra i, seguida por la letra E (efectiva) y una letra mayúscula que representa el período de liquidación o conversión.

Ejemplos y Casos

2.7 – TASA DE INTERÉS EFECTIVA

a) i = 10% EM. Indica una tasa del 10% efectiva mensual.

b) i = 25% ET. Indica una tasa del 25% efectiva trimestral.

c) i = 30% ES. Indica una tasa del 30% efectiva semestral.

d) i = 28% EA. Indica una tasa del 28% efectiva anual.

e) i = 0,5% ED. Indica una tasa del 0,5% efectiva diaria.

3.3 Relación entre Tasa Efectiva y Nominal

La tasa nominal es igual a la tasa efectiva multiplicada por el número de períodos de capitalización en un año.

$$j = i \times m \quad (18)$$

De donde:

j: Tasa de Interés Nominal
i: Tasa de Interés efectiva
m: Es la frecuencia de conversión anual; número de veces que se capitalizan los intereses por año.

Nótese que sí la frecuencia de conversión es igual a uno, la tasa efectiva es igual a la tasa Nominal.

Ejemplos y Casos

2.8 – RELACIÓN ENTRE TASA EFECTIVA Y NOMINAL 1

José quiere conocer cuál es la tasa efectiva anual que debe pagar por un crédito que el banco le oferta con una tasa nominal del 42%.

Solución

Parámetros

- Tasa Nominal: $j = 42\%\ N$

Cálculos

Cuando la Tasa Nominal no indica el período de capitalización, se supone que es anual. Para hallar la tasa efectiva, se aplica la fórmula (18), despejando el valor de i

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{j}{m} = \frac{0{,}42}{1}$$

$$i = 42\%$$

Respuesta

Para este caso la tasa de interés nominal es igual a la tasa efectiva anual.

2.9 – Relación entre Tasa Efectiva y Nominal 2

¿Cuál será la tasa efectiva que se debe pagar por un crédito que se pacta a una tasa Nominal del 36% N_s?

Solución

Parámetros

- Tasa Nominal: $j = 36\%\ N\_s$

Cálculos

En este caso la frecuencia de capitalización es semestral (dos por año). Para hallar la tasa efectiva, se aplica la fórmula (18), despejando i

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{j}{m} = \frac{0{,}36}{2}$$

$$i = 0{,}18 = 18\%\ ES$$

Respuesta

18% ES, es la tasa efectiva equivalente a una tasa nominal del 36% N_s

2.10 – Relación entre Tasa Efectiva y Nominal 3

¿Cuál será la tasa Nominal pactada en un crédito, para el cual se acuerda una tasa efectiva trimestral del 8%?

Solución

Parámetros

- Tasa Efectiva: $i = 8\%\ ET$

Cálculos

En este caso la frecuencia de capitalización es cuatro (cuatro trimestres por año). Para hallar la tasa nominal, se aplica directamente la fórmula (18)

$$j = i \times m = 0{,}08 \times 4 = 0{,}32 = 32\%$$

$$j = 32\%\ N\_t$$

Respuesta

$32\%\ N\_t$ es la tasa Nominal Trimestral equivalente al 8% ET

2.11 – Relación entre Tasa Efectiva y Nominal 4

¿Cuál será la tasa Nominal pactada en un crédito para el cual se acuerda una tasa efectiva mensual del 2,5%?

Solución

Parámetros

- Tasa efectiva: $i = 2{,}5\%\ EM$

Cálculos

En este caso la frecuencia de capitalización es mensual (doce veces por año). Para hallar la tasa nominal, se aplica directamente la fórmula (18)

$$j = i \times m = 0{,}025 \times 12 = 0{,}3 = 30\%$$

$$j = 30\%\ N\_m$$

Respuesta

$30\%\ N\_m$ es la tasa Nominal Mensual equivalente al 2,5% EM

3.4 Tasa de Interés Anticipado

El concepto de interés anticipado, definido en la unidad anterior, es igualmente válido cuando se trabaja con interés compuesto. En contraste con el interés i

(vencido), el interés anticipado se denomina i_a. En general, cuando no hay una referencia explícita, se supone que la tasa de interés será siempre vencida.

4. Equivalencia entre tasas de interés

4.1 Equivalencia entre tasas efectivas.

Dos o más tasas efectivas de interés son equivalentes, si con diferente periodicidad producen el mismo interés al final de cualquier período.

En el ejemplo 2.5 se comprobó que $2´millones eran equivalentes a $70´millones en 15 años a diferentes tasa de interés: 26,74% EA, 12,58% ES, 6,10% ET, o 1,99% EM; de esta forma, de acuerdo a la definición se puede afirmar que estas tasas de interés son equivalentes.

Modelo matemático

Partiendo de la definición se deduce el modelo matemático, como sigue: para un valor presente dado V_p se deben hallar dos tasas de interés efectivas, que hagan que el valor futuro V_f sea igual. Aplicando la fórmula (13), para una tasa de interés efectiva i_1, se obtiene:

$$V_f = V_p(1+i_1)^{n_1}$$

Igualmente para la tasa de interés efectiva i_2, se obtiene

$$V_f = V_p(1+i_2)^{n_2}$$

Considerando que el Valor futuro debe ser igual en ambos casos, entonces podemos igualar ambas ecuaciones:

$$V_p(1+i_1)^{n_1} \;=\; V_p(1+i_2)^{n_2}$$

Simplificando la ecuación anterior, se obtiene:

$$(1+i_1)^{n_1} \;=\; (1+i_2)^{n_2}$$

Para despejar i_2 en función i_1 , se aplica la raíz n_2 en ambos lados de la ecuación,

$$\sqrt[n_2]{(1+i_1)^{n_1}} \;=\; \sqrt[n_2]{(1+i_2)^{n_2}}$$

Aplicando las propiedades de los radicales, se transforma la ecuación anterior en:

$$(1+i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} \;=\; (1+i_2)$$

Despejando i_2 , en la ecuación anterior, se obtiene:

$$i_2 = (1+i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1 \quad (19)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la fórmula (13)

Ejemplos y Casos

2.12 – Relación entre Tasas Efectivas

Un empresario necesita decidir entre tres ofertas de crédito que recibe del sector financiero: la primera cobra una tasa del 12,58% ES; la segunda, una tasa del 6,10% ET; y finalmente la tercera una tasa del 1,99% EM. Aunque conoce poco de finanzas, sabe que no puede comparar estas tres tasas de interés y le pide a su jefe financiero que le halle la tasa efectiva anual equivalente de las tasas anteriores, para poder la decisión.

Solución

Parámetros

- Alternativa 1: $i = 12{,}58\%\ ES$
- Alternativa 2: $i = 6{,}10\%\ ET$
- Alternativa 3: $i = 1{,}99\%\ EM$

Cálculos
Para hallar la tasa equivalente se aplica directamente la fórmula (19)

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

a) Tasa efectiva anual equivalente de 12,58% ES; en este caso i_1 es 12,58% ES, n_1 es 2 y n_2 es 1.

$$i_2 = (1 + 0{,}1258)^{\frac{2}{1}} - 1 = \ 0{,}2674 = 26{,}74\%\ EA$$

Respuesta: La tasa de interés efectiva anual equivalente de 12,58% ES, es: 26,74% EA

b) Tasa efectiva anual equivalente de 6,1% ET; en este caso i_1 es 6,1% ET, n_1 es 4 y n_2 es 1.

$$i_2 = (1 + 0{,}0610)^{\frac{4}{1}} - 1 = \ 0{,}2672 = 26{,}72\%\ EA$$

Respuesta: La tasa de interés efectiva anual equivalente de 6,1% ET, es: 26,72% EA

c) Tasa efectiva anual equivalente de 1,99% EM; en este caso i_1 es 1,99% ES, n_1 es 12 y n_2 es 1.

$$i_2 = (1 + 0{,}0199)^{\frac{12}{1}} - 1 = \ 0{,}2667 = 26{,}67\%\ EA$$

Respuesta: La tasa de interés efectiva anual equivalente de 1,99% EM, es: 26,67% EA

Respuesta
El empresario se puede decidir por la tercera opción ya que es la de menor tasa efectiva anual.

4.2 Equivalencia entre tasas vencidas y tasas anticipadas

A continuación se deduce la fórmula matemática que relaciona las tasas de interés vencidas y anticipadas. Suponiendo un período unitario, de la fórmula (2), se puede determinar que la tasa de interés es igual a:

$$i = \frac{I}{V_p} \quad (a)$$

De otro lado, de la fórmula (7), se conoce que el descuento D o interés anticipado para un período unitario en una operación de descuento, se puede expresar como:

$$D = I = V_f \times d \quad (b)$$

También se conoce, de la fórmula (8), que el valor líquido o valor presente en una operación de descuento para un período unitario, se puede expresar como:

$$V_p = V_t = V_f\,(1-d) \quad (c)$$

Remplazando (b) y (c) en (a), se obtiene:

$$i = \frac{V_f \times d}{V_f\,(1-d)} = \frac{d}{(1-d)}$$

Simplificando y considerando que la tasa de descuento d es una tasa anticipada i_a entonces se puede escribir la ecuación, como:

$$i = \frac{i_a}{(1-i_a)} \quad (20)$$

Despejando i_a en función de i entonces se obtiene:

$$i_a = \frac{i}{(1+i)} \quad (21)$$

4.2.1 Tasa vencida equivalente a una tasa anticipada

Para hallar la tasa vencida equivalente de una tasa anticipada, se procede como sigue:

- La tasa anticipada se convierte en una tasa vencida, utilizando la fórmula (20).
- La tasa vencida efectiva hallada en el paso anterior, en caso de ser necesario, se convierte en una tasa vencida efectiva para otro período utilizando el modelo (19).

Ejemplos y Casos

2.13 – RELACIÓN ENTRE TASAS EFECTIVAS ANTICIPADAS Y VENCIDAS 1

Un comerciante quiere conocer la tasa efectiva semestral equivalente que una entidad financiera le está cobrando por un crédito que se oferta al 5%EM_a.

Solución

Parámetros

Tasa de Interés: 5%EM_a

Cálculos

Paso 1: La tasa anticipada se convierte en una tasa vencida, utilizando la fórmula (20)

$$i = \frac{i_a}{(1 - i_a)}$$

$$i = \frac{0{,}05}{(1 - 0{,}05)} = 0{,}0526 = 5{,}26\%\ EM$$

Paso 2: para hallar la tasa efectiva semestral equivalente se utiliza la fórmula (19). En este caso i_1 es 5,26% EM, n_1 es 12 y n_2 es 2.

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}0526)^{\frac{12}{2}} - 1 = 0{,}3601 = 36{,}01\%\ ES$$

Respuesta

El comerciante está pagando una tasa de interés del $36{,}01\%\ ES$.

4.2.2 Tasa anticipada equivalente a una tasa vencida

Para hallar la tasa anticipada equivalente de una tasa vencida, se procede como sigue:

- En caso de ser necesario la tasa vencida efectiva se convierte en otra tasa efectiva con diferente período de capitalización utilizando para ello la fórmula (19).
- La tasa vencida se convierte en una tasa anticipada, utilizando el modelo (21).

Ejemplos y Casos

2.14 – RELACIÓN ENTRE TASAS EFECTIVAS ANTICIPADAS Y VENCIDAS 2

Un fabricante quiere conocer la tasa efectiva anticipada semestral que debe cobrar en una venta a crédito, si la tasa efectiva vencida que usualmente cobra es del 8% ET.

Solución

Parámetros

Tasa de Interés: 8%ET

Cálculos

Paso 1: para hallar la tasa efectiva semestral anticipada equivalente, inicialmente se debe hallar la tasa efectiva semestral equivalente aplicando la fórmula (19). En este caso, i_1 es 8%, n_1 es 4 y n_2 es 2.

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}08)^{\frac{4}{2}} - 1 = 0{,}1664 = 16{,}64\%\ ES$$

Paso 2: para hallar la tasa efectiva semestral anticipada equivalente se utiliza la fórmula (21). En este caso i es 16,64% ES.

$$i_a = \frac{i}{(1 + i)}$$

$$i_a = \frac{0{,}1664}{(1 + 0{,}1664)} = 0{,}1426 = 14{,}26\%\ ES_a$$

Respuesta
La tasa efectiva semestral anticipada que debe cobrar el fabricante es $14{,}26\%\ ES_a$

4.3 Tasa nominal equivalente de una tasa efectiva.

Para hallar la tasa nominal equivalente de una tasa efectiva, se procede como sigue:

- En caso de ser necesario la tasa efectiva se convierte en una tasa efectiva para otro período de capitalización, utilizando como referencia el período de capitalización de la tasa nominal que se pide; para eso aplicamos la fórmula (19).
- La tasa efectiva hallada se convierte en una tasa nominal, aplicando la fórmula (18).

Ejemplos y Casos

2.15 – RELACIÓN ENTRE TASAS NOMINALES Y TASAS EFECTIVAS 1
Una entidad financiera quiere conocer con que tasa nominal semestral debe promocionar una línea de crédito para la cual desea cobrar una tasa efectiva vencida del 2%EM.

Solución
Parámetros
Tasa de Interés: 2%EM

Cálculos
Paso 1: para hallar la tasa nominal semestral equivalente, inicialmente se halla la tasa efectiva semestral equivalente aplicando la fórmula (19). En este caso, i_1 es 2%, n_1 es 12 y n_2 es 2.

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1+0{,}02)^{\frac{12}{2}} - 1 = 0{,}12616 = 12{,}62\%\ ES$$

Paso 2: para hallar la tasa nominal semestral equivalente se utiliza la fórmula (18). En este caso i es 12,62% ES y m es 2

$$j = i \times m$$

$$j = 0{,}1262 \times 2 = 0{,}2523 = 25{,}23\%\ N\_s$$

Respuesta

La entidad financiera debe promocionar la línea de crédito a una tasa nominal semestral del $25{,}23\%\ N\_s$

4.4 Tasa efectiva equivalente de una tasa nominal.

Para hallar la tasa efectiva equivalente de una tasa nominal, se procede como sigue:

- Para la tasa nominal dada se halla la tasa efectiva, utilizando como referencia el período de capitalización de la tasa nominal; a través de la fórmula (18).
- En caso que la tasa efectiva pedida tenga un período de capitalización diferente a la hallada en el punto anterior, se halla la tasa equivalente, utilizando de la fórmula (19).

Ejemplos y Casos

2.16 – RELACIÓN ENTRE TASAS NOMINALES Y TASAS EFECTIVAS 2

¿Qué tasa efectiva trimestral está cobrando una entidad financiera que promociona una línea de crédito al 12% N_s?

Solución

Parámetros

Tasa de Interés: 12% N_s

Cálculos

Paso 1: para hallar la tasa efectiva trimestral equivalente de la tasa del 12% N_s, inicialmente se halla la tasa efectiva semestral equivalente aplicando la fórmula (18). En este caso, j es 12%, y m es 2

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}12}{2} = 0{,}06 = 6\%\ ES$$

Paso 2: para hallar la tasa efectiva trimestral equivalente se utiliza la fórmula (19). En este caso i_1 es 6% ES, n_1 es 2 y n_2 es 4

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}06)^{\frac{2}{4}} - 1 = 0{,}0296 = 2{,}96\%\ ET$$

Respuesta

La entidad financiera está cobrando una tasa efectiva trimestral equivalente del 2,96% ET

5. Ecuaciones de valor

La reliquidación de obligaciones financieras es una práctica corriente en el sector financiero. La falta de liquidez o la mejora de las condiciones financieras, son, entre otras, razones para cambiar obligaciones presentes por otras. A través del concepto de "Ecuación de Valor" se pueden hallar equivalencias de préstamos u obligaciones financieras.

5.1 Concepto de Ecuación de Valor

La ecuación de valor permite convertir un conjunto de obligaciones con vencimientos pre-establecidos en una o varias obligaciones equivalentes con vencimientos en fechas diferentes.

Ilustración del concepto de Ecuación de Valor

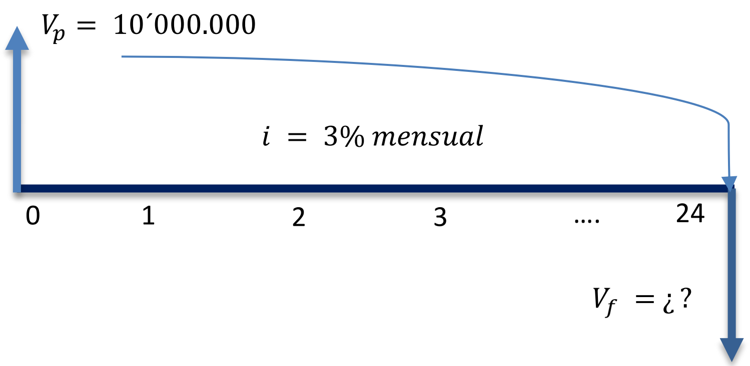
Considérese una obligación de $10´000.000 que debe ser cancelada en dos años, pagando una tasa efectiva mensual del 3%. El flujo de caja de esta operación financiera se muestra en la gráfica No 2.3.

En esta operación para hallar el valor futuro aplicamos la fórmula (13).

$$V_f \;=\; V_p(1+i)^n$$

$$V_f \;=\; 10´000.000(1+0{,}03)^{24} = 20´327.941{,}06$$

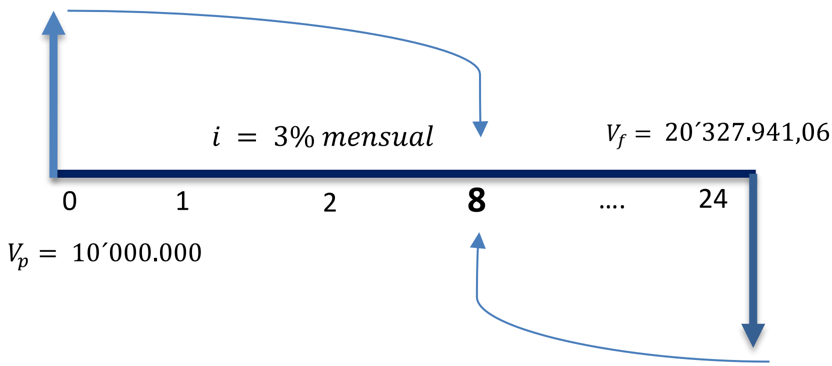
Gráfica No 2.3 – Valor del Dinero en el Tiempo 1



El valor de 20´327.941,06 es el equivalente de 10´000.000 en el mes 24, a una tasa de interés efectiva mensual del 3%. De esta forma se ratifica lo dicho, no es posible comparar cantidades de dinero en el tiempo; para que se pueda realizar cualquier operación entre valores de dinero, estas se deben hacer en un instante del tiempo. Por ejemplo, considerando que $10´000.000 y $20´327.941,06 son valores equivalentes a una tasa de interés del 3% EM, se espera que los dos valores comparados en un mismo período sean iguales. Para hacer esta comparación se selecciona un período cualquiera entre 0 y 24 y hallamos los valores equivalentes del capital del período 0 (10´000.000) y del período 24 (20´327.941,06); lo anterior debería conducir a que ambos resultados sean iguales; la situación se ilustra en la gráfica No 2.4

Se selecciona como período de referencia el 8, en el cual se calculan los equivalentes de los valores de los períodos 0 y 24. Para hallar el valor equivalente del período 0, utilizamos la fórmula (13) ya que lo que se quiere es hallar el valor futuro de $10´000.000 en el período 8.

Gráfica No 2.4 – Valor del Dinero en el Tiempo 2



$$V_f\ =\ V_p(1+i)^n$$

$$V_f\ =\ 10´000.000(1+0{,}03)^8 = 12´667.700{,}81$$

Para hallar el valor equivalente del período 24, utilizamos, por su parte, la fórmula (15) ya que lo que se quiere es hallar el valor presente de $20´327.941,06 en el período 8.

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{20´327.941,06}{(1+0,03)^{16}} = 12´667.700,81$$

Como se esperaba ambos valores son iguales. En conclusión cuando se quieren comparar valores monetarios, esta debe hacerse en un mismo período de tiempo; esta es la base conceptual sobre la cual se fundamenta la “Ecuación de Valor”.

5.2 Modelo de la Ecuación de Valor

El principio fundamental de la ecuación de valor establece que en una operación financiera, con una tasa de interés pactada, la suma de los ingresos es igual a la suma de los egresos en una fecha determinada, dicha fecha, que podría ser cualquiera, recibe el nombre de fecha focal (ff).

La expresión (22) define en términos matemáticos la ecuación de valor.

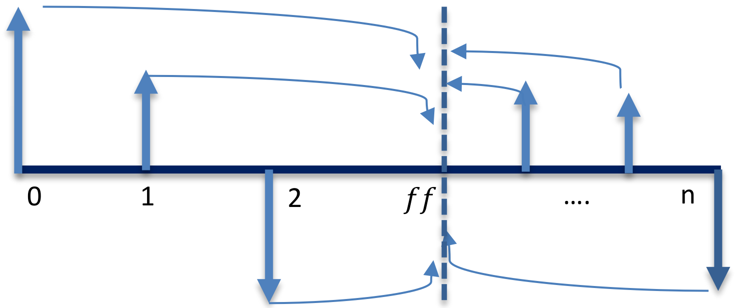
$$\sum ingresos = \sum egresos \ (en\ la\ ff) \quad (22)$$

Considerando que toda operación financiera está compuesta por obligaciones y pagos; la ecuación de valor también se puede expresar, como:

$$\sum Obligaciones = \sum Pagos \ (en\ la\ ff) \quad (23)$$

La fecha focal se define libremente a criterio del analista; en las ecuaciones se nombra como ff, y en el flujo de caja, gráficamente se representa como una línea interrumpida perpendicular a la línea del tiempo, cruzando por la fecha escogida. En la gráfica No 2.5 se ilustra el concepto de la ecuación de valor.

Gráfica No 2.5 – Ecuación de Valor



Para el uso de la Ecuación de valor se propone el siguiente procedimiento:

Paso 1. Considere el conjunto de obligaciones que se quieren cambiar como los ingresos de la operación, para cada una de ellas tenga en cuenta la tasa de interés efectiva pactada para la operación.

Paso 2. Considere el nuevo conjunto de obligaciones como los egresos de la operación, para ello tenga en cuenta la tasa de interés efectiva que se pacta para las nuevas condiciones.

Paso 3. Definir la fecha focal. Recuerde que no hay restricción para la selección de la fecha focal; pero una buena selección muchas veces ayuda en los cálculos.

Paso 4. Para establecer la ecuación de valor, halle el valor equivalente de las deudas y pagos (ingresos y egresos) en la fecha focal utilizando para ello las fórmulas (13) y (15) según que se trate de un hallar un valor futuro o un valor presente.

Ejemplos y Casos

2.17 – Ecuación de Valor 1

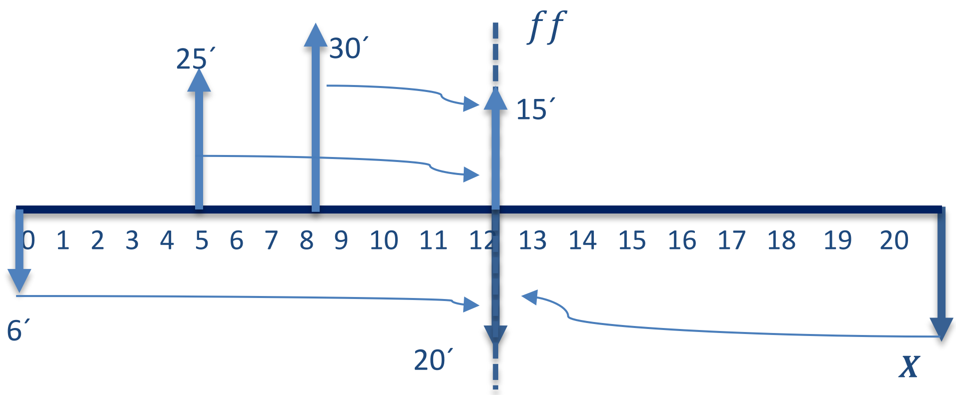
Una pequeña empresa tiene los siguientes compromisos financieros con el Banco Medellín: 25 millones deben ser pagados en cinco meses, 30 millones en ocho meses, y 15 millones en doce meses. Después de revisar su flujo de caja el gerente de la empresa propone al banco una nueva forma de pago: 6 millones a la fecha, 20 millones en el mes doce y el saldo en 20 meses. Suponiendo que el banco mantiene sin variaciones la tasa de interés, que es del 3% efectiva mensual; se pide determinar el valor del saldo que debe pagar el empresario.

Solución

Parámetros

- Ingresos: 25 millones en el mes 5, 30 millones en el mes 8 y 15 millones en el mes 12
- Egresos: 6 millones en el mes 0, 20 millones en el mes 12 y el saldo en el mes 20.
- Fecha focal: se define el período 12
- Tasa de interés efectiva: 3% EM

Representación gráfica



Cálculos

Ingresos calculados en la fecha focal.

1. $V_{f12} = 25´000.000(1+0{,}03)^{7} = 30´746.846{,}64$
2. $V_{f12} = 30´000.000(1+0{,}03)^{4} = 33´765.264{,}30$
3. $V_{f12} = 15´000.000(1+0{,}03)^{0} = 15´000.000{,}00$

Egresos calculados en la fecha focal.

1. $V_{f12} = 6´000.000(1+0{,}03)^{12} = 8´554.565{,}32$

2. $V_{f12} = 20´000.000(1+0{,}03)^{0} = 20´000.000{,}00$
3. $V_{p12} = X(1+0{,}03)^{-8} = 0{,}7894\,X$

Ecuación de valor

$$\sum ingresos = \sum egresos \ (en\ la\ ff)$$

$$(30´746.846{,}64 + 33´765.264{,}30 + 15´000.000) = (8´554.565{,}32 + 20´000.000 + 0{,}7894X)$$

$$79´512.110{,}94 = 28´554.565{,}32 + 0{,}7894\,X$$

$$79´512.110{,}94 - 28´554.565{,}32 = 0{,}7894\,X$$

$$50´957.545{,}62 = 0{,}7894\,X$$

$$X = 64´552.249{,}33$$

Respuesta:
El último pago que deberá hacer el empresario en el mes 20, es de: $64´552.249,33

2.18 – Ecuación de Valor 2

Una pequeña empresa contrajo una deuda de 15 millones hace 4 meses con vencimiento en 5 meses a partir de hoy, para esta deuda se pactó una tasa de interés del 22% N-t. Además acordó una segunda deuda en la fecha por 20 millones con vencimiento en doce meses y una tasa de interés 12% ES. Si por problemas de liquidez el gerente de la compañía propone pagar estas deudas en dos cuotas iguales en los meses 6 y 12 y el banco cobra una nueva tasa de interés del 15% EA, ¿Cuál será el valor de los dos pagos?

Solución
Parámetros

- Ingresos: obligaciones de 15 millones en el mes 5; y de 20 millones en el mes 12
- Egresos: Pagos X en el mes 6 y X en el mes 12.
- Fecha focal: se define el período 12
- Tasa de interés efectiva: 15% EA

Cálculos preliminares
Valor de la deuda de 15 millones en el mes 5, tasa de interés 22% N-t.
Cuatro más cinco meses da un tiempo de 9 meses o lo que es igual a 3 tres trimestres.
Calculo del interés efectivo trimestral a partir del interés nominal: $i = \frac{0{,}22}{4} = 0{,}055 = 5{,}5\%\ ET$.

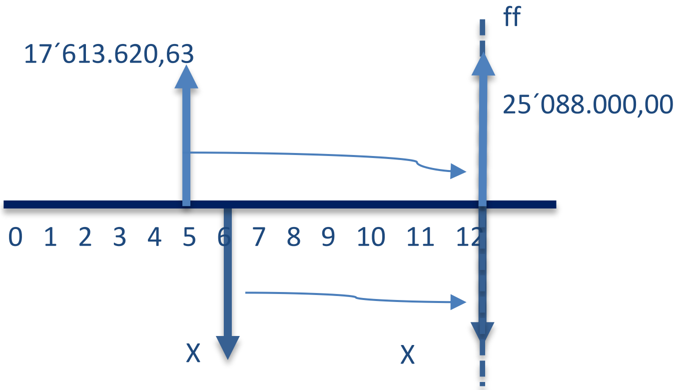
Aplicando la fórmula (13) para hallar el valor equivalente en la fecha de vencimiento de la deuda, se obtiene:

$$V_f = 15´000.000(1 + 0{,}055)^3 = 17´613.620{,}63$$

El valor equivalente de la obligación del préstamo de $20 millones, para la cual se cobra el 12% ES, en el mes 12 es:

$$V_f = 20´000.000(1 + 0{,}12)^2 = 25´088.000{,}00$$

Representación gráfica
Considerando las obligaciones calculadas y la nueva propuesta de pago, en la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera que el empresario propone al banco:



Cálculos
Para los cálculos de los pagos que se proponen se aplica la nueva tasa de interés que cobrara el banco; es decir, 15% EA

Ingresos calculados en la fecha focal.

1. $V_{f12} = 17´613.620{,}63(1 + 0{,}15)^{\frac{7}{12}} = 19´109.781{,}07$
2. $V_{f12} = 25´088.000{,}00(1 + 0{,}15)^0 = 25´088.000{,}00$

Egresos calculados en la fecha focal.

1. $V_{f12} = X(1 + 0{,}15)^{\frac{6}{12}} = 1{,}0723X$

2. $V_{f12} = X(1+0{,}15)^0 = X$

Ecuación de valor

$$\sum ingresos = \sum egresos \ (en\ la\ ff)$$

$$(19´109.781{,}07 + 25´088.000{,}00) = (1{,}0723X + X)$$

$$44´197.781{,}07 = 2{,}0723\ X$$

$$X = 21´327.887{,}41$$

Respuesta:
Los dos pagos que debe realizar el empresario en los períodos 6 y 12 deben ser de $21´327.887,41

2.19 – Ecuación de Valor 3

Una pequeña empresa tiene los siguientes compromisos financieros con el banco Medellín: 10 millones con vencimiento en 6 meses, 25 millones con vencimiento en 9 meses y 35 millones con vencimiento en 12 meses. En qué fecha debería realizar un pago único de 72 millones, si el banco le cobra una tasa efectiva de interés del 3,5% ET.

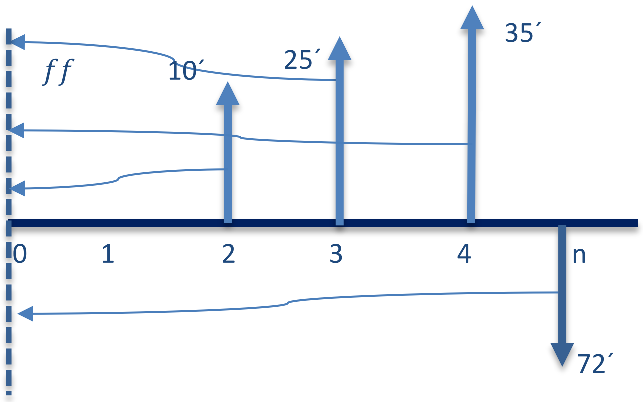
Solución

Parámetros

- Ingresos: 10 millones en el mes 6 (2 trimestres), 25 millones en el mes 9 (3 trimestres) y 35 millones en el mes 12 (4 trimestres)
- Egresos: 72 millones.
- Fecha focal: se define el período 0
- Tasa de interés efectiva: 3,5% ET; de este modo se trabaja con períodos trimestrales

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación que se propone. Las obligaciones pendientes se simulan como ingresos, en cambio la nueva obligación, como un egreso



Cálculos

Ingresos calculados en la fecha focal.

1. $V_{p0} = 10´000.000(1 + 0{,}035)^{-2} = 9´335.107{,}00$
2. $V_{p0} = 25´000.000(1 + 0{,}035)^{-3} = 22´548.567{,}64$
3. $V_{p0} = 35´000.000(1 + 0{,}035)^{-4} = 30´500.477{,}97$

Egresos calculados en la fecha focal.

1. $V_{p0} = 72´000.000(1 + 0{,}035)^{-n}$

Ecuación de valor

$$\sum ingresos = \sum egresos \ \ (en\ la\ ff)$$

$$(9´335.107{,}00 + 22´548.567{,}64 + 30´500.477{,}97) = 72´000.000(1 + 0{,}035)^{(-n)}$$

$$0{,}8664 = (1{,}035)^{(-n)}$$

$$\log 0{,}8664 = \log(1{,}035)^{(-n)}$$

$$\log 0{,}8664 = -\text{n} \log 1{,}035$$

$$\frac{\log 0{,}8664}{\log 1{,}035} = -n$$

$$-4{,}16 = -n$$

$$n = 4{,}16\ trimestres$$

Respuesta:
El pago debe hacerse en el trimestre 4,16; o lo que es igual, en el mes 12,48

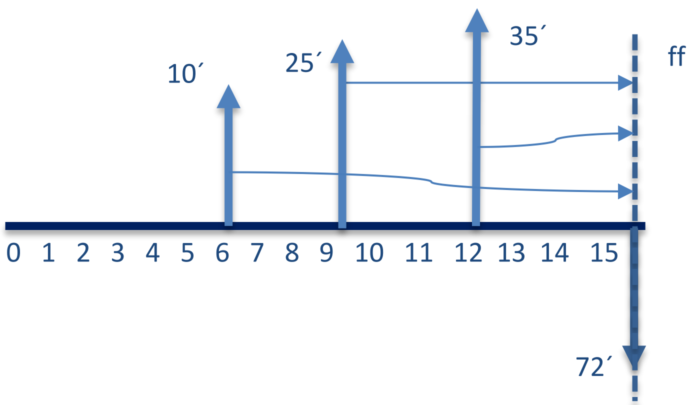
2.20 – Ecuación de Valor 4

Una pequeña empresa tiene los siguientes compromisos financieros con el banco Medellín: 10 millones con vencimiento en 6 meses, 25 millones con vencimiento en 9 meses y 35 millones con vencimiento en 12 meses. Si realiza un pago único de 72 millones en el mes 15, ¿Qué tasa de interés efectiva mensual está cobrando el banco?

Solución

Parámetros
- Ingresos: 10 millones mes 6, 25 millones mes 9 y 35 millones en el mes 12
- Egresos: 72 millones en el mes 15
- Fecha focal: se define el período 15
- Se trabaja con períodos mensuales ya que se quiere obtener una tasa efectiva mensual

Representación gráfica
En la siguiente gráfica se representa la operación. Las obligaciones pendientes se simulan como ingresos, y la nueva obligación, como un egreso



Cálculos
<u>Ingresos calculados en la fecha focal</u>

1. $V_{f15} = 10´000.000(1+i)^{9}$
2. $V_{f15} = 25´000.000(1+i)^{6}$
3. $V_{f15} = 35´000.000(1+i)^{3}$

Egresos calculados en la fecha focal

1. $V_{f15} = 72´000.000(1+i)^{0}$

Ecuación de valor

$$\sum ingresos = \sum egresos \ (en\ la\ ff)$$

$$10´000.000(1+i)^{9} + 25´000.000(1+i)^{6} + 35´000.000(1+i)^{3} = 72´000.000$$

Considerando que se trata de una ecuación de grado 9, no se puede solucionar por un método analítico y es necesario hallar el valor de i, por el método de ensayo y error. Lo primero es simplificar la ecuación, para esto se divide por 1´000.000 ambos lados de la ecuación y se pasa a restar el término independiente al lado izquierdo de la ecuación

$$10(1+i)^{9} + 25(1+i)^{6} + 35(1+i)^{3} = 72$$

$$10(1+i)^{9} + 25(1+i)^{6} + 35(1+i)^{3} - 72 = 0$$

Para hallar i inicialmente le damos un valor, por ejemplo 1,5% EM, y calculamos la ecuación. Si el resultado es mayor que cero para una nueva simulación se incrementa el valor, en caso contrario se disminuye.

Calculando para i = 0,015, el resultado es 3,3687 que es mayor que 0; entonces en este caso se disminuye i. La nueva simulación se hace para i = 0,01, en este caso el resultado es: 1,5353 que es igualmente mayor que 0, lo cual indica que se debe disminuir aún más la variable. Al probar con i=0,005 se obtiene -0,2538. Con este resultado se puede concluir que la tasa de interés que soluciona la ecuación esta entre 0,01 y 0,005; es decir, entre el 1% y el 0,5%.

Interpolando

Si para una diferencia entre 1,5353 y -0,2538, hay una diferencia de 0,5%, para una diferencia entre 1,5353, ¿Cuál será la diferencia porcentual?

1%	1,5353	$\frac{1-x}{1-0,5} = \frac{1,5353-0}{1,5353+0,2538}$ $X = 0,5709\%$
X	0	
0,5%	-0,2538	

Respuesta:
El banco está cobrando una tasa de Interés del 0,5709% EM

6. Operaciones financieras con aplicación de interés compuesto

Son múltiples las operaciones financieras en las cuales de manera explícita o implícita se pacta el interés compuesto. La mayor parte de estas operaciones se realizan a través de intermediarios financieros cuyo objetivo es obtener una ganancia; estas entidades operan como intermediarios, recaudan dinero del público pagando una determinada tasa de interés y lo prestan a otras personas a una tasa de interés mayor.

La tasa de interés a la cual se recaudan los recursos se denomina tasa de captación y a la cual se presta el dinero tasa de colocación; la diferencia de estas dos tasas se denomina margen de intermediación. A continuación se hace referencia a algunas operaciones financieras que son de uso frecuente en la vida cotidiana.

6.1 Depósitos a término fijo

Los depósitos a término fijo (CDT) son títulos valores que respaldan los ahorros que las personas naturales o jurídicas realizan por un tiempo determinado en las entidades financieras. En esta operación el ahorrador pone a disposición de la entidad cierta cantidad de dinero por un tiempo determinado, entre los 30 y 360 días, a cambio de recibir un interés. El interés ganado que dependerá del monto ahorrado y el tiempo que se pacte, de acuerdo a la ley tributaria, es una ganancia sujeta a impuestos, los cuales se cobran por la misma entidad al momento de la liquidación del título valor, operación esta conocida como retención en la fuente. Aunque el impuesto dependerá de la vigencia de la ley, la retención en la fuente actual es del 7%. (10% sobre el 70% del pago o abono en cuenta por concepto de rendimientos financieros).

Los CDT son títulos valores redimibles o reembolsables sólo en los plazos y términos pactados; es decir, que si el CDT se pactó a 180 días la entidad financiera no tiene la obligación de pagarlo hasta tanto se venza dicho término. No obstante, el titulo puede ser negociado o endosado en los mercados financieros.

Ejemplos y Casos

2.21 – Depósitos a Término Fijo

Una pequeña empresa ha invertido $60 millones en un depósito a término fijo durante doce meses, en una entidad financiera que le ofrece una tasa de interés del 28% N_m, el gerente quiere conocer:

a) El valor que finalmente recibirá si la retención en la fuente es del 5%

b) La rentabilidad efectiva que obtendrá en esta operación

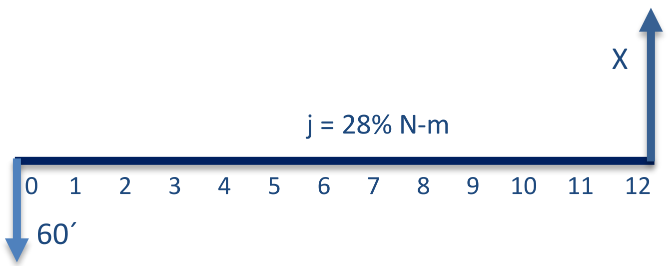
Solución

Parámetros

- Inversión: 60 millones
- Tasa de interés: 28% N_m
- Período de la inversión: 1 año, o 12 meses
- Retención en la fuente: 5%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera.



Cálculos

Lo primero es determinar la tasa de interés efectiva que se va utilizar en los cálculos considerando que la entidad cobra una tasa del 28% N_m; para ello se utiliza la fórmula (18)

$$j = i \times m$$

$$0{,}28 = i \times 12$$

$$i = 0{,}0233 = 2{,}33\%\ EM$$

Con esta tasa para hallar el valor futuro de la operación, se utiliza la fórmula (13)

$$V_f \ = V_p(1+i)^n$$

$$V_f \ = 60´000.000(1+0{,}0233)^{12} = 79´132.830{,}35$$

El interés que recibirá el empresario es igual: $I = V_f - V_p = 19´132.830{,}35$; sobre este valor (rendimientos financieros) se paga la retención en la fuente; la cual se calcula como:

$$Impuesto \ = 19´132.830{,}35 \ \times 0{,}05 = 956.641{,}52$$

Lo realmente recibido por el inversionista entonces es igual al valor final calculado menos el impuesto o retención en la fuente.

$$V_f^{´} \ = V_f - Im = 79´132.830{,}35 - 956.641{,}51 = 78´176.188{,}83$$

Para hallar la tasa de interés real recibida se utiliza la fórmula (17), teniendo en cuenta el valor invertido y valor realmente recibido durante los 12 meses

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$i = \sqrt[12]{\frac{78´176.188{,}84}{60´000.000{,}00}} - 1 = 0{,}02229 = 2{,}23\%\ EM$$

Respuesta

a) El valor que finalmente recibirá la empresa es: 78´176.188,83

b) La rentabilidad que realmente obtiene la empresa en esta operación es del: 2,23% EM

Conceptos relacionados con los CDT

Algunos conceptos importantes relacionados con los depósitos a término fijo son:

6.1.1 DTF

Es la tasa de interés calculada como un promedio ponderado semanal por monto, de las tasas promedios de captación diarias de los $CDTs$ a 90 días, pagadas por las entidades financieras. La tasa es calculada semanalmente por el Banco de la República con la información provista por la Superintendencia financiera.

La DTF es actualmente la principal tasa de referencia de la economía colombiana; y a pesar de ser un promedio de las captaciones en el corto plazo, se utiliza para indexar bonos de largo plazo de las entidades públicas y privadas.

6.1.2 TCC

Esta tasa de interés es calculada como un promedio ponderado semanal, de las tasas promedios de captación diarias de los $CDT's$ a 90 días, pagadas por las corporaciones financieras. La TCC es calculada por el Banco de la República con la información provista por la Superintendencia Bancaria; y como se puede deducir es un subconjunto de la DTF, ya que se calcula solo con base en la información de las corporaciones financieras

6.1.3 CDAT

Producto bancario orientado a inversiones de muy corto plazo a una tasa fija en pesos. Su respaldo se hace a través de un título valor que en este caso, a diferencia del CDT, no es negociable; no pueden ser endosables, ni estar a nombres de terceros, solo tendrá un titular.

6.2 Inflación y Deflación

La inflación es el fenómeno económico que refleja el alza general de los precios de los productos y servicios de la economía de un país. La inflación se calcula con base en el aumento de los productos de la canasta familiar, conjunto de artículos previamente seleccionados, que representan la totalidad de los productos de consumo. A través del siguiente ejemplo se ilustra el concepto de inflación y su incidencia en las relaciones económicas de la sociedad.

Considérese el caso hipotético de una familia de clase media que a comienzos del año 2013, consumía los siguientes productos y servicios por mes: alimentos, $700.000; vivienda, $1´000.000; educación, $600.000; salud, $400.000; vestuario y cosméticos, $200.000; servicios de energía, agua, alcantarillado y comunicaciones, $400.000; transporte, $600.000; entretenimiento, $350.000 y otros no clasificados, $300.000. Sumando estos rublos a principio del enero esta familia gastaba en total $4´550.000. Al revisar los gastos de la familia a finales del año, el precio de los mismos productos fue: alimentos, $730.000; vivienda, $1´100.000; educación, $600.000; salud, $420.000; vestuario y cosméticos, $210.000; servicios de energía, agua, alcantarillado y comunicaciones, $400.000; transporte, $620.000; entretenimiento, $350.000 y otros no clasificados, $320.000; que suman en total $4´750.000

En este caso, la familia gastaba a finales del año \$200.000 más de lo que gastaba en enero para adquirir la misma cantidad de bienes y servicios. Lo anterior significa que el nivel de precios de los bienes y servicios aumento \$200.000 (4,40%) entre el principio y el final del año. Al aumento porcentual en los precios se le denomina inflación.

La inflación, entonces tiene que ver con lo que en economía se denomina "capacidad adquisitiva de la moneda"; es decir, con \$4´550.000 a principio del año 2013 se tenía la capacidad de adquirir todo lo que esta familia necesitaba, pero, a finales del año con esos mismos \$4´550.000, la capacidad de compra se disminuyó. La inflación hace que el dinero pierda capacidad adquisitiva a través del tiempo.

La inflación tiene su origen en dos causas:

- Demanda. Los precios aumentan porque hay un exceso en la demanda de los bienes y servicios. Lo que el mercado demanda está por encima de lo que se oferta, lo cual produce escases, y por consiguiente el vendedor tiende a cobrar más por los productos.
- Oferta. Varias circunstancias del mercado, como por ejemplo un incremento en los costos, podrían conducir a que los productores de bienes y servicios disminuyan o incluso se dejen de producir; esto hace que la oferta disminuya, por lo que, ante una demanda constante, los bienes se hacen escasos y el precio de éstos aumenta.

La inflación se mide a través de los cambios del Índice de Precios al Consumidor (IPC); el cual mide los precios de un grupo de productos representativos de la economía. En Colombia el Departamento Nacional de Estadística $(DANE)$ es la entidad encargada de calcular el índice mensualmente. La referencia que toma el

$DANE$ para el cálculo es la "canasta familiar", que es un conjunto de bienes y servicios que hipotéticamente adquieren las familias típicas de nuestro país. Los cálculos se realizan con información que se recolecta en aproximadamente veinte mil establecimientos. De esta forma el IPC mide el cambio a través del tiempo en los precios de la canasta familiar; si la variación indica aumento en los precios se dice que se ha producido inflación; por el contrario, si la variación indica disminución, se presenta el fenómeno opuesto denominado deflación.

La inflación se simboliza con la letra "f"; la deflación se representa, por su parte, como: "$-f$".

En el sector empresarial la canasta de productos en vez de bienes de consumo incluye materias primas, salarios, servicios y demás materiales e insumos necesarios para la producción, en este caso la inflación de los productos se mide de acuerdo a las variaciones del IPP –Índice de precios al productor- el cual varía de acuerdo sector económico.

En general, mientras no se indique lo contrario, la inflación se define como una tasa efectiva anual.

6.3 Devaluación y revaluación

La devaluación es la pérdida de valor de una moneda frente a otra; dicha perdida se produce principalmente por el juego de la oferta y la demanda; a mayor demanda de una moneda, como por ejemplo, el dólar, el precio de este tiende a subir; por el contrario cuando hay poca demanda el precio baja, produciéndose el fenómeno contrario denominado revaluación.

El valor de una moneda con respecto a otra se miden a través de la Tasa de Cambio (TC). Cuando la variación porcentual de la tasa de cambio en el tiempo es positiva, se dice que hay Devaluación (D_v), por el contrario cuando la variación es negativa ($-D_v$) hay Revaluación. La devaluación o revaluación se calcula como el cambio porcentual de la tasa de cambio, así como se calcula con la fórmula (24).

$$Devaluación = D_v = \frac{TC_f - TC_i}{TC_i} \quad (24)$$

De donde:

D_v: Devaluación
TC_i: Tasa de cambio inicial
TC_f: Tasa de cambio final

De acuerdo a la definición, hay devaluación del peso frente al dólar cuando hay que pagar hoy $1.800 pesos por un dólar y un tiempo más tarde el valor del mismo dólar es de $1.900 pesos; para calcular la devaluación se aplica la fórmula (24), como se muestra a continuación:

$$D_v = \frac{1.900 - 1.800}{1.800} = 0{,}0555 = 5{,}55\%$$

Para el caso se dice que hubo una devaluación del 5,5% del peso con respecto al dólar. Contrario a la devaluación se define la revaluación como la ganancia de valor de una moneda con respecto a otra; por ejemplo hay revaluación del peso frente al dólar cuando hay que pagar hoy $1.800 pesos por un dólar y un tiempo después por ese mismo dólar se paga $1.750; para calcular la revaluación se utiliza igualmente la fórmula (24); la diferencia radica en que ahora el resultado es negativo, así como se muestra a continuación.

$$D_v = \frac{1.750 - 1.800}{1.750} = -0{,}0285 = -2{,}85\%$$

6.3.1 Tasa Representativa del Mercado (TRM)

De acuerdo al Banco de la Republica la Tasa Representativa del Mercado (TRM) es la cantidad de pesos colombianos que se paga por un dólar de los Estados Unidos; es decir, es la tasa de cambio del peso frente al dólar.

La TRM se calcula con base en las operaciones de compra y venta de divisas en el mercado cambiario colombiano y su cálculo lo realiza y certifica diariamente la Superintendencia Financiera de Colombia con base en las operaciones registradas el día hábil inmediatamente anterior.

Las variaciones de la TRM (devaluación y revaluación) como fenómeno económico afecta el comercio exterior del país. Por ejemplo, cuando hay una devaluación del peso frente al dólar los exportadores reciben mayor cantidad de pesos cuando venden en el exterior; por el contrario, cuando existe una revaluación el exportador recibirá menor cantidad de pesos; disminuyendo así sus ganancias. Por su parte, los importadores cuando hay devaluación tendrán que pagar más pesos por las mercancías en el exterior; y en el caso de revaluación lo pagado en pesos en el exterior se reduce, aumentando así sus ganancias. Esta es la razón por la cual se dice que la tasa de cambio es un factor determinante en la competitividad de los empresarios y comerciantes nacionales.

6.3.2 Calculo de la Tasa de Cambio

Dada la tasa de cambio actual y la devaluación o revaluación expresada como una tasa efectiva anual, para un período de tiempo determinado, se puede calcular la tasa de cambio final, como se indica en la fórmula (25), la cual no es más que la aplicación de la fórmula (13) para el valor de la TC

$$TC_f = TC_i \times (1 + D_v)^n \quad (25)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la fórmula (24)

Ejemplos y Casos

2.22 – INFLACIÓN Y DEVALUACIÓN 1

Un inversionista colombiano quiere realizar un depósito a término fijo por doce meses en el Banco de New York por valor de USD$ 20.000. Si el banco reconoce una tasa de interés del 5% EA, la tasa de cambio actual es $1.820 por dólar y la devaluación estimada para el año es del 7%; entonces se quiere conocer cuál es rentabilidad anual que recibirá el inversionista.

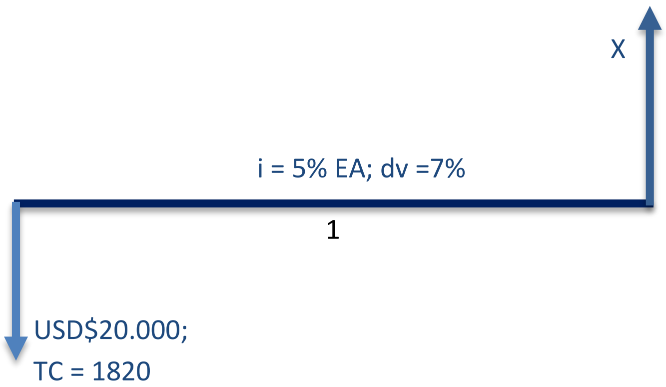
Solución

Parámetros

- Inversión: USD$ 20.000
- Tasa de interés: 5% EA
- Período de la inversión: 1 año, o 12 meses
- Tasa de cambio inicial: $1.820 por 1USD$
- Devaluación del peso con respecto al dólar: 7%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación de inversión.



Cálculos
Para hallar el valor futuro que recibirá el inversionista en dólares, se utiliza la fórmula (13)

$$V_f \; = V_p(1+i)^n$$

$$V_f \; = \; 20.000(1+0{,}05)^1 = USD\ \$21.000$$

Para calcular la inversión realizada en pesos, se aplica la tasa de cambio a lo invertido en dólares

$$Inversión\ en\ pesos = 20.000 \times 1.820 = 36´400.000$$

Para calcular lo recibido en pesos, primero se calcula la tasa de cambio al final del año considerando la devaluación del peso con respecto al dólar. Para este cálculo se utiliza la fórmula (25)

$$TC_f \; = TC_i(1+i)^n$$

$$TC_f \; = \; 1.820(1+0{,}07)^1 = 1.947{,}40$$

Considerando esta tasa de cambio se puede calcular lo recibido en pesos al cabo de un año:

$$Recibido\ en\ Pesos \; = \; 21.000 \times 1.947{,}4 = 40´895.400$$

Para calcular la rentabilidad obtenida por el inversionista se debe calcular la tasa de interés teniendo en cuenta lo invertido y lo recibido, durante el año de inversión, para ello se utiliza la fórmula (17)

$$\left(\frac{V_f}{V_p}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = i$$

$$i = \left(\frac{40´895.400}{36´400.000}\right)^{\frac{1}{1}} - 1 = 0{,}1235 = 12{,}35\%$$

Respuesta
La rentabilidad recibida por el inversionista es del 12,35% EA

6.4 Tasa de Interés Combinadas

Del ejemplo 2.22, se puede concluir que una inversión realizada en el exterior gana dos tipos de interés: el interés reconocido por el banco y los rendimientos obtenidos por la devaluación del peso con respecto al dólar durante el tiempo que dura la inversión. Lo anterior implica que se están aplicando paralelamente dos tasas de interés: una tasa i_1 que es la tasa del banco; y la tasa i_2, que corresponde a la devaluación del peso con respecto a la otra moneda.

La tasa combinada reúne ambas tasa de interés; a continuación se deduce la fórmula del interés combinado.

Para un peso sometido a una tasa de interés i_1, durante un período, el valor final aplicando la fórmula (13) será:

$$V_f = (1 + i_1)$$

Por su parte si el valor resultante se somete a una tasa de interés i_2, también durante de un período, el valor final, aplicando igualmente la fórmula (13) será:

$$V_f = (1 + i_1) \times (1 + i_2) \; (a)$$

De otro lado, el monto final que se obtiene, aplicando una tasa de interés combinada durante un período, utilizando la fórmula (13), es:

$$V_f = (1 + i_c) \; (b)$$

Considerando que V_f debe ser igual, entonces $(a) = (b)$ y se obtiene:

$$(1 + i_c) = (1 + i_1) \times (1 + i_2)$$

Despejando i_c de la ecuación anterior, se obtiene:

$$i_c = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2 \quad (26)$$

¿Qué hubiera sucedido con la rentabilidad del ejemplo 2.22 si en vez de devaluación, se hubiera presentado reevaluación?

6.5 Tasa corriente y Tasa deflactada o tasa real

Con la tasa de interés corriente se negocia y se hacen las transacciones del día a día; con ella se pretende cubrir la inflación o pérdida del valor del dinero en el tiempo y la ganancia que el poseedor del dinero pretende por poner a disposición de otro agente sus ahorros. Ante estas consideraciones, la tasa de interés corriente es la combinación de dos tasas: la inflación y la tasa real, la cual se puede expresar matemáticamente aplicando la fórmula (26), como:

$$i = i_r + f + i_r \times f$$

En muchas ocasiones el gerente o administrador para la toma de decisiones necesita conocer la tasa real; es decir, la tasa de interés que no está afectada por la inflación, también conocida como la tasa deflactada. Dicha tasa se puede obtener despejando i_r, de la ecuación anterior:

$$i_r = \frac{i - f}{1 + f} \quad (27)$$

De donde:

i_r: Rentabilidad real

i: Rentabilidad corriente

f: Inflación

Ejemplos y Casos

2.23 – Inflación y Devaluación 2

Un inversionista colombiano quiere realizar un depósito a término fijo por doce meses en el Banco de New York por valor de USD$ 20.000. Si el banco reconoce una tasa de interés del 5% EA, la tasa de cambio actual es $1.820 por dólar y la revaluación estimada para el año es del -2%; entonces se quiere conocer cuál es rentabilidad anual que recibirá el inversionista. Resolver por tasas combinadas.

Solución

Parámetros

- Inversión: USD$ 20.000
- Tasa de interés: 5% EA
- Período de la inversión: 1 año, o 12 meses
- Tasa de cambio inicial: $1.820 por 1USD$
- Revaluación del peso con respecto al dólar: -2%

Cálculos

Considerando que la inversión en pesos está sometida tanto a la tasa de interés que reconoce el banco, como a la reevaluación, para calcular la rentabilidad obtenida por el inversionista se utiliza directamente la fórmula (26) de tasas combinadas:

$$i_c = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2$$

$$i_c = 0{,}05 - 0{,}02 + 0{,}05 \times -0{,}02 = 0{,}1235 = 2{,}9\%$$

Respuesta

La rentabilidad recibida por el inversionista es del 2,9% EA. En este caso, contario al inversionista del ejemplo 2.22, debido a la revaluación el inversionista recibe una tasa de interés menor a la que ofrece el banco.

2.24 – Inflación y Devaluación 3

Un inversionista colombiano quiere realizar un depósito a término fijo por doce meses en el Banco de New York por valor de USD$ 20.000. Si el banco reconoce una tasa de interés del 5% EA, la tasa de cambio actual es $1.820 por dólar y la devaluación estimada para el año es del 7%; entonces se quiere conocer cuál es rentabilidad real anual que recibirá el inversionista, si la inflación estimada en Colombia para el año de la inversión es del 4%

Solución

Parámetros

- Inversión: USD$ 20.000

- Tasa de interés: 5% EA
- Período de la inversión: 1 año, o 12 meses
- Tasa de cambio inicial: $1.820 por 1USD$
- Devaluación del peso con respecto al dólar: 7%
- Inflación en Colombia: 4%

Cálculos

Para calcular la rentabilidad obtenida por el inversionista se utiliza directamente la fórmula de tasas combinadas, fórmula (26)

$$i_c = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2$$

$$i_c = 0{,}05 + 0{,}07 + 0{,}05 \times 0{,}07 = 0{,}1235 = 12{,}35\%$$

Por su parte para el cálculo de la rentabilidad real se aplica la fórmula (27)

$$i_r = \frac{i - f}{1 + f}$$

$$i_r = \frac{0{,}1235 - 0{,}04}{1 + 0{,}04} = 0{,}0802 = 8{,}02\%$$

Respuesta

La rentabilidad real obtenida por el inversionista es del 8,02% EA.

Reflexione: ¿Cuál hubiera sido la rentabilidad real, si en vez de devaluación se hubiera presentado revaluación?

6.6 Equivalencia de tasas referenciadas

En varias operaciones financieras la tasa de interés que se pacta no corresponde a una tasa fija; sino que se acuerda una tasa de referencia, usualmente variable, más unos puntos adicionales conocidos como "$SPREAD$".

Cuando la tasa de referencia está dada por una tasa efectiva, la tasa pactada se calcula como la combinación de la tasa de referencia y el $SPREAD$ para lo cual se utiliza la fórmula (26). Por su parte, cuando la tasa principal se expresa como un interés nominal, entonces simplemente se suman la tasa principal y el $SPREAD$.

Son tasas de referencia efectivas anuales la inflación, la Tasa Interbancaria (TIB); por su parte, el DTF y el TCC se expresan como tasas de interés nominal.

Ejemplos y Casos

2.25 – Tasas de Referencia 1

Determinar la tasa de interés efectiva mensual que paga un crédito de vivienda que se pacta al DTF más 5 puntos. El DTF a la fecha es del 18% N_t

Solución

Parámetros

- DTF: 18% N-t
- SPREAD: 5 puntos

Cálculos

Considerando que la tasa de interés principal es una tasa nominal, simplemente se suman a esta los puntos del SPREAD.

$$0{,}18 + 0{,}05 = 0{,}23 = 23\%\ N - t$$

Para calcular la tasa efectiva mensual, se procede como se explicó anteriormente para el cálculo de una tasa equivalente. Es decir, primero se halla la tasa efectiva correspondiente a la tasa nominal, y a partir de ésta, se calcula la tasa equivalente efectiva mensual. Para esto se utilizan las fórmulas (18) y (19). La tasa efectiva equivalente de la tasa nominal, es:

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}23}{4} = 0{,}0575 = 5{,}75\%\ ET$$

Para convertir esta tasa en una tasa efectiva mensual aplicamos la ecuación (19)

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}0575)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0{,}0188 = 1{,}88\%\ EM$$

Respuesta

El crédito de vivienda paga una tasa de interés efectiva mensual del $1{,}88\%\ EM$

2.26 – Tasas de Referencia 2

Una persona está pagando un crédito de vivienda al IPC + 4 puntos. ¿Cuál será el SPREAD, si se quiere cambiar a un plan con tasa de referencia del DTF? Suponga una inflación del 5,5% y una DTF del 8% N-t_a

Solución

Parámetros

- Crédito de vivienda: IPC + 4 puntos
- Inflación, IPC: 5,5%
- DTF: 8% N-ta

Cálculos

Para determinar el SPREAD, se debe hallar X en la siguiente ecuación:

$$IPC + 4 = DTF + X$$

Para hallar el valor de X, lo primero es resolver la parte izquierda de la ecuación: ya que el IPC es una tasa efectiva anual, para sumar los puntos del SPREAD se debe aplicar la fórmula (26)

$$i_c = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2$$

$$i_c = 0{,}055 + 0{,}04 + 0{,}055 \times 0{,}04 = 0{,}0972 = 9{,}72\%\ EA$$

Considerando que la DTF está expresada en interés nominal trimestre anticipada, se debe inicialmente hallar la tasa equivalente efectiva trimestral, utilizando para ello la fórmula (19)

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}0972)^{\frac{1}{4}} - 1 = \ 0{,}02346 = 2{,}34\%\ ET$$

Lo siguiente es hallar de esta tasa la tasa equivalente trimestral anticipada, para lo cual se utiliza la fórmula (21).

$$i_a = \frac{i}{(1 + i)}$$

$$i_a = \frac{0{,}02346}{(1 + 0{,}02346)} = 0{,}02292 = 2{,}29\%\ ET_a$$

Partir de esta tasa efectiva anticipada se halla la tasa nominal equivalente, utilizando la fórmula (18)

$$j_a = i_{\,a} \times m$$

$$j = 0{,}02292 \ \times 4 = 0{,}09168 = 9{,}17\% \ N\_t_a$$

Remplazando este valor en la ecuación inicialmente planteada, se puede hallar el valor de X.

$$IPC + 4 = DTF + X$$

$$0{,}0917 = 0{,}08 + \ X$$

$$X = 0{,}0117$$

Respuesta
El SPREAD necesario para el cambio del plan es de 1,17 puntos

6.7 Aceptaciones bancarias y financieras

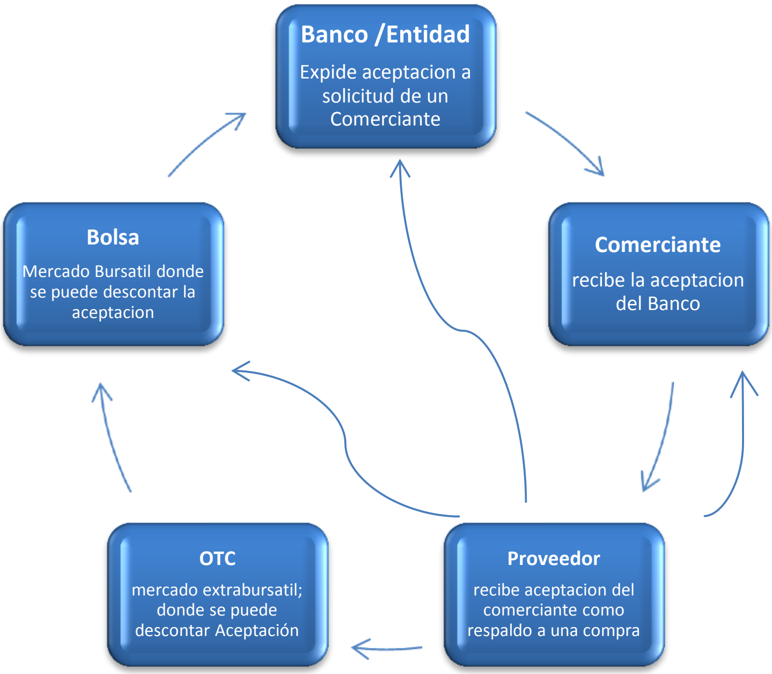
Son títulos valores emitidos por una entidad financiera, a solicitud de un cliente, y en favor de un proveedor de bienes o servicios. A través de ellas un comprador de bienes o servicios a crédito asegura su pago al proveedor con el respaldo de una entidad financiera. Las aceptaciones reciben el nombre de bancarias cuando son respaldadas por los bancos, y financieras cuando su respaldo proviene de otras entidades financieras.

En general, su plazo es menor a un año; no son divisibles y no son gravables en el mercado primario.

En la gráfica 2.6 se ilustra el uso de las aceptaciones bancarias o financieras. Supóngase que un proveedor de materias primas para el sector Agrícola recibe un pedido por valor de $300 millones; pero la empresa agrícola solicita un plazo de 180 para su pago. El proveedor acepta el pedido con la condición de que una entidad financiera garantice el pago. Para cumplir con el requerimiento la empresa agrícola solicita a su banco expedir a nombre del proveedor una aceptación bancaria por $300 millones con vencimiento en 180 días. Expedida la aceptación la empresa agrícola la entrega a su proveedor.

El proveedor tiene la opción de negociar el documento en el mercado secundario, antes del vencimiento o esperar la fecha de su vencimiento para cobrarla en el banco o en la entidad financiera. Por su parte, cuando decide descontarla antes de su vencimiento en el mercado secundario tiene la opción del mercado extrabursátil OTC (Over the counter) o en el mercado bursátil.

Gráfica No 2.6 – Aceptaciones Bancarias y Financieras



Ejemplos y Casos

2.27 – ACEPTACIONES BANCARIAS

Una fábrica de bienes de primera necesidad recibe un pedido de un distribuidor por valor de $50´millones de pesos. El fabricante ofrece crédito a un plazo de 120 días, pero exige que el pago sea respaldado por una entidad financiera. Para esto, el comprador solicita a su banco una aceptación bancaria por 50 millones a nombre del fabricante y con vencimiento en 120 días. El banco le expide al distribuidor la aceptación y este a su vez la entrega al fabricante para respaldar el pedido.

a) Si faltando 60 días el fabricante decide vender la aceptación en el mercado OTC (el inversionista puede ser: un particular, una compañía de financiamiento comercial, un leasing, etc.) a una tasa descuento del 25% anual, ¿Cuál será el valor que recibirá el fabricante?

b) Si faltando 60 días el fabricante decide vender la aceptación en el mercado Bursátil; con una tasa de registro del 25% anual, y una comisión de venta del 0,5%. ¿Cuál será el valor que recibirá el fabricante?

Solución

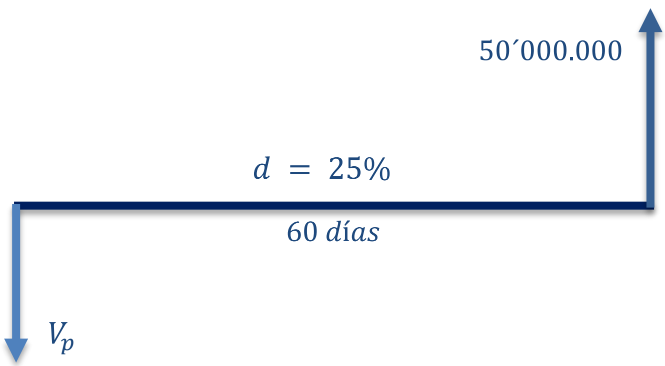
a) Venta en el mercado OTC

Parámetros

- Valor de maduración de la aceptación: 50 millones
- Tasa de descuento: 25%
- Tiempo de descuento: 60 días

Representación Gráfica

En la siguiente Gráfica se ilustra la operación de descuento de la aceptación financiera.



Cálculos
Para calcular el valor presente o líquido de la operación se aplica fórmula (15) ya que se trata de una operación donde se aplica interés compuesto:

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n} = V_f \times (1+i)^{-n}$$

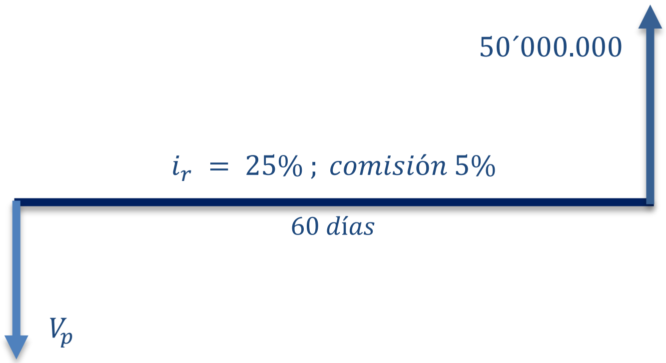
$$V_p = \frac{50´000.000}{(1+0{,}25)^{\frac{60}{360}}} = 48´174.624{,}20$$

Respuesta
Precio de venta de la aceptación bancaria: $\$\ 48´174.620$

b) Venta en el mercado Bursátil

Parámetros
- Valor de maduración de la aceptación: 50 millones
- Tasa de registro: 25%
- Comisión: 0,5%
- Tiempo de descuento: 60 días

Representación Gráfica
En la siguiente Gráfica se ilustra la operación



En este caso la tasa de descuento debe incluir la comisión, es decir: 25% + 0,5% = 25,5%; igualmente se aplica la fórmula (15):

$$V_p \quad = \frac{V_f}{(1+i)^n} = V_f \times (1+i)^{-n}$$

$$V_p \quad = \frac{50´000.000}{(1+0{,}255)^{\frac{60}{360}}} = 48´142.582{,}51$$

Nótese que el valor de la comisión de venta se puede calcular como la diferencia entre el precio de venta y el precio de registro

$$comisión = 48´174.620 - 48´142.582{,}51 = \ 32.037{,}49$$

Respuestas

- Precio de venta: 48´174.620
- Precio de registro: 48´142.582,51
- Comisión: 32.037,49

3 Anualidades y Gradientes

UNIDAD 3: ANUALIDADES Y GRADIENTES

OBJETIVO

Al finalizar la unidad los estudiantes estarán en capacidad de calcular operaciones financieras en las cuales la contraprestación se hace a través de cuotas periódicas. Para esto deducirán los modelos matemáticos para calcular el valor presente, valor futuro, interés y número de pagos para las anualidades y gradientes; además aplicarán los modelos en situaciones de la vida empresarial.

CONTENIDO

Introducción

Es corriente que se pacte entre deudores y acreedores el pago de las obligaciones en cuotas periódicas a una tasa de interés, durante un plazo determinado. Cuando las cuotas son iguales las operaciones reciben el nombre de anualidades; de otro lado, si las cuotas son cambiantes reciben el nombre de gradientes.

Cuando, por ejemplo, una persona compra un automóvil pagando una cuota inicial y el resto del valor en cuotas mensuales iguales durante un tiempo determinado, se configura una operación financiera de anualidades; si por el contrario las cuotas crecen, por ejemplo, con la inflación la operación se denomina gradiente.

Las anualidades o gradientes son sistemas de pagos a intervalos iguales de tiempo; de esta forma, no significa necesariamente pagos anuales, sino pagos a intervalos de tiempo iguales: semanas, meses, trimestres, semestres, años, entre otros. En la vida cotidiana se encuentran innumerables ejemplos de este tipo de operaciones: el pago de dividendos, los fondos de amortización, los pagos a plazos, los pagos periódicos a las compañías de seguros, los sueldos, y en general todo tipo de renta son, entre otros, ejemplos de anualidades o gradientes.

En este tipo de operaciones se distinguen los siguientes elementos: la renta o pago, el período, el plazo y la tasa de interés. La renta o pago se define como la cuota o depósito periódico; el período es el tiempo que se fija entre dos pagos consecutivos; el plazo es el intervalo de tiempo que sucede entre el inicio y final de la operación; finalmente la tasa de interés es el tipo de interés que se acuerda en la operación.

Dependiendo de la forma como se pacten los montos y períodos de pago las operaciones se pueden clasificar en ordinarias, anticipadas, diferidas y perpetuas. En esta unidad de aprendizaje se analizan cada una de ellas determinándose los modelos matemáticos que permiten simular y analizar estos tipos de operación financiera.

1. Anualidades

Son operaciones financieras en las cuales, aparte de la tasa de interés y plazo, se pacta el pago de la obligación en una serie de cuotas periódicas iguales. La operación se puede definir como una anualidad si cumple con las siguientes condiciones:

- Los pagos (rentas) son de igual valor.
- Los pagos (rentas) se realizan en intervalos de tiempo iguales
- A todos los pagos (rentas) se les aplica la misma tasa de interés
- El número de pagos y períodos pactados es igual

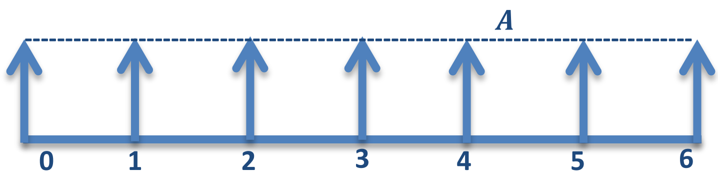
En la práctica son varios los tipos de operación financiera que cumplen con estas condiciones o que pueden adecuarse a estas condiciones, ellas son: las anualidades ordinarias, vencidas y diferidas.

Los modelos matemáticos que se deducen para el cálculo y análisis de este tipo de anualidades tienen en cuenta las anteriores condiciones; por lo cual, es necesario que al momento de aplicarse las fórmulas a situaciones particulares, se asegure que se cumplan dichas condiciones.

Ejemplos y Casos

3.1 – Definición de Anualidades 1

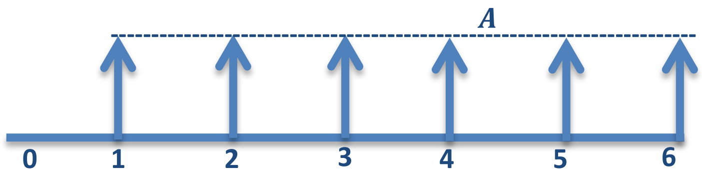
Determinar si el sistema de pagos mostrado en la gráfica corresponde a una anualidad.



Respuesta
El sistema de pagos no corresponde a una anualidad ya que no obstante los pagos son iguales y se hacen a intervalos de tiempo igual, el número de pagos no es igual al número de períodos

3.2 – DEFINICIÓN DE ANUALIDADES 2

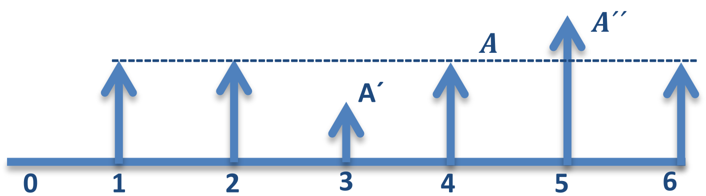
Determinar si el sistema de pagos mostrado en la gráfica corresponde a una anualidad.



Respuesta
Si se supone que la tasa de interés que se aplica a cada pago es la misma, se puede afirmar que el sistema corresponde a una anualidad teniendo en cuenta que los pagos son iguales, se hacen a intervalos de tiempo igual y los períodos pactados corresponden al número de pagos. Es la forma general de una anualidad ordinaria o vencida

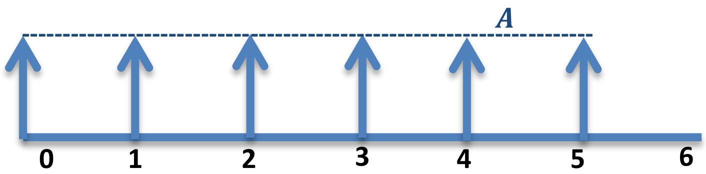
3.3 – DEFINICIÓN DE ANUALIDADES 3

Determinar si el sistema de pagos mostrado en la gráfica corresponde a una anualidad.



Respuesta
El sistema de pagos no corresponde a una anualidad, ya que no obstante que el número de pagos es igual al número de períodos y los intervalos de tiempo son iguales, los pagos no son iguales

3.4 – DEFINICIÓN DE ANUALIDADES 4
Determinar si el sistema de pagos mostrado en la gráfica corresponde a una anualidad.



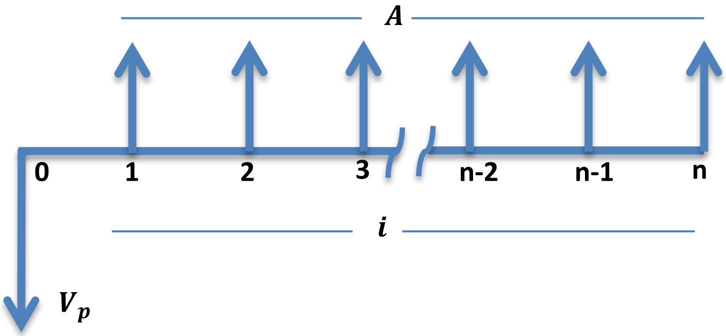
Respuesta
Si se supone que la tasa de interés que se aplica a cada pago es la misma, se puede afirmar que el sistema corresponde a una anualidad teniendo en cuenta que los pagos son iguales, se hacen a intervalo de tiempo igual y los períodos pactados corresponden al número de pagos. Es la forma general de una anualidad anticipada

1.1 Valor presente de la anualidad

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación de crédito en la cual un préstamo V_p se paga en cuotas iguales A, a una tasa de interés efectiva por período i, durante n períodos. La situación se ilustra en la gráfica No 3.1

Para calcular el valor presente se utiliza la fórmula (15), considerando cada valor de A como un valor futuro y sumando todos los valores presentes en la $ff = 0$.

Gráfica No 3.1 – Valor Presente de una Anualidad



$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^{n-2}} + \frac{A}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A}{(1+i)^n}$$

Factorizando A, se obtiene la siguiente ecuación:

$$V_p = A\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-2}} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right] \; (a)$$

Multiplicando (a) por el factor $\frac{1}{(1+i)}$, se obtiene la ecuación:

$$\frac{V_p}{(1+i)} = A\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right] \; (b)$$

Restando la ecuación (a) de la (b), se obtiene:

$$\frac{-i}{(1+i)}\,V_p \;=\; A\left[\frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{1}}\right]$$

Despejando de este resultado el V_p, se obtiene:

$$V_p \;=\; \frac{A}{-i}\left[\frac{1}{(1+i)^{n}} - 1\right]$$

La cual también se puede expresar como:

$$V_p \;=\; A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right];para\ i \neq 0 \quad (28)$$

De donde:

V_p: Valor presente de una serie de pagos

A: Pagos periódicos

i: Tasa efectiva de interés

n: Número de períodos en los cuales se hacen los pagos

El factor $\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$ se denomina, como: $(V_p/A\,,i\%,n)$. Este factor permite hallar V_p, dado el pago o renta A, la tasa de interés efectiva i a la cual son descontados los pagos al valor presente y el número de pagos n.

De esta forma, la fórmula (26) se puede escribir en notación clásica, como:

$$V_p \;=\; A(V_p/A\,,i\%\,,n);para\ i \neq 0 \quad (29)$$

Ejemplos y Casos

3.5 – Valor Presente de una Anualidad

Un pequeño empresario, para reponer su equipo de producción, está en capacidad de realizar 36 pagos de $2´000.000 mensuales, a partir del próximo mes; si el banco que financia la operación cobra una tasa de interés del 24% N-m. ¿De cuánto dinero dispondrá el empresario para la reposición de los equipos?

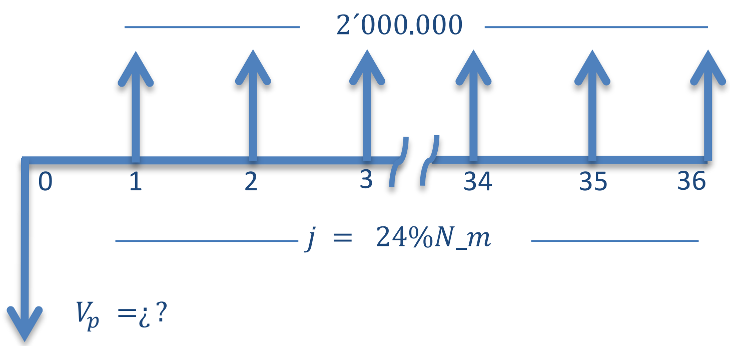
Solución

Parámetros

- Pagos: $2´000.000
- Numero de pagos: 36
- Tasa de interés: 24% N-m

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Lo primero que se debe hacer es verificar que la operación corresponde a una anualidad; el lector puede verificar que se cumplen las cuatro condiciones enunciadas en la definición y por lo tanto los modelos son aplicables en este caso.

Verificado el modelo para determinar el valor presente, que es lo que se piede, lo siguiente es hallar la tasa efectiva mensual a partir de la tasa nominal, para esto se utiliza la fórmula (18):

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}24}{12} = 0{,}02 = 2\%\ EM$$

Teniendo la tasa efectiva de interés se procede a calcular el valor presente; nótese que el período de liquidación de acuerdo a la tasa efectiva, coincide con la unidad del período tiempo en el cual se hacen los pagos. El cálculo se realiza utilizando la fórmula (28).

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$V_p = 2´000.000\left[\frac{1-(1+0{,}02)^{-36}}{0{,}02}\right] = 50´977.684{,}96$$

Respuesta
El pequeño empresario dispondrá de $50´977.684,96 para la reposición de los equipos.

1.2 Pagos o rentas a partir del valor presente

De la ecuación (28) se puede deducir el factor para hallar A, dado el valor presente V_p, la tasa de interés y el número de períodos. El factor se expresa como: $(A/V_p\,, i\%, n)$.

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0$$

De la ecuación (28) se despeja A; pasando al lado izquierdo de la ecuación a dividir los términos que multiplican la variable y a multiplicar aquellos que la dividen, con lo cual se obtiene la ecuación:

$$A = V_p\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]; para\ i \neq 0 \quad (30)$$

$$A = V_p\left(A/V_p\,, i\%\,, n\right); para\ i \neq 0 \qquad (31)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la ecuación (28).

Ejemplos y Casos

3.6 – Pagos o Rentas de una Anualidad 1

Una persona desea comprar un automóvil que tiene un precio de $64´000.000 a través de un crédito. Si la empresa de financiamiento ofrece las siguientes condiciones: préstamo del 90% del valor total del vehículo, pagado en cuotas iguales durante 60 meses a una tasa efectiva de interés del 0,95% EM. La persona quiere conocer: ¿Cuál será el valor de la cuota mensual?

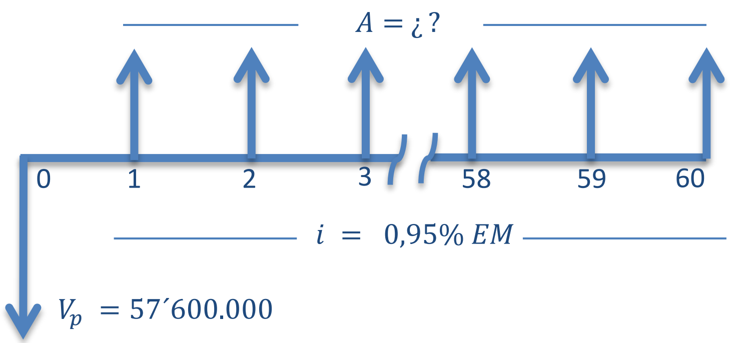
Solución

Parámetros

- Valor del automóvil: $64´000.000
- Financiación: 90% del valor total
- Numero de pagos: 60
- Tasa de interés: 0,95% EM

Representación Gráfica

Considerando que solo se financia el 90% del valor del vehículo el préstamo deberá ser por un valor de: $Prestamo = 64´000.000 \times 0,9 = 57´600.000$. En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Para determinar el valor de los pagos mensuales se aplica directamente la fórmula (30), considerando la tasa efectiva de interés mensual:

$$A = V_p\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$A = 57´600.000\left[\frac{0{,}0095}{1-(1+0{,}0095)^{-60}}\right] = 1´263.884{,}42$$

Respuesta
El valor de la cuota mensual que deberá pagar la persona es de \$1´263.884,42

1.3 Pagos o rentas con base en el valor futuro

Para determinar este modelo, se considera una operación en la cual el valor final V_f es equivalente a n pagos iguales A, a una tasa de interés efectiva por período i, durante n períodos. La situación se muestra en la gráfica No 3.2

Para determinar el factor $(V_f/A\,, i\%\,, n)$ remplazamos en la fórmula (28) el valor presente en función del valor futuro, de la fórmula (15).

$$V_p = V_f(1+i)^{-n} \quad (15)$$

$$A = V_p\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \quad (28)$$

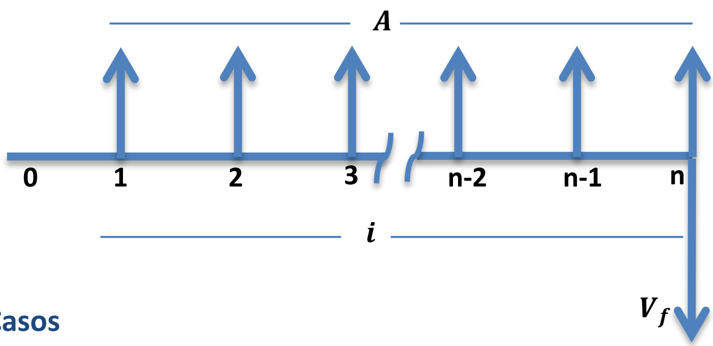
Remplazando (15) en (28), se obtiene:

$$A = V_f(1+i)^{-n}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$A = V_f\left[\frac{i}{(1+i)^{n}-1}\right]; para\ i \neq 0 \quad (32)$$

$$A = V_f\left(A/V_f\,, i\%\,, n\right); para\ i \neq 0 \quad (33)$$

Gráfica No 3.2 – Valor Futuro de una Anualidad



Ejemplos y Casos

3.7 – Pagos o Rentas de una Anualidad 2

De cuánto deberá ser el ahorro mensual de una persona que proyecta adquirir una casa de $100´000.000 dentro de cinco años, si la fiducia le asegura una tasa de interés efectiva mensual del 0,7%.

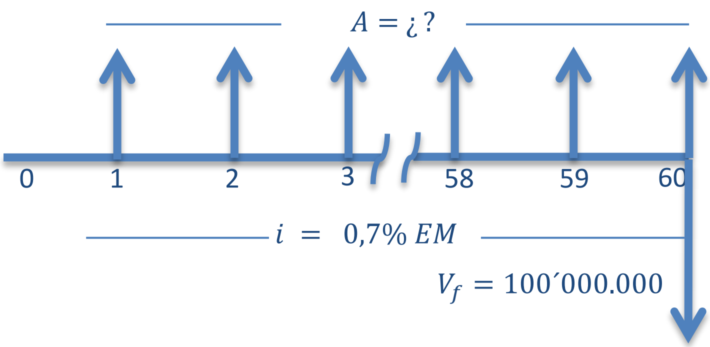
Solución

Parámetros

- Valor futuro: $100´000.000
- Numero de pagos: 60
- Plazo: 5 años = 60 meses (inicia un mes después de tomar la decisión)
- Tasa de interés: 0,7% EM

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar los pagos del ahorro se aplica directamente la fórmula (32), considerando la tasa efectiva de interés mensual:

$$A = V_f\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 100´000.000\left[\frac{0{,}007}{(1+0{,}007)^{60} - 1}\right] = 1´346.836{,}88$$

Respuesta

La persona deberá realizar un ahorro mensual de $1´346.836,8 durante los 5 años

1.4 Valor futuro de la Anualidad

El modelo para determinar el valor futuro de la anualidad se puede deducir de la ecuación (32) despejando V_f; para esto se pasa al lado izquierdo de la ecuación a dividir los términos que multiplican la variable y a multiplicar aquellos que la dividen, con lo cual se obtiene la ecuación:

$$V_f = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]; para\ i \neq 0 \quad (34)$$

$$V_f = A\left(V_f/A\,, i\%\,, n\right); para\ i \neq 0 \quad (35)$$

Ejemplos y Casos

3.8 – VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD 1

Un padre de familia quiere conocer de cuánto dispondrá para la educación superior de su hijo, si inicia un ahorro mensual de 300.000, un mes antes de que cumpla 10 años y hasta cuando cumpla 18, edad en la cual estima iniciara los estudios universitarios; la fiducia donde se realiza el ahorro asegura una tasa de interés del 10% N_m.

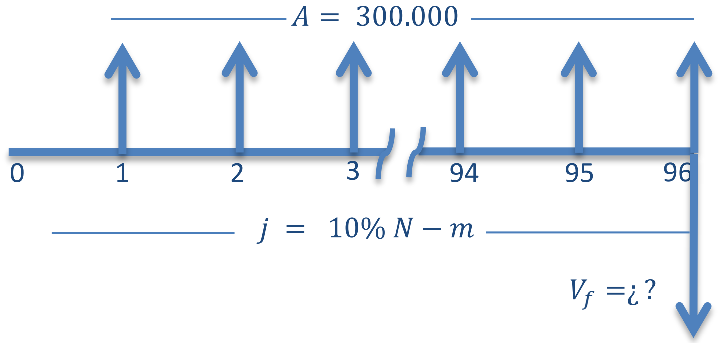
Solución

Parámetros

- Valor de los pagos: $300.000
- Numero de pagos: 96
- Plazo: 8 años
- Tasa de interés: 10% N_m

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Para determinar el valor futuro del ahorro inicialmente se debe hallar la tasa de interés efectiva mensual; para esto se aplica la fórmula (18), considerando que la tasa de interés que ofrece la fiducia es una tasa nominal:

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}10}{12} = 0{,}0083 = 0{,}833\% \; EM$$

Con esta tasa de interés efectiva se puede calcular el V_f para lo cual se aplica directamente la fórmula (34), considerando la tasa efectiva mensual:

$$V_f = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$V_f = 300.000\left[\frac{(1+0{,}0083)^{96} - 1}{0{,}0083}\right] = 43´776.403{,}87$$

Respuesta

El Padre de familia dispondrá de $43´776.403,87 cuando su hijo cumpla 18 años

1.5 Número de pagos con base en el valor futuro

Si se conocen el valor futuro V_f, los pagos A, y la tasa de interés i, de la ecuación (34) se puede determinar el valor de n; es decir, el número de pagos. A continuación se deduce la fórmula a partir de la ecuación (34).

$$V_f \;=\; A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Despejando el valor de la incógnita n, se encuentra:

$$V_f \;\times i = \; A(1+i)^n - A$$

$$A(1+i)^n = V_f i + A$$

Aplicando logaritmo en ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$Log(A(1+i)^n) = Log(V_f i + A)$$

Por propiedades de los logaritmos, se obtiene:

$$LogA + Log(1+i)^n = Log(V_f i + A)$$

$$LogA + nLog(1+i) = Log(V_f i + A)$$

$$nLog(1+i) = Log(V_f i + A) - LogA$$

Despejando n, se obtiene:

$$n = \;\frac{Log(V_f i + A) - LogA}{Log(1+i)}\;; para\; i \neq 0 \qquad (36)$$

Ejemplos y Casos

3.9 – NÚMERO DE PAGOS DE UNA ANUALIDAD

Cuántos pagos semestrales de $600.000 deberá realizar un padre de familia para pagar la universidad de su hijo que en un futuro estima le costará $4´500.000; el banco reconoce por este tipo de ahorros una tasa de interés del 7% N_s.

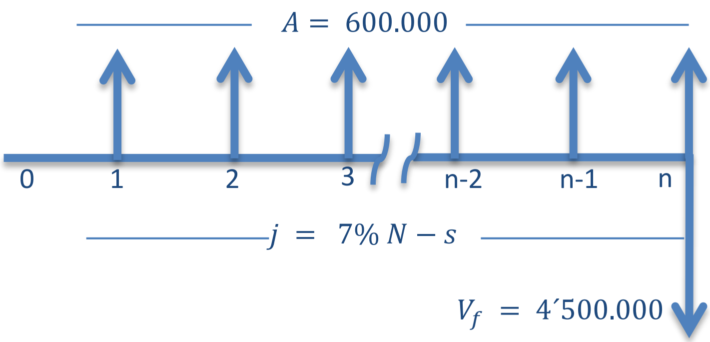
Solución

Parámetros

- Valor futuro: 4´500.000
- Valor de los pagos: $600.000
- Tasa de interés: 7% N_s

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Inicialmente se hallar la tasa de interés efectiva semestral aplicando la fórmula (18), considerando la tasa de interés nominal que paga el banco por el ahorro:

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}07}{2} = 0{,}035 = 3{,}5\%\ ES$$

Con esta tasa de interés efectiva, el valor futuro V_f, y el valor de los pagos A, se puede determinar el valor de n, para lo cual se aplica directamente la fórmula (36), considerando la tasa efectiva de interés semestral:

$$n = \frac{Log(V_f i + A) - LogA}{Log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log(4´500.000 \times 0{,}035 + 600.000) - Log(600.000)}{Log(1 + 0{,}035)} = 6{,}77$$

Esta respuesta indica que deben hacerse 6,77 pagos semestrales. No obstante, desde el punto de vista práctico el ahorrador (deudor) tiene dos opciones:

a) Terminar de ahorrar (pagar) en el semestre 6, aumentando el último pago
b) O terminar de ahorrar (pagar) en el semestre 7, disminuyendo el último pago

Respuesta
Se deben realizar 6 o 7 pagos semestrales de $600.000

1.6 Número de pagos con base en el valor presente

Si se conocen el valor presente V_p, los pagos A, y la tasa de interés i, de la ecuación (28) se puede determinar el valor de n. A continuación se deduce la fórmula a partir de la ecuación (28):

$$V_p \;=\; A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0$$

Despejando el valor de la incógnita n, se encuentra:

$$V_p i \;=\; A[1-(1+i)^{-n}]$$

$$V_p i \;=\; A - A(1+i)^{-n}$$

$$-V_p i + A = \frac{A}{(1+i)^n}$$

$$(1+i)^n = \frac{A}{A - iV_p}$$

Aplicando la función logaritmo en ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$n\log(1+i) = \log A - Log\,(A - iV_p)$$

$$n = \frac{\log A - Log\,(A - iV_p)}{\log(1+i)}; para\ i \neq 0 \quad (37)$$

Ejemplos y Casos

3.10 – Valor Futuro de una Anualidad 2

Cuántos pagos semestrales de \$600.000 deberá realizar un padre de familia para pagar la universidad de su hijo que cuesta \$4´500.000; el banco cobra para este tipo de operaciones una tasa de interés del 3,5% ES.

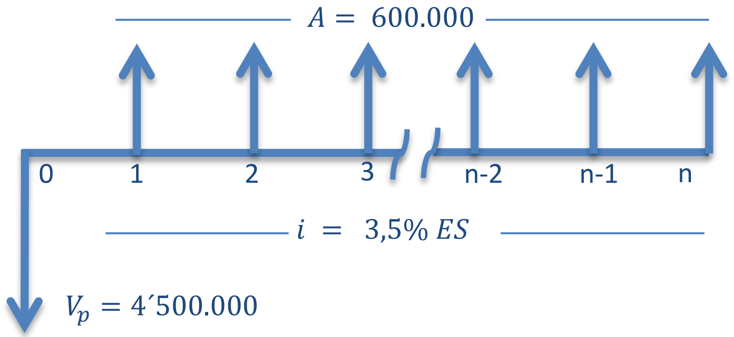
Solución

Parámetros

- Valor presente: 4´500.000
- Valor de los pagos: \$600.000
- Tasa de interés: 3,5% ES

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos
El número de pagos se puede calcular directamente de la fórmula (37), considerando la tasa efectiva de interés semestral que cobra el banco:

$$n = \frac{\log A - Log\ (A - iV_p)}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log 600.000 - Log\ (600.000 - 0{,}035 \times 4{\acute{}}500.000)}{\log(1+0{,}035)} = 8{,}85$$

Esta respuesta indica que deben hacerse 8,85 pagos semestrales de $600.000. No obstante, desde el punto de vista práctico el deudor tiene dos opciones:

a) Terminar de ahorrar (pagar) en el semestre 8, aumentando el último pago
b) O terminar de ahorrar (pagar) en el semestre 9, disminuyendo el último pago

Respuesta
Se deben realizar 8 o 9 pagos semestrales de $600.000

1.7 Tasa efectiva de interés a partir del valor presente

Cuando se tienen los demás elementos de la anualidad; es decir: el valor presente V_p o valor futuro V_f, el valor y numero de pagos A, se puede determinar el valor de la tasa de interés i a partir de la fórmula (28) o (34). No obstante, por tratarse de ecuaciones con más de una raíz, no es posible hallar la solución analíticamente; por esta razón se debe utilizar un método de tanteo y error.

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$V_f = A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$$

Para determinar la tasa de interés i se debe seguir el siguiente procedimiento:

1) Se asigna un valor inicial a la tasa de interés i y se calcula la ecuación.
2) Si el valor es menor que la igualdad V_p o V_f entonces se disminuye la tasa y se vuelve a calcular; en caso contrario, para el nuevo cálculo se aumenta la tasa
3) Cuando se logre determinar dos valores, uno mayor y otro menor, suficientemente aproximados a los valores de la igualdad, se procede a calcular la tasa de interés por interpolación.

Con el siguiente ejemplo se ilustra el anterior procedimiento:

Ejemplos y Casos

3.11 – Tasa de Interés efectiva de una Anualidad

Si una compañía de pensiones ofrece por un pago inmediato de $90 millones, una renta de $5 millones anuales durante 30 años. ¿Qué tasa de interés está reconociendo?

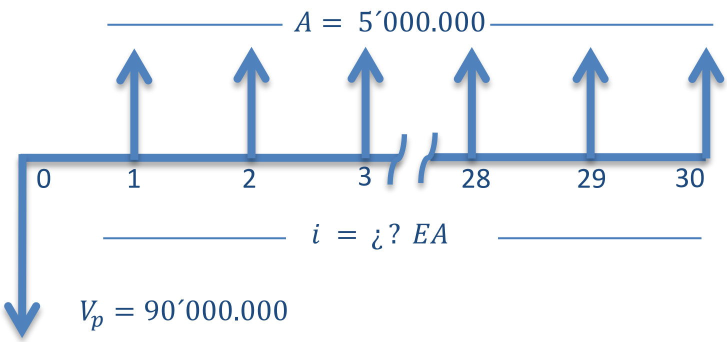
Solución

Parámetros

- Valor presente: 90´000.000
- Valor de los pagos: $5´000.000
- Numero de pagos: 30 anuales

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Para determinar la tasa de interés, se parte de la fórmula (28):

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

De acuerdo al procedimiento propuesto se le da un valor inicial a la tasa (efectiva anual) y se calcula el valor del lado derecho, así para un valor de $i = 2\%\ anual$, se obtiene:

$$90´000.000 < 111´982.277{,}8$$

Considerando que el valor de la derecha es mucho mayor al lado izquierdo, aumentamos el valor de i, y se vuelve a calcular. En este caso se calcula para $i = 3\%\ anual$, obteniendo:

$$90´000.000 < 98´002.206{,}75$$

Considerando que el valor de la derecha sigue siendo mayor al lado izquierdo, aumentamos el valor de i, y se vuelve a calcular. En este caso se calcula para $i = 4\%\ anual$, obteniendo:

$$90´000.000 > 86´460.166{,}50$$

Considerando que en este caso el valor del lado derecho es menor, se puede concluir que la tasa de interés está entre 3% y 4% anual. El valor exacto se calcula por interpolación como se indica a continuación:

98´002.206,75	3%
90´000.000	X
86´460.166,50	4%

Aplicando una sencilla regla de tres: si para una diferencia entre 98´002.206,75 y 86´460.166,50, existe una diferencia del 1%; que diferencia en % habrá para la diferencia entre 98´002.206,75 y 90´000.000, así se obtiene la fracción que sumada a 3% completa la tasa de interés.

$$X = \frac{8´002.206{,}75 \times 1\%}{11´542.040{,}25} = 0{,}693$$

Sumando el resultado a 3%, se obtiene la tasa de interés buscada: 3,693% anual

Este resultado se puede comprobar remplazando este valor en la ecuación (28) y verificando que se cumple la igualdad.

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

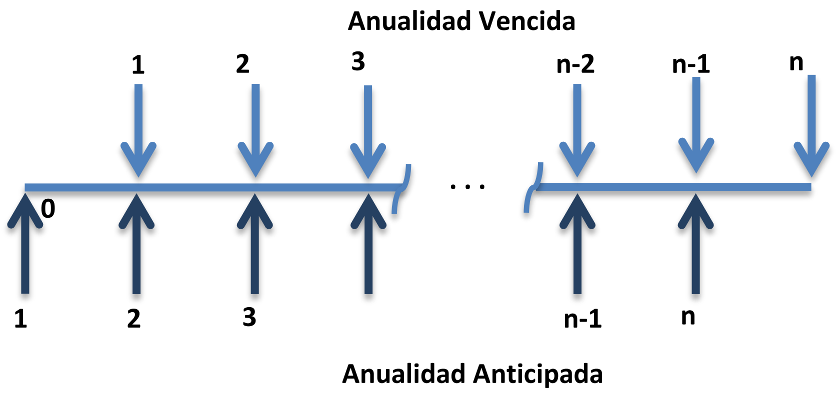
$$90´000.000 \cong 89´776.298,32$$

Respuesta
La compañía de pensiones reconoce una tasa efectiva anual de: 3,693% anual

2. Anualidades anticipadas

Hay operaciones financieras donde los pagos en vez de hacerse al final se realizan al comienzo de cada período; es el caso, por ejemplo, de los arrendamientos, ventas a plazos, y contratos de seguros, este tipo de operaciones reciben el nombre de anualidades anticipadas.

Gráfica No 3.3 – Comparación de Anualidades Vencidas y Anticipadas

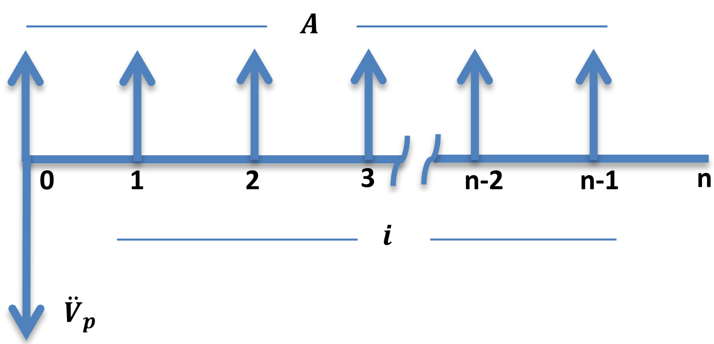


De esta forma, una anualidad anticipada es una sucesión de pagos o rentas que se efectúan o vencen al principio del período del pago. En la gráfica No 3.3 se comparan las anualidades vencidas y anticipadas

2.1 Valor presente de las anualidades anticipadas

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación financiera en la cual un préstamo $\ddot{V_p}$ se paga en cuotas iguales anticipadas A, a una tasa de interés efectiva por período i, durante n períodos, desde el período 0. La operación de anualidades anticipadas se ilustra en la gráfica No 3.4

Gráfica No 3.4 – Valor Presente de una Anualidad Anticipada



Analizando la operación se puede concluir que el valor presente de esta anualidad se puede determinar como la suma de A y el valor presente de una anualidad durante $n-1$ períodos.

$$\ddot{V_p} = A + A\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]$$

Factorizando A, se obtiene:

$$\ddot{V}_p = A\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]; para\ i \neq 0 \quad (38)$$

Ejemplos y Casos

3.12 – Valor Presente de una Anualidad Anticipada

El contrato de arriendo de una oficina fija pagos de $4´000.000 mensuales al principio de cada mes, durante de un año. Si se supone un interés del 2,5% efectivo anual; ¿Cuál será el pago único al inicio del contrato que cubre todo el arriendo?

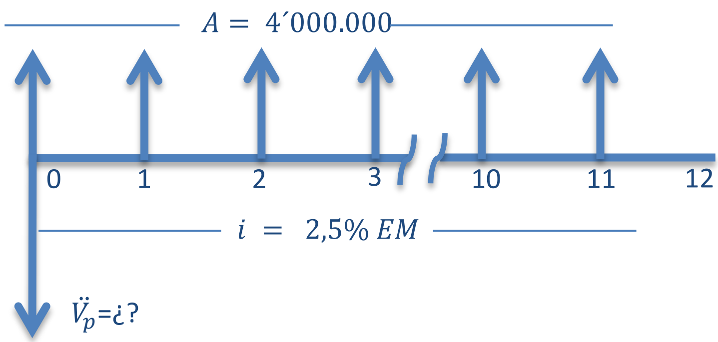
Solución

Parámetros

- Valor de los pagos anticipados: $4´000.000
- Numero de pagos: 12 mensuales
- Tasa de interés efectiva mensual: 2,5%

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

De la gráfica se puede determinar fácilmente que se trata de una anualidad anticipada, por lo cual se puede aplicar directamente la fórmula (38):

$$\ddot{V_p} = A\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]$$

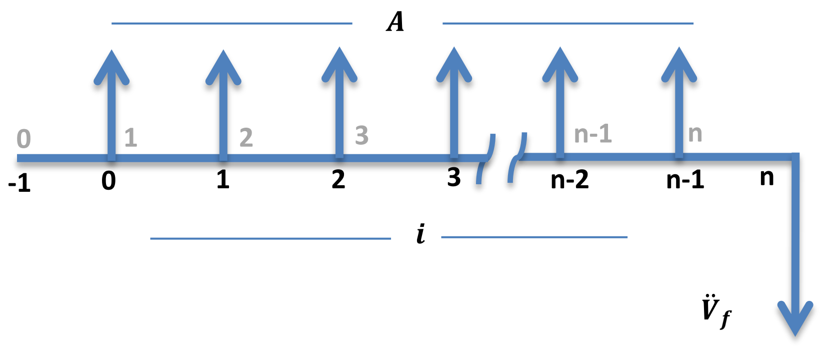
$$\ddot{V_p} = 4´000.000\left[1 + \frac{1-(1+0{,}025)^{-(12-1)}}{0{,}025}\right] = 42´056.834{,}85$$

Respuesta
El valor total del contrato al momento de la firma debe ser: $42´056.834,85

2.2 Valor futuro de las anualidades anticipadas

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación en la cual un ahorro V_f se paga en cuotas anticipadas iguales A, a una tasa de interés efectiva i, durante n períodos, desde el período 0. La operación de la anualidad anticipada se ilustra en la gráfica No 3.5

Gráfica No 3.5 – Valor Futuro de una Anualidad Anticipada



De la gráfica, analizando la operación, se puede concluir que el valor futuro de la anualidad anticipada es igual al equivalente en el período n , del valor futuro de la anualidad durante n períodos (desde -1 hasta $n-1$); es decir, aplicando la fórmula (34) el Valor futuro de la anualidad desde -1 hasta $n-1$, se puede expresar como:

$$\ddot{V_f} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]; para\ i \neq 0$$

Por su parte, el valor equivalente del anterior valor en el período n, se calcula aplicando la fórmula (13), con lo cual se obtiene:

$$\ddot{V_f} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i); para\ i \neq 0 \quad (39)$$

Ejemplos y Casos

3.13 – Valor Futuro de una Anualidad Anticipada

Una empresa arrienda una bodega por $5´000.000 mensuales, los cuales se pagan de manera anticipada. Si el empresario cada vez que recibe el arriendo lo coloca en un fondo de inversiones que promete una tasa de interés del 2% EM. ¿Cuánto podrá retirar al final del año?

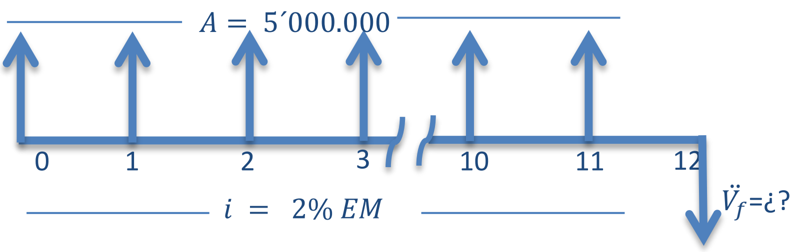
Solución

Parámetros

- Valor de los pagos anticipados: $5´000.000
- Numero de pagos: 12 mensuales
- Tasa de interés efectiva mensual: 2%

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

De la gráfica se puede determinar fácilmente que la operación es una anualidad anticipada, por lo cual para determinar el valor futuro se puede aplicar directamente la fórmula (39):

$$\ddot{V_f} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

$$\ddot{V_f} = 5´000.000\left[\frac{(1+0{,}02)^{12} - 1}{0{,}02}\right](1+0{,}02) = 68´401.657{,}61$$

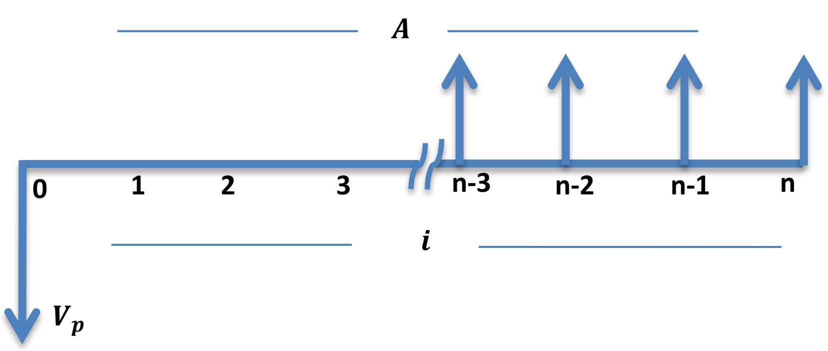
Respuesta

El valor ahorrado por el empresario al cabo del año es: $68´401.657,61

3. Anualidades Diferidas

Hasta el momento se ha considerado que el pago de las rentas se inicia después de acordar la operación; no obstante, existen transacciones donde los pagos o rentas se realizan después de haber pasado cierta cantidad de períodos, en estos casos la operación se denomina anualidad diferida. En la gráfica No 3.6 se ilustra este tipo de operaciones.

Gráfica No 3.6 – Anualidad Diferida



3.1 Valor presente de las anualidades diferidas

Analizando la operación en la gráfica se puede concluir que para hallar el valor presente en este caso, lo que se debe hacer es hallar el valor presente de la anualidad un período antes de iniciarse los pagos, utilizando para ello la fórmula (28), y a este valor se le halla el equivalente en el período 0 utilizando para ello la fórmula (15). La aplicación se ilustra en el siguiente ejemplo

Ejemplos y Casos

3.14 – VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD DIFERIDA

Una empresa acepta que un cliente le pague el valor de una compra realizada el día de hoy, en seis cuotas mensuales de $800.000 a partir del séptimo mes. Si la empresa aplica una tasa efectiva de interés del 2,5% EM, ¿Cuál será el valor de la venta?

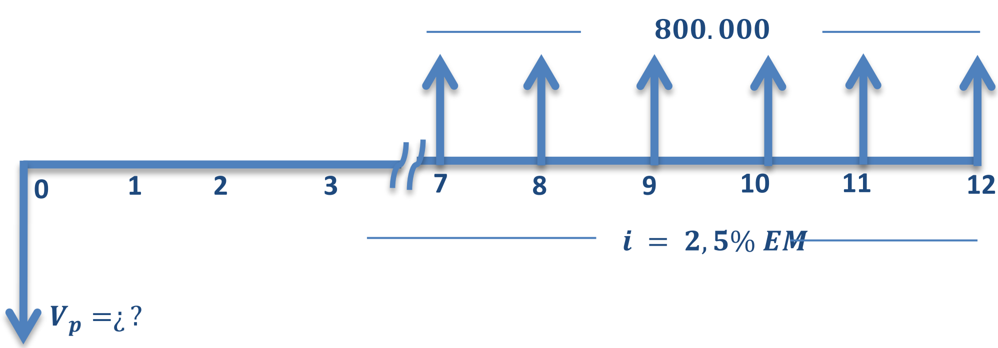
Solución

Parámetros

- Valor de los pagos: $800.000
- Numero de pagos: 6 mensuales, a partir del mes 7
- Tasa de interés efectiva mensual: 2,5%

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Para determinar el valor presente inicialmente calculamos el valor presente de la anualidad en el período 6, a la tasa de interés que aplica la empresa, utilizando para ello la ecuación (28):

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0$$

$$V_{p6} = 800.000\left[\frac{1-(1+0{,}025)^{-6}}{0{,}025}\right] = 4´406.500{,}29$$

El valor equivalente de este valor en el período 0, se calcula utilizando la fórmula (15)

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{4´406.500{,}28}{(1+0{,}025)^6} = 3´799.711{,}39$$

Respuesta

El valor de la venta realizada por la empresa es de: $3´799.711,39

3.2 Valor futuro de las anualidades diferidas

Para hallar el valor futuro de la anualidad diferida se halla el valor presente de la anualidad un período antes de iniciarse los pagos, utilizando para ello la fórmula (28), y para dicho valor se calcula el equivalente en el período n utilizando para ello la fórmula (13)

Ejemplos y Casos

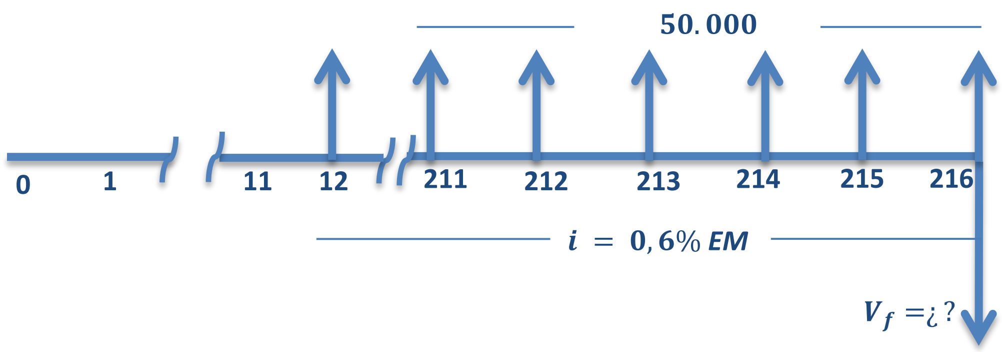
3.15 – VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD DIFERIDA

Si un padre inicia un ahorro mensual de \$50.000, cuando su hijo cumple 1 año, ¿Cuál será el valor ahorrado cuando el hijo cumpla 18 años, si el banco donde hace los ahorros reconoce una tasa de interés del 0,6% EM?

Solución
Parámetros

- Valor de los pagos: \$50.000
- Numero de pagos: 204 mensuales, a partir del mes 12
- Tasa de interés efectiva mensual: 0,6%

Representación Gráfica
En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos
Para determinar el valor futuro de la operación inicialmente se calcula el valor presente de la anualidad en el período 11, utilizando para ello la ecuación (28):

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0$$

$$V_{p11} = 50.000\left[\frac{1-(1+0{,}006)^{-205}}{0{,}006}\right] = 5´888.593{,}18$$

Para hallar el valor ahorrado, se calcula el equivalente de este valor en el período 216, para esto se utiliza la fórmula (13)

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

$$V_f = 5'888.593{,}18(1+0{,}006)^{205} = 20'072.321{,}24$$

Respuesta
El valor del ahorro cuando el hijo cumpla 18 años es: \$20´072.321,24

4. Anualidades perpetuas

Cuando el número de pagos de una anualidad es muy grande, o cuando no se conoce con exactitud la cantidad de pagos, se habla de anualidades perpetuas.

En este caso los modelos matemáticos se reducen a calcular valor presente, los pagos o rentas y la tasa de interés; el cálculo del valor futuro no aplica por tratarse de una anualidad perpetua.

Teniendo en cuenta la definición de anualidad perpetua y a partir del valor presente de la anualidad, fórmula (28), la fórmula para el valor presente de la anualidad se halla aplicando el límite cuando el número de pagos n tiende a infinito.

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0$$

Si n tiende a infinito, se obtiene:

$$V_p = \lim_{n\to\infty} \mathrm{A}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$V_p = \lim_{n\to\infty} A\,\frac{1-0}{i} = \frac{A}{i}$$

$$V_p = \frac{A}{i}\ (40)$$

Despejando el valor de i de la ecuación (40), se obtiene:

$$i = \frac{A}{V_p} \quad (41)$$

Despejando el valor de A de la ecuación (40), se obtiene:

$$A = V_p \times i \quad (42)$$

Ejemplos y Casos

3.16 – VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD PERPETUA

El consejo municipal de Santa Fe de Antioquia resuelve crear un fondo para proveer a perpetuidad las reparaciones del puente colonial de esa población que se estima tendrá un costo anual de $91 millones de pesos; doce años después de una reparación general. ¿Cuánto se deberá colocar en el fondo al momento de terminar la reparación general, si la tasa de interés de colocación del mercado es del 7% anual?

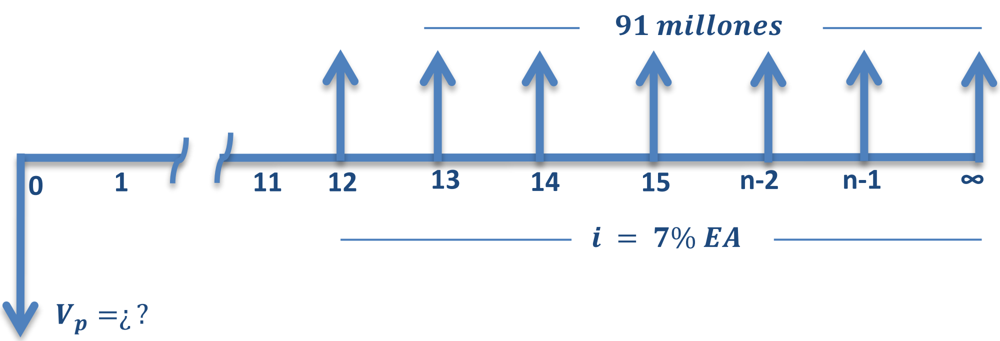
Solución

Parámetros

- Valor de los pagos: $91 millones
- Numero de pagos: infinitos, a partir del año 12
- Tasa de interés efectiva anual: 7%

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Lo que habrá que depositar en el fondo será igual al valor presente de la anualidad perpetua calculada en el año 11, para lo cual se utiliza la fórmula (40). Considerando que el depósito se debe realizar en el período 0, que es donde se supone se terminó la reparación general, se debe hallar el valor equivalente del período 11 en 0, para esto se utiliza la fórmula (15):

$$V_{p11} = \frac{A}{i}; para\ i \neq 0$$

$$V_{p11} = \frac{91´000.000}{0{,}07} = 1.300´000.000$$

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{1.300´000.000}{(1+0{,}07)^{11}} = 617´620.635{,}30$$

Respuesta

El municipio deberá proveer la suma de $617´620.635,30 en el fondo de inversión

5. Gradientes

Son operaciones financieras en las cuales se pacta cubrir la obligación en una serie de pagos periódicos crecientes o decrecientes que cumplen con las siguientes condiciones:

- Los pagos cumplen con una ley de formación
- Los pagos se hacen a iguales intervalos de tiempo
- A todos los pagos (rentas) se les aplica la misma tasa de interés
- El número de pagos y períodos pactados es igual

La ley de formación, la cual determina la serie de pagos, puede tener un sinnúmero de variantes; no obstante, en la vida cotidiana las más utilizadas son la aritmética y la geométrica; las cuales, a su vez, pueden ser de cuotas crecientes o decrecientes.

Como el lector ya lo habrá deducido, las anualidades son casos particulares de los gradientes donde el crecimiento es cero, lo que causa que los pagos sean todos iguales. De esta manera, igual que en el caso de las anualidades, los modelos matemáticos que se deducen para el cálculo y análisis de los gradientes tienen en cuenta las anteriores condiciones; por lo cual, al momento de aplicarse las fórmulas a situaciones particulares, se debe asegurar que se cumplan dichas condiciones.

5.1 Gradiente aritmético

Para el gradiente aritmético, la ley de formación indica que cada pago es igual al anterior, más una constante k; la cual puede ser positiva en cuyo caso las cuotas son crecientes, o negativa lo cual genera cuotas decrecientes. En el caso de que la constante sea cero, los pagos son iguales, es decir se tiene el caso de la anualidad.

5.1.1 Ley de formación

Considerando que los pagos en cada período serán diferentes; entonces, cada pago se identificara con un subíndice consecutivo. De acuerdo a la ley de formación cada pago será igual al anterior más una constante, así como se muestra a continuación:

$$A_1 = \boldsymbol{A} \quad Primer\ pago$$

$$A_2 = \boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{k} \quad Segundo\ pago$$

$$A_3 = A_2 \pm k = \boldsymbol{A \pm 2k} \quad Tercer\ pago$$

$$A_4 = A_3 \pm k = \boldsymbol{A \pm 3k} \quad Cuarto\ pago$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_n = \boldsymbol{A \pm (n-1)k} \quad Neavo\ pago$$

5.1.2 Valor presente de un gradiente aritmético

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación financiera en la cual un préstamo V_p se paga en una serie de cuotas formada a través de un gradiente aritmético, a una tasa de interés efectiva i, durante n períodos. La operación se ilustra en la gráfica No 3.7.

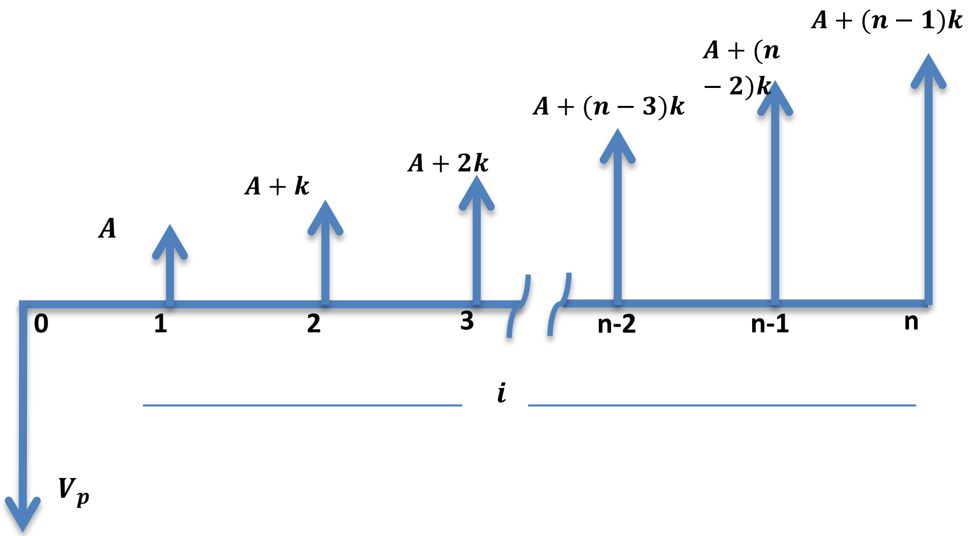
Para calcular el valor presente de la serie de pagos se utiliza la ecuación de valor con $ff = 0$ y la fórmula (15). El V_p será igual a la suma a los equivalentes en el período 0 de los valores futuros.

Para calcular el valor presente de la serie de pagos se utiliza la ecuación de valor con $ff = 0$ y la fórmula (15). El V_p será igual a la suma a los equivalentes en el período 0 de los valores futuros.

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A+k}{(1+i)^2} + \frac{A+2k}{(1+i)^3} + \dots + \frac{A+(n-3)k}{(1+i)^{n-2}} + \frac{A+(n-2)k}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A+(n-1)k}{(1+i)^n}$$

Gráfica No 3.7 – Valor Presente de un Gradiente Aritmético



Rescribiendo la ecuación, se obtiene:

$$V_p = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^n} + \frac{k}{(1+i)^2} + \frac{2k}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(n-1)k}{(1+i)^n}$$

De la anterior expresión se puede concluir que la primera parte, las fracciones con numerador A corresponde al valor presente de la anualidad y que las otras expresiones tienen como factor común K; de esta forma la ecuación se puede escribir como:

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + K\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right] \; (a)$$

Supongamos que F es el factor que multiplica a K, es decir:

$$F = \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right]$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por $(1 + \mathrm{i})$, entonces se obtiene:

$$F(1+i) = \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{(n-1)}{(1+i)^{(n-1)}}\right]$$

Restando de la ecuación $\mathrm{F}(1 + \mathrm{i})$, la expresión F, se obtiene:

$$F(1+i) - F = \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{(n-1)}{(1+i)^{(n-1)}}\right] - \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right]$$

$$Fi = \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{(n-1)}} + \frac{1}{(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}$$

$$Fi = \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{n}{(1+i)^n}$$

$$F = \frac{1}{i}\left[\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \ (b)$$

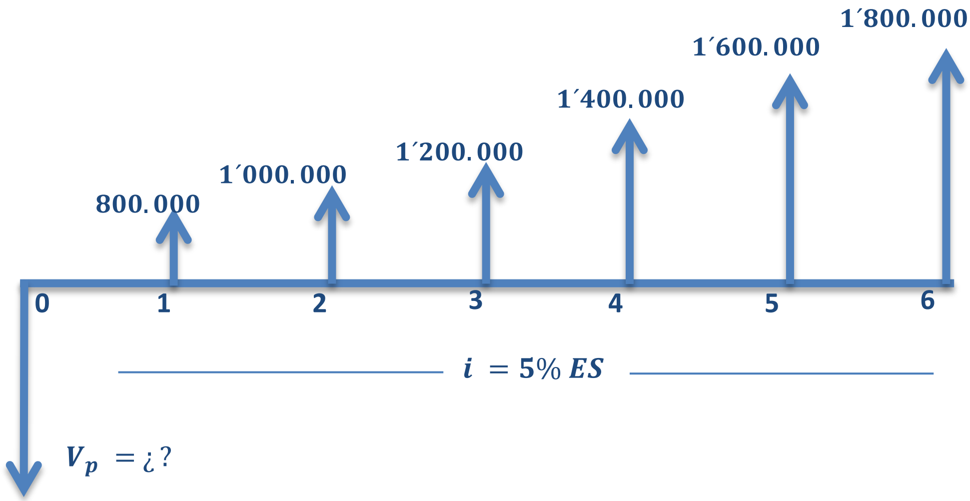
Remplazando (b) en (a), se obtiene:

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{K}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \ (43)$$

Ejemplos y Casos

3.17 – Valor Presente de un Gradiente Aritmético

Un padre de familia está dispuesto a realizar el ahorro que se muestra en la gráfica; de cuánto debería ser la inversión hoy para igualar dicho ahorro sí el banco reconoce una tasa de interés del 5% semestral.



Solución

Parámetros

- Valor del pago inicial: $A = \$800.000$
- Numero de pagos: 6 semestrales
- Tasa de interés efectiva: 5% ES
- El gradiente tiene un crecimiento de \$200.000, es decir $K = 200.000$

Cálculos

Para hallar el equivalente del ahorro se debe calcular el valor presente del gradiente, para lo cual se utiliza la fórmula (40):

$$V_p = A_1\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{K}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

$$V_p = 800.000\left[\frac{1-(1+0{,}05)^{-6}}{0{,}05}\right] + \frac{200.000}{0{,}05}\left[\frac{1-(1+0{,}05)^{-6}}{0{,}05} - \frac{6}{(1+0{,}05)^6}\right] = 6´454.152{,}40$$

Respuesta

El valor equivalente del ahorro al día de hoy es: \$6´454.152,40

5.1.3 Valor futuro de un gradiente aritmético

Para hallar el valor futuro (V_f) se remplaza el valor presente (V_p) del gradiente, fórmula (43), en la fórmula (13).

$$V_f = V_p(1+i)^n \quad (a)$$

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{K}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \; (b)$$

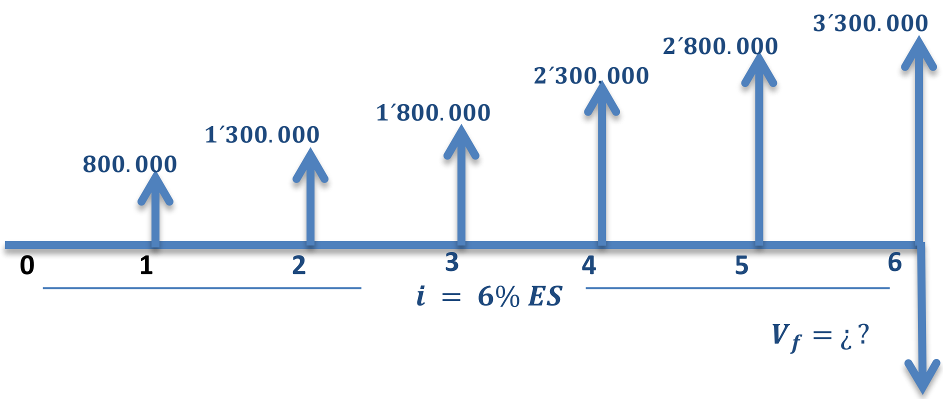
Remplazando (b) en (a), se obtiene:

$$V_f = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{K}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right] \; (44)$$

Ejemplos y Casos

3.18 – VALOR FUTURO DE UN GRADIENTE ARITMÉTICO

¿Qué valor recibirá una persona que realiza el ahorro semestral que se indica en la gráfica? El banco donde se realiza el ahorro reconoce una tasa de interés del 6% semestral.



Solución

Parámetros

- Valor del pago inicial: $\mathrm{A} = \$800.000$
- Numero de pagos: 6 semestrales
- Tasa de interés efectiva: 6% ES
- El gradiente tiene un crecimiento de \$500.000, es decir $\mathrm{K} = 500.000$

Cálculos

De la gráfica se puede determinar que se trata de un gradiente aritmético por lo cual para hallar el valor final del ahorro se debe calcular el valor futuro del gradiente, utilizando la tasa de interés reconocida para el ahorro, aplicando la fórmula (44):

$$V_f = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{K}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

$$V_f = 800.000\left[\frac{(1+0{,}06)^6 - 1}{0{,}06}\right] + \frac{500.000}{0{,}06}\left[\frac{(1+0{,}06)^6 - 1}{0{,}06} - 6\right] = 13´707.909{,}31$$

Respuesta

El valor del ahorro es: $\$13´707.909{,}31$

5.1.4 Valor presente de un gradiente aritmético perpetuo

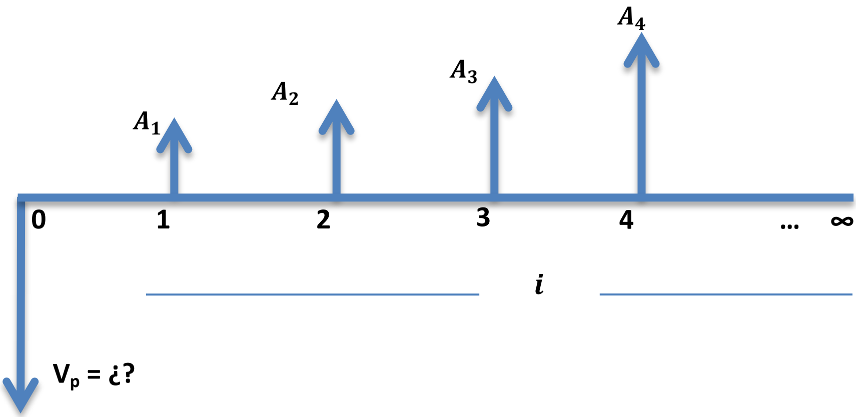
En las operaciones financieras en las cuales se pacta implícita o explícitamente cuotas periódicas crecientes o decrecientes del tipo aritmético y de manera indefinida; son operaciones donde solo es válido hablar del valor presente, el pago o renta y la tasa de interés, igual que en las anualidades.

Modelo Matemático

Teniendo en cuenta la definición de gradiente perpetuo, el modelo matemático se puede determinar hallando el límite del valor presente, ecuación (43), cuando n tiende a infinito, como se muestra a continuación:

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{K}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

Gráfica No 3.8 – Valor Presente de un Gradiente Aritmético Perpetuo



Aplicando el limite cuando n, tiende a infinito,

$$V_p = \lim_{n\to\infty}\left[A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{K}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\right]$$

$$V_p = \lim_{n\to\infty} A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \lim_{n\to\infty}\frac{K}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \lim_{n\to\infty}\frac{K}{i}\left[\frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

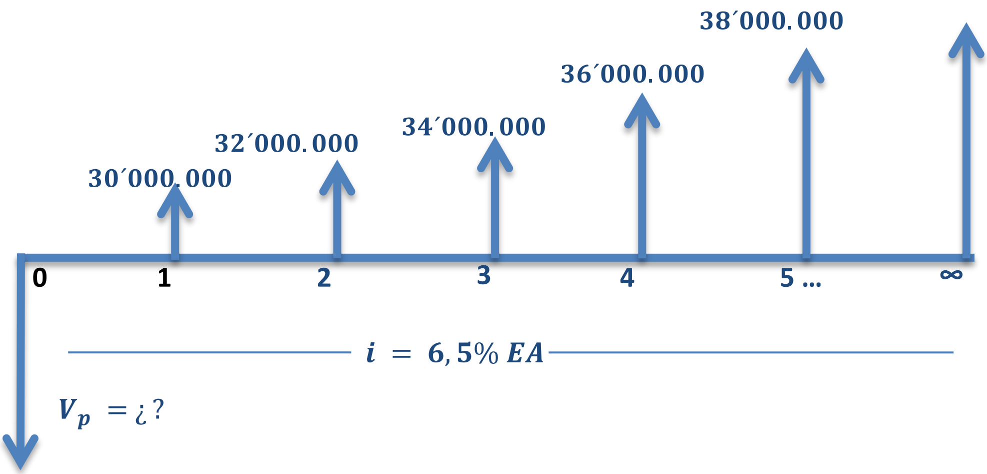
$$V_p = \frac{A}{i} + \frac{K}{i^2} - 0$$

$$V_p = \frac{A}{i} + \frac{K}{i^2}; para\ i \neq 0 \quad (45)$$

Ejemplos y Casos

3.19 – VALOR PRESENTE DE UN GRADIENTE ARITMÉTICO PERPETUO

¿Qué valor deberá tener ahorrada una persona un año antes de su retiro para recibir anualmente una pensión de 30 millones, la cual se incrementara 2 millones cada año? El fondo de pensiones reconoce una tasa de interés del 6,5% anual.



Solución

Parámetros

- Valor del pago inicial: $A = \$30´000.000$
- Numero de pagos: infinitos
- Tasa de interés efectiva: 6,5% EA
- El gradiente tiene un crecimiento de \$2´000.000, es decir $K = 2´000.000$

Cálculos

De la gráfica se determina que la operación es un gradiente aritmético perpetuo; por lo cual, para hallar el valor inicial que debe tener ahorrada la persona, se calcula el valor presente del gradiente infinito, utilizando la fórmula (45):

$$V_p = \frac{A}{i} + \frac{K}{i^2}$$

$$V_p = \frac{30´000.000}{0{,}065} + \frac{2´000.000}{(0{,}065)^2} = 934´911.242{,}60$$

Respuesta
El futuro pensionado deberá tener ahorrado: $934´911.242,60

5.2 Gradiente geométrico

Para la mayoría de operaciones donde se pactan pagos variables periódicos, el incremento se acuerda como un valor porcentual, como por ejemplo la inflación. En este caso, la ley de formación indica que cada pago es igual al anterior, multiplicado por un factor $(1+G)$; donde G corresponde al valor porcentual. Si G es positiva el gradiente dará cuotas crecientes, por el contrario sí G es negativo el gradiente será decreciente. Note que si gradiente es igual a 0, los pagos son iguales; es decir, se tiene una anualidad.

5.2.1 Ley de formación

Considerando que los pagos en cada período serán diferentes; entonces, cada pago se identificara con un subíndice consecutivo. De acuerdo a la ley de formación cada pago será igual al anterior multiplicado por un factor, así como se muestra a continuación:

$$A_1 = A \quad \mathit{Primer\ pago}$$

$$A_2 = \boldsymbol{A(1 \pm G)} \quad \mathit{Segundo\ pago}$$

$$A_3 = A(1 \pm G) = \boldsymbol{A(1 \pm G)^2} \quad \mathit{Tercer\ pago}$$

$$A_4 = A(1 \pm G) = \boldsymbol{A(1 \pm G)^3} \quad \mathit{Cuarto\ pago}$$

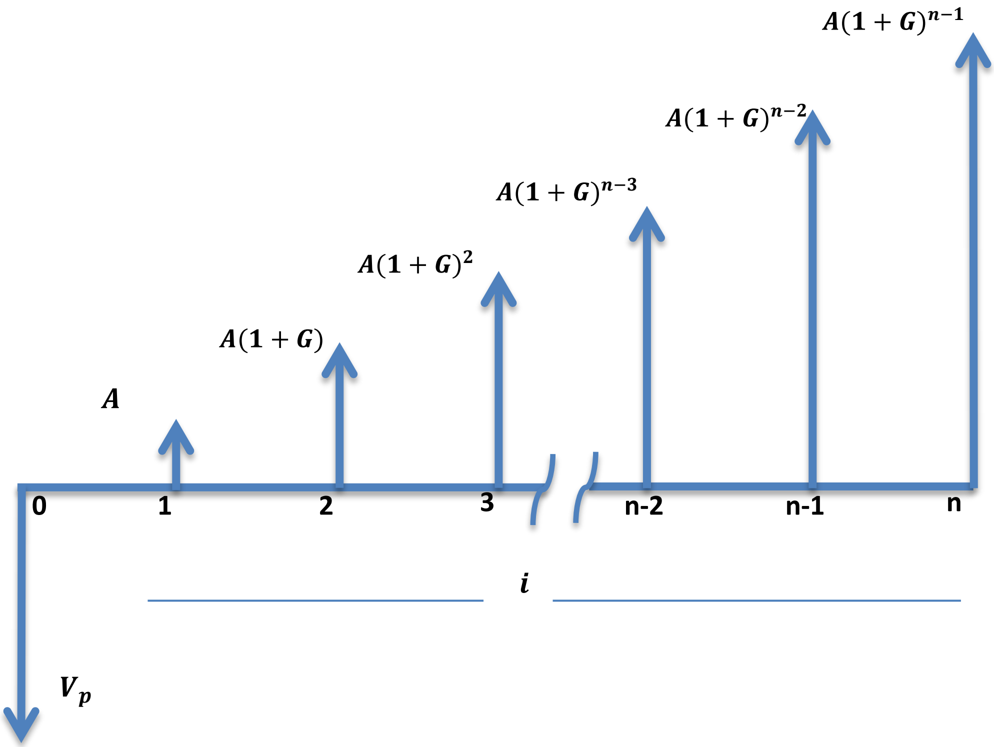
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$A_n = \boldsymbol{A(1 \pm G)^{n-1}} \quad \mathit{Navo\ pago}$$

5.2.2 Valor presente de un gradiente geométrico

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación crediticia en la cual se pacta un préstamo V_p, cuotas variables formadas a través de un gradiente geométrico, una tasa de interés efectiva i, y n períodos. La operación se ilustra en la gráfica No 3.9

Gráfica No 3.9 – Valor Presente de un Gradiente Geométrico



De la gráfica, para calcular el valor presente se aplica la ecuación de valor con $ff = 0$, utilizando para ello la fórmula (15).

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A(1+G)}{(1+i)^2} + \frac{A(1+G)^2}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A(1+G)^{n-3}}{(1+i)^{n-2}} + \frac{A(1+G)^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A(1+G)^{n-1}}{(1+i)^n} \ (a)$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{(1+G)}{(1+i)}$, se obtiene:

$$V_p \frac{(1+G)}{(1+i)} = \frac{A(1+G)}{(1+i)^2} + \frac{A(1+G)^2}{(1+i)^3} + \frac{A(1+G)^3}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{A(1+G)^n}{(1+i)^{n+1}} \ (b)$$

Restando (a) de (b), se obtiene:

$$V_p \frac{(1+G)}{(1+i)} - V_p = \frac{A(1+G)^n}{(1+i)^{n+1}} - \frac{A}{(1+i)^1}$$

$$V_p \left[\frac{(1+G)}{(1+i)} - 1\right] = \frac{A}{(1+i)} \left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right]$$

$$V_p \left[\frac{(G-i)}{(1+i)}\right] = \frac{A}{(1+i)} \left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right]$$

$$V_p = \frac{A}{(G-i)} \left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right] \quad si\ G \neq i \quad (c)$$

Si $G = i$ el valor presente es indeterminado; no obstante, esta situación se puede aclarar usando la regla de L´Hôpital y derivando la expresión con respecto a i; así como se muestra a continuación:

$$V_p = \lim_{i \to G} \frac{A}{(G-i)} \left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right]$$

$$V_p = \lim_{i \to G} \frac{A}{\frac{d}{di}(G-i)} \frac{d}{di}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right]$$

$$V_p = A \lim_{i \to G} n \left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}}\right]$$

$$V_p = \frac{nA_1}{(1+i)} \quad si\ G = i\ (d)$$

De (c) y (d) se puede concluir que:

$$V_p \left| \begin{array}{l} = \dfrac{A}{(G-i)}\left[\dfrac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right] \quad si\ G \neq i \\ \\ = \dfrac{nA}{(1+i)} \quad si\ G = i \end{array} \right. \qquad (46)$$

Ejemplos y Casos

3.20 – Valor Presente de un Gradiente Geométrico 1

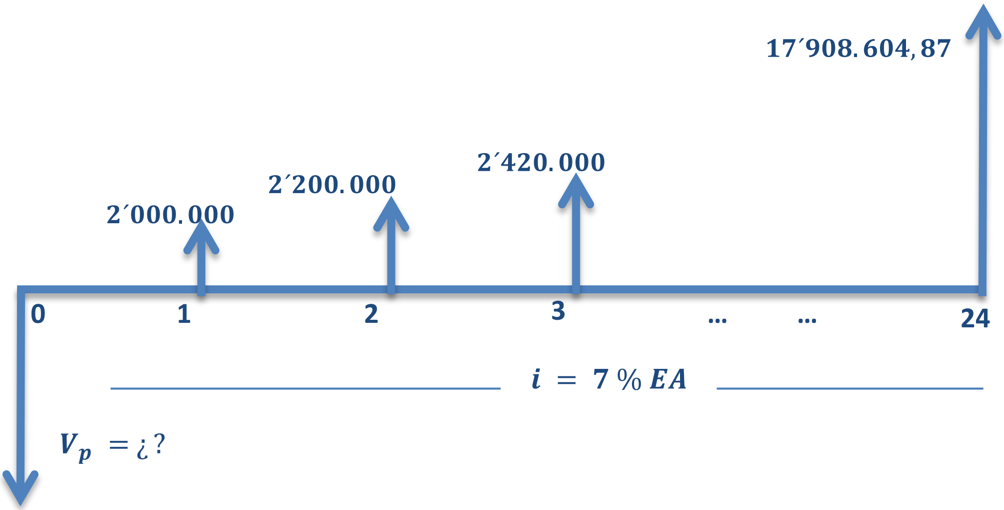
¿Cuál será el valor equivalente hoy de la pensión de un trabajador al cual se le harán 24 pagos anuales iniciando en 2´000.000, con incrementos del 10% anual? Suponga que se reconoce una tasa de interés del 7% EA.

Solución

Parámetros

- Valor del pago inicial: $A = \$2'000.000$
- Numero de pagos: 24 anuales
- Tasa de interés efectiva anual: 7% EA
- El gradiente tiene un crecimiento del 10% anual, es decir $G = 10\%$

Representación Gráfica



Cálculos

Considerando que se trata de un gradiente geométrico con un crecimiento del 10% para hallar el valor presente de la pensión equivalente, se aplica la fórmula (46) cuando $G \neq i$. Además, se debe tener en cuenta la tasa de interés que reconoce la entidad 7% anual.

$$V_p = \frac{A}{(G-i)}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right]$$

$$V_p = \frac{2'000.000}{(0{,}1-0{,}07)}\left[\frac{(1+0{,}1)^{24}}{(1+0{,}07)^{24}} - 1\right] = 62'789.433{,}63$$

Respuesta

El valor presente de la pensión es: $62´789.433,63

3.21 – VALOR PRESENTE DE UN GRADIENTE GEOMÉTRICO 2

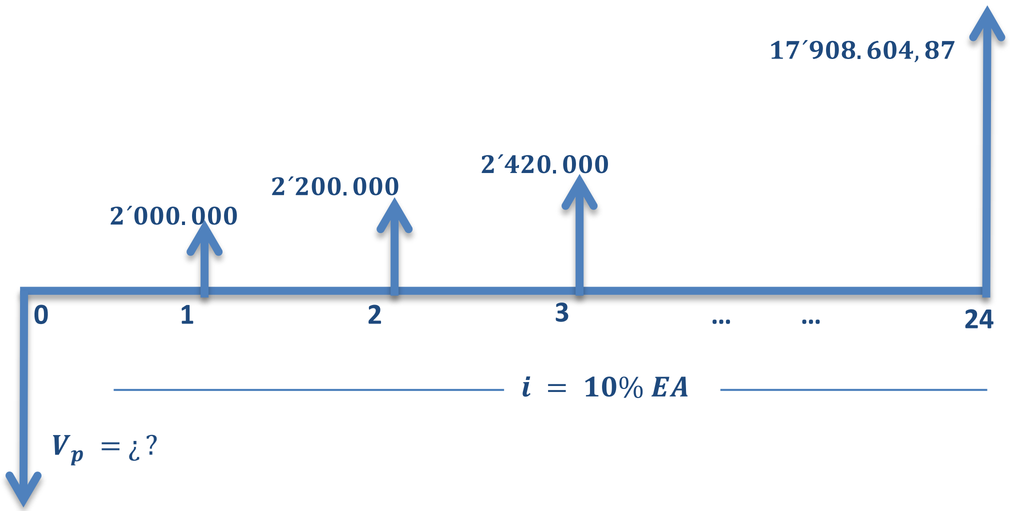
¿Cuál será el valor equivalente hoy de la pensión de un trabajador al cual se le harán 24 pagos anuales iniciando en 2´000.000 y con incrementos del 10% anual? Suponga que se reconoce una tasa de interés del 10% EA.

Solución

Parámetros

- Valor del pago inicial: $A = \$2´000.000$
- Numero de pagos: 24 anuales
- Tasa de interés efectiva anual: 10% EA
- El gradiente tiene un crecimiento del 10% anual, es decir $G = 10\%$

Representación Gráfica



Cálculos

Considerando que se trata de un gradiente geométrico donde el valor porcentual incremental es igual a la tasa de interés, para hallar el valor inicial de la pensión se aplica la fórmula (46) cuando $G = i$.

$$V_p = \frac{nA}{(1+i)} \quad si\ G = i$$

$$V_p = = \frac{24 \times 2´000.000}{(1+0{,}1)} = 43´636.363{,}64$$

Respuesta
El valor presente equivalente de la pensión es: $43´636.363,64

5.2.3 Valor futuro de un gradiente geométrico

Para hallar el valor futuro (V_f) del gradiente geométrico, basta remplazar el valor presente (V_p) del gradiente, fórmula (46), en la fórmula (13).

$$V_p = \frac{A}{(G-i)}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right] \quad (a)$$

$$V_f = V_p(1+i)^n \quad (b)$$

Para $G \neq i$, si se remplaza el valor de V_p, ecuación (a), en la ecuación (b), se obtiene:

$$V_f = \frac{A_1}{(G-i)}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right](1+i)^n$$

$$V_f = \frac{A_1}{(G-i)}[(1+G)^n - (1+i)^n]; \quad si\ G \neq i \ \ (d)$$

De otro lado, para $G = i$, si se remplaza el valor de V_p, ecuación (c), en la ecuación (b), se obtiene:

$$V_p = \frac{nA}{(1+i)} \quad (c)$$

$$V_f = \frac{nA_1}{(1+i)}(1+i)^n$$

$$V_f = \frac{nA_1}{(1+i)^{-n+1}}; si \ \ G = i \quad (e)$$

De (d) y (e), se determina el valor futuro de del gradiente geométrico, como:

$$V_f \left| \begin{array}{l} = \dfrac{A_1}{(G-i)}\left[(1+G)^n - (1+i)^n\right]; \quad si\, G \neq i \\ \\ \qquad\qquad = \dfrac{nA_1}{(1+i)^{-n+1}}; \quad si \ \ G = i \end{array} \right. \qquad (47)$$

Ejemplos y Casos

3.22 – VALOR FUTURO DE UN GRADIENTE GEOMÉTRICO 1

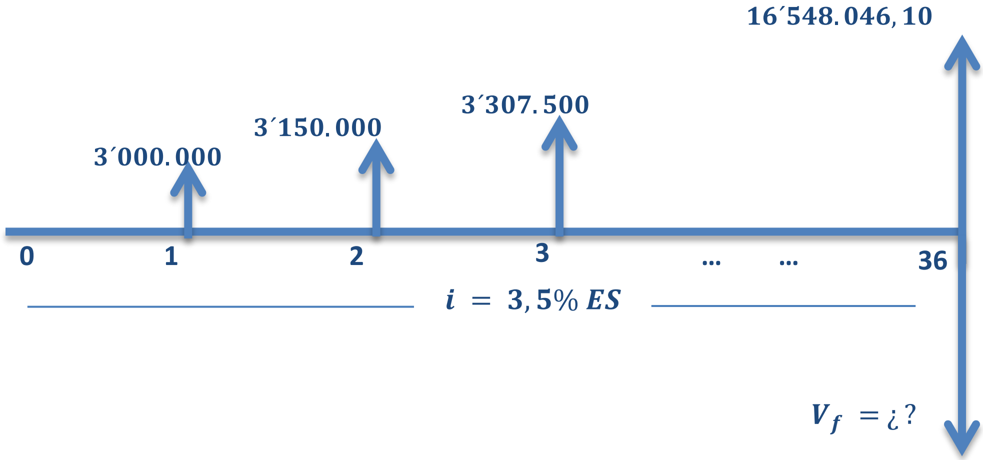
¿Cuál será el valor final de un ahorro que se realiza durante 36 semestres iniciando con un pago de 3´000.000 e incrementos del 4%? Suponga que se reconoce una tasa de interés del 3,5% ES.

Solución

Parámetros

- Valor del pago inicial: $\mathrm{A} = \$3´000.000$
- Numero de pagos: 36 semestrales
- Tasa de interés efectiva: 3,5% ES
- El gradiente tiene un crecimiento del 4% anual, es decir $\mathrm{G} = 4\%$

Representación Gráfica



Cálculos
Considerando que se trata de un gradiente geométrico con $G \neq i$ para hallar el valor final del ahorro se aplica la fórmula (47), como sigue:

$$V_f = \frac{A}{(G-i)}[(1+G)^n - (1+i)^n]; \quad si\ G \neq i$$

$$V_f = \frac{3´000.000}{(0{,}04-0{,}035)}[(1+0{,}04)^{36} - (1+0{,}035)^{36}]; = 392´199.865{,}50$$

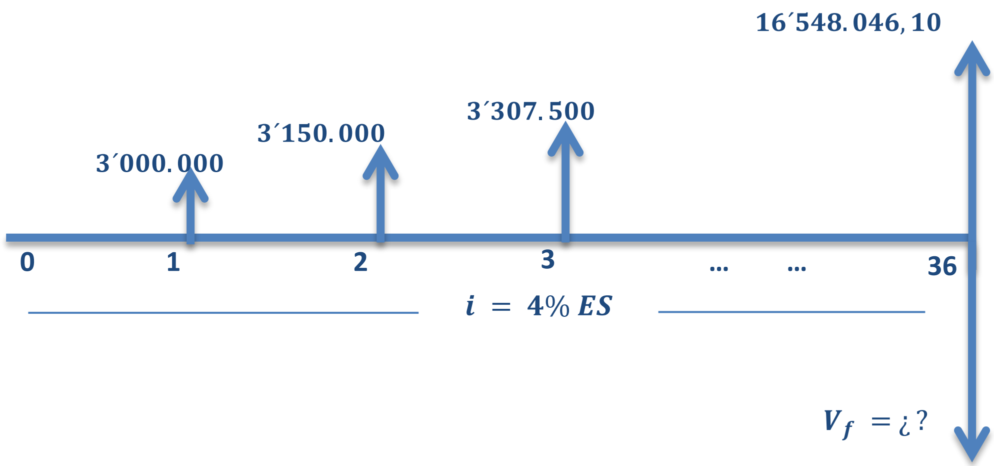
Respuesta
El valor del ahorro es: $392´199.865,50

3.23 – Valor Futuro de un Gradiente Geométrico 2

¿Cuál será el valor final de un ahorro que se realiza durante 36 semestres iniciando con un pago de 3´000.000 e incrementos del 4%? Suponga que se reconoce una tasa de interés del 4% ES.

Solución
Parámetros
- Valor del pago inicial: $A = \$3´000.000$
- Numero de pagos: 36 semestrales
- Tasa de interés efectiva: 4% ES
- El gradiente tiene un crecimiento del 4% anual, es decir $G = 4\%$

Representación Gráfica



Cálculos

Considerando que se trata de un gradiente geométrico con $G = i$ para hallar el valor final del ahorro se aplica la fórmula (47), como sigue:

$$V_f = \frac{nA}{(1+i)^{-n+1}}; \quad si \;\; G = i$$

$$V_f = \frac{36 \times 3´000.000}{(1+0{,}04)^{-36+1}} = 426´177.611{,}40$$

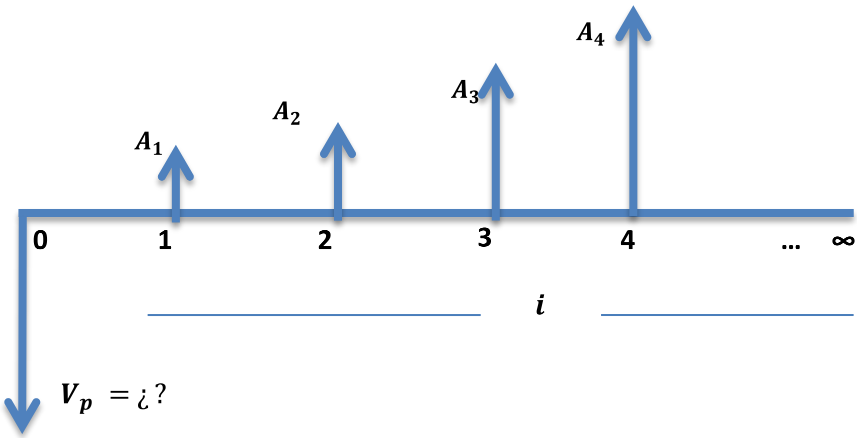
Respuesta

El valor del ahorro es: $426´177.611,40

5.2.4 Valor presente de un gradiente geométrico perpetuo

En las operaciones financieras en las cuales se pacta implícita o explícitamente cuotas periódicas crecientes o decrecientes del tipo geométrico de manera indefinida; son operaciones donde solo es válido hablar del valor presente, pagos o rentas y tasa de interés, igual que en las anualidades y gradientes aritméticos. La situación se ilustra en la gráfica No 3.10

Gráfica No 3.10 – Valor Presente de un Gradiente Geométrico Perpetuo



Modelo Matemático

De la ecuación (46) para cuando $G \neq i$, se obtiene:

$$V_p = \frac{A}{(G-i)}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right] \quad si\ G \neq i$$

Aplicando el límite cuando n tiende a infinito, se encuentra que:

$$V_p = \lim_{n\to\infty} \frac{A}{(G-i)}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right]$$

$$V_p = \frac{A}{(G-i)} \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{(1+G)}{(1+i)}\right)^n - 1\right] \quad (a)$$

De la ecuación (a), se concluye lo siguiente:

Si $G > i$ entonces la expresión $\left(\frac{(1+G)}{(1+i)}\right)^n$ es mayor que 1, y no tendrá límite cuando n tiende a ∞.

Si $G < i$ entonces la expresión $\left(\frac{(1+G)}{(1+i)}\right)^n$ es menor que 1, y por consiguiente el límite será igual $a = 0$, cuando n tiende a ∞. Por lo cual la ecuación (a), se puede escribir, como:

$$V_p = \frac{A}{(G-i)}[0 - 1] = \frac{A}{(i-G)} \quad (b)$$

De la ecuación (46) para cuando $G = i$, se obtiene:

$$V_p = \lim_{n\to\infty} \frac{nA}{(1+i)} \quad si\ G = i \quad (c)$$

En este caso, no hay límite

De (b) y (c), se puede escribir el valor presente del gradiente geométrico perpetuo, como:

$$V_p \left| \begin{array}{l} = \dfrac{A_1}{(i-G)}; \quad si\ G < i \\ \\ = \infty; \quad si\ G \geq i \end{array} \right. \qquad (48)$$

Ejemplos y Casos

3.24 – Valor Presente de un Gradiente Geométrico Perpetuo

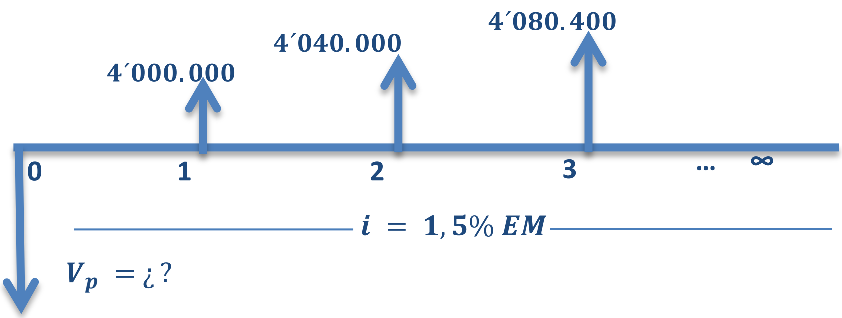
¿Cuál será el valor de la prima de un seguro que pretende realizar pagos de forma indefinida, iniciando en 4´000.000 con incrementos mensuales del 1%? Suponga que se reconoce una tasa de interés del 1,5% EM.

Solución

Parámetros

- Valor del pago inicial: $A = \$4´000.000$
- Numero de pagos: infinitos
- Tasa de interés efectiva mensual: 1,5% EM
- El gradiente tiene un crecimiento del 1% mensual, es decir $\text{G} = 1\%$

Representación Gráfica



Cálculos

Considerando que se trata de un gradiente geométrico perpetuo donde $G < i$ para hallar el valor de la prima del seguro se debe calcular el valor presente de la serie de pagos infinita utilizando la fórmula (48).

$$V_p = \frac{A}{(i - G)};\quad si\ G < i$$

$$V_p = \frac{4´000.000}{(0{,}015 - 0{,}01)} = 800´000.000{,}00$$

Respuesta

El valor de la prima es: $\$800´000.000{,}00$

Amortización y Capitalización

UNIDAD 4: AMORTIZACIÓN Y CAPITALIZACIÓN

OBJETIVO

Al finalizar la unidad los estudiantes estarán en capacidad de identificar y elaborar las tablas de los tipos más representativos de amortización de una obligación financiera; así como las formas más comunes de capitalización

CONTENIDO

Introducción
1. *Caracterización de un sistema de amortización*
2. *Sistemas de amortización*
3. *Sistemas de capitalización*

Introducción

Los acuerdos de crédito deben, además del plazo, y la tasa de interés, incluir la forma como se va a cancelar la obligación a través de una o varias cuotas, o pagos periódicos iguales o diferentes. Para la forma de pago se aplican diferentes sistemas de amortización en el mercado financiero. Igualmente para las operaciones de capitalización, a través de los cuales se ahorra un capital mediante pagos periódicos iguales o diferentes, también existen diferentes formas.

Aunque los tipos de amortización pueden ser diversos, todos ellos corresponden o son variantes de los sistemas alemán, francés y americano. El alemán es conocido como amortización a través de pagos con abonos iguales a capital; el francés como amortización con cuotas iguales y el americano como pago único de capital con abonos periódicos de interés. Igual que para la amortización, para la capitalización se pueden llegar a pactar diferentes formas de ahorro con cuotas iguales o gradientes crecientes o decrecientes.

Independiente de que sea una amortización o una capitalización y cualquiera sea la forma que se pacte es importante para deudor y acreedor conocer en forma detallada el comportamiento de los pagos, el saldo de capital y los intereses que se causan a lo largo del tiempo pactado para cubrir la deuda o reunir el capital; las tablas de amortización y capitalización son herramientas muy útiles para el gerente ya que le permiten hacer seguimiento a los compromisos financieros y las operaciones de inversión.

En esta unidad de aprendizaje se estudia la construcción de las tablas de amortización y capitalización teniendo como base los sistemas alemán, francés y americano y las operaciones de anualidades y gradientes desarrolladas en la unidad anterior.

1. Características de un sistema de amortización

Para definir las características de un sistema de amortización se considera un acuerdo crediticio donde un capital V_p es pagado en n cuotas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, no necesariamente iguales, pagadas en períodos equidistantes. La unidad de tiempo es el lapso entre dos cuotas consecutivas (t); el momento en que se concreta el préstamo o inicio de la operación se supone en $t = 0$; y la k-ésima cuota en $t = k$; además, i es la tasa de interés efectiva en el período unitario.

Bajo las anteriores condiciones cada pago o renta A_k se compone de dos partes:

$$A_k = V_k + I_k$$

V_k es la parte de la cuota que corresponde a la amortización de capital e I_k la parte de la cuota que corresponde al pago del interés. La suma de las n cuotas de amortización de capital corresponde al valor del préstamo; es decir:

$$V_p = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

El interés del período k se calcula como el interés sobre las cuotas de amortización de capital, aun no pagadas; es decir:

$$I_k = i(V_k + V_{k+1} + \cdots + V_n)$$

De otro lado, al momento de haber pagado la k-ésima cuota, el saldo del préstamo es:

$$V_p - (V_1 + V_2 + \cdots + V_k) = (V_{k+1} + V_{k+2} + \cdots + V_n);\ para\ k < n$$

Lo cual debe coincidir con el valor en k de las cuotas que restan pagar:

$$V_k = A_{k+1}\frac{1}{(1+i)} + A_{k+2}\frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + A_n\frac{1}{(1+i)^{n-k}}$$

La renta finaliza al momento del pago de la última cuota de amortización de capital, ya que se completa el pago del préstamo V_p y por tanto no hay intereses por cobrar.

Con las anteriores consideraciones se puede formular la tabla de amortización general; la cual se compone de 5 columnas: la primera indica el período $(\boldsymbol{k})$; en la segunda el pago del período $(\boldsymbol{A_k})$; la tercera muestra el interés causado en el período $(\boldsymbol{I_k})$; la cuarta la cuota de amortización de capital $(\boldsymbol{V_k})$, y finalmente en la quinta columna se presenta el saldo de capital. En la tabla No 4.1, se ilustra la tabla de amortización.

Tabla No 4.1 – Tabla de Amortización

Período $(\boldsymbol{k})$	**Pago Mensual** $(\boldsymbol{A_k})$	**Interés** $(\boldsymbol{I_k})$	**Cuota de capital** $(\boldsymbol{V_k})$	**Saldo de Capital**
0	0	0	0	V_{p0}
1	$A_1 = I_1 + V_{k1}$	$I_1 = V_{p0} \times i$	V_{k1}	$V_{p1} = V_{p0} - V_{k1}$
2	$A_2 = I_2 + V_{k2}$	$I_2 = V_{p1} \times i$	V_{k2}	$V_{p2} = V_{p1} - V_{k2}$
…	…	…	…	…
n-1	$A_{n-1} = I_{n-1} + V_{k(n-1)}$	$I_{n-1} = V_{p(n-2)} \times i$	$V_{k(n-1)}$	$V_{p(n-1)} = V_{p(n-2)} - V_{k(n-1)}$
n	$A_n = I_n + V_{kn}$	$I_n = V_{p(n-1)} \times i$	$V_{k(n)}$	$V_{p(n)} = V_{p(n-1)} - V_{k(n)}$

Ejemplos y Casos

4.1 – Tabla de Amortización

Calcule los pagos y elabore la tabla de amortización para un préstamo de $1´000.000 que se amortiza en tres cuotas mensuales, realizando las siguientes amortizaciones de capital: $300.000, $300.000 y $400.000 respectivamente. La tasa de interés efectiva mensual aplicada es del 2%.

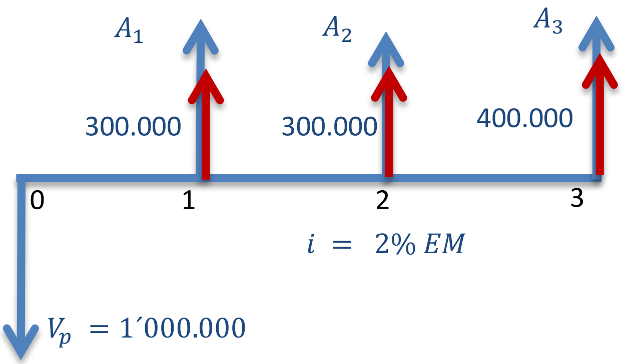
Solución

Parámetros

- Valor del préstamo (V_p): $1´000.000
- Numero de pagos: 3
- Pagos de amortización de capital: $300.000, $300.000 y $400.000
- Tasa de interés: 2% EM

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar los pagos se fórmula la tabla de amortización del préstamo como sigue:

Período (k)	Pago Mensual (A_k)	Interés (I_k)	Cuota de capital (V_k)	Saldo de Capital
0	0	0	0	$\$1´000.000$
1	$= 300.000 + 20.000$ $= \mathbf{\$320.000}$	$1´000.000 \times 0{,}02$ $= \mathbf{\$20.000}$	$\mathbf{\$300.000}$	$= 1´000.000 - 300.000$ $= \mathbf{\$700.000}$
2	$= 300.000 + 14.000$ $= \mathbf{\$314.000}$	$700.000 \times 0{,}02$ $= \mathbf{\$14.000}$	$\mathbf{\$300.000}$	$= 700.000 - 300.000$ $= \mathbf{\$400.000}$
3	$= 400.000 + 14.000$ $= \mathbf{\$408.000}$	$400.000 \times 0{,}02$ $= \mathbf{\$8.000}$	$\mathbf{\$400.000}$	$= 400.000 - 400.000$ $= \mathbf{\$0}$

Para determinar el pago mensual (A_k) de cada período se calcula inicialmente el interés causado (I_k), el cual se determina sobre el saldo del capital anterior. Con el interés calculado, el valor del pago se determina como la suma de este con la cuota de capital. El saldo de capital, por su parte, se calcula como el saldo anterior menos la cuota de capital pagada.

De esta forma, en la tabla de amortización para el período 2, se debe leer: la cuota 2, paga $300.000 de amortización de capital más $14.000 de interés; por lo que la cuota es de $314.000. El saldo de capital adeudado luego de pagar la cuota resulta de $400.000.

De otro lado, se puede determinar el valor actual de la deuda para cada período, como el valor presente de cada una de las cuotas, pendientes, así como se indica:

$$V_0 = 320.000 \times \frac{1}{(1+0{,}02)^1} + 314.000 \times \frac{1}{(1+0{,}02)^2} + 408.000 \times \frac{1}{(1+0{,}02)^3} = \mathbf{1´000.000}$$

$$V_1 = 314.000 \times \frac{1}{(1+0{,}02)^1} + 408.000 \times \frac{1}{(1+0{,}02)^2} = \mathbf{700.000}$$

$$V_2 = 408.000 \times \frac{1}{(1+0{,}02)^1} = \mathbf{400.000}$$

A continuación se estudian los sistemas de amortización más utilizados en el mercado financiero, los cuales como se dijo anteriormente tienen como base los sistemas alemán, francés y americano.

2. Sistemas de amortización

2.1 Amortización mediante abonos iguales de capital

Este sistema de amortización se configura cuando en la operación financiera se pacta el pago mediante cuotas iguales de capital más intereses. En este caso, la cuota de capital se calcula como el valor del préstamo dividido por el número de períodos acordados para el pago.

$$V_k = \frac{V_p}{n} \ (49)$$

El interés (I_k) en cada período se calcula sobre el saldo de capital, considerando la tasa de interés efectiva del período; el saldo de capital se determina como el saldo del período anterior menos la cuota pagada de capital y el pago (A_k) como la suma de la cuota de capital V_k más el interés período (I_k)

Ejemplos y Casos

4.2 – TABLA DE AMORTIZACIÓN – ABONOS IGUALES DE CAPITAL

Una pequeña empresa acuerda con el Banco Medellín un préstamo por $100 millones para ser cancelado en 20 pagos trimestrales, con cuotas de amortización de capital iguales. El banco aplica una tasa de interés del 20% N_t. Elaborar la tabla de amortización.

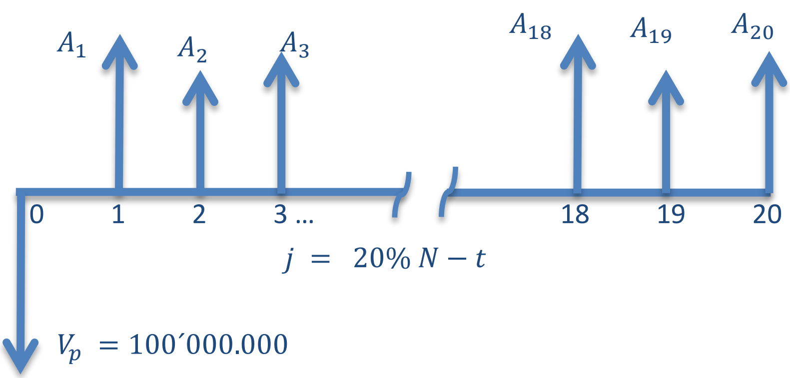
Solución

Parámetros

- Valor del préstamo (V_p): $100´000.000
- Numero de pagos: 20
- Períodos: Trimestrales
- Tasa de interés: 20% N_t

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Para elaborar la tabla de amortización se debe inicialmente determinar la tasa de interés efectiva trimestral a partir de la tasa nominal que aplica el banco, utilizando la fórmula (18)

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}20}{4} = 0{,}05 = 5\%\ ET$$

Adicionalmente, se debe calcular el valor de la cuota de amortización de capital a partir de la fórmula (49),

$$V_k = \frac{V_p}{n}$$

$$V_k = \frac{100´000.000}{20} = 5´000.000$$

Considerando la tasa de interés y la cuota constante de amortización de capital se puede elaborar la tabla de amortización, como sigue:

Período (k)	**Pago Mensual (A_k)**	**Interés (I_k)**	**Cuota de capital (V_k)**	**Saldo de Capital**
0	0	0	0	100.000.000
1	10.000.000	5.000.000	5.000.000	95.000.000
2	9.750.000	4.750.000	5.000.000	90.000.000
3	9.500.000	4.500.000	5.000.000	85.000.000
4	9.250.000	4.250.000	5.000.000	80.000.000
5	9.000.000	4.000.000	5.000.000	75.000.000
6	8.750.000	3.750.000	5.000.000	70.000.000
7	8.500.000	3.500.000	5.000.000	65.000.000
8	8.250.000	3.250.000	5.000.000	60.000.000
9	8.000.000	3.000.000	5.000.000	55.000.000
10	7.750.000	2.750.000	5.000.000	50.000.000
11	7.500.000	2.500.000	5.000.000	45.000.000
12	7.250.000	2.250.000	5.000.000	40.000.000

13	7.000.000	2.000.000	5.000.000	35.000.000
14	6.750.000	1.750.000	5.000.000	30.000.000
15	6.500.000	1.500.000	5.000.000	25.000.000
16	6.250.000	1.250.000	5.000.000	20.000.000
17	6.000.000	1.000.000	5.000.000	15.000.000
18	5.750.000	750.000	5.000.000	10.000.000
19	5.500.000	500.000	5.000.000	5.000.000
20	5.250.000	250.000	5.000.000	-

2.2 Amortización con Cuotas Iguales

Bajo este sistema de amortización el pago del préstamo se pacta en cuotas iguales. La cuota (A) se calcula utilizando la fórmula (30), teniendo en cuenta el valor del préstamo (V_p), la tasa de interés efectiva (i), y el número de períodos (n) acordados.

$$A = V_p \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

El interés (I_k) de cada período se calcula sobre los saldos de capital, considerando el interés efectivo del período; el saldo de capital se determina como el saldo del período anterior menos la cuota pagada de capital; finalmente el valor de la cuota de amortización de capital (V_k) se calcula como la diferencia entre la cuota pagada (A) y el interés del período (I_k).

Ejemplos y Casos

4.3 – TABLA DE AMORTIZACIÓN – CUOTAS IGUALES

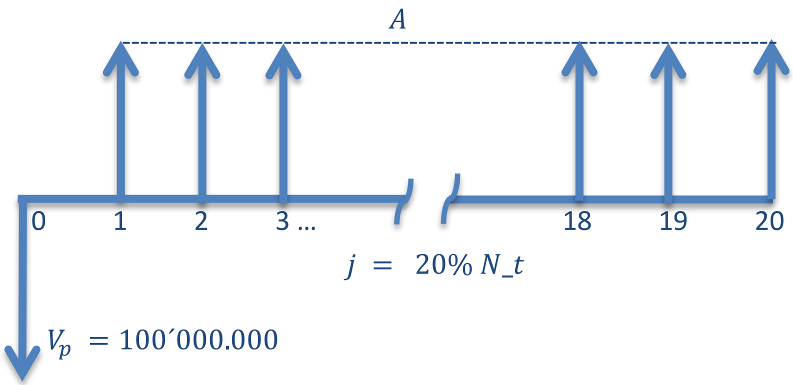
Una pequeña empresa acuerda con el Banco Medellín un préstamo por $100 millones para ser cancelado en 20 cuotas trimestrales iguales. El banco aplica una tasa de interés del 20% N_t. Elaborar la tabla de amortización.

Solución
Parámetros

- Valor del préstamo (V_p): $100´000.000
- Numero de pagos: 20
- Períodos: Trimestrales
- Tasa de interés: 20% N_t

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Para elaborar la tabla de amortización se debe inicialmente calcular la tasa de interés efectiva trimestral a partir de la tasa nominal utilizando la fórmula (18)

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0,20}{4} = 0,05 = 5\% \; ET$$

Adicionalmente, se debe calcular el valor de la cuota o pago trimestral a partir de la fórmula (30),

$$A = V_p \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$A = 100´000.000 \left[\frac{0,05}{1-(1+0,05)^{-20}}\right] = 8´024.258,72$$

Considerando los demás parámetros y la cuota constante de amortización de capital se puede elaborar la tabla de amortización, como sigue:

Período (k)	Pago Mensual (A_k)	Interés (I_k)	Cuota de capital (V_k)	Saldo de Capital
0	0	0	0	100.000.000
1	8.024.258,72	5.000.000	3.024.259	96.975.741
2	8.024.258,72	4.848.787	3.175.472	93.800.270
3	8.024.258,72	4.690.013	3.334.245	90.466.024
4	8.024.258,72	4.523.301	3.500.958	86.965.067
5	8.024.258,72	4.348.253	3.676.005	83.289.062
6	8.024.258,72	4.164.453	3.859.806	79.429.256
7	8.024.258,72	3.971.463	4.052.796	75.376.460
8	8.024.258,72	3.768.823	4.255.436	71.121.024
9	8.024.258,72	3.556.051	4.468.208	66.652.817
10	8.024.258,72	3.332.641	4.691.618	61.961.199
11	8.024.258,72	3.098.060	4.926.199	57.035.000
12	8.024.258,72	2.851.750	5.172.509	51.862.491
13	8.024.258,72	2.593.125	5.431.134	46.431.357
14	8.024.258,72	2.321.568	5.702.691	40.728.666
15	8.024.258,72	2.036.433	5.987.825	34.740.841
16	8.024.258,72	1.737.042	6.287.217	28.453.624
17	8.024.258,72	1.422.681	6.601.578	21.852.047
18	8.024.258,72	1.092.602	6.931.656	14.920.390
19	8.024.258,72	746.020	7.278.239	7.642.151
20	8.024.258,72	382.108	7.642.151	(0)

2.3 Amortización con Cuotas Iguales y Cuotas Extras Pactadas

Bajo este sistema deudor y acreedor acuerdan el pago del préstamo a través de cuotas iguales periódicas, y pagos extras.

En este caso, el sistema puede tener dos variantes: el pago del crédito con cuotas iguales y cuotas extras puntuales o a través de cuotas iguales y extras con pagos periódicos, a continuación se analizan ambas situaciones.

2.3.1 Amortización con Cuotas Iguales Periódicas y Extras Puntuales Pactadas

En este acuerdo de pago aparte de las cuotas iguales periódicas, el deudor se compromete al pago de una o varias cuotas extraordinarias en diferentes períodos durante el tiempo de amortización. Es decir, se pacta el pago del préstamo en cuotas iguales A, y algunas cuotas extraordinarias (A_k).

En este caso, la cuota se calcula utilizando una combinación de las fórmulas (30) y (15) teniendo en cuenta el valor del préstamo (V_p), la tasa de interés efectiva (i), el número de períodos (n) y los pagos extras pactados (A_k). Si se supone la operación financiera que se muestra en la gráfica No 4.1. Para el cálculo de la cuota A; se deben tener en cuenta las siguientes fórmulas y la ecuación de valor con ff en 0.

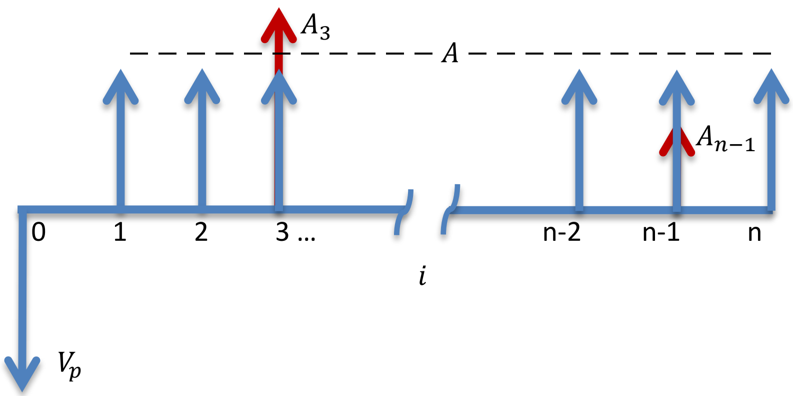
$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n} = V_f \times (1+i)^{-n}$$

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Considerando la ecuación de valor con ff en 0, de la gráfica podemos deducir que el valor presente (préstamo) es igual al valor presente de la anualidad más los valores presentes de cada una de las cuotas extraordinarias.

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{A_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \cdots.$$

Gráfica No 4.1 – Amortización con Pagos Uniformes y Cuotas Extras Pactadas



De la anterior ecuación se puede determinar A, considerando que es la única incógnita. Por su parte, el interés (I_k) de cada período se calcula sobre los saldos de capital, considerando la tasa de interés efectiva; el saldo de capital se determina como el saldo del período anterior menos la cuota pagada de capital; y finalmente el valor de la cuota de amortización de capital (V_k) se calcula como la diferencia entre la cuota A y el interés del período (I_k).

Ejemplos y Casos

4.4 – Tabla de amortización – Cuotas Iguales y Extras Puntuales Pactadas

Una pequeña empresa acuerda con el Banco Medellín un préstamo por $100 millones para ser cancelado en 12 cuotas mensuales iguales; y una cuota extraordinaria en el mes 6 por valor de $30´000.000. El banco aplica una tasa de interés del 1,2% EM. Elaborar la tabla de amortización.

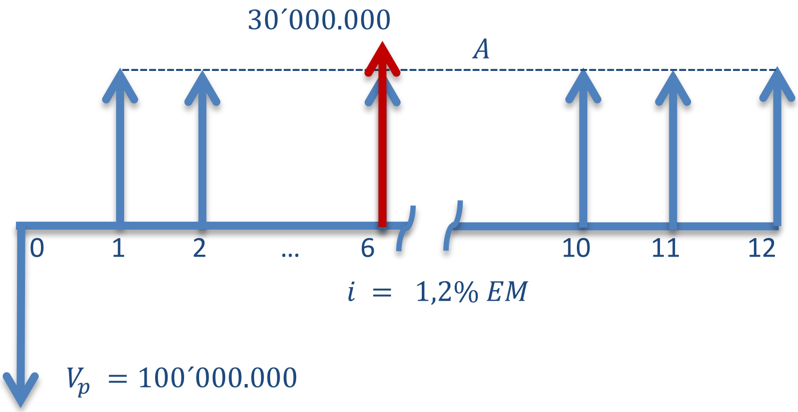
Solución

Parámetros

- Valor del préstamo (V_p): $100´000.000
- Numero de pagos: 12
- Períodos: mensuales
- Cuota extraordinaria: mes 6, $30´000.000
- Tasa de interés: 1,2% EM

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Para elaborar la tabla de amortización se debe inicialmente determinar la cuota o pago mensual. Para ello se utiliza la ecuación de valor con ff en el período 0; los valores equivalentes de los pagos en dicha se fecha se determinan a partir de las fórmulas (30) y (15).

Aplicando la ecuación de valor, se obtiene:

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{A_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \cdots$$

$$100´000.000 = A\left[\frac{1-(1+0{,}012)^{-12}}{0{,}012}\right] + \frac{30´000.000}{(1+0{,}012)^6}$$

Despejando A, se determina su valor, como:

$$A = 6'484.719{,}51$$

Considerando esta cuota de pago y la tasa de interés se puede elaborar la tabla de amortización, teniendo en cuenta que en el mes 6 se hace un pago extra de $30´000.000, como sigue:

Período (k)	**Pago Mensual (A_k)**	**Interés (I_k)**	**Cuota de capital (V_k)**	**Saldo de Capital**
0	0	0	0	100.000.000,00
1	6.484.719,52	1.200.000,00	5.284.719,52	94.715.280,48
2	6.484.719,52	1.136.583,37	5.348.136,15	89.367.144,33
3	6.484.719,52	1.072.405,73	5.412.313,79	83.954.830,54
4	6.484.719,52	1.007.457,97	5.477.261,55	78.477.568,98
5	6.484.719,52	941.730,83	5.542.988,69	72.934.580,29
6	**36.484.719,52**	**875.214,96**	**35.609.504,56**	**37.325.075,74**
7	6.484.719,52	447.900,91	6.036.818,61	31.288.257,12
8	6.484.719,51	375.459,09	6.109.260,42	25.178.996,70
9	6.484.719,51	302.147,96	6.182.571,55	18.996.425,15
10	6.484.719,51	227.957,10	6.256.762,41	12.739.662,74
11	6.484.719,51	152.875,95	6.331.843,56	6.407.819,18
12	6.484.719,51	76.893,83	6.407.825,68	(6,49)

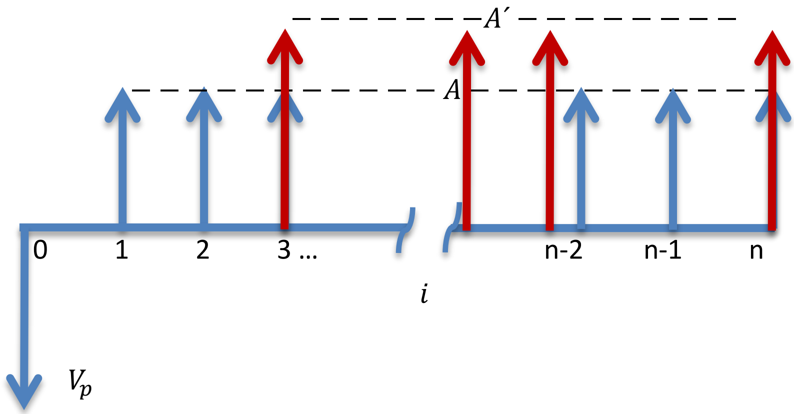
Nótese que en el mes 6 el pago se compone de la cuota igual que se paga en cada período más la cuota extra. Existe una pequeña diferencia en el saldo final que puede explicarse por el número de decimales se utiliza en los cálculos.

2.3.2 Amortización con Cuotas Iguales y Extras periódicas pactadas

Bajo este tipo de acuerdo, aparte de las cuotas iguales periódicas, el deudor se compromete al pago de una serie de cuotas extraordinarias. Es decir, se pacta el pago del préstamo en cuotas iguales A, y una serie de cuotas extraordinarias (A'). Este tipo de operaciones se ilustra en la gráfica 4.2

En este caso, la cuota se calcula utilizando la fórmula (30), teniendo en cuenta el valor del préstamo (V_p), la tasa de interés efectiva (i), el número de períodos (n) y la serie de pagos corrientes (A) y extras pactados (A'). Supongamos la operación financiera que se muestra en la gráfica No 4.2. Para el cálculo de la cuota A; se deben tener en cuenta la siguiente fórmula y la ecuación de valor con ff en 0

Gráfica No 4.2 –Amortización con Pagos Uniformes y Cuotas Extras Periódicas



$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Considerando la ecuación de valor con $ff = 0$, de la gráfica se puede deducir que el valor presente (préstamo) es igual al valor presente de la anualidad corriente (A), más el valor presente de la anualidad extra (A').

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + A´\left[\frac{1-(1+i_1)^{-n_1}}{i_1}\right]$$

En este caso hay que tener en cuenta que la periodicidad de la cuota extraordinaria no es necesariamente igual a la cuota ordinaria, por lo cual se deberá considerar la tasa de interés para el período correspondiente. De la anterior ecuación se puede despejar A, considerando que es la única incógnita.

De otro lado, el interés (I_k) de cada período se calcula sobre los saldos de capital, considerando la tasa de interés efectiva; el saldo de capital se determina como el saldo del período anterior menos la cuota pagada de capital; y finalmente el valor de la cuota de amortización de capital (V_k) se calcula como la diferencia entre la cuota (A) y el interés del período (I_k).

Ejemplos y Casos

4.5 – Tabla de amortización – Cuotas Iguales y Extras Periódicas Pactadas

Una pequeña empresa acuerda con el Banco Medellín un préstamo por $100 millones para ser cancelado en 24 cuotas mensuales iguales; y cuotas extraordinarias cada seis meses por valor de $5´000.000. El banco aplica una tasa de interés del 1,5% EM. Se pide elaborar la tabla de amortización.

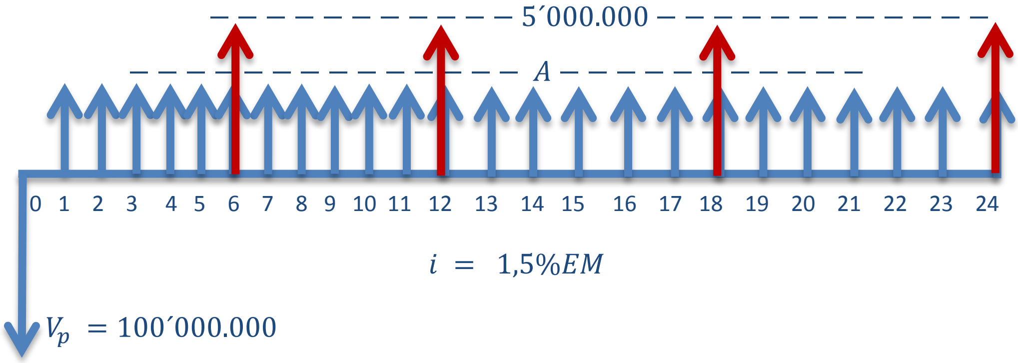
Solución

Parámetros

- Valor del préstamo (V_p): $100´000.000
- Numero de pagos: 24
- Períodos: mensuales
- Cuota extraordinaria semestrales: $5´000.000
- Tasa de interés: 1,5% EM

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Para elaborar la tabla de amortización se debe determinar la cuota o pago mensual. Para hallar esta se aplica la ecuación de valor con $ff = 0$; así el valor presente es igual al valor presente de la anualidad corriente, más el valor presente de la anualidad de extras. Para su cálculo se utiliza la fórmula (30), como se indica a continuación:

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + A´\left[\frac{1-(1+i_1)^{-n_1}}{i_1}\right] \quad (a)$$

Para el cálculo del valor presente de la anualidad corriente se utiliza la tasa de interés mensual que aplica el banco; para la anualidad de pagos extras se utiliza, por su parte, una tasa de interés efectiva semestral, la cual se calcula a partir de la aplicación de la fórmula (19), donde i_1 es la tasa de interés efectiva mensual, $n_1 = 12\ y\ n_2 = 2$

$$i_2 = (1+i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1+0{,}015)^{\frac{12}{2}} - 1 = 0{,}09344 = 9{,}344\%$$

Considerando las tasas de interés anteriores se calcula A en la ecuación (a)

$$100´000.000 = A\left[\frac{1-(1+0{,}015)^{-24}}{0{,}015}\right] + 5´000.000\left[\frac{1-(1+0{,}09344)^{-4}}{0{,}09344}\right]$$

Despejando A, se obtiene:

$$A = 4´189.778{,}40$$

Considerando la tasa de interés mensual y la cuota constante de amortización de capital se puede elaborar la tabla de amortización, teniendo en cuenta que en los meses 6, 12, 18 y 24 se hacen pagos extras de $5´000.000. La tabla se muestra a continuación:

Período (k)	Pago Mensual (A_k)	Interés (I_k)	Cuota de capital (V_k)	Saldo de Capital
0	0	0	0	100.000.000,00
1	4.189.778,40	1.500.000,00	2.689.778,40	97.310.221,60
2	4.189.778,40	1.459.653,32	2.730.125,08	94.580.096,52
3	4.189.778,40	1.418.701,45	2.771.076,95	91.809.019,57
4	4.189.778,40	1.377.135,29	2.812.643,11	88.996.376,47
5	4.189.778,40	1.334.945,65	2.854.832,75	86.141.543,71
6	**9.189.778,40**	**1.292.123,16**	**7.897.655,24**	**78.243.888,47**
7	4.189.778,40	1.173.658,33	3.016.120,07	75.227.768,40
8	4.189.778,40	1.128.416,53	3.061.361,87	72.166.406,52
9	4.189.778,40	1.082.496,10	3.107.282,30	69.059.124,22
10	4.189.778,40	1.035.886,86	3.153.891,54	65.905.232,68
11	4.189.778,40	988.578,49	3.201.199,91	62.704.032,77
12	**9.189.778,40**	**940.560,49**	**8.249.217,91**	**54.454.814,86**
13	4.189.778,40	816.822,22	3.372.956,18	51.081.858,69
14	4.189.778,40	766.227,88	3.423.550,52	47.658.308,17
15	4.189.778,40	714.874,62	3.474.903,78	44.183.404,39
16	4.189.778,40	662.751,07	3.527.027,33	40.656.377,06
17	4.189.778,40	609.845,66	3.579.932,74	37.076.444,31
18	**9.189.778,40**	**556.146,66**	**8.633.631,74**	**28.442.812,58**
19	4.189.778,40	426.642,19	3.763.136,21	24.679.676,36
20	4.189.778,40	370.195,15	3.819.583,25	20.860.093,11
21	4.189.778,40	312.901,40	3.876.877,00	16.983.216,11
22	4.189.778,40	254.748,24	3.935.030,16	13.048.185,95
23	4.189.778,40	195.722,79	3.994.055,61	9.054.130,34
24	**9.189.778,40**	**135.811,96**	**9.053.966,44**	**163,89**

Nótese que en los meses 6, 12, 18 y 24 el pago se compone de la cuota uniforme que se paga en cada período más la cuota extra. Existe una pequeña diferencia en el saldo final que puede explicarse por el número de decimales se utiliza en los cálculos.

2.4 Amortización con Cuotas Iguales y Cuotas Extras no Pactadas

Con este tipo de acuerdos de pago deudor y acreedor acuerdan la cancelación del préstamo a través de cuotas uniformes con la posibilidad de realizar pagos extraordinarios. En caso de realizarse el pago extra existen dos posibilidades: afectar el valor de las cuotas periódicas, o disminuir el número de pagos, a continuación se analizan ambas situaciones:

2.4.1 Amortización con Cuotas Iguales y Cuotas Extras afectando el Valor de las Cuotas.

En este caso se calcula la tabla de amortización considerando solo las cuotas iguales. Al momento de realizar el pago extra, con el saldo de capital se recalcula el valor de la cuotas iguales para el número de períodos faltantes, utilizando para ello el procedimiento explicado.

Ejemplos y Casos

4.6 – TABLA DE AMORTIZACIÓN – CUOTAS IGUALES Y EXTRAS NO PACTADAS 1

Una pequeña empresa acuerda con el Banco Medellín un préstamo por $200 millones para ser cancelado en 24 cuotas mensuales iguales; si al momento de realizar el pago 10 se efectúa un abono no pactado de $40´000.000, se pide elaborar la tabla de amortización re liquidando la cuota. El banco aplica una tasa de interés del 1,4% EM.

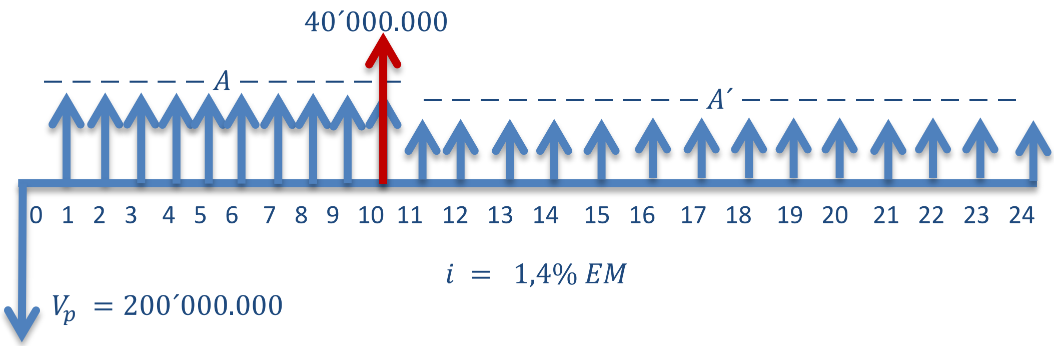
Solución

Parámetros

- Valor del préstamo (V_p): $200´000.000
- Numero de pagos: 24
- Períodos: mensuales
- Pago extraordinario, período 10: $40´000.000
- Tasa de interés: 1,4% EM

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Inicialmente se elabora la tabla de amortización considerando que no hay cuotas extras. La cuota se determina utilizando directamente la fórmula (30), para una tasa de interés efectiva mensual de 1,4% y 24 pagos.

$$A = V_p \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$A = 200´000.000 \left[\frac{0,014}{1-(1+0,014)^{-24}}\right] = 9´869.243,68$$

Considerando la tasa de interés mensual y la cuota calculada se elabora la tabla de amortización, sin considerar ningún pago extra, como sigue:

Período (k)	Pago Mensual (A_k)	Interés (I_k)	Cuota de capital (V_k)	Saldo de Capital
0	0	0	0	200.000.000,00
1	9.869.243,68	2.800.000,00	7.069.243,68	192.930.756,32
2	9.869.243,68	2.701.030,59	7.168.213,09	185.762.543,23
3	9.869.243,68	2.600.675,61	7.268.568,07	178.493.975,15
4	9.869.243,68	2.498.915,65	7.370.328,03	171.123.647,13
5	9.869.243,68	2.395.731,06	7.473.512,62	163.650.134,51
6	9.869.243,68	2.291.101,88	7.578.141,80	156.071.992,71
7	9.869.243,68	2.185.007,90	7.684.235,78	148.387.756,93
8	9.869.243,68	2.077.428,60	7.791.815,08	140.595.941,84

9	9.869.243,68	1.968.343,19	7.900.900,49	132.695.041,35
10	9.869.243,68	1.857.730,58	8.011.513,10	124.683.528,25
11	9.869.243,68	1.745.569,40	8.123.674,28	116.559.853,96
12	9.869.243,68	1.631.837,96	8.237.405,72	108.322.448,24
13	9.869.243,68	1.516.514,28	8.352.729,40	99.969.718,83
14	9.869.243,68	1.399.576,06	8.469.667,62	91.500.051,22
15	9.869.243,68	1.281.000,72	8.588.242,96	82.911.808,26
16	9.869.243,68	1.160.765,32	8.708.478,36	74.203.329,89
17	9.869.243,68	1.038.846,62	8.830.397,06	65.372.932,83
18	9.869.243,68	915.221,06	8.954.022,62	56.418.910,21
19	9.869.243,68	789.864,74	9.079.378,94	47.339.531,27
20	9.869.243,68	662.753,44	9.206.490,24	38.133.041,03
21	9.869.243,68	533.862,57	9.335.381,11	28.797.659,92
22	9.869.243,68	403.167,24	9.466.076,44	19.331.583,48
23	9.869.243,68	270.642,17	9.598.601,51	9.732.981,97
24	9.869.243,68	136.261,75	9.732.981,93	0,04

Cuando se realiza un pago extra de 40´000.000 en el mes 10, el saldo de capital en ese período es:

10	49.869.243,68	1.857.730,58	48.011.513,10	84.683.528,25

Para este saldo de capital, se recalcula la cuota uniforme para 14 períodos, utilizando para ellos la fórmula (30).

$$A = V_p\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$A = 84.683.528,25\left[\frac{0,014}{1-(1+0,014)^{-14}}\right] = 6´703.069,67$$

Con esta nueva cuota de amortización se recalcula la tabla de amortización, quedando:

Período (k)	Pago Mensual (A_k)	Interés (I_k)	Cuota de capital (V_k)	Saldo deCapital
0	0	0	0	200.000.000,00
1	9.869.243,68	2.800.000,00	7.069.243,68	192.930.756,32

2	9.869.243,68	2.701.030,59	7.168.213,09	185.762.543,23
3	9.869.243,68	2.600.675,61	7.268.568,07	178.493.975,15
4	9.869.243,68	2.498.915,65	7.370.328,03	171.123.647,13
5	9.869.243,68	2.395.731,06	7.473.512,62	163.650.134,51
6	9.869.243,68	2.291.101,88	7.578.141,80	156.071.992,71
7	9.869.243,68	2.185.007,90	7.684.235,78	148.387.756,93
8	9.869.243,68	2.077.428,60	7.791.815,08	140.595.941,84
9	9.869.243,68	1.968.343,19	7.900.900,49	132.695.041,35
10	**49.869.243,68**	**1.857.730,58**	**48.011.513,10**	**84.683.528,25**
11	6.703.069,67	1.185.569,40	5.517.500,27	79.166.027,97
12	6.703.069,67	1.108.324,39	5.594.745,28	73.571.282,70
13	6.703.069,67	1.029.997,96	5.673.071,71	67.898.210,98
14	6.703.069,67	950.574,95	5.752.494,72	62.145.716,27
15	6.703.069,67	870.040,03	5.833.029,64	56.312.686,62
16	6.703.069,67	788.377,61	5.914.692,06	50.397.994,57
17	6.703.069,67	705.571,92	5.997.497,75	44.400.496,82
18	6.703.069,67	621.606,96	6.081.462,71	38.319.034,11
19	6.703.069,67	536.466,48	6.166.603,19	32.152.430,91
20	6.703.069,67	450.134,03	6.252.935,64	25.899.495,28
21	6.703.069,67	362.592,93	6.340.476,74	19.559.018,54
22	6.703.069,67	273.826,26	6.429.243,41	13.129.775,13
23	6.703.069,67	183.816,85	6.519.252,82	6.610.522,31
24	6.703.069,67	92.547,31	6.610.522,36	(0,05)

2.4.2 Amortización con Cuotas Iguales y Extras afectando el número de cuotas.

Para este tipo de acuerdos de pago, la tabla de amortización se calcula inicialmente considerando solo las cuotas iguales. Al momento de hacer el pago extra, con el saldo de capital, la cuota igual y la misma tasa efectiva de interés se calcula el número de períodos despejando n de la fórmula (37)

$$n = \frac{\log A - Log\ (A - iV_p)}{\log(1 + i)}$$

Ejemplos y Casos

4.7 – Tabla de amortización – Cuotas Iguales y Extras no Pactadas 2

Una pequeña empresa acuerda con el Banco Medellín un préstamo por $200 millones para ser cancelado en 24 cuotas mensuales iguales; si al momento de realizar el pago 10 se efectúa un pago no pactado de $40´000.000, se pide elaborar la tabla de amortización sin reliquidación de la cuota. El banco aplica una tasa de interés del 1,4% EM.

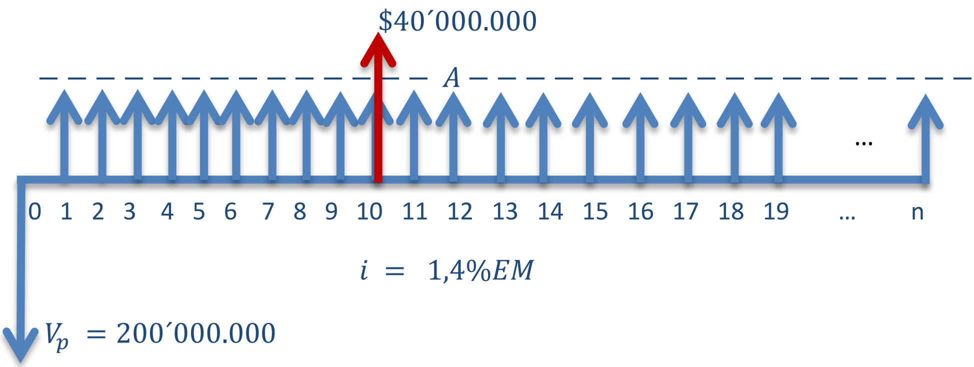
Solución

Parámetros

- Valor del préstamo (V_p): $200´000.000
- Numero de pagos: 24
- Períodos: mensuales
- Pago extraordinario, período 10: $40´000.000
- Tasa de interés: 1,4% EM

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Inicialmente se elabora la tabla de amortización considerando que no hay cuotas extras. La cuota se determina utilizando directamente la fórmula (30), para una tasa de interés efectiva mensual de 1,4% y 24 pagos.

$$A = V_p \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$A = 200'000.000 \left[\frac{0{,}014}{1-(1+0{,}014)^{-24}}\right] = 9'869.243{,}68$$

Considerando la tasa de interés mensual y la cuota igual se elabora la tabla de amortización, sin considerar ningún pago extra, así como se muestra:

Período (k)	Pago Mensual (A_k)	Interés (I_k)	Cuota de capital (V_k)	Saldo de Capital
0	0	0	0	200.000.000,00
1	9.869.243,68	2.800.000,00	7.069.243,68	192.930.756,32
2	9.869.243,68	2.701.030,59	7.168.213,09	185.762.543,23
3	9.869.243,68	2.600.675,61	7.268.568,07	178.493.975,15
4	9.869.243,68	2.498.915,65	7.370.328,03	171.123.647,13
5	9.869.243,68	2.395.731,06	7.473.512,62	163.650.134,51
6	9.869.243,68	2.291.101,88	7.578.141,80	156.071.992,71
7	9.869.243,68	2.185.007,90	7.684.235,78	148.387.756,93
8	9.869.243,68	2.077.428,60	7.791.815,08	140.595.941,84
9	9.869.243,68	1.968.343,19	7.900.900,49	132.695.041,35
10	9.869.243,68	1.857.730,58	8.011.513,10	124.683.528,25
11	9.869.243,68	1.745.569,40	8.123.674,28	116.559.853,96
12	9.869.243,68	1.631.837,96	8.237.405,72	108.322.448,24
13	9.869.243,68	1.516.514,28	8.352.729,40	99.969.718,83
14	9.869.243,68	1.399.576,06	8.469.667,62	91.500.051,22
15	9.869.243,68	1.281.000,72	8.588.242,96	82.911.808,26
16	9.869.243,68	1.160.765,32	8.708.478,36	74.203.329,89
17	9.869.243,68	1.038.846,62	8.830.397,06	65.372.932,83
18	9.869.243,68	915.221,06	8.954.022,62	56.418.910,21
19	9.869.243,68	789.864,74	9.079.378,94	47.339.531,27
20	9.869.243,68	662.753,44	9.206.490,24	38.133.041,03

21	9.869.243,68	533.862,57	9.335.381,11	28.797.659,92
22	9.869.243,68	403.167,24	9.466.076,44	19.331.583,48
23	9.869.243,68	270.642,17	9.598.601,51	9.732.981,97
24	9.869.243,68	136.261,75	9.732.981,93	0,04

Cuando se realiza el pago extra de 40´000.000 en el mes 10, el saldo de capital es:

10	**49.869.243,68**	**1.857.730,58**	**48.011.513,10**	**84.683.528,25**

Con este saldo de capital, se recalcula el número de períodos, utilizando para ellos la fórmula (37)

$$n = \frac{\log A - Log\ (A - iV_p)}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log 9.869.243{,}68 - Log\ (9.869.243{,}68 - 0{,}014 \times 84.683.528{,}25)}{\log(1+0{,}014)} = 9{,}20$$

Con base en estos períodos de amortización se puede recalcular la tabla de amortización, quedando:

Período (k)	Pago Mensual (A_k)	Interés (I_k)	Cuota de capital (V_k)	Saldo de Capital
0	0	0	0	200.000.000,00
1	9.869.243,68	2.800.000,00	7.069.243,68	192.930.756,32
2	9.869.243,68	2.701.030,59	7.168.213,09	185.762.543,23
3	9.869.243,68	2.600.675,61	7.268.568,07	178.493.975,15
4	9.869.243,68	2.498.915,65	7.370.328,03	171.123.647,13
5	9.869.243,68	2.395.731,06	7.473.512,62	163.650.134,51
6	9.869.243,68	2.291.101,88	7.578.141,80	156.071.992,71
7	9.869.243,68	2.185.007,90	7.684.235,78	148.387.756,93
8	9.869.243,68	2.077.428,60	7.791.815,08	140.595.941,84
9	9.869.243,68	1.968.343,19	7.900.900,49	132.695.041,35
10	49.869.243,68	1.857.730,58	48.011.513,10	84.683.528,25
11	9.869.243,68	1.185.569,40	8.683.674,28	75.999.853,96
12	9.869.243,68	1.063.997,96	8.805.245,72	67.194.608,24
13	9.869.243,68	940.724,52	8.928.519,16	58.266.089,07

14	9.869.243,68	815.725,25	9.053.518,43	49.212.570,64
15	9.869.243,68	688.975,99	9.180.267,69	40.032.302,95
16	9.869.243,68	560.452,24	9.308.791,44	30.723.511,51
17	9.869.243,68	430.129,16	9.439.114,52	21.284.396,99
18	9.869.243,68	297.981,56	9.571.262,12	11.713.134,87
19	9.869.243,68	163.983,89	9.705.259,79	2.007.875,08
20	2.035.985,33	28.110,25	2.007.875,08	-

Después del pago extra se requieren 9 pagos y una fracción 0,20. En la tabla se puede ver que esta fracción significa que en este último período se realiza un pago que no es igual a la cuota uniforme.

2.5 Amortización con períodos de gracia

Algunas operaciones de crédito se pactan con un plazo de gracia; es decir, después de desembolsado el préstamo pasara cierto tiempo antes de iniciar la amortización del crédito. Bajo esta modalidad, existen dos formas: el período de gracia muerto y el período de gracia con cuota reducida. A continuación se analizan las dos modalidades.

2.5.1 Amortización con Períodos de Gracia Muertos

En este caso el préstamo se pacta con la condición de que durante cierto tiempo no se realizan pagos; este lapso de tiempo se denomina “Período de gracia muerto”. Durante este tiempo aunque no se realizan pagos, los intereses son causados y acumulados a la deuda, con lo cual el saldo de capital se incrementa.

Adicionalmente al período de gracia, bajo esta modalidad se pacta, la tasa de interés, el plazo y la forma de pago: cuotas constantes de capital, cuotas uniformes, cuotas crecientes aritméticamente o geométricamente, o cualquier otra de las estudiadas.

Ejemplos y Casos

4.8 – TABLA DE AMORTIZACIÓN – CON PERÍODOS DE GRACIA MUERTOS

Una pequeña empresa acuerda con el Banco Medellín un préstamo por $400 millones para ser cancelado en 36 cuotas mensuales iguales; adicionalmente se pacta un período de gracia muerto de 6 meses; se pide elaborar la tabla de amortización para todo el período de duración de la deuda. El banco aplica una tasa de interés del 1,2% EM.

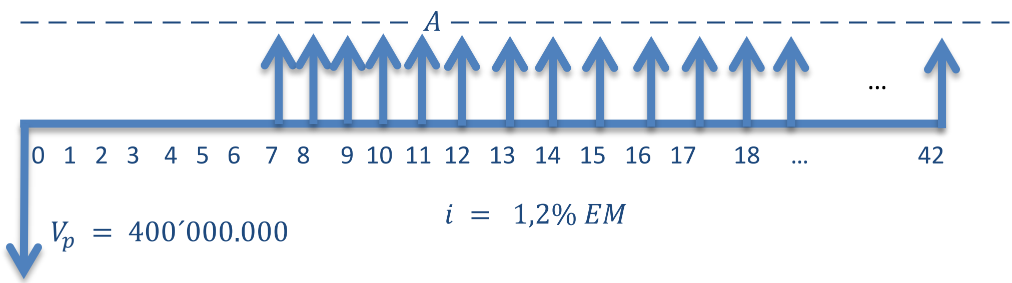
Solución

Parámetros

- Valor del préstamo (V_p): \$400´000.000
- Numero de pagos: 36
- Períodos: mensuales
- Período de gracia: 6 meses
- Tasa de interés: 1,2% EM

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Considerando que durante el período de gracia no se realizan pagos, los intereses causados en cada período se deben sumar al capital. A partir del mes 7 se inician los pagos para cubrir el crédito, estos pagos se calculan teniendo como base el capital acumulado con los intereses no pagados. La deuda acumulada en el período 6 se calcula con la fórmula (13)

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

$$V_f = 400´000.000(1+0{,}012)^6 = 429´677.949$$

La situación de la capitalización de intereses se muestra en la tabla de amortización siguiente:

Período (k)	Pago Mensual (A_k)	Interés (I_k)	Cuota de capital (V_k)	Saldo de Capital
0	0	0		400.000.000,00
1	0,00	4.800.000,00	0,00	404.800.000,00
2	0,00	4.857.600,00	0,00	409.657.600,00
3	0,00	4.915.891,20	0,00	414.573.491,20
4	0,00	4.974.881,89	0,00	419.548.373,09
5	0,00	5.034.580,48	0,00	424.582.953,57
6	0,00	5.094.995,44	0,00	429.677.949,01

Considerando que a partir del mes 7 se inician los pagos y que estos son iguales se calcula la cuota utilizando la fórmula (30), considerando como valor inicial el saldo de capital acumulado, la tasa de interés y el número de cuotas a cubrir a partir de este período.

$$A = V_p\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$A = 429´677.949\left[\frac{0{,}012}{1-(1+0{,}012)^{-36}}\right] = 14´768.988{,}25$$

Considerando la tasa de interés mensual y la cuota uniforme se elabora la tabla de amortización, como sigue:

Período (k)	Pago Mensual (A_k)	Interés (I_k)	Cuota de capital (V_k)	Saldo de Capital
0	0	0	0	400.000.000,00
1	0,00	4.800.000,00	0,00	404.800.000,00
2	0,00	4.857.600,00	0,00	409.657.600,00
3	0,00	4.915.891,20	0,00	414.573.491,20
4	0,00	4.974.881,89	0,00	419.548.373,09
5	0,00	5.034.580,48	0,00	424.582.953,57
6	0,00	5.094.995,44	0,00	429.677.949,01
7	**14.768.988,25**	**5.156.135,39**	**9.612.852,86**	**420.065.096,15**
8	14.768.988,25	5.040.781,15	9.728.207,10	410.336.889,06
9	14.768.988,25	4.924.042,67	9.844.945,58	400.491.943,48
10	14.768.988,25	4.805.903,32	9.963.084,93	390.528.858,55
11	14.768.988,25	4.686.346,30	10.082.641,95	380.446.216,60

12	14.768.988,25	4.565.354,60	10.203.633,65	370.242.582,95
13	14.768.988,25	4.442.911,00	10.326.077,25	359.916.505,69
14	14.768.988,25	4.318.998,07	10.449.990,18	349.466.515,51
15	14.768.988,25	4.193.598,19	10.575.390,06	338.891.125,45
16	14.768.988,25	4.066.693,51	10.702.294,74	328.188.830,70
17	14.768.988,25	3.938.265,97	10.830.722,28	317.358.108,42
18	14.768.988,25	3.808.297,30	10.960.690,95	306.397.417,47
19	14.768.988,25	3.676.769,01	11.092.219,24	295.305.198,23
20	14.768.988,25	3.543.662,38	11.225.325,87	284.079.872,36
21	14.768.988,25	3.408.958,47	11.360.029,78	272.719.842,58
22	14.768.988,25	3.272.638,11	11.496.350,14	261.223.492,44
23	14.768.988,25	3.134.681,91	11.634.306,34	249.589.186,10
24	14.768.988,25	2.995.070,23	11.773.918,02	237.815.268,08
25	14.768.988,25	2.853.783,22	11.915.205,03	225.900.063,05
26	14.768.988,25	2.710.800,76	12.058.187,49	213.841.875,56
27	14.768.988,25	2.566.102,51	12.202.885,74	201.638.989,81
28	14.768.988,25	2.419.667,88	12.349.320,37	189.289.669,44
29	14.768.988,25	2.271.476,03	12.497.512,22	176.792.157,22
30	14.768.988,25	2.121.505,89	12.647.482,36	164.144.674,86
31	14.768.988,25	1.969.736,10	12.799.252,15	151.345.422,71
32	14.768.988,25	1.816.145,07	12.952.843,18	138.392.579,53
33	14.768.988,25	1.660.710,95	13.108.277,30	125.284.302,24
34	14.768.988,25	1.503.411,63	13.265.576,62	112.018.725,61
35	14.768.988,25	1.344.224,71	13.424.763,54	98.593.962,07
36	14.768.988,25	1.183.127,54	13.585.860,71	85.008.101,37
37	14.768.988,25	1.020.097,22	13.748.891,03	71.259.210,33
38	14.768.988,25	855.110,52	13.913.877,73	57.345.332,61
39	14.768.988,25	688.143,99	14.080.844,26	43.264.488,35
40	14.768.988,25	519.173,86	14.249.814,39	29.014.673,96
41	14.768.988,25	348.176,09	14.420.812,16	14.593.861,80
42	14.768.988,25	175.126,34	14.593.861,91	-0,11

2.5.2 Amortización con Períodos de Gracia con Cuotas Reducidas

En este caso el préstamo se pacta con la condición de que durante cierto tiempo no se realizan pagos de capital, pero si se realiza el pago de los intereses causados; este lapso de tiempo se denomina "Período de gracia con cuota reducida".

Es decir, que la forma de pago con Períodos de Gracia con Cuota Reducida obliga al deudor durante el período de gracia acordado solo a pagar los intereses causados, sin hacer abonos al capital, con los cual el capital permanece constante durante este período.

Igual que en el caso anterior, adicional al período de gracia, bajo esta modalidad se pacta la tasa de interés, el plazo, y la forma de pago: cuotas constantes de capital, cuotas uniformes, cuotas crecientes aritméticamente o geométricamente, etc.

Ejemplos y Casos

4.9 – TABLA DE AMORTIZACIÓN – CON PERÍODOS DE GRACIA MUERTOS CON CUOTAS REDUCIDAS

Una pequeña empresa acuerda con el Banco Medellín un préstamo por $50 millones para ser cancelado en 12 cuotas mensuales iguales; adicionalmente se pacta un período de gracia con pagos reducidos por seis meses; se pide elaborar la tabla de amortización para todo el período de duración de la deuda. El banco aplica una tasa de interés del 1,5% EM.

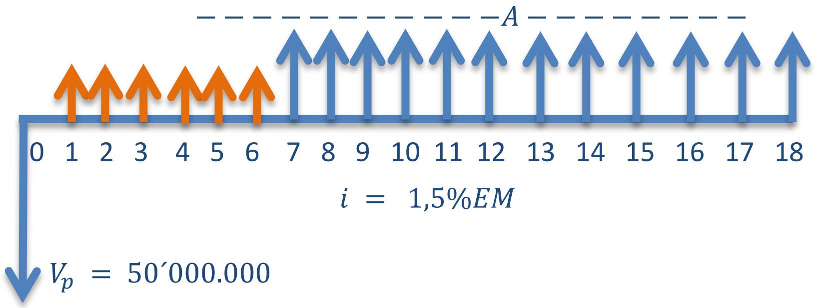
Solución

Parámetros

- Valor del préstamo (V_p): $50´000.000
- Numero de pagos: 12
- Períodos: mensuales
- Período de gracia con pagos reducidos: 6 meses
- Tasa de interés: 1,5% EM

Representación Gráfica

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera:



Cálculos

Considerando que durante el período de gracia, los seis primeros meses, se realizan los pagos de los intereses causados, el saldo del capital en el mes 6 es igual a la deuda inicialmente pactada; y teniendo en cuenta que a partir del mes 7 se inician los pagos y que estos son iguales se puede calcular la cuota, utilizando la fórmula (30), considerando como valor inicial el capital inicial, la tasa de interés y el número de cuotas

$$A = V_p\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$A = 50´000.000\left[\frac{0{,}015}{1-(1+0{,}015)^{-12}}\right] = 4´583.999{,}65$$

Considerando la tasa de interés mensual y la cuota igual se elabora la tabla de amortización, como sigue:

Período (k)	Pago Mensual (A_k)	Interés (I_k)	Cuota de capital (V_k)	Saldo de Capital
0	0	0	0	50.000.000,00
1	750.000,00	750.000,00	0,00	50.000.000,00
2	750.000,00	750.000,00	0,00	50.000.000,00
3	750.000,00	750.000,00	0,00	50.000.000,00
4	750.000,00	750.000,00	0,00	50.000.000,00
5	750.000,00	750.000,00	0,00	50.000.000,00
6	750.000,00	750.000,00	0,00	50.000.000,00

7	4.583.999,65	750.000,00	3.833.999,65	46.166.000,35
8	4.583.999,65	692.490,01	3.891.509,64	42.274.490,71
9	4.583.999,65	634.117,36	3.949.882,29	38.324.608,42
10	4.583.999,65	574.869,13	4.009.130,52	34.315.477,89
11	4.583.999,65	514.732,17	4.069.267,48	30.246.210,41
12	4.583.999,65	453.693,16	4.130.306,49	26.115.903,92
13	4.583.999,65	391.738,56	4.192.261,09	21.923.642,83
14	4.583.999,65	328.854,64	4.255.145,01	17.668.497,82
15	4.583.999,65	265.027,47	4.318.972,18	13.349.525,63
16	4.583.999,65	200.242,88	4.383.756,77	8.965.768,87
17	4.583.999,65	134.486,53	4.449.513,12	4.516.255,75
18	4.583.999,65	67.743,84	4.516.255,81	-0,06

2.6 Amortización mediante Gradiente

En este caso, los pagos se pactan con amortización a través de pagos crecientes o decrecientes aritmética o geométricamente. Para ambos casos se define el primer pago y a partir de ahí con la ley de formación se determinan las demás cuotas. Para cada período se calcula el interés sobre el saldo de capital y la cuota de capital como la diferencia entre la cuota y el interés causado en el período.

Ejemplos y Casos

4.10 – Tabla de amortización – Gradientes 1

Una pequeña empresa acuerda con el Banco Medellín un préstamo por $100 millones para ser cancelado en 12 cuotas mensuales crecientes en un 20%; se pide elaborar la tabla de amortización de la deuda, considerando que el banco aplica una tasa de interés del 1,6% EM.

Solución

Parámetros

- Valor del préstamo (V_p): $100´000.000

- Numero de pagos: 12
- Períodos: mensuales
- Cuotas crecientes: 20%
- Tasa de interés: 1,6% EM

Cálculos

Teniendo en cuenta que se trata de un gradiente geométrico creciente con $i \neq G$ se puede determinar la primera cuota (A) utilizando la fórmula (46)

$$V_p = \frac{A}{(G-i)}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right] \quad si\ G \neq i$$

$$100´000.000 = \frac{A}{(0{,}2-0{,}016)}\left[\frac{(1+0{,}2)^{12}}{(1+0{,}016)^{12}} - 1\right]$$

Despejando (A), se obtiene:

$$A = 2´888.671{,}09$$

Con la primera cuota y la ley de formación se puede determinar las cuotas subsiguientes como sigue:

$$A_2 = 2´888.671{,}09\ (1+0{,}2) = 3´466.405{,}31$$

$$A_3 = 2´888.671{,}09\ (1+0{,}2)^2 = 4´159.686{,}37$$

$$A_4 = 2´888.671{,}09\ (1+0{,}2)^3 = 4´991.623{,}64$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$A_{11} = 2´888.671{,}09\ (1+0{,}2)^{10} = 17´885.890{,}31$$

$$A_{12} = 2´888.671{,}09\ (1+0{,}2)^{11} = 21´463.068{,}00$$

Considerando la tasa de interés mensual y las cuotas crecientes se elabora la tabla de amortización, como sigue:

Período (k)	**Pago Mensual (A_k)**	**Interés (I_k)**	**Cuota de capital (V_k)**	**Saldo de Capital**
0	0	0	0	100.000.000,00
1	2.888.671,09	1.600.000,00	1.288.671,09	98.711.328,91

2	3.466.405,31	1.579.381,26	1.887.024,05	96.824.304,86
3	4.159.686,37	1.549.188,88	2.610.497,49	94.213.807,37
4	4.991.623,64	1.507.420,92	3.484.202,73	90.729.604,65
5	5.989.948,37	1.451.673,67	4.538.274,70	86.191.329,95
6	7.187.938,05	1.379.061,28	5.808.876,77	80.382.453,18
7	8.625.525,66	1.286.119,25	7.339.406,41	73.043.046,78
8	10.350.630,79	1.168.688,75	9.181.942,04	63.861.104,74
9	12.420.756,94	1.021.777,68	11.398.979,27	52.462.125,47
10	14.904.908,33	839.394,01	14.065.514,33	38.396.611,14
11	17.885.890,00	614.345,78	17.271.544,22	21.125.066,92
12	21.463.068,00	338.001,07	21.125.066,93	-0,01

4.11 – TABLA DE AMORTIZACIÓN – GRADIENTES 2

Una pequeña empresa acuerda con el Banco Medellín un préstamo por $300 millones para ser cancelado en 18 cuotas mensuales decrecientes en $2´000.000; se pide elaborar la tabla de amortización de la deuda, considerando que el banco aplica una tasa de interés del 2% EM.

Solución

Parámetros

- Valor del préstamo ($\mathrm{V_p}$): $300´000.000
- Numero de pagos: 18
- Períodos: mensuales
- Cuotas decrecientes: $2´000.000
- Tasa de interés: 2% EM

Cálculos

Teniendo en cuenta que se trata de un gradiente aritmético decreciente se puede determinar la primera cuota (A) utilizando la fórmula (43), considerando que el gradiente es negativo

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{K}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

$$300´000.000 = A\left[\frac{1-(1+0{,}02)^{-18}}{0{,}02}\right] - \frac{2´000.000}{0{,}02}\left[\frac{1-(1+0{,}02)^{-18}}{0{,}02} - \frac{18}{(1+0{,}02)^{18}}\right]$$

$$A = 35´946.846{,}77$$

Con la primera cuota y la ley de formación se puede determinar las cuotas subsiguientes como sigue:

$$A_2 = 35'946.846{,}77 - 2'000.000 = 33'946.846{,}77$$

$$A_3 = 35'946.846{,}77 - (2 \times 2'000.000) = 31'946.846{,}77$$

$$A_4 = 35'946.846{,}77 - (3 \times 2'000.000) = 29'946.846{,}77$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$A_{17} = 35'946.846{,}77 - (16 \times 2'000.000) = 3'946.846{,}77$$

$$A_{18} = 35'946.846{,}77 - (17 \times 2'000.000) = 1'946.846{,}77$$

Considerando la tasa de interés mensual y las cuotas decrecientes se elabora la tabla de amortización, como sigue:

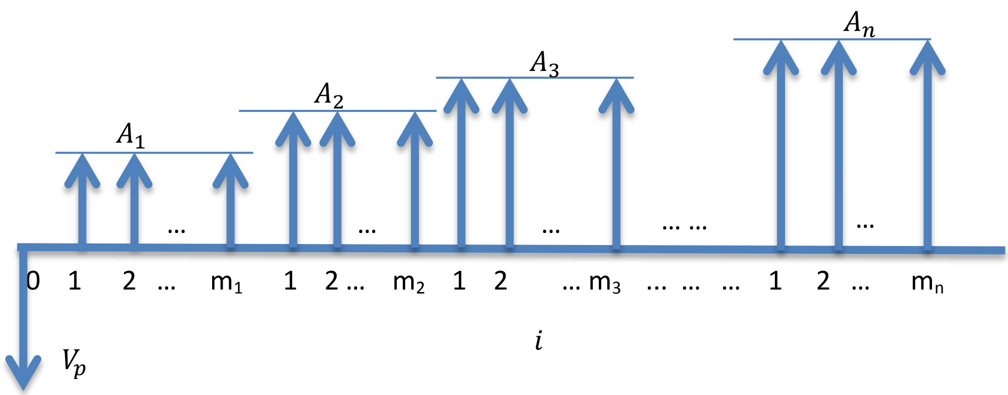
Período (k)	**Pago Mensual (A_k)**	**Interés (I_k)**	**Cuota de capital (V_k)**	**Saldo de Capital**
0	0	0	0	300.00.000,00
1	35.946.846,77	6.000.000,00	29.946.846,77	270.053.153,23
2	33.946.846,77	5.401.063,06	28.545.783,71	241.507.369,52
3	31.946.846,77	4.830.147,39	27.116.699,38	214.390.670,15
4	29.946.846,77	4.287.813,40	25.659.033,37	188.731.636,78
5	27.946.846,77	3.774.632,74	24.172.214,03	164.559.422,74
6	25.946.846,77	3.291.188,45	22.655.658,32	141.903.764,43
7	23.946.846,77	2.838.075,29	21.108.771,48	120.794.992,95
8	21.946.846,77	2.415.899,86	19.530.946,91	101.264.046,04
9	19.946.846,77	2.025.280,92	17.921.565,85	83.342.480,19
10	17.946.846,77	1.666.849,60	16.279.997,17	67.062.483,02
11	15.946.846,77	1.341.249,66	14.605.597,11	52.456.885,91
12	13.946.846,77	1.049.137,72	12.897.709,05	39.559.176,86
13	11.946.846,77	791.183,54	11.155.663,23	28.403.513,63
14	9.946.846,77	568.070,27	9.378.776,50	19.024.737,13
15	7.946.846,77	380.494,74	7.566.352,03	11.458.385,10
16	5.946.846,77	229.167,70	5.717.679,07	5.740.706,03

17	3.946.846,77	114.814,12	3.832.032,65	1.908.673,38
18	1.946.846,77	38.173,47	1.908.673,30	0,08

2.7 Amortización mediante Gradiente Escalonado

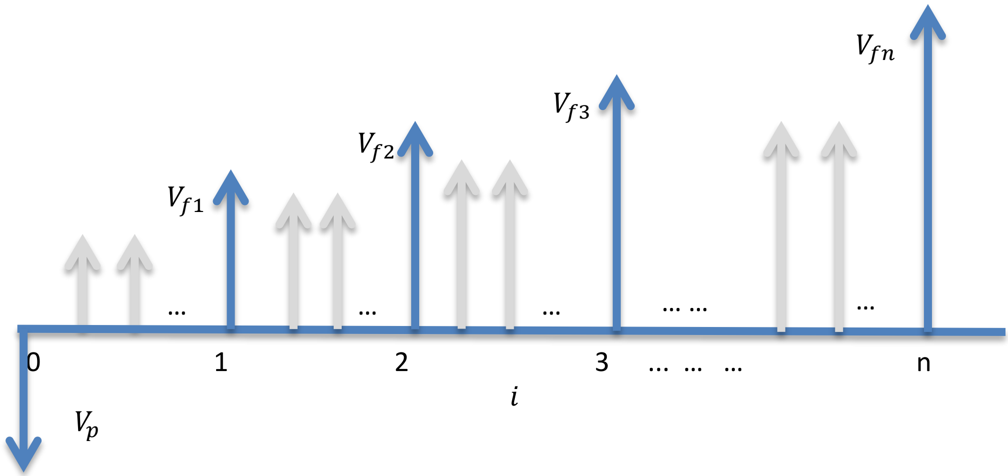
La amortización a través de pagos escalonados crecientes o decrecientes aritmética o geométricamente consiste en un sistema de pagos que combina cuotas iguales con cuotas crecientes o decrecientes. La situación sucede cuando se conserva constante la cuota durante un tiempo determinando al final del cual se incrementa o decrementa la cuota según se haya pactado; repitiéndose esta condición durante varios de períodos.

Gráfica No 4.3 – Amortización mediante Gradiente Escalonado Creciente 1



La situación para una operación con gradiente escalonado creciente se ilustra en la gráfica No 4.3. En estos casos, se procede en dos pasos, en el primero se hallan los valores finales de cada anualidad y en segundo con los valores finales se calcula el gradiente utilizando para ello los modelos vistos en los apartados anteriores; así como se ilustra en la gráfica No 4.4.

Gráfica No 4.4 – Amortización mediante Gradiente Escalonado Creciente 2



Ejemplos y Casos

4.12 – TABLA DE AMORTIZACIÓN – GRADIENTES ESCALONADOS

Una pequeña empresa acuerda con el Banco Medellín un préstamo por $120 millones para ser cancelado en cuotas mensuales, las cuales crecen anualmente de acuerdo a la inflación que se estima en promedio en un 8% anual. Elabore la tabla de amortización de la deuda, considerando que el banco aplica una tasa de interés del 1% EM; y el préstamo se pagara en 4 años.

Solución

Parámetros

- Valor del préstamo (V_p): $120´000.000
- Numero de pagos: 48 mensuales – 4 años
- Cuotas crecientes anuales: 8%
- Pagos Períodos: mensuales
- Tasa de interés: 1% EM

Cálculos

Considerando los valores anuales, se tiene un gradiente geométrico creciente para el cual se puede determinar la primera cuota (A) utilizando la fórmula (46), considerando que $i \neq G$. Esta primera cuota será el valor futuro de la anualidad del primer año; valor con el cual se podrá determinar el valor de la cuota constante para este año.

Antes del cálculo de la primera cuota es necesario, a partir del interés efectivo mensual calcular el interés efectivo anual, teniendo en cuenta que se trata que el crecimiento de la cuota es anual. Para el cálculo del interés efectivo anual, se utiliza la fórmula (19)

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}01)^{\frac{12}{1}} - 1 = 0{,}1268 = 12{,}68\%\ EA$$

Con esta tasa de interés, ahora se puede calcular el valor de la primera cuota del gradiente

$$V_p == \frac{A}{(G - i)}\left[\frac{(1 + G)^n}{(1 + i)^n} - 1\right] \quad si\ G \neq i$$

$$120´000.000 = \frac{A}{(0{,}08 - 0{,}1268)}\left[\frac{(1 + 0{,}08)^4}{(1 + 0{,}1268)^4} - 1\right] = 35´984.410{,}42$$

$$A = 35´984.410{,}42$$

Como se explicó esta primera cuota es el valor final de la anualidad de los pagos mensuales del primer año; de esta manera, se puede determinar los pagos mensuales iguales del primer año a partir de la fórmula (34):

$$V_f = A\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right]$$

$$35´984.410{,}42 = A\left[\frac{(1 + 0{,}01)^{12} - 1}{0{,}01}\right]$$

$$A = 2´837.327{,}17$$

Considerando la tasa de interés mensual, la cuota igual de los pagos en el primer año y los valores crecientes de las cuotas anualmente, se puede ahora elaborar la tabla de amortización, como sigue:

Período (k)	**Pago Mensual (A_k)**	**Interés (I_k)**	**Cuota de capital (V_k)**	**Saldo de Capital**
0	0	0	0	120.000.000,00
1	2.837.327,17	1.200.000,00	1.637.327,17	118.362.672,83
2	2.837.327,17	1.183.626,73	1.653.700,44	116.708.972,39
3	2.837.327,17	1.167.089,72	1.670.237,45	115.038.734,94

4	2.837.327,17	1.150.387,35	1.686.939,82	113.351.795,12
5	2.837.327,17	1.133.517,95	1.703.809,22	111.647.985,90
6	2.837.327,17	1.116.479,86	1.720.847,31	109.927.138,59
7	2.837.327,17	1.099.271,39	1.738.055,78	108.189.082,81
8	2.837.327,17	1.081.890,83	1.755.436,34	106.433.646,47
9	2.837.327,17	1.064.336,46	1.772.990,71	104.660.655,76
10	2.837.327,17	1.046.606,56	1.790.720,61	102.869.935,15
11	2.837.327,17	1.028.699,35	1.808.627,82	101.061.307,33
12	**2.837.327,17**	**1.010.613,07**	**1.826.714,10**	**99.234.593,23**
13	3.064.313,34	992.345,93	2.071.967,41	97.162.625,82
14	3.064.313,34	971.626,26	2.092.687,09	95.069.938,74
15	3.064.313,34	950.699,39	2.113.613,96	92.956.324,78
16	3.064.313,34	929.563,25	2.134.750,10	90.821.574,68
17	3.064.313,34	908.215,75	2.156.097,60	88.665.477,09
18	3.064.313,34	886.654,77	2.177.658,57	86.487.818,51
19	3.064.313,34	864.878,19	2.199.435,16	84.288.383,36
20	3.064.313,34	842.883,83	2.221.429,51	82.066.953,85
21	3.064.313,34	820.669,54	2.243.643,81	79.823.310,04
22	3.064.313,34	798.233,10	2.266.080,24	77.557.229,80
23	3.064.313,34	775.572,30	2.288.741,05	75.268.488,75
24	3.064.313,34	752.684,89	2.311.628,46	72.956.860,30
25	**3.309.458,41**	**729.568,60**	**2.579.889,81**	**70.376.970,49**
26	3.309.458,41	703.769,70	2.605.688,71	67.771.281,78
27	3.309.458,41	677.712,82	2.631.745,59	65.139.536,19
28	3.309.458,41	651.395,36	2.658.063,05	62.481.473,14
29	3.309.458,41	624.814,73	2.684.643,68	59.796.829,46
30	3.309.458,41	597.968,29	2.711.490,12	57.085.339,34
31	3.309.458,41	570.853,39	2.738.605,02	54.346.734,33
32	3.309.458,41	543.467,34	2.765.991,07	51.580.743,26
33	3.309.458,41	515.807,43	2.793.650,98	48.787.092,28
34	3.309.458,41	487.870,92	2.821.587,49	45.965.504,79
35	3.309.458,41	459.655,05	2.849.803,36	43.115.701,43
36	3.309.458,41	431.157,01	2.878.301,40	40.237.400,03

37	**3.574.215,08**	**402.374,00**	**3.171.841,08**	**37.065.558,95**
38	3.574.215,08	370.655,59	3.203.559,49	33.861.999,45
39	3.574.215,08	338.619,99	3.235.595,09	30.626.404,36
40	3.574.215,08	306.264,04	3.267.951,04	27.358.453,32
41	3.574.215,08	273.584,53	3.300.630,55	24.057.822,77
42	3.574.215,08	240.578,23	3.333.636,86	20.724.185,92
43	3.574.215,08	207.241,86	3.366.973,22	17.357.212,69
44	3.574.215,08	173.572,13	3.400.642,96	13.956.569,73
45	3.574.215,08	139.565,70	3.434.649,39	10.521.920,35
46	3.574.215,08	105.219,20	3.468.995,88	7.052.924,47
47	3.574.215,08	70.529,24	3.503.685,84	3.549.238,63
48	3.574.215,08	35.492,39	3.538.722,70	10.515,93

2.8 Amortización en Valores Constantes

Cuando el crédito se otorga en valor constante es necesario ajustar los valores de las cuotas y saldos de capital en un porcentaje que corresponda al índice de corrección monetaria. Considerando que la corrección varia permanentemente ya que esta depende de la inflación; lo que se hace en estos casos es realizar los cálculos teniendo en cuenta las proyecciones oficiales de inflación; lo cual, en el corto plazo, brinda una buena aproximación de los valores de la obligación.

Ejemplos y Casos

4.13 – TABLA DE AMORTIZACIÓN – EN VALORES CONSTANTES

Elaborar la tabla de amortización para un crédito que contrajo una pequeña empresa por $600 millones el cual va a cancelar en 4 pagos anuales iguales en valor constante; suponiendo una tasa de interés efectiva anual del 8%; se estima una corrección monetaria promedio del 22% por año durante la vigencia de la deuda.

Solución

Parámetros

- Valor del préstamo (V_p): $600´000.000
- Numero de pagos: 4
- Cuotas iguales constantes anuales
- Períodos: anuales
- Tasa de interés: 8% EA

Cálculos
Teniendo en cuenta que se trata de una anualidad se puede determinar la cuota constante (A) utilizando la fórmula (30):

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$600´000.000 = A\left[\frac{1-(1+0{,}08)^{-4}}{0{,}08}\right]$$

$$A = 181´152.482{,}70$$

Si se considera que la corrección monetaria es igual a cero, es decir los valores permanecen constantes, entonces la tabla de amortización quedara como se muestra a continuación:

Período (k)	**Pago Mensual (A_k)**	**Interés (I_k)**	**Cuota de capital (V_k)**	**Saldo de Capital**
0	0	0	0	600.000.000,00
1	181.152.482,70	48.000.000,00	133.152.482,70	466.847.517,30
2	181.152.482,70	37.347.801,38	143.804.681,32	323.042.835,98
3	181.152.482,70	25.843.426,88	155.309.055,82	167.733.780,16
4	181.152.482,70	13.418.702,41	167.733.780,29	-0,12

Estos valores corresponden a valores de hoy por tratarse de valores constantes; no obstante, como la corrección monetaria no es igual a cero; es necesario ajustar los pagos y los saldos de capital, con el fin de mostrar el efecto inflacionario en la operación financiera.

Corrección de los pagos:

$$Cuota\ 1 - \ A_1 = 181´152.482{,}70\ (1+0{,}22) = 221´006.028{,}90$$

$$Cuota\ 2 - \ A_2 = 181´152.482{,}70\ (1+0{,}22)^2 = 269´627.355{,}30$$

$$Cuota\ 3 - \ A_3 = 181´152.482{,}70\ (1+0{,}22)^3 = 328´945.373{,}40$$

$$Cuota\ 4 - \ A_4 = \ 181´152.482,70\ (1+0,22)^4 = 401´313.355,60$$

De la misma manera en que se ajustan las cuotas es necesario ajustar los saldos de capital.

Corrección de los saldos:

El saldo ajustado del período inicial se obtiene, ajustando el valor del préstamo con la corrección monetaria del primer año, así:

$$\boldsymbol{Saldo\ del\ periodo\ 0 = \ 600´000.000(1+0,22) = 732´000.000,00}$$

Sobre este saldo se calculan los intereses, así:

$$Intereses\ del\ periodo\ 1 = \ 732´000.000x(0,08) = 58´560.000,00$$

La amortización de capital, por su parte será igual a la cuota pagada menos los intereses:

$$Amortizacion\ de\ capital\ del\ periodo\ 1 = \ 221´006.028,90 - 58´560.000,00$$

$$Amortizacion\ de\ capital\ del\ periodo\ 1 = \ 162´446.028,90$$

De esta manera, el nuevo saldo de capital será igual al saldo anterior, menos la amortización de capital:

$$Saldo\ de\ capital\ del\ periodo\ 1 = \ 732´000.000,00 - \ 162´446.028,90$$

$$\boldsymbol{Saldo\ de\ capital\ del\ periodo\ 1 = \ 569´553.971,10}$$

Este saldo se deberá ajustar para determinar el valor que tendrá la deuda al final del período:

$$Saldo\ del\ periodo\ 1 = \ 569´553.971,10(1+0,22) = 694´855.844,70$$

Sobre este saldo se calcula el interés:

$$Intereses\ del\ periodo\ 2 = \ 694´855.844,70x(0,08) = 55´588.467,58$$

La amortización de capital, por su parte será igual a la cuota pagada menos los intereses:

$$Amortizacion\ de\ capital\ del\ periodo\ 2 = \ 269´627.355,30 - 55´588.467,58$$

$$Amortizacion\ de\ capital\ del\ periodo\ 2 = \ 214´038.887,70$$

De esta manera, el nuevo saldo de capital será igual al saldo anterior, menos la amortización de capital:

$$Saldo\ de\ capital\ del\ periodo\ 2 = \ 694´855.844{,}70 - \ 214´038.887{,}70$$

$$\boldsymbol{Saldo\ de\ capital\ del\ periodo\ 2 = \ 480´816.957{,}0}$$

Este saldo se deberá ajustar para determinar el valor que tendrá la deuda al final del período:

$$Saldo\ del\ periodo\ 2 = 480´816.957{,}0x(1 + 0{,}22) = 586´596.687{,}5$$

Utilizando el procedimiento anterior se puede construir la tabla de amortización, en la cual aparte de las columnas se adiciona una nueva que muestra el saldo ajustado, la tabla quedara como sigue:

Período (k)	**Pago Mensual (A_k)**	**Interés (I_k)**	**Cuota de capital (V_k)**	**Saldo de Capital**	**Saldo de Capital ajustado**
0	0	0	0	600.000.000,00	732.000.000,00
1	221.006.028,89	58.560.000,00	162.446.028,89	569.553.971,11	694.855.844,75
2	269.627.355,25	55.588.467,58	214.038.887,67	480.816.957,08	586.596.687,64
3	328.945.373,41	46.927.735,01	282.017.638,39	304.579.049,24	371.586.440,07
4	401.313.355,56	29.726.915,21	371.586.440,35	-0,28	-0,34

3. Sistemas de Capitalización

Las operaciones financieras de capitalización tienen que ver con reunir un capital (ahorro) a través de pagos periódicos que pueden ser iguales o no. De esta forma, la tabla de capitalización muestra período a período la forma como se acumula el capital que se quiere ahorrar.

La tabla de capitalización tiene similitud con la tabla de amortización; está formada por cinco columnas en las cuales se consigna: el período $(\boldsymbol{k})$, el deposito o pago $(\boldsymbol{D_k})$ que se realiza, los intereses ganados en el período $(\boldsymbol{I_k})$, el incremento de capital $(\boldsymbol{In_k})$ del período que es igual al depósito más los intereses y finalmente el saldo acumulado $(\boldsymbol{V_f})$ en el período. En la tabla No 4.2 se muestran las reglas para determinar cada una de las columnas de la tabla de capitalización

Tabla No 4.2 – Tabla de Capitalización

Período (k)	Deposito (D_k)	Interés (I_k)	Incremento (In_k)	Capital Acumulado (V_f)
1	D_1		$In_1 = D_1$	$V_{f1} = In_1$
2	D_2	$I_2 = V_{f1} \times i$	$In_2 = D_2 + I_2$	$V_{f2} = V_{f1} + In_2$
…	…	…	…	…
n-1	D_{n-1}	$I_{n-1} = V_{f(n-2)} \times i$	$In_{(n-1)} = D_{(n-1)} + I_{(n-1)}$	$V_{f(n-1)} = V_{f(n-2)} + In_{(n-1)}$
n	D_n	$I_n = V_{f(n-1)} \times i$	$In_n = D_n + I_n$	$V_{fn} = V_{f(n-1)} + In_n$

Ejemplos y Casos

4.14 – Tabla de Capitalización

Elaborar la tabla de capitalización del ahorro de un padre de familia que quiere reunir 30´000.000 en 15 meses, realizando depósitos mensuales en una cuenta que reconoce un interés de 0,5% EM.

Solución

Parámetros

- Valor del ahorro (V_f): $30´000.000
- Numero de pagos: 15
- Depósitos iguales
- Períodos: mensuales
- Tasa de interés: 0,5% EM

Cálculos

Teniendo en cuenta que se trata de una anualidad y que se tiene el valor futuro, se puede determinar la cuota constante (A) utilizando la fórmula (34):

$$V_f = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$30´000.000 = A\left[\frac{(1+0{,}005)^{15}-1}{0{,}005}\right]$$

$$A = 1´930.930{,}92$$

Con la cuota y la tasa de interés, se puede realizar la tabla de capitalización siguiendo las reglas de la tabla 4.2

Período (k)	Deposito (D_k)	Interés (I_k)	Incremento (In_k)	Capital acumulado (V_f)
1	1.930.930,92	0,00	1.930.930,92	1.930.930,92
2	1.930.930,92	9.654,65	1.940.585,57	3.871.516,49
3	1.930.930,92	19.357,58	1.950.288,50	5.821.805,00
4	1.930.930,92	29.109,02	1.960.039,94	7.781.844,94
5	1.930.930,92	38.909,22	1.969.840,14	9.751.685,09
6	1.930.930,92	48.758,43	1.979.689,35	11.731.374,43
7	1.930.930,92	58.656,87	1.989.587,79	13.720.962,22
8	1.930.930,92	68.604,81	1.999.535,73	15.720.497,96
9	1.930.930,92	78.602,49	2.009.533,41	17.730.031,37
10	1.930.930,92	88.650,16	2.019.581,08	19.749.612,44
11	1.930.930,92	98.748,06	2.029.678,98	21.779.291,42
12	1.930.930,92	108.896,46	2.039.827,38	23.819.118,80
13	1.930.930,92	119.095,59	2.050.026,51	25.869.145,32
14	1.930.930,92	129.345,73	2.060.276,65	27.929.421,96
15	1.930.930,92	139.647,11	2.070.578,03	29.999.999,99

3.1 Capitalización diferida

En este tipo de operaciones, varios períodos antes de que se liquide la inversión o ahorro, se suspenden los pagos. Considerando lo anterior, el capital se sigue acumulando debido únicamente al interés que gana el capital acumulado hasta el momento en que se suspende los depósitos.

Ejemplos y Casos

4.15 – TABLA DE CAPITALIZACIÓN – DIFERIDA

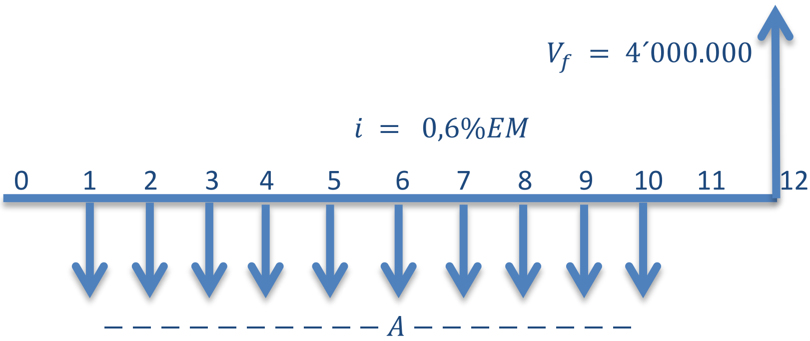
Un padre de familia debe tener ahorrado a final de año la suma de $4´000.000 para pagar la matrícula de la universidad de su hijo en enero. Si solo puede realizar los primeros 10 depósitos mensuales en un fondo que paga un interés efectivo mensual del 0,6%.

a) ¿Cuál será el valor de los depósitos mensuales, considerando que estos son iguales
b) Elaborar la tabla de capitalización para el ahorro propuesto.

Solución
Parámetros

- Valor del ahorro (V_f): $4´000.000
- Numero de pagos: 10
- Número de períodos: 12
- Depósitos iguales
- Períodos: mensuales
- Tasa de interés: 0,6% EM

Representación gráfica.



Cálculos
Para determinar el valor de los depósitos (A), se utiliza la fórmula (34) para determinar el valor futuro en el período 10:

$$V_{f10} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$V_{f10} = A\left[\frac{(1+0{,}006)^{10} - 1}{0{,}006}\right]$$

$$V_{f10} = 10{,}2743\,A$$

Lo siguiente es hallar el valor equivalente de este valor en el período 12, el cual debe tener el valor del ahorro esperado, es decir \$4´000.000. Para esto se utiliza la fórmula (13) y se igual el resultado al ahorro.

$$10{,}2743\,A \times (1 + 0{,}006)^2 = 4´000.000$$

$$A = 384.688{,}33$$

Con la cuota y la tasa de interés, se puede realizar la tabla de capitalización siguiendo las reglas de la tabla 4.2; considerando que los dos últimos períodos no realizan depósitos

Período (k)	**Deposito (D_k)**	**Interés (I_k)**	**Incremento (In_k)**	**Capital acumulado (V_f)**
1	384.688,33	0,00	384.688,33	384.688,33
2	384.688,33	2.308,13	386.996,46	771.684,79
3	384.688,33	4.630,11	389.318,44	1.161.003,23
4	384.688,33	6.966,02	391.654,35	1.552.657,58
5	384.688,33	9.315,95	394.004,28	1.946.661,85
6	384.688,33	11.679,97	396.368,30	2.343.030,15
7	384.688,33	14.058,18	398.746,51	2.741.776,67
8	384.688,33	16.450,66	401.138,99	3.142.915,66
9	384.688,33	18.857,49	403.545,82	3.546.461,48
10	384.688,33	21.278,77	405.967,10	3.952.428,58
11	0,00	23.714,57	23.714,57	3.976.143,15
12	0,00	23.856,86	23.856,86	4.000.000,01

3.2 Capitalización con cuotas extras pactadas

En este tipo de operaciones, además de los depósitos o ahorros corrientes, se pactan uno o varios pagos extras. Estas cuotas, igual que las corrientes, se acumulan al capital; por lo demás las reglas de formación de la tabla siguen siendo las mismas que en los casos anteriores.

Ejemplos y Casos

4.16 – Tabla de Capitalización – Con cuotas Extras Pactadas

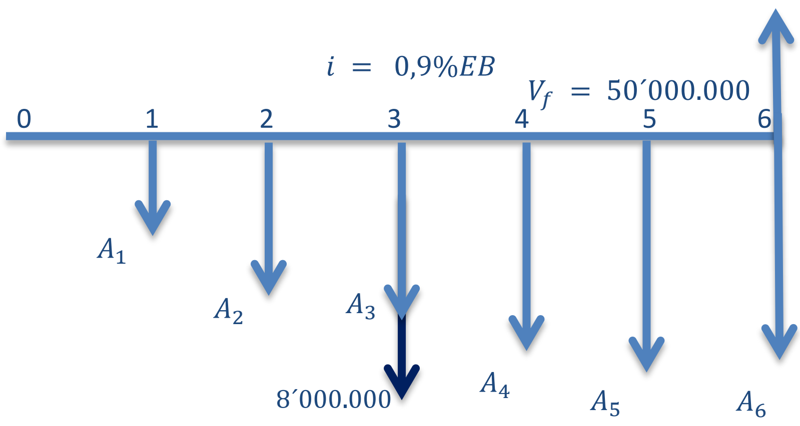
Un empresario está empeñado en capitalizar su empresa; para esto se ha propuesto reunir $50´000.000 en un año. El estima, de acuerdo a sus ventas, que bimensualmente podrá hacer depósitos crecientes en un 10% y un ahorro extra de $8´000.000 en el tercer bimestre. Elaborar la tabla de capitalización, si un fondo de inversión le reconoce una tasa efectiva de interés del 0,9% EB.

Solución

Parámetros

- Valor del ahorro (V_f): $50´000.000
- Numero de pagos: 6
- Número de períodos: 6 y un pago extra en el período 3
- Depósitos crecientes en un 10%
- Períodos: bimensuales
- Tasa de interés: 0,9% EB

Representación gráfica.



Cálculos

Para determinar el valor de la primera cuota, se aplica la ecuación de valor con ff en el período 6; para esto se utiliza la fórmula (47), con $G \neq i$, para determinar el valor futuro del gradiente y la fórmula (13) para determinar el valor futuro de la cuota extra Ce

$$V_{f6} = \frac{A}{(G-i)}[(1+G)^n - (1+i)^n] + Ce\,(1+i)^{n1}$$

$$50'000.000 = \frac{A}{(0{,}10-0{,}009)}[(1+0{,}1)^6 - (1+0{,}009)^6] + 8'000.000\,(1+0{,}009)^3$$

$$A = 5'307.832{,}36$$

Teniendo en cuenta esta primera cuota y la ley de formación del gradiente se determinan las demás cuotas:

$$A_2 = 5'307.832{,}36\,(1+0{,}1) = 5'838.615{,}60$$

$$A_3 = 5'307.832{,}36\,(1+0{,}1)^2 = 6'422.477{,}15$$

$$A_4 = 5'307.832{,}36\,(1+0{,}1)^3 = 7'064.724{,}87$$

$$A_5 = 5'307.832{,}36\,(1+0{,}1)^4 = 7'771.197{,}35$$

$$A_6 = 5'307.832{,}36\,(1+0{,}1)^5 = 8'548.317{,}10$$

Con las cuotas y la tasa de interés, se puede realizar la tabla de capitalización siguiendo las reglas de la tabla 4.2, considerando el pago extra de 8´000.000 en el período 3

Período (*k*)	Deposito (D_k)	Interés (I_k)	Incremento (In_k)	Capital acumulado (V_f)
1	5.307.832,36	0,00	5.307.832,36	5.307.832,36
2	5.838.615,60	47.770,49	5.886.386,09	11.194.218,45
3	14.422.477,16	100.747,97	14.523.225,12	25.717.443,57
4	7.064.724,87	231.456,99	7.296.181,86	33.013.625,43
5	7.771.197,36	297.122,63	8.068.319,99	41.081.945,42
6	8.548.317,09	369.737,51	8.918.054,60	50.000.000,02

3.3 Fondos de amortización

Este tipo de operaciones tiene que ver con la realización de ahorros para cubrir un compromiso financiero en una fecha futura; los depósitos realizados ganan intereses y cubren la totalidad de la deuda pactada en el mediano o largo plazo.

Para la salvaguarda de los depósitos usualmente se utiliza la figura de la fiducia. De acuerdo a la Superintendencia Financiera de Colombia, las operaciones fiduciarias son actos jurídicos, por medio del cual una persona llamada fiduciante o fideicomitente transfiere uno o más bienes a otra llamada fiduciaria con el propósito de que ésta cumpla con ellos una finalidad específica, bien sea en beneficio del fideicomitente o de un tercero; es decir, que la destinación de los ahorros cubran el compromiso acordado a futuro.

Ejemplos y Casos

4.17 – Tabla de Capitalización – Fondos de Amortización

Una pequeña empresa se compromete a pagar la suma de 40´000.000 en un año como cuota inicial para la compra de una bodega donde operara próximamente. Para esto el constructor-vendedor establece una fiducia que exige pagos trimestrales iguales, para cubrir la cuota inicial. Se pide elaborar la tabla de capitalización, si la fiducia reconoce una tasa efectiva de interés del 1,8% ET.

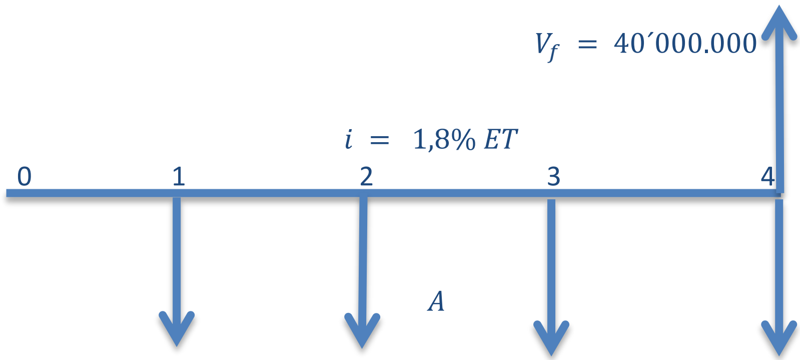
Solución

Parámetros

- Valor de la deuda a futuro (V_f): $40´000.000
- Numero de pagos: 4
- Depósitos iguales
- Períodos: trimestrales
- Tasa de interés: 1,8% ET

Representación gráfica.

En la siguiente gráfica se ilustra la operación financiera



Cálculos

De la gráfica se deduce que para determinar el valor de la cuota, se puede aplicar la ecuación de valor con $ff = 4$; para esto se utiliza la fórmula (34) para determinar el valor futuro de la anualidad.

$$V_{f4} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$40´000.000 = A\left[\frac{(1+0{,}018)^4 - 1}{0{,}018}\right]$$

$$A = 9´734.013{,}62$$

Teniendo en cuenta esta cuota y la tasa de interés, se puede realizar la tabla de capitalización como sigue:

Período (k)	Deposito (D_k)	Interés (I_k)	Incremento (In_k)	Capital acumulado (V_f)
1	9.734.013,62	0,00	9.734.013,62	9.734.013,62
2	9.734.013,62	175.212,25	9.909.225,87	19.643.239,49
3	9.734.013,62	353.578,31	10.087.591,93	29.730.831,42
4	9.734.013,62	535.154,97	10.269.168,59	40.000.000,01

Criterios de Evaluación de Proyectos

UNIDAD 5: CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE PROYECTOS

OBJETIVO

Al finalizar la unidad los estudiantes estarán en capacidad de evaluar las bondades financieras (rentabilidad) de realizar una iniciativa de inversión utilizando para ello diferentes criterios de evaluación.

CONTENIDO

Introducción
1. *Tasa mínima atractiva de retorno (TMAR) o tasa de descuento*
2. *Criterios de Evaluación de proyectos*
3. *Análisis de sensibilidad*

Introducción

Hasta el momento se han analizado las operaciones financieras teniendo en cuenta la relación entre el prestamista y el prestatario; en esta unidad se estudia la relación entre los proyectos de inversión y los inversionistas.

Cuando un inversionista tiene varias alternativas de inversión surge la necesidad de determinar cuál de ellas es la más atractiva; inicialmente se puede afirmar que una iniciativa es atractiva si ofrece una Tasa Minina Aceptable de Rentabilidad $(TMAR)$, considerando alternativas de inversión similares y el mismo nivel de riesgo.

En la unidad se estudiaran cuatro criterios para comparar las alternativas con diferentes series de pagos y rentas. Estos criterios son: el Valor Presente Neto (VPN), el Costo Anual Equivalente (CAE), la Tasa Interna de Retorno (TIR), la Tasa Única de Retorno (TUR) y la relación Beneficio/Costo (B/C). Todos ellos calculados o comparados con la Tasa Mínima Aceptable de Rentabilidad $(TMAR)$.

Cualquiera de los criterios anteriores es válido para evaluar proyectos de inversión. Lo que se debe determinar es si las iniciativas superan la Tasa Mínima Aceptable de Rentabilidad $(TMAR)$ que espera el inversionista. O lo que es igual, confirmar que la participación en el proyecto genera valor al inversionista.

Para la evaluación de cada alternativa de inversión, previamente se deben determinar: los ingresos, las inversiones, los costos y gastos durante el horizonte de evaluación del proyecto. Con estos parámetros se fórmula el flujo de caja, el cual combinado con la ecuación de valor, permite calcular, utilizando cualquiera de los criterios mencionados, la evaluación financiera de las alternativas de inversión.

Adicionalmente, a los parámetros anteriores, se debe determinar la Tasa Mínima Aceptable de Rentabilidad; la cual corresponde al costo de capital del emprendimiento.

1. Tasa Mínima Aceptable de Rentabilidad (TMAR) o tasa de descuento

Antes de analizar los diferentes criterios de evaluación, es necesario determinar el Costo del Capital o Tasa de Descuento con la cual se trataran los diferentes valores monetarios en el tiempo. Se denomina "Costo del Capital" (en inglés: Weighted Average Cost of Capital) a la tasa de descuento que se utiliza para actualizar el flujo de caja del proyecto.

Para el caso en que los recursos financieros necesarios para el proyecto provengan solo del inversionista, la tasa de descuento corresponde a la rentabilidad que éste le exigirá al proyecto por renunciar a un uso alternativo de esos recursos en otros proyectos con nivel de riesgo similar (Costo de Oportunidad).

No obstante, en general, los proyectos son financiados con recursos que provienen de recursos del inversionista y de préstamos o créditos del sector financiero. Bajo esta consideración la tasa de descuento del proyecto se calcula como una ponderación de acuerdo a la participación de los inversionistas (costo de oportunidad) y los créditos de financiación (costo de la deuda).

De esta forma el costo de capital (K_o) ponderado se puede calcular, como:

$$K_o = \frac{(K_d \times D)}{(D+P)} + \frac{(K_e \times P)}{(D+P)} \quad (50)$$

De donde:

K_o: Costo de capital o tasa de descuento
K_d: Costo de la deuda
K_e: Costo del Inversionista o costo de oportunidad

D: Monto de la deuda
P: Monto aportado por el inversionista (Patrimonio)

1.1 Costo de la Deuda

El costo de la deuda son los intereses que se pagan por los créditos que se toman para financiar los proyectos; este costo, antes de impuesto, se representa por la tasa de interés (K') que cobra la entidad financiera. Si se tiene en cuenta la ley tributaria que permite descontar estos costos de la utilidad disminuyendo así el pago de impuestos, se puede determinar que el costo real de la deuda K_d se puede calcular, como:

$$K_d = K'(1-t) \qquad (51)$$

De donde:

K_d: Costo de la deuda
t: Tasa de impuesto
K': Tasa de interés que se paga por la deuda

1.2 Costo del Capital Propio

Se define como la tasa asociada con la mejor oportunidad de inversión considerando las demás alternativas de riesgo similar que se deben abandonar por destinar los recursos al proyecto que se estudia; de esta forma este es el costo de oportunidad del inversionista.

El costo de capital propio (K_e) se calcula como:

$$K_e = R_f + R_p \quad (52)$$

De donde:

K_e: Costo del Capital del Inversionista o costo de oportunidad

R_f: Tasa libre de riesgo
R_p: Prima por el riesgo propio del negocio, asociado el proyecto

La tasa libre de riesgo R_f, está asociada a la tasa de interés que reconocen los documentos de inversión colocados en el mercado de capitales por los gobiernos. A su vez la tasa o Prima de Riesgo R_p se calcula como la media observada históricamente entre la rentabilidad del mercado (R_m) y la tasa libre de riesgo, es decir:

$$R_p = \beta(R_m - R_f) \quad (53)$$

Donde β es el factor de riesgo sistemático del negocio y tiene los siguientes significados:

Si $\beta = 1$, entonces el riesgo es similar al riesgo promedio del mercado

Si $\beta < 1$, entonces el riesgo es menor que el riesgo promedio del mercado

Si $\beta > 1$, entonces el riesgo es mayor que el riesgo promedio del mercado

Factor de riesgo sistemático del negocio - β -

Existen muchas publicaciones especializadas que calculan los β de las empresas y sectores económicos; siendo estos últimos muy útiles para el análisis de los proyectos de Inversión.

Forma alternativa de calcular el costo de capital propio

Una forma alternativa de calcular el costo de capital del inversionista, para el caso de un proyecto que se evalúa para una empresa en funcionamiento, es el siguiente:

$$K_e = \left(\frac{D_v}{P_r}\right) + g \quad (54)$$

De donde:

g: Tasa estimada de crecimiento
D_v: Dividendo pagado por acción
P_r: Precio de cada acción

1.3 Tasa de descuento corriente y constante

Si la información del flujo de caja se encuentra a precios constantes, para la evaluación se debe utilizar la tasa de descuento constante o real; es decir, la tasa deflactada. Por su parte, si la información está dada en precios corrientes, la tasa de descuento debe ser la tasa de interés corriente, comúnmente denominada tasa de interés de mercado.

Las tasas de Interés constante y corriente están relacionadas matemáticamente, como:

$$1 + i_c = (1 + i_r)(1 + f) \quad (55)$$

De donde:

i_c: Tasa de Interés corriente
i_r: Tasa de Interés Real o constante
f: Inflación

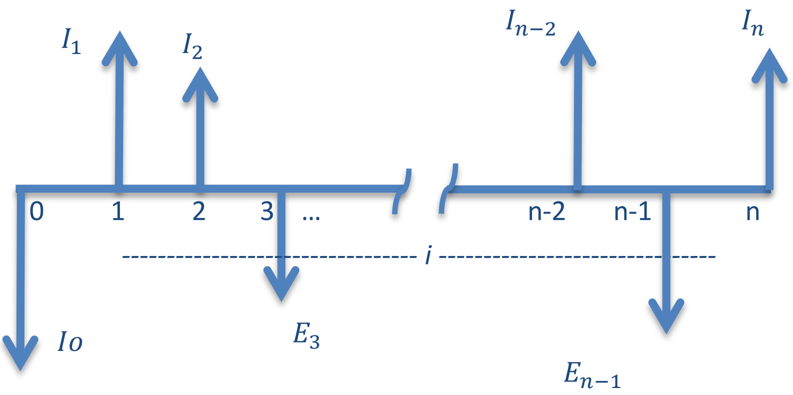
2. Criterios de Evaluación de Proyectos

2.1 Valor presente neto (VPN)

Este método es de uso común ya que a través de él se cuantifica en pesos de hoy los ingresos y egresos estimados durante el período de evaluación del proyecto, lo cual permite visualizar desde el punto de vista financiero las bondades de realizar o no la iniciativa de inversión.

El Valor Presente Neto (VPN) de un flujo de caja descontado a una tasa de Interés i –Tasa de descuento del proyecto- es igual: a menos la Inversión inicial, más la sumatoria del valor presente de los ingresos netos y menos la sumatoria del valor presente de los egresos netos. O lo que es igual, a la sumatoria de los valores presentes del flujo de caja descontados a una tasa de interés i.

Gráfica No 5.1 – Flujo de Caja del Proyecto



$$VPN(i) = I_o + \sum_{j=1}^{n} V_P I\,(i)_j - \sum_{j=1}^{n} V_P E(i)_j \quad Para\, j = 1, 2 \ldots n; \quad (56)$$

$$VPN(i) = I_o + \sum_{j=1}^{n} \frac{I_j}{(1+i)^j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{E_j}{(1+i)^j} \quad Para\, j = 1, 2 \ldots n; \quad (57)$$

De donde:

$V_P I\,(i)_j$: Valor Presente del Ingreso j descontado a una tasa de Interés i

$V_P E(i)_j$: Valor Presente del egreso j descontado a una tasa de Interés i

I: Ingresos del proyecto – Flujos de caja positivos

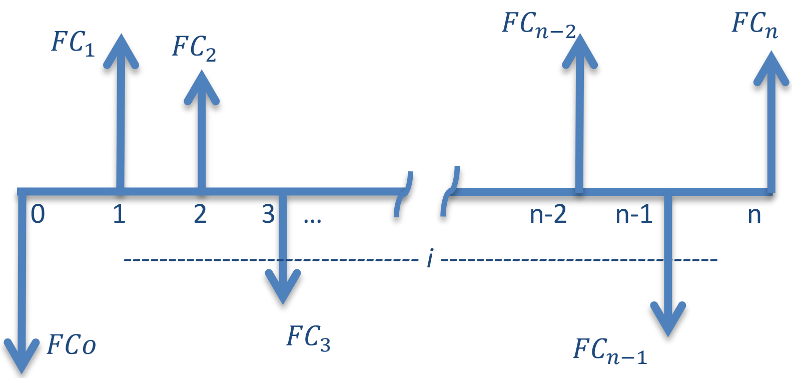
E: Egresos del Proyecto – Flujos de caja negativos

Io: Valor del Flujo de Caja en el año 0 –Inversión

i: Tasa de Descuento del proyecto

Considerando los valores netos del flujo de caja el Valor Presente Neto se puede calcular como:

Gráfica No 5.2 – Valores Netos del Flujo de Caja del Proyecto



$$VPN(i) = \sum_{j=0}^{n} \frac{FC_j}{(1+i)^j} \; Para\; j = 0, 1, 2 \ldots n; \quad (58)$$

Interpretación del Valor Presente Neto

El resultado del VPN puede ser igual, menor o mayor a cero, en cada caso el resultado se puede interpretar como:

- Si $VPN(i) < 0$ significa que el proyecto no se justifica desde el punto de vista financiero, ya que lo que se invertirá estará rindiendo menos que i (Costo de Capital o Tasa de Descuento). Por consiguiente, el proyecto no debe aceptarse, sino hay otra consideración.
- Si $\mathrm{VPN(i)} = 0$ significa que lo que se invertirá estará rindiendo exactamente i (Costo de Capital o Tasa de Descuento). Por consiguiente, el proyecto se puede aceptar, si no hay otra consideración.
- Si $VPN(i) > 0$ significa que lo que se invertirá estará rindiendo más de i (Costo de Capital o Tasa de Descuento). Y por consiguiente, el proyecto se puede aceptar, si no hay otra consideración

Aplicaciones del Valor Presente Neto

El método puede utilizarse para evaluarse proyectos individuales o tomar la decisión entre varias alternativas de inversión; en los siguientes apartados se estudian varias aplicaciones prácticas de este criterio de evaluación.

2.1.1 Proyectos Individuales

En este caso se debe determinar el VPN descontado a la Tasa Mínima Aceptable de Rentabilidad (TMAR o Costo de Capital). El resultado debe servir de base para tomar la decisión de ejecución del proyecto, para cuando sea financieramente viable. La aplicación se ilustra a través de los siguientes dos ejemplos:

Ejemplos y Casos

5.1 – VALOR PRESENTE NETO – PROYECTOS INDIVIDUALES 1

Un proyecto tiene los siguientes resultados económicos: una inversión inicial por $8´000.000 y de $4´500.000 al final del primer año; a partir del año 3 y hasta el año 5 tiene los siguientes ingresos netos: 4´0000.000, $4´500.000, y $7´000.000. Evaluar si el proyecto es viable financieramente para:

a) Para un costo de capital del 6%

b) Para un costo de capital del 5%.

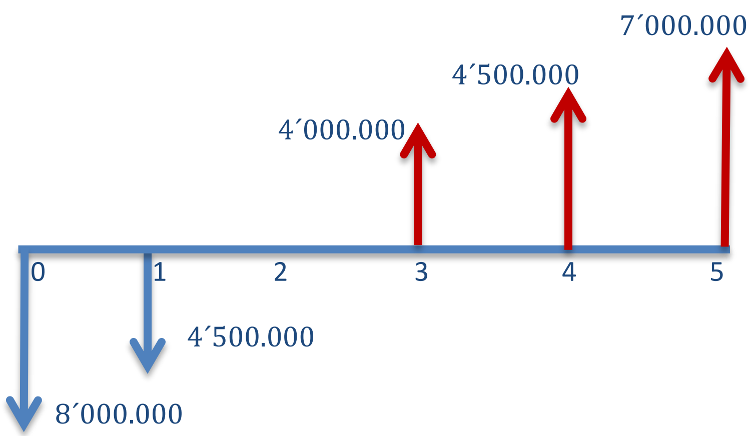
Solución

Parámetros

- Inversión año 0: 8´000.000
- Inversión año 1: 4´500.000
- Ingresos años 3, 4 y 5: 4´0000.000, $4´500.000, y $7´000.000
- Costo de Capital o Tasa Mínima de Rentabilidad: 6% y 5%

Representación gráfica.

Con los resultados económicos se construye el flujo de caja, teniendo en cuenta los ingresos como flujos positivos y los egresos como negativos.



Cálculos

Para hallar el Valor Presente Neto (VPN) se aplica la fórmula (58), utilizando los costos de capital o tasas de descuento para cada caso.

$$VPN(i) = \sum_{j=0}^{n} \frac{FC_j}{(1+i)^j} \quad Para\ j = 1, 2 \ldots n;$$

a) Para una $TMAR = i = 6\%$

$$VPN(6\%) = -8´000.000 - \frac{4´500.000}{(1+0,06)^1} + \frac{4´000.000}{(1+0,06)^3} + \frac{4´500.000}{(1+0,06)^4} + \frac{7´000.000}{(1+0,06)^5}$$

$$VPN(6\%) = -91.577,90$$

Respuesta
Lo anterior significa que el proyecto no es viable financieramente para esta tasa de descuento, considerando que el proyecto a pesos de hoy le reportaría una pérdida de $91.577 y la rentabilidad estaría por debajo de la esperada.

b) Para una $TMAR\ i = 5\%$

$$VPN(5\%) = -8´000.00 - \frac{4´500.000}{(1+0,05)^1} + \frac{4´000.000}{(1+0,05)^3} + \frac{4´500.000}{(1+0,05)^4} + \frac{7´000.000}{(1+0,05)^5}$$

$$VPN(5\%) = 356.480,41$$

Respuesta
Lo anterior significa que el proyecto es viable financieramente para esta tasa de descuento considerando que el proyecto a pesos de hoy le reportaría una ganancia de $356.480 y la rentabilidad estaría por encima de la esperada

5.2 – VALOR PRESENTE NETO – PROYECTOS INDIVIDUALES 2

El gerente de producción estudia la adquisición de una maquina cuyo costo se estima en $700 millones, con una vida útil de 4 años y valor de salvamento de $400 millones. Con la adquisición de esta máquina se planean ingresos de $500 millones anuales y costos de operación y mantenimiento por $150 millones los cuales crecerán $30 millones anualmente. Se pide evaluar el proyecto, considerando:

a) Un costo de capital del 28%
b) Un costo de capital del 40%.

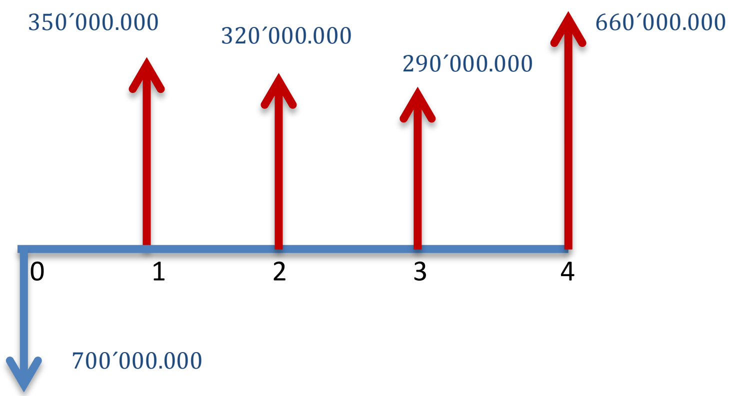
Solución
Parámetros
- Inversión año 0: $700´000.000

- Valor de salvamento: $400´000.000
- Ingresos anuales: $500´000.000
- Costo Anual de Mantenimiento: $150´000.000, Crecimiento: $30´000.000 anuales
- Vida Útil: 4 años

Representación gráfica.

Con los resultados económicos suministrados se construye el flujo de caja, teniendo en cuenta los ingresos, inversión y costos de operación:

Concepto	Inversión	1	2	3	4
Más Ingresos		500´000.000	500´000.000	500´000.000	500´000.000
Menos Maquinaria (Inversión)	-700´000.000	0	0	0	0
Mas Valor de salvamento					400´000.000
Menos Costos de Operación y Mantenimiento		150´000.000	180´000.000	210´000.000	240´000.000
FLUJO DE CAJA	(700.000.000)	350.000.000	320.000.000	290.000.000	660.000.000



Cálculos

Para hallar el Valor Presente Neto (VPN) se aplica la fórmula (58), utilizando los costos de capital (tasas de descuento) para cada una de los costos de capital dados.

$$VPN(i) = \sum_{j=0}^{n} \frac{FC_j}{(1+i)^j} \quad Para\ j = \ 1,2 \dots n;$$

a) Para el costo de capital, $i = 28\%$

$$VPN(28\%) = -700´000.00 - \frac{310´000.000}{(1+0{,}28)^1} + \frac{280´000.000}{(1+0{,}28)^2} + \frac{250´000.000}{(1+0{,}28)^3} + \frac{220´000.000}{(1+0{,}28)^4}$$

$$VPN(28\%) = 152´901.935{,}58$$

Respuesta
Lo anterior significa que el proyecto es viable financieramente para cuando el costo de capital es del 28% considerando que el proyecto a pesos de hoy le reportaría una utilidad de $152´901.935,58 y la rentabilidad estaría por encima de la esperada.

b) Para el costo de capital, $i = 40\%$

$$VPN(40\%) = -700´000.00 - \frac{310´000.000}{(1+0{,}20)^1} + \frac{280´000.000}{(1+0{,}20)^2} + \frac{250´000.000}{(1+0{,}20)^3} + \frac{220´000.000}{(1+0{,}20)^4}$$

$$VPN(20\%) = -9´246.147{,}44$$

Respuesta
Lo anterior significa que el proyecto no es viable financieramente para cuando el costo de capital es del 40% considerando que el proyecto a pesos de hoy reportaría una pérdida de $-9´246.147,44 y la rentabilidad estaría por debajo de la esperada.

2.1.2 Alternativas Mutuamente Excluyentes con Igual Vida Útil

En algunas ocasiones el administrador se ve ante la disyuntiva de seleccionar entre varias alternativas de inversión para la solución de un problema; en este caso, la escogencia de un proyecto excluye la selección de las demás alternativas. Para la evaluación de los diferentes proyectos se considera que todos ellos tienen la misma vida útil. La aplicación se ilustra a través de los siguientes ejemplos.

Ejemplos y Casos

5.3 – VPN – Alternativas Mutuamente Excluyentes con Igual Vida Útil 1

Un gerente de producción tiene la opción de remplazar 20 operarios, que tienen un costo de $250´000.000 anuales; por una maquina automática que tendrá un costo inicial de $550´000.000 y costos anuales de mantenimiento de $80´000.000. Con esta alternativa se estima que durante los 5 años de vida útil de la máquina, la producción y venta de los productos que hoy en día es 10.000 se podrá incrementar en un 5% anual. El precio de venta del producto es de $35.000 por unidad y no variara durante los 5 años. Considerando un costo de capital del 25% anual; y sin ninguna otra consideración que la financiera, ¿Cuál debería ser la decisión del gerente?

Solución

Parámetros

<u>Alternativa 0: No hacer nada.</u>

- Costos Anuales: $250´000.000
- Ingresos: $350´000.000

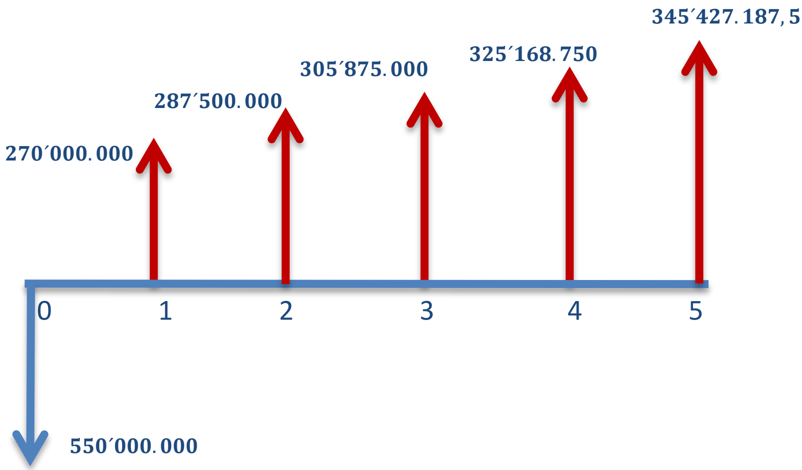
<u>Alternativa 1: Compra de Maquinaria</u>

- Inversión: $550´000.000
- Costo Anual de Mantenimiento: $80´000.000
- Ingresos anuales: $350´000.000, Incrementos del 5% anual
- Vida Útil: 5 años
- Costo de capital: 25% anual

Representación gráfica.

Alternativa 1: Adquisición de la maquina

	0	1	2	3	4	5
Inversión	(550.000.000)					
Ingresos		350.000.000	367.500.000	385.875.000	405.168.750	425.427.187,50
Costos		(80.000.000)	(80.000.000)	(80.000.000)	(80.000.000)	(80.000.000,00)
Flujo de caja	**(550.000.000)**	**270.000.000**	**287.500.000**	**305.875.000**	**325.168.750**	**345.427.187,50**



Cálculos

Para hallar el Valor Presente Neto (VPN) se aplica la fórmula (58), utilizando el costo de capital del 25%.

$$VPN(i) = \sum_{j=0}^{n} \frac{FC_j}{(1+i)^j} \; Para \; j = 1, 2 \ldots n;$$

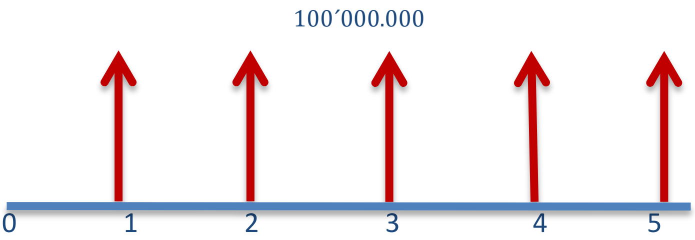
Para un Costo de Capital de $i = 25\%$

$$VPN(25\%) = -550´000.00 + \frac{270´000.000}{(1+0{,}25)^1} + \frac{287´500.000}{(1+0{,}25)^2} + \frac{305´875.000}{(1+0{,}25)^3} + \frac{325´168.750}{(1+0{,}25)^4} + \frac{345´427.187{,}5}{(1+0{,}25)^5}$$

$$VPN(25\%) = 252´986.700{,}80$$

Alternativa 0: No hacer nada.

	0	1	2	3	4	5
Ingresos		350.000.000	350.000.000	350.000.000	350.000.000	350.000.000
Costos		(250.000.000)	(250.000.000)	(250.000.000)	(250.000.000)	(250.000.000)
Flujo de caja	-	100.000.000	100.000.000	100.000.000	100.000.000	100.000.000



Cálculos

Para hallar el VPN se aplica la fórmula (58), utilizando el costo de capital del 25%.

$$VPN(i) = \sum_{j=0}^{n} \frac{FC_j}{(1+i)^j} \; Para \; j = \; 1,2 \ldots n;$$

Para un Costo de Capital de $i \; = \; 25\%$

$$VPN(25\%) = \frac{100´000.000}{(1+0{,}25)^1} + \frac{100´000.000}{(1+0{,}25)^2} + \frac{100´000.000}{(1+0{,}25)^3} + \frac{100´000.000}{(1+0{,}25)^4} + \frac{100´000.000}{(1+0{,}25)^5}$$

$$VPN(25\%) = \quad 268.928.000{,}00$$

Respuesta

Considerando que la alternativa 0, tiene un mayor valor presente se considera que es la mejor alternativa. ¿Qué se podría decir si el costo de capital fuera del 20%?

5.4 – VPN – Alternativas Mutuamente Excluyentes con Igual Vida Útil 2

El consejo de la municipalidad de HATOVIEJO estudia la posibilidad de cambiar el viejo puente de acceso a la población. Para mantener este puente operativo la municipalidad requiere gastar hoy anualmente $85´000.000 por mantenimiento; se estima que este costo crecerá el 5% anual. Por su parte, el nuevo puente, el cual será metálico, requerirá una inversión inicial de $1.000´000.000, y tendrá una vida útil de 20 años, sus costos de mantenimiento se estiman en $20´000.000 quinquenales; los cuales se incrementaran el 10% cada 5 años. Considerando un costo de capital del 10% anual; y sin ninguna otra consideración que la financiera; ¿Cuál debería ser la decisión del consejo?

Solución

Parámetros

Alternativa 1: No hacer nada.

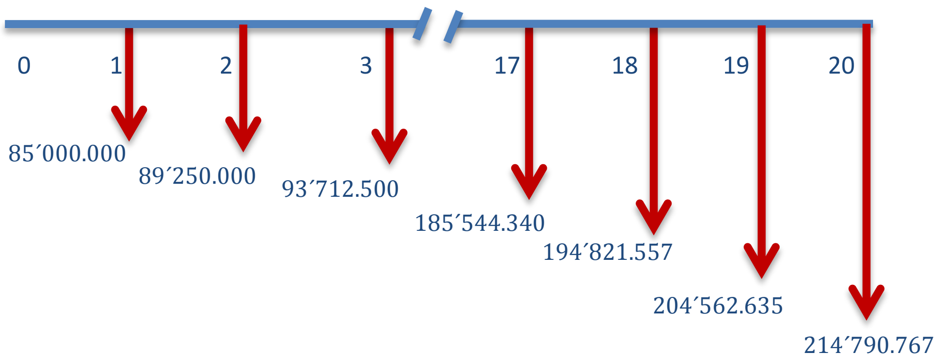
- Costos Anuales: \$85´000.000, incrementos del 5% anual

Alternativa 2: Nuevo Puente

- Inversión: \$1.000´000.000
- Costo de Mantenimiento: \$20´000.000 quinquenales, incrementos del 10%
- Ingresos anuales: \$350´000.000, Incrementos del 5% anual
- Vida Útil: 20 años
- Costo de capital: 10% anual

Representación Gráfica

Alternativa 1: No hacer nada – Dejar el viejo puente



Cálculos

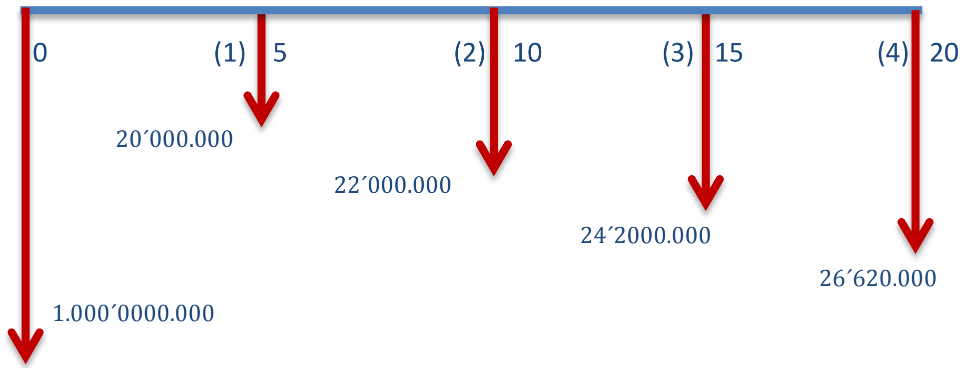
En este caso el Valor Presente Neto (VPN) será el valor de la serie geométrica con un crecimiento del 5% y cuota base del \$85´000.000; para esto aplicamos la fórmula (46), utilizando como tasa de descuento el costo de capital del 10%.

$$VPN(10\%) = \frac{A}{(G-i)}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right] \quad si\ G \neq i$$

$$VPN(10\%) = \frac{-85´000.000}{(0{,}05-0{,}1)}\left[\frac{(1+0{,}05)^{20}}{(1+0{,}1)^{20}} - 1\right]$$

$$VPN(10\%) = -1.029´527.145$$

Representación gráfica del flujo de caja
Alternativa 2: Nuevo puente



Cálculos

En este caso el Valor Presente Neto (VPN) será igual a la inversión más el valor presente de la serie geométrica con crecimiento del 10% y una cuota base del $20´000.000.

Lo primero es hallar la tasa de interés equivalente del 10% anual a una tasa de interés quinquenal, para ello utilizamos la fórmula (19)

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}1)^{\frac{1}{\frac{1}{5}}} - 1 = 0{,}6105 = 61{,}05\%$$

El valor presente del proyecto se calcula como la inversión más el valor presente de la serie geométrica con un crecimiento del 10% y una cuota base del $20´000.000 utilizando como costo de capital el 61,05% quinquenal, para lo cual aplicamos la fórmula (46)

$$VPN(10\%) = I + \frac{A_1}{(G - i)}\left[\frac{(1 + G)^n}{(1 + i)^n} - 1\right]$$

$$VPN(10\%) = -1.000´000.000 - \frac{20´000.000}{(0{,}1 - 0{,}6105)}\left[\frac{(1 + 0{,}1)^4}{(1 + 0{,}6105)^4} - 1\right]$$

$$VPN(10\%) = -1.030´650.948$$

Respuesta

Considerando que la alternativa 1 tiene un menor valor presente, entonces se debería optar por esta alternativa. ¿Qué se podría decir si el costo de capital fuera del 8%?

2.1.3 Alternativas Mutuamente Excluyentes con Diferente Vida Útil

Cuando las alternativas no tienen la misma vida útil, en este caso se debe hallar una vida útil común y simular para este período las condiciones financieras con el fin de compararlas a través del Valor Presente Neto. En este caso, igualmente, la escogencia de un proyecto excluye la ejecución de las demás alternativas. La aplicación se ilustra a través de los siguientes ejemplos.

Ejemplos y Casos

5.5 – VPN – ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUYENTES CON DIFERENTE VIDA ÚTIL 1

El consejo de la municipalidad de HATOVIEJO estudia las alternativas para cambiar el viejo puente de acceso a la población. Las alternativas que se estudian son: instalar un puente de madera cuyo costo inicial es de $500´000.000, con una vida útil de 10 años y costos de mantenimiento anuales de $40´000.000 crecientes en un 10% anualmente. O instalar un puente metálico cuya inversión inicial es de $1.000´000.000, vida útil de 20 años y costo de mantenimiento anuales de $15´000.000 crecientes un 15% anual. Considerando un costo de capital del 10% anual; y sin ninguna otra consideración que la financiera; ¿Cuál debería ser la decisión del consejo?

Solución

Parámetros

Alternativa 1: Puente de Madera.

- Inversión: $ 500´000.000
- Costos Anuales de Mantenimiento: $40´000.000, incrementos del 10% anual
- Vida Útil: 10 años

Alternativa 2: Puente Metálico

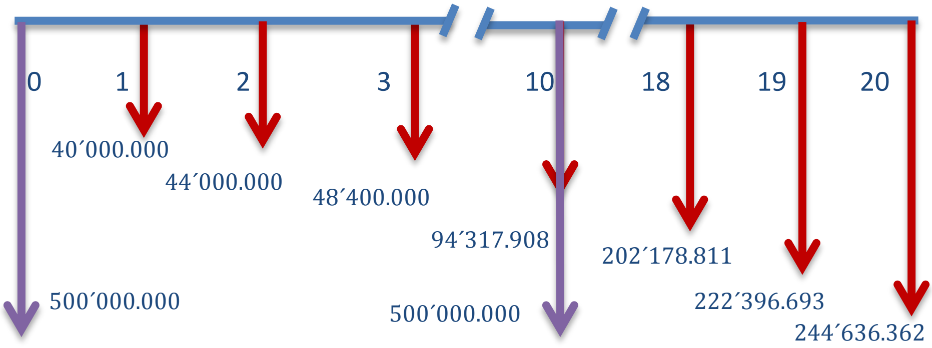
- Inversión: $1.000´000.000
- Costo Anuales de Mantenimiento: $15´000.000, incrementos del 15%
- Vida Útil: 20 años

- Costo de capital: 10% anual

Considerando que los dos proyectos no tienen la misma vida útil lo primero es hallar una vida útil común, en este caso 20 años; con esta vida útil se debe simular el comportamiento financiero de las dos alternativas y comparar el valor presente neto.

Alternativa 1: Puente de madera

Representación gráfica del flujo de caja



Cálculos

El Valor Presente Neto (VPN) se calcula como la inversión inicial más el VPN de la serie geométrica con un crecimiento del 10% y una cuota base del $40´000.000, más el VPN de la inversión en el año 10; para esto aplicamos las fórmulas (46) para $G = i$ y (15) utilizando como tasa de descuento el costo de capital del 10%.

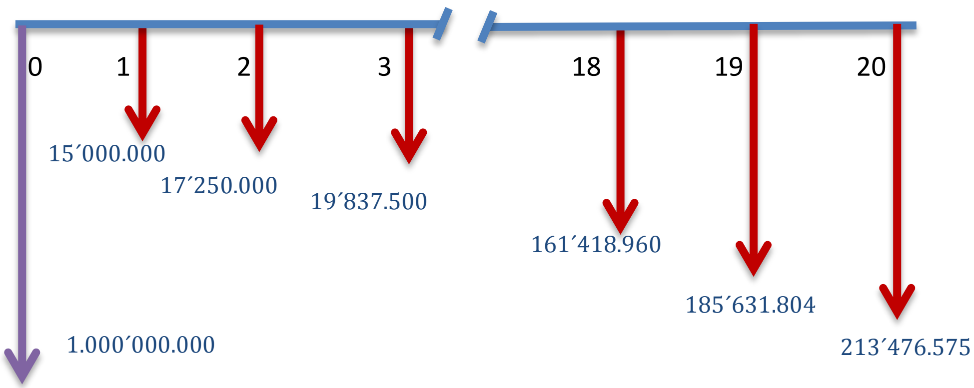
$$VPN(10\%) = I + \frac{nA_1}{(1+i)} + V_f \times (1+i)^{-n}$$

$$VPN(10\%) = 500´000.000 + \frac{20 \times 40´000.000}{(1+0,1)} + 500´000.000 \times (1+0,1)^{-10}$$

$$VPN(10\%) = -1.420´044.372$$

Alternativa 2: Puente metálico

Representación gráfica del flujo de caja



Cálculos

En este caso el VPN será igual a la inversión más el valor presente de la serie geométrica con un crecimiento del 15% y una cuota base del $15´000.000; para esto aplicamos la fórmula (46) para $g \neq i$, utilizando como tasa de descuento el costo de capital del 10%.

$$VPN(10\%) = I + \frac{A}{(G-i)}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right]$$

$$VPN(10\%) = 1.000´000.000 + \frac{15´000.000}{(0{,}15-0{,}1)}\left[\frac{(1+0{,}15)^{20}}{(1+0{,}1)^{20}} - 1\right]$$

$$VPN(10\%) = 1.429´834.449$$

Respuesta

Considerando que la alternativa 1 (Puente de madera) tiene un menor valor presente, entonces se debería optar por esta alternativa. ¿Qué se podría decir si el costo de capital fuera del 9%?

5.6 – VPN – Alternativas Mutuamente Excluyentes con Diferente Vida Útil 2

El gerente de una empresa debe decidir entre dos opciones para la ampliación de las instalaciones de producción, si el costo de capital es del 28%, ¿Cuál es la mejor alternativa que debería escoger el gerente?

Alternativas	A	B
Inversión inicial	800´000.000	600´000.000
Vida útil	4	3
Valor de salvamento	200´000.000	150´000.000
Costos de operación y mantenimiento	25´000.000	30´000.000

Solución

Parámetros

<u>Alternativa A.</u>

- Inversión: $ 800´000.000
- Costos Anuales de Mantenimiento: $25´000.000
- Valor de Salvamento: $200´000.000
- Vida Útil: 4 años

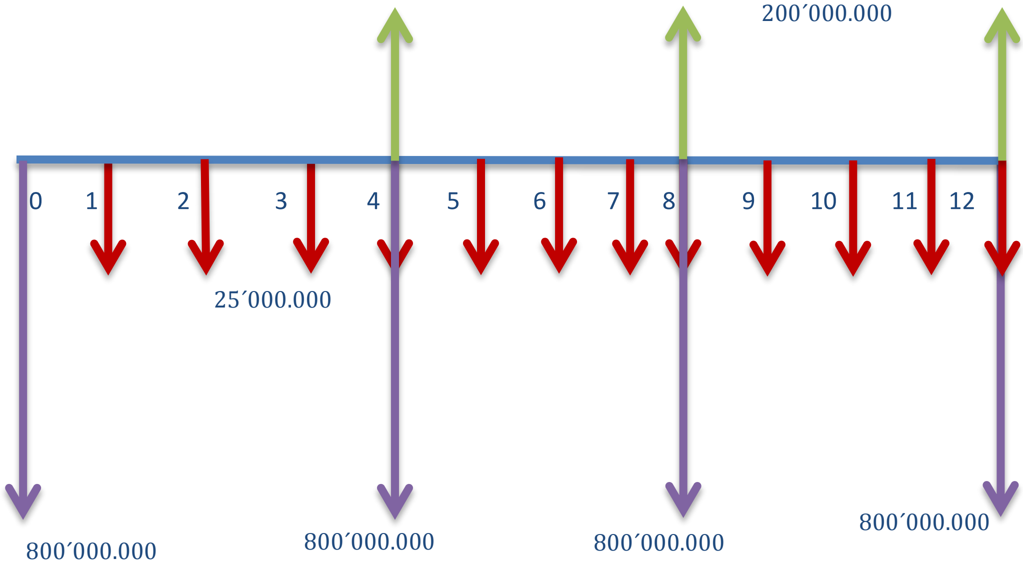
<u>Alternativa B</u>

- Inversión: $600´000.000
- Costo Anuales de Mantenimiento: $30´000.000
- Valor de Salvamento: $150´000.000

- Vida Útil: 3 años
- Costo de capital: 28% anual

Considerando que los dos proyectos no tienen la misma vida útil lo primero es hallar una vida útil común, en este caso 12 años; con esta vida útil se debe simular el comportamiento financiero de las dos alternativas y comparar el valor presente neto de cada alternativa; la mejor será aquella que tenga un menor valor.

Alternativa: A
Representación gráfica del flujo de caja
En la gráfica que ilustra el flujo de caja del proyecto, la inversión y los costos de mantenimiento se muestran como egresos; por su parte, el valor de salvamento se muestra como un ingreso. Considerando que el proyecto se está simulando por un tiempo mayor a su vida útil, la situación de ingresos y egresos se debe simular cada cuatro años por la totalidad del tiempo que se realiza el análisis.



Cálculos
El Valor Presente Neto (VPN) se calcula como la suma de la inversión inicial más el VPN de las anualidades de 25´000.000, 800´000.000 y 200´000.000; con sus signos; para esto aplicamos la fórmula (28)

$$V_p = -I - A_1\left[\frac{1-(1+i_1)^{-n}}{i_1}\right] - A_2\left[\frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2}\right] + A_3\left[\frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2}\right]$$

A partir de la tasa de descuento, costo de capital, del 28% se calcula la tasa de interés equivalente para un período de 4 años; para esto se utiliza la fórmula (19)

$$i_2 = (1+i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1+0{,}28)^{\frac{1}{\frac{1}{4}}} - 1 = 1{,}6843 = 168{,}43\%$$

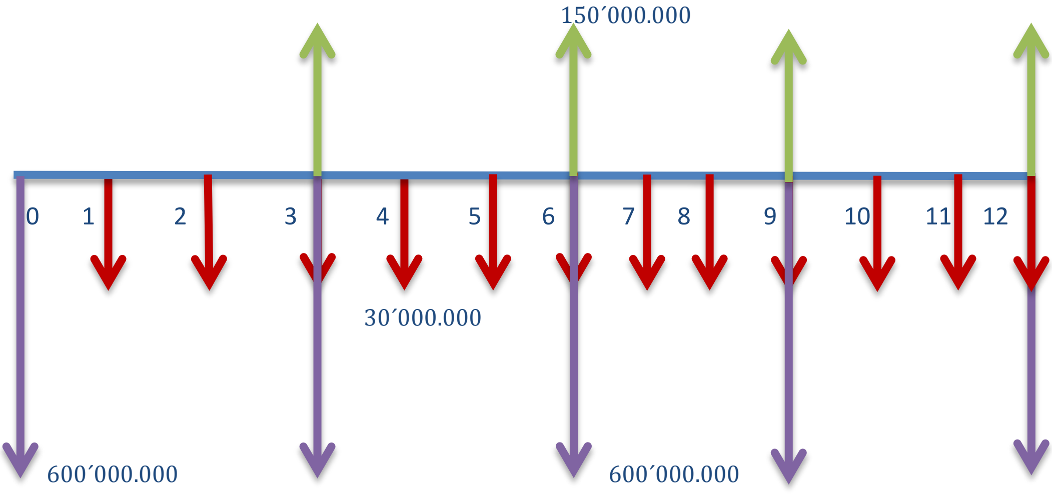
$$V_p = -800'000.000 - 25'000.000\left[\frac{1-(1+0{,}28)^{-12}}{0{,}28}\right] - 800'000.000\left[\frac{1-(1+1{,}6843)^{-3}}{1{,}6843}\right] + 200'000.000\left[\frac{1-(1+1{,}6843)^{-3}}{1{,}6843}\right]$$

$$VPN = -\$\ 1.222.473.168{,}77$$

Alternativa: B

Representación gráfica del flujo de caja

En la gráfica que ilustra el flujo de caja del proyecto, la inversión y los costos de mantenimiento se muestran como egresos; por su parte, el valor de salvamento se muestra como un ingreso. Considerando que el proyecto se está simulando por un tiempo mayor a su vida útil, la situación de ingresos y egresos se debe simular cada tres años por la totalidad del tiempo que se realiza el análisis.



Cálculos
El Valor Presente Neto (VPN) se calcula como la suma de la inversión inicial más el VPN de las anualidades de 30´000.000, 600´000.000 y 150´000.000; con sus signos; para esto aplicamos la fórmula (28)

$$V_p = -I - A_1\left[\frac{1-(1+i_1)^{-n}}{i_1}\right] - A_2\left[\frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2}\right] + A_3\left[\frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2}\right]$$

A partir de la tasa de descuento, costo de capital, del 28% se calcula la tasa de interés equivalente para un período de 3 años; para esto se utiliza la fórmula (19)

$$i_2 = (1+i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1+0{,}28)^{\frac{1}{\frac{1}{3}}} - 1 = 1{,}0971 = 109{,}71\%$$

$$V_p = -600´000.000 - 30´000.000\left[\frac{1-(1+0{,}28)^{-12}}{0{,}28}\right] - 600´000.000\left[\frac{1-(1+1{,}0971)^{-4}}{1{,}0971}\right] + 150´000.000\left[\frac{1-(1+1{,}0971)^{-4}}{1{,}0971}\right]$$

$$VPN = -\$\ 1.090.552.128{,}89$$

Respuesta
Considerando que la alternativa B, tiene un menor valor presente, el gerente debería escoger esta como la mejor opción desde el punto de vista financiero. ¿Qué se podría decir si el costo de capital fuera del 10%?

2.1.4 Alternativas con Vida Útil Infinita

Las obras de infraestructura, de beneficencia, hospitales, escuelas, hidroeléctricas, termoeléctricas, autopistas, carreteras, las inversiones en empresas de largo plazo, entre otros, son proyectos de vida útil muy larga. Estas alternativas de inversión, desde el punto vista financiero, se pueden considerar de vida útil infinita y valor de salvamento despreciable. Para la selección entre estas iniciativas de inversión es muy útil el uso del criterio del Valor Presente Neto (VPN). La aplicación se ilustra a través de los siguientes ejemplos.

Ejemplos y Casos

5.7 – VPN – Alternativas con Vida Útil Infinita

La alcaldía de la municipalidad de CUCAITA estudia la construcción de una nueva vía de acceso al pueblo; lo anterior teniendo en cuenta que la vieja carretera cruza una falla geológica que la inhabilita constantemente. Las alternativas que se estudian son: alternativa A) carretera que rodea la montaña, para esta se estima una inversión de $2.000 millones, costos de mantenimiento anual de $20 millones; adicionalmente, cada 10 años habrá que repavimentar lo cual se estima tendrá un costo de $100 millones, ambos costos tienen un incremento del 5% anual. La alternativa B) Carretera que cruza la montaña a través de un túnel; para esta se estima una inversión de $2200 millones, costos de mantenimiento anual de $10 millones; adicionalmente, cada 10 años habrá que repavimentar lo cual se estima tendrá un costo inicial de $50 millones, igual que en el caso anterior ambos costos tendrán un incremento del 5% anual; Cuál debería ser la decisión del alcalde de la municipalidad, si se considera un costo de capital del 13% EA?

Solución

Parámetros

Alternativa A.

- Inversión: $ 2.000´000.000
- Costos Anuales de Mantenimiento: $20´000.000, incremento 5% anual
- Costos Decenales de Mantenimiento: $100´000.000, incremento 5% anual

Alternativa B

- Inversión: $2.200´000.000
- Costo Anuales de Mantenimiento: $10´000.000, incremento 5% anual
- Costos Decenales de Mantenimiento: $50´000.000, incremento 5% anual

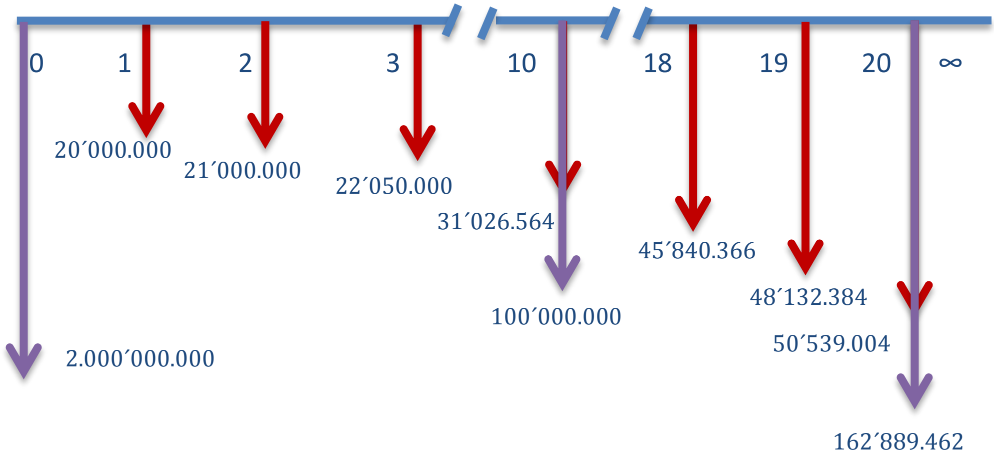
- Costo de capital: 13% anual

Considerando que ambos proyectos pueden ser considerados de vida útil infinita, bajo esta premisa se simula el comportamiento de cada alternativa. Para la evaluación se calcula el valor presente neto de cada alternativa, seleccionando como mejor alternativa desde el punto de vista financiero la de menor valor presente.

Alternativa A: carretera que rodea la montaña

Representación gráfica del flujo de caja

En la gráfica se ilustra la operación financiera.



Cálculos

El Valor Presente Neto (VPN) se calcula como la inversión inicial más el VPN de la serie geométrica anual infinita de 20 millones con un crecimiento del 5%, más el VPN de la serie geométrica decenal infinita de 100 millones con un crecimiento del 62.89%; para esto aplicamos la fórmula (48), utilizando como tasa de descuento el costo de capital del 13% EA y 239,46% EDecada.

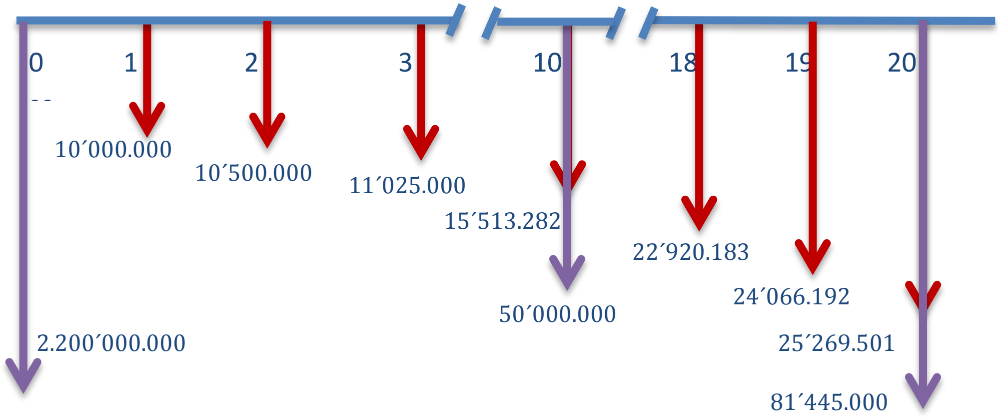
$$VPN = -I - \frac{A_1}{(i_1 - G_1)} - \frac{A_2}{(i_2 - G_2)}$$

$$VPN = -2.000´000.000 - \frac{20´000.000}{(0{,}13 - 0{,}05)} - \frac{100´000.000}{(2{,}3946 - 0{,}6289)}$$

$$VPN = -2.306´634.762$$

Alternativa B: Carretera que cruza la montaña a través de un túnel

Representación gráfica del flujo de caja



Cálculos
El VPN se calcula como la inversión inicial más el VPN de la serie geométrica anual infinita de 10 millones con un crecimiento del 5%, más el VPN de la serie geométrica decenal infinita de 50 millones con un crecimiento del 62.89%; para esto aplicamos la fórmula (48), utilizando como tasa de descuento el costo de capital del 13% EA y 239,46% EDecada.

$$VPN = -I - \frac{A_1}{(i_1 - G_1)} - \frac{A_2}{(i_2 - G_2)}$$

$$VPN = -2.200´000.000 - \frac{10´000.000}{(0{,}13 - 0{,}05)} - \frac{50´000.000}{(2{,}3946 - 0{,}6289)}$$

$$VPN = -2.353´317.381$$

Respuesta
Considerando que la alternativa A (Carretera que rodea la montaña), tiene un menor valor presente es la mejor opción desde el punto de vista financiero. ¿Qué se podría decir si el costo de capital fuera del 10%?

2.2 Costo Anual Equivalente (CAE)

El método consiste en convertir los pagos e ingresos de un proyecto en una serie equivalente para un período de tiempo determinado, usualmente un año, de manera que se puedan comparar las alternativas durante ese período de tiempo; independiente de la vida útil del proyecto.

La ventaja del método sobre el Valor Presente Neto, es que el procedimiento se puede aplicar independiente de la vida útil de las alternativas. El método es bastante útil, cuando el mínimo común múltiplo de las vidas útiles es muy grande y por consiguiente el método del Valor Presente Neto se vuelve muy complejo. A través de los siguientes ejemplos se ilustra el método del Costo Anual Equivalente (CAE).

Ejemplos y Casos

5.8 – CAE – Alternativas con Igual Vida Útil

El consejo de la municipalidad de HATOVIEJO estudia la posibilidad de cambiar el viejo puente de acceso a la población. Hoy para mantener este puente operativo la municipalidad requiere gastar anualmente $85´000.000 en mantenimiento; se estima que este costo crecerá el 5% anual. Por su parte, el nuevo puente, el cual será metálico, requerirá una inversión inicial de $1.000´000.000, y tendrá una vida útil de 20 años, sus costos de mantenimiento se estiman en $20´000.000 quinquenales; los cuales se incrementaran el 10% cada 5 años. Considerando un costo de capital del 10% anual; y sin ninguna otra consideración que la financiera; ¿Cuál debería ser la decisión del consejo? Utilice el criterio de CAE

Solución

Parámetros

Alternativa 1: No hacer nada.

- Costos Anuales: $85´000.000, incrementos del 5% anual

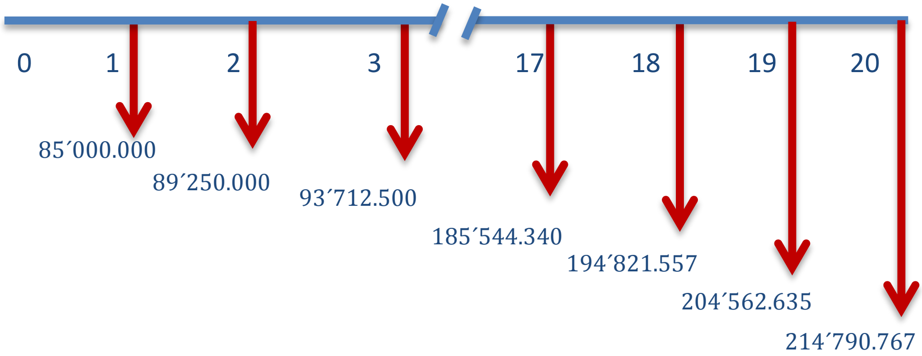
Alternativa 2: Nuevo Puente

- Inversión: $1.000´000.000
- Costo de Mantenimiento: $20´000.000 quinquenales, incrementos del 10%
- Vida Útil: 20 años

- Costo de capital: 10% anual

Para ambas alternativas se deben convertir las series crecientes y las inversiones en una cuota anual equivalente, con el fin de hacer la comparación de las opciones. Para esto se halla el valor presente o futuro de la serie y a partir de allí se calcula el Costo Anual Equivalente.

Alternativa 1: No hacer nada – Dejar el viejo puente
Representación gráfica del flujo de caja



Cálculos
En este caso el Valor Presente Neto (VPN) será el valor presente de la serie geométrica con un crecimiento del 5% y una cuota base del $85´000.000; para esto aplicamos la fórmula (46) para $g \neq i$, utilizando como tasa de descuento el costo de capital del 10%.

$$VPN(10\%) = \frac{A}{(G-i)}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right] \quad si\ G \neq i$$

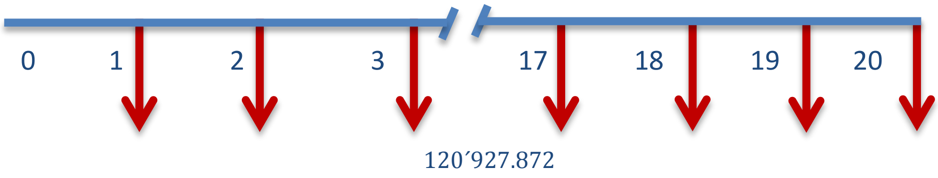
$$VPN(10\%) = \frac{-85´000.000}{(0{,}05-0{,}1)}\left[\frac{(1+0{,}05)^{20}}{(1+0{,}1)^{20}} - 1\right]$$

$$VPN(10\%) = -1.029´527.145$$

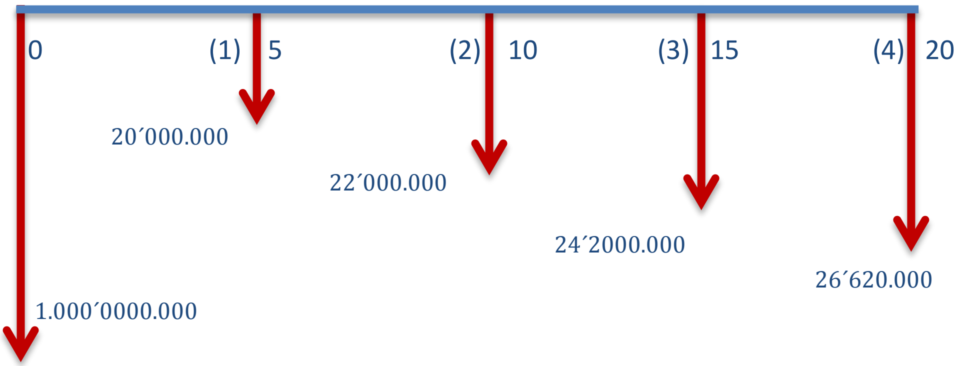
Para hallar el Costo Anual equivalente utilizamos la fórmula (30), para 20 períodos

$$A = V_p\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$A = -1.029´527.145\left[\frac{0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-20}}\right] = -120´927.872{,}10$$



Alternativa 2: Construir el nuevo puente
Representación gráfica del flujo de caja



Cálculos
En este caso el VPN será igual a la inversión más el valor presente de la serie geométrica con un crecimiento del 10% y una cuota base del $20´000.000; para esto aplicamos la fórmula (46) para $G \neq i$, utilizando como tasa de descuento la tasa equivalente del costo de capital del 10% para el quinquenio.

$$VPN(10\%) = I + \frac{A_1}{(G-i)}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right]$$

Lo primero es hallar la tasa de interés equivalente del 10% anual a una tasa de interés quinquenal, para ello utilizamos la fórmula (19)

$$i_2 = (1+i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1+0{,}1)^{\frac{1}{\frac{1}{5}}} - 1 = 0{,}6105 = 61{,}05\%$$

Aplicando esta tasa de descuento, se obtiene:

$$VPN(10\%) = I + \frac{A_1}{(G-i)}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right]$$

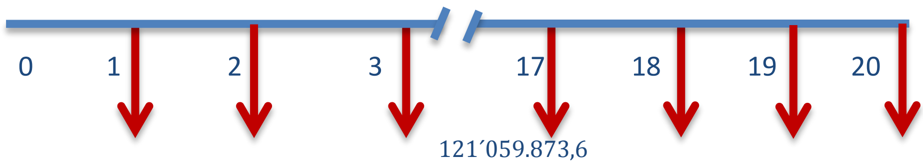
$$VPN(10\%) = -1.000´000.000 - \frac{20´000.000}{(0,1-0,6105)}\left[\frac{(1+0,1)^4}{(1+0,6105)^4} - 1\right]$$

$$VPN(10\%) = -1.030´650.948$$

Para hallar el Costo Anual equivalente utilizamos la fórmula (30) y 20 períodos

$$A = V_p\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$A = -1.030´650.948\left[\frac{0,1}{1-(1+0,1)^{-20}}\right] = -121´059.873,6$$



Respuesta
La conclusión desde el punto de vista financiero es igual a la encontrada en el ejemplo 5.4 cuando se analizaron los proyectos utilizando el criterio del VPN; es decir, se debe escoger la alternativa 1, (No hacer nada) considerando que tiene un CAE menor que la segunda alternativa. ¿Qué se podría decir si el costo de capital fuera del 8%?

5.9 – CAE – Alternativas con Diferente Vida Útil

El gerente de producción estudia la reposición de sus equipos de producción; para esto, estudia dos alternativas que cumplen con las especificaciones técnicas y las expectativas económicas. En el cuadro siguiente se muestra las condiciones económicas de cada alternativa:

Condiciones/Alternativas	A	B
Valor de la inversión	150´000.000	650´000.000
Costo de Operación (Mensual)	7´000.000	12´000.000
Vida Útil (años)	7	21
Valor de salvamento	22´500.000	195´000.000
Mantenimiento mayor (15 años)	0	220´000.000

¿Cuál debería ser la decisión del gerente, si se considera un costo de capital del $23\%\ EA$, utilizando el criterio del CAE?

Solución
Parámetros
Alternativa A.

- Inversión: $ 150´000.000
- Costos Mensuales de Mantenimiento: $7´000.000
- Valor de Salvamento: $22´500.000
- Vida Útil: 7 años

Alternativa B

- Inversión: $650´000.000
- Costo Mensual de Mantenimiento: $12´000.000
- Valor de Salvamento: $195´000.000
- Mantenimiento mayor 15 años: $220´000.000
- Vida Útil: 21 años

- Costo de capital: 23% anual

Cálculos
Tomando como período de comparación el año, para cada alternativa, las inversiones, costos y valor de salvamento se convierten en series anuales.

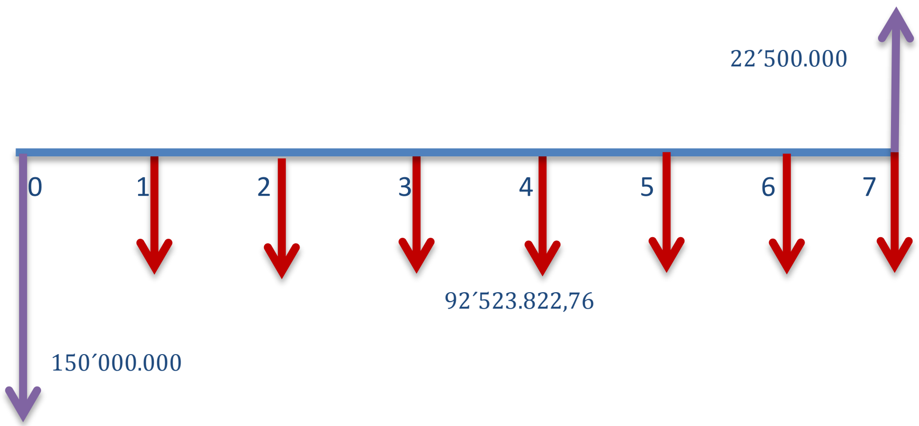
Alternativa A:
Para convertir el costo de operación en una serie anual, calculamos el valor futuro de la serie mensual de $7´000.000, lo cual da el valor equivalente anual de dicho costo. Para lo anterior utilizamos la fórmula (34) y una tasa de descuento equivalente a la tasa efectiva mensual calculada a partir del costo de capital del $23\%\ EA$, la cual se deduce utilizando la fórmula (19)

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_{EM} = (1 + 0{,}23)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}0174 = 1{,}74\%\ EM$$

Calculo de la serie anual equivalente se realiza como sigue:

$$V_f = 7'000.000\left[\frac{(1+0{,}0174)^{12}-1}{0{,}0174}\right] = 92'523.822{,}76$$



Adicionalmente se debe convertir la inversión y el valor de salvamento en una serie anual equivalente; para lo anterior utilizamos las fórmulas (28) y (34) respectivamente

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right];para\ i \neq 0$$

$$V_f = A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right];para\ i \neq 0$$

Para la inversión, aplicando la fórmula (28) y con tasa de descuento del 23%, se obtiene:

$$150'000.000 = A\left[\frac{1-(1+0{,}23)^{-7}}{0{,}23}\right]$$

$$A = 45'085.173$$

Para el valor de salvamento, aplicando la fórmula (34) y con tasa de descuento del 23%, se obtiene:

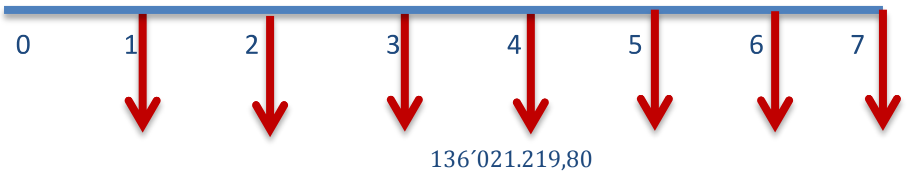
$$22´500.000 = A\left[\frac{(1+0,23)^7-1}{0,23}\right]$$

$$A = 1´587.775,95$$

De esta forma la serie anual equivalente para esta alternativa se obtiene sumando los valores anuales de los costos de operación, inversión y valor de salvamento, considerando su signo según sean ingresos o egresos:

$$CAE = -92´523.822,76 - 45´085.173 + 1´587.775,95$$

$$CAE = -136´021.219,80$$

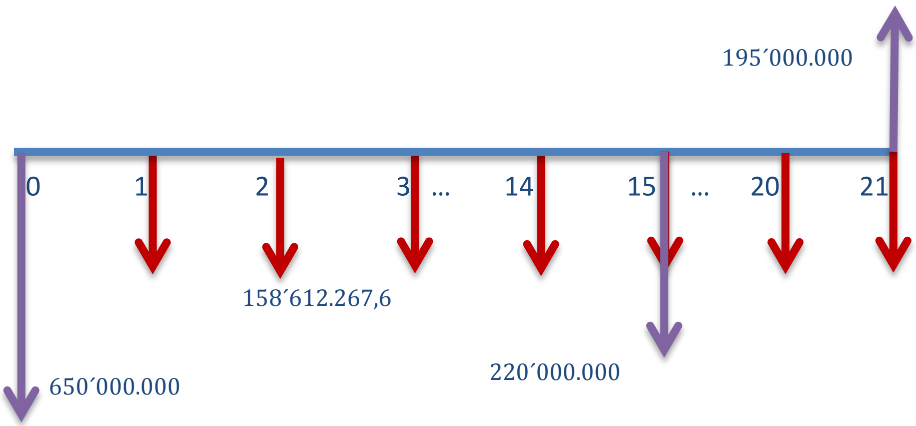


Alternativa B:

Para convertir el costo de operación en una serie anual, calculamos el valor futuro de la serie mensual de $12´000.000, lo cual da el valor equivalente anual de dicho costo. Para lo anterior utilizamos la fórmula (34) y una tasa de descuento equivalente a la tasa efectiva mensual 1,74% la cual se calculó a partir costo de capital del 23% EA con la fórmula (19)

Calculo de la serie anual equivalente

$$V_f = 12´000.000\left[\frac{(1+0,0174)^{12}-1}{0,0174}\right] = 158´612.267,6$$



Para los 220´millones de la reparación mayor en el año 15 se halla el valor equivalente en el año 0; seguidamente se convierte el valor en series anuales equivalente, para lo cual utilizamos la fórmula (28). De otra parte, se calcula el valor presente del mantenimiento mayor, utilizando la fórmula (15)

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{220´000.000}{(1+0{,}23)^{15}} = 9´859.298{,}35$$

Este valor se suma al valor de la inversión y a partir de la suma se halla el CAE aplicando la fórmula (28), es decir:

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0$$

$$659´859.298{,}35 = A\left[\frac{1-(1+0{,}23)^{-21}}{0{,}23}\right]$$

$$A = 153´757.528{,}50$$

Para el valor de salvamento, aplicando la fórmula (34), con tasa de descuento del 23%, se obtiene:

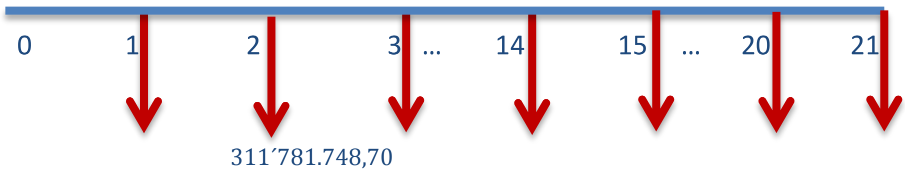
$$195'000.000 = A\left[\frac{(1+0{,}23)^{21}-1}{0{,}23}\right]$$

$$A = 588.047{,}38$$

De esta forma, la serie anual equivalente para esta alternativa es la suma de los valores de los costos de operación, la cuota equivalente por la inversión y el valor de salvamento, considerando su signo de acuerdo a que sean ingresos o egresos:

$$CAE = -158'612.267{,}6 - 153'757.528{,}50 + 588.047{,}38$$

$$CAE = -311'781.748{,}70$$



Respuesta
Considerando que la alternativa A, tiene un menor Costo Anual Equivalente; es la opción financieramente mejor.

5.10 – CAE – Alternativas con Vida Útil Infinita

La alcaldía de la municipalidad de CUCAITA estudia la construcción de una nueva vía de acceso al pueblo; lo anterior teniendo en cuenta que la vieja carretera cruza una falla geológica que la inhabilita constantemente. Las alternativas que se estudian son: alternativa A) carretera que rodea la montaña, para esta se estima una inversión de $2.000 millones, costos de mantenimiento anual de $20 millones; adicionalmente, cada 10 años habrá que repavimentar lo cual se estima tendrá un costo inicial de $100 millones, ambos costos tienen un incremento del 5% anual. La alternativa B) Carretera que cruza la montaña a través de un túnel; para esta se estima una inversión de $2.200 millones, costos de mantenimiento anual de $10 millones; adicionalmente, cada 10 años habrá que repavimentar lo cual se estima tendrá un costo inicial de $50 millones, igual que en el caso anterior ambos costos tendrán un incremento del 5% anual; Cuál debería ser la decisión del alcalde de la municipalidad, si se considera un costo de capital del 13% EA, utilizando el criterio del CAE?

Solución
Parámetros

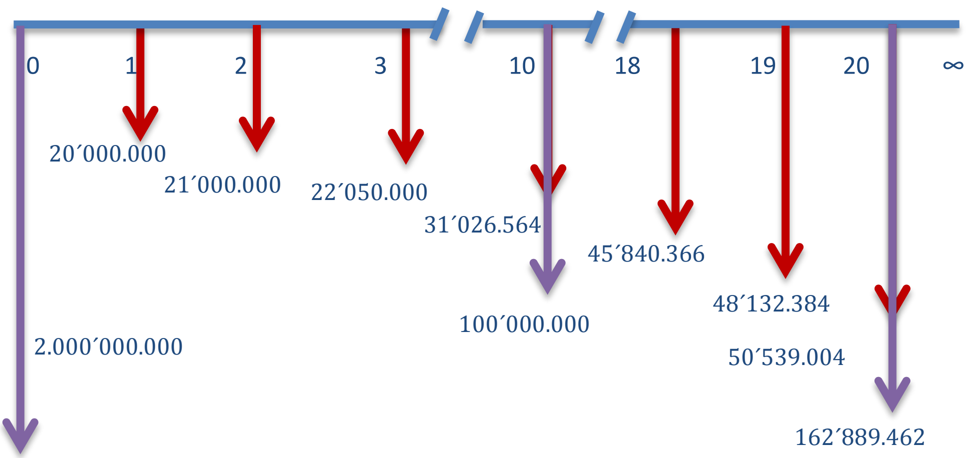
<u>Alternativa A.</u>
- Inversión: $ 2.000´000.000
- Costos Anuales de Mantenimiento: $20´000.000, incremento 5% anual
- Costos Decenales de Mantenimiento: $100´000.000, incremento 5% anual

<u>Alternativa B</u>
- Inversión: $2.200´000.000
- Costo Anuales de Mantenimiento: $10´000.000, incremento 5% anual
- Costos Decenales de Mantenimiento: $50´000.000, incremento 5% anual

- Costo de capital: 13% anual

Para cada alternativa, se calcula inicialmente el VPN de todas las series creciente y a partir de allí se calcula el valor del CAE; se escogerá la alternativa que tenga un menor Costo Anual equivalente.

Alternativa A: carretera que rodea la montaña
Representación gráfica del flujo de caja



Cálculos
El Valor Presente Neto (VPN) se calcula como la inversión inicial más el VPN de la serie geométrica anual perpetua de 20 millones con un crecimiento del 5%, y el VPN de la serie geométrica decenal infinita de 100 millones con un crecimiento del 62.89%; para esto

aplicamos la fórmula (48), utilizando como tasa de descuento el costo de capital del 13% EA y 239,46% EDecada.

$$VPN = -I - \frac{A_1}{(i_1 - G_1)} - \frac{A_2}{(i_2 - G_2)}$$

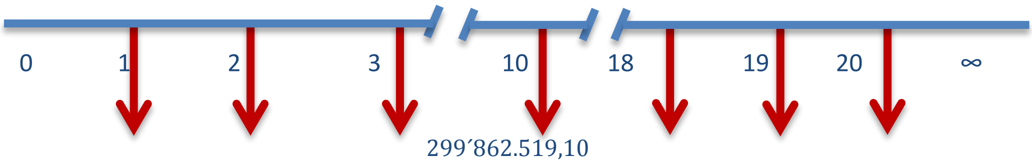
$$VPN = -2.000´000.000 - \frac{20´000.000}{(0,13 - 0,05)} - \frac{100´000.000}{(2,3946 - 0,6289)}$$

$$VPN = -2.306´634.762$$

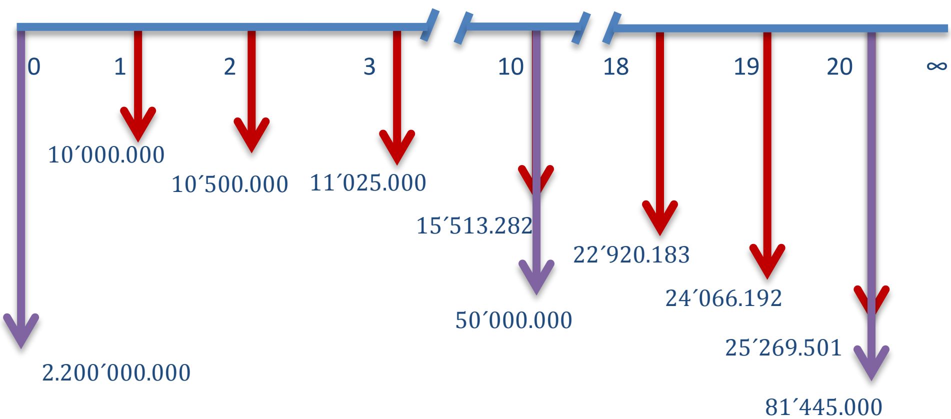
Considerando que la alternativa tiene una vida útil infinita, para calcular el CAE, se utiliza la fórmula (40), despejando A

$$V_p = \frac{A}{i}; para\ i \neq 0$$

$$CAE = -2.306´634.762 \times 0,13 = -299´862.519,1$$



Alternativa B: Carretera que cruza la montaña a través de un túnel
Representación gráfica del flujo de caja



Cálculos

El VPN se calcula como la inversión inicial más el VPN de la serie geométrica anual infinita de 10 millones con un crecimiento del 5%, más el VPN de la serie geométrica decenal infinita de 50 millones con un crecimiento del 62.89%; para esto aplicamos la fórmula (40) para $G < i$, utilizando como tasa de descuento el costo de capital del 13% EA y 239,46% EDecada.

$$VPN = -I - \frac{A_1}{(i_1 - G_1)} - \frac{A_2}{(i_2 - G_2)}$$

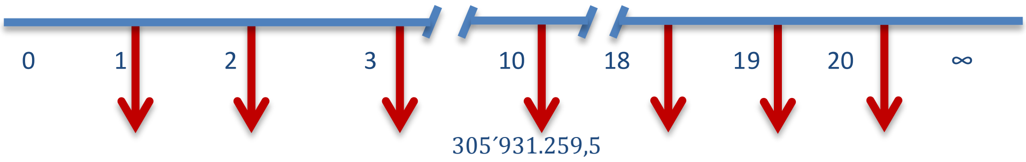
$$VPN = -2.200´000.000 - \frac{10´000.000}{(0{,}13 - 0{,}05)} - \frac{50´000.000}{(2{,}3946 - 0{,}6289)}$$

$$VPN = -2.353´317.381$$

Considerando que la alternativa tiene una vida útil infinita, para calcular el CAE, se utiliza la fórmula (40), despejando A

$$V_p = \frac{A}{i}; para\ i \neq 0$$

$$CAE = -2.353´317.381 \times 0{,}13 = -305´931.259{,}5$$



Respuesta

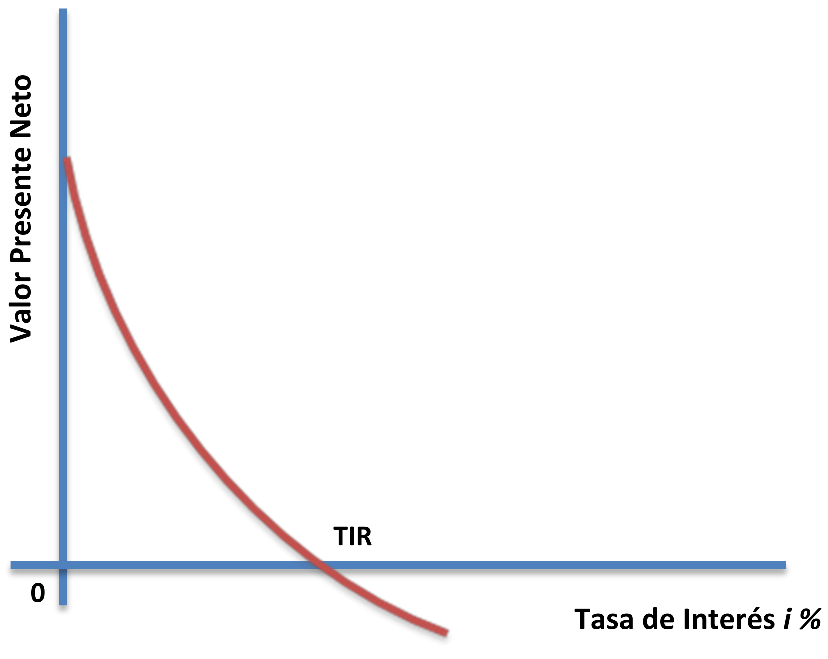
Considerando que la alternativa A (carretera que rodea la montaña) tiene un menor CAE; desde el punto de vista financiero, se debe escoger esta alternativa. Note que la conclusión a la que se llega es igual a la que se llegó cuando se utilizó el criterio del VPN. ¿Qué se podría decir si el costo de capital fuera del 10%?

2.3 Tasa Interna de Retorno (TIR)

Para los criterios de evaluación anteriores se tomó como referencia la tasa mínima de retorno $(TMAR)$; es decir, se remiten a verificar que las alternativas cumplan con esta tasa, sin informar nada sobre la rentabilidad propia de cada alternativa.

No obstante, en muchas ocasiones es útil y necesario calcular la tasa interna de retorno (TIR) de las alternativas, buscando información más detallada del comportamiento financiero de los proyectos.

Gráfica No 5.3 – Relación entre el VPN y la TIR



La Tasa Interna de Retorno (TIR) se define como la tasa de rentabilidad del proyecto; es una característica propia de cada alternativa; y es totalmente independiente de las ambiciones del inversionista; es decir, de su tasa de interés de oportunidad.

Desde el punto de vista matemático la TIR se define como la tasa de interés para la cual el $VPN\ (i)\ =\ 0$; es decir, $VPN(TIR) = 0$. Cuando la $i = TIR$, los pagos devuelven exactamente la inversión inicial con la tasa de retorno i.

La gráfica 5.3 muestra la relación entre VPN y la Tasa de interés para un flujo de caja con una inversión inicial y una serie de pagos futuros. El punto en que la curva hace intersección con el eje i, corresponde a la Tasa Interna de Retorno (TIR).

2.3.1 Calculo analítico de la Tasa Interna de Retorno

De acuerdo a la definición, la Tasa Interna de Retorno es la tasa de interés que hace que el VPN sea igual a 0; de esta forma, el cálculo de i se realiza despejando esta variable de la ecuación:

$$VPN(i) = 0 = \ I_o\ + \sum_{j=1}^{n} \frac{I_j}{(1+i)^j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{E_j}{(1+i)^j}\ Para\ j = \ 1, 2 \dots n; \quad (59)$$

Considerando que se trata de una ecuación de varias raíces, la solución debe realizarse por el método de tanteo y error; para lo cual se propone el siguiente procedimiento:

1) Se calcula el VPN con una tasa de interés estimada por el evaluador.

2) Si el cálculo anterior es diferente de cero, se repiten los cálculos empleando una tasa de interés que acerque los cálculos a cero. El proceso se continúa hasta que se obtengan dos resultados lo más cercanos a cero; uno positivo y el otro negativo,.
3) Considerando la definición de la TIR, el resultado debe estar entre estos dos valores; y su cálculo se realiza a través de una interpolación lineal.

Ejemplos y Casos

5.11 – Definición Tasa Interna de Retorno

Juan está evaluando un proyecto y tiene como resultado el siguiente flujo de caja:

PERÍODO	0	1	2	3	4	5	6
FLUJO DE CAJA	-172.5	-35.7	-68.1	19.9	84	86.0	423.6

Si los valores están dados en millones; se pide calcular la TIR.

Solución

Cálculos

1. Lo primero es calcular el VPN, utilizando la fórmula (57), para una tasa de interés estimada; por ejemplo 20%; $VPN(20\%) = -22{,}59$

2. Considerando que el VPN es menor que cero, se debe recalcular para una tasa de interés menor, por ejemplo 18%; $VPN(18\%) = -3{,}24$

3. Considerando que el resultado aún sigue siendo negativo se repite el cálculo del VPN para una tasa menor, por ejemplo 17,5%; $VPN(17{,}5\%) = 1{,}96$

4. Ya que el valor del VPN para una tasa de interés de 17,5% es mayor que 0, se puede decir que la TIR es una tasa entre 17,5% y 18%

5. Para saber con exactitud el valor se realiza una interpolación lineal, aplicando una sencilla regla de tres: si para una diferencia de 5,2 (3,24 + 1,96), la diferencia en la tasa de interés es 0,5%, entonces para una diferencia de 3,24, cuál será la diferencia de la tasa de interés. Realizando esta operación se obtiene: 0,3115%

6. Considerando lo anterior la TIR del proyecto será: 17,6885%

Respuesta
La TIR del proyecto es: 17,69%

2.3.2 Calculo gráfico de la Tasa Interna de Retorno

Para hallar la TIR por el método grafico se parte de la gráfica 5.3 que muestra la relación entre el VPN y la TIR. Para la determinación de la TIR, por este método, se propone el siguiente procedimiento:

1) Construya una tabla donde, para al menos 10 valores de i, se determina el VPN
2) En el plano cartesiano grafique los diferentes puntos (i, VPN);
3) Una los puntos graficados en el punto anterior.
4) En la intersección de la curva con el eje i, determine el valor de la TIR

Ejemplos y Casos

5.12 – Calculo Gráfico Tasa Interna de Retorno

Juan está evaluando un proyecto y tiene como resultado el siguiente flujo de caja:

PERÍODO	0	1	2	3	4	5	6
FLUJO DE CAJA	-172.5	-35.7	-68.1	19.9	84	86.0	423.6

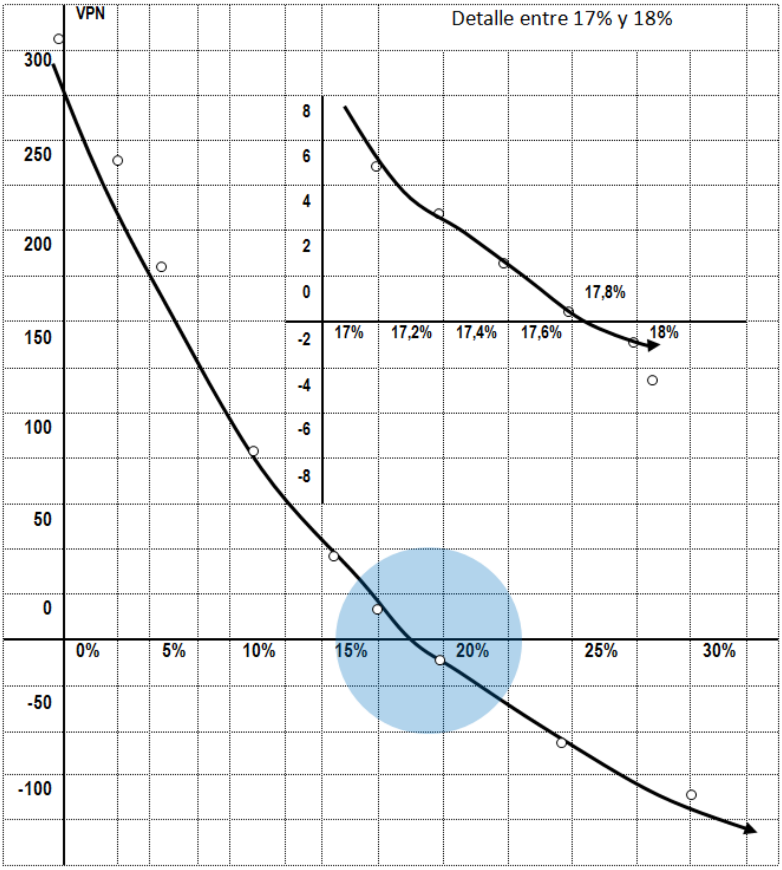
Si los valores están dados en millones; se pide calcular la TIR por el método gráfico.

Solución
Paso 1)
Para diferentes valores de tasa de interés se calcula el VPN, utilizando la fórmula (57), como se muestra en la siguiente tabla:

tasa de Interés	0	5%	15%	17%	17,40%	17,80%	17,90%	20%	30%
VPN	337,20	201,51	31,97	8,85	4,55	0,35	(0,69)	(21,09)	(90,87)

Paso 2)
Los valores anteriores se grafican, en un plano cartesiano con ordenada VPN y abscisa i; así como se muestra a continuación:

i	VPN
0	337,20
2,5%	263,71
5%	201,51
10%	103,60
15%	31,97
17%	8,85
17,2%	6,69
17,4%	4,55
17,6%	2,44
17,8%	0,35
17,9%	-0.69
18%	-1,72
20%	-21,09
25%	-60,82
30%	-90,87
35%	-113,78



Respuesta
La TIR del proyecto es: 17,6885%

2.3.3 Interpretación de la tasa interna de retorno –TIR-

Para entender el significado de la TIR, el resultado se debe comparar con la $TMAR$ (Tasa Mínima Aceptable de Rentabilidad). Sí i es la Tasa Mínima Aceptable de Rentabilidad, de acuerdo al resultado de la TIR se pueden tener las siguientes posibilidades:

a) $TIR < i$, significa que el proyecto no se justifica desde el punto de vista financiero ya que está rentando menos que lo que el inversionista espera y por consiguiente la iniciativa debe rechazarse, si no hay otra consideración

b) $TIR = i$, significa que el proyecto esta rentando exactamente lo que el inversionista espera; y por consiguiente la alternativa se puede aceptar, si no hay otra consideración

c) $TIR > i$, significa que el proyecto está rentando más que lo que el inversionista espera; y por consiguiente la alternativa se puede aceptar, si no hay otra consideración

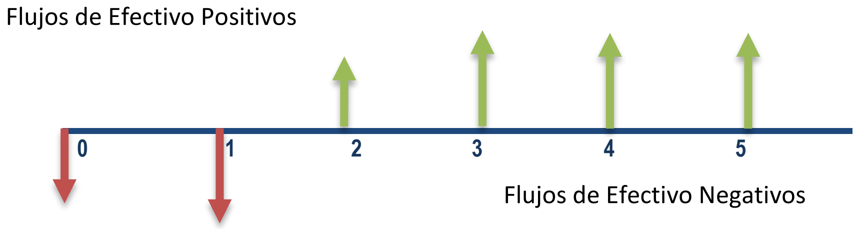
2.3.4 Desventaja de la tasa interna de retorno

La principal desventaja de la TIR es que su resultado depende de la forma del flujo de caja. Según la forma, algunos flujos no tienen solución o tienen más de una solución y solo los flujos de caja convencionales tienen una solución única.

Los flujos de caja convencionales son aquellos donde los flujos netos negativos se dan al principio, seguidos por flujos netos positivos. De otro lado, los flujos con solo saldos positivos o negativos no tienen solución; y aquellos donde hay más de unos intercambios de flujo positivos y negativos, tienen más de una solución.

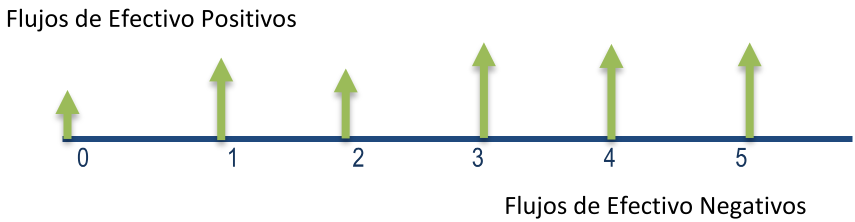
En las siguientes gráficas se tipifican los flujos de caja:

Gráfica No 5.4 – Flujo de Caja Convencional



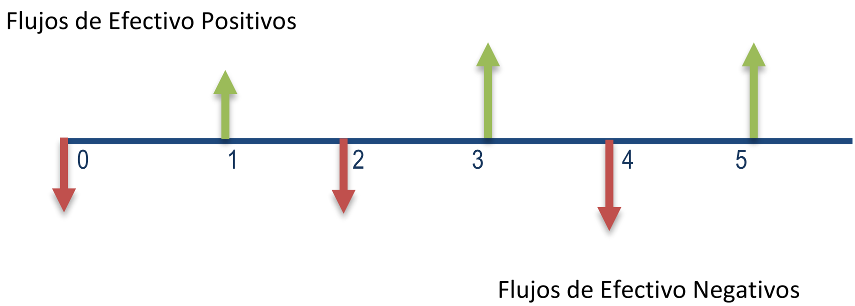
Los flujos de caja convencionales tienen una única solución TIR.

Gráfica No 5.5 – Flujo de Caja no convencional con Valores Positivos



Los flujos de caja con solo flujos positivos no tienen solución TIR.

Gráfica No 5.6 – Flujo de Caja no convencional con Múltiples Variaciones



Los flujos de caja con múltiples variaciones en los flujos tienen múltiples soluciones TIR.

2.4 Tasa Única de Retorno (TUR)

La Tasa Única de Retorno se define con el fin de solucionar los problemas de inconsistencia, inexistencia y múltiples soluciones de la Tasa Interna de Retorno. Con la TUR se garantiza la existencia de una sola tasa de rentabilidad, independientemente de la forma del flujo de caja. El método permite calcular la rentabilidad del proyecto combinando el criterio del Valor Presente Neto y la Tasa Interna de Retorno.

2.4.1 Calculo de la Tasa Única de Retorno (TUR)

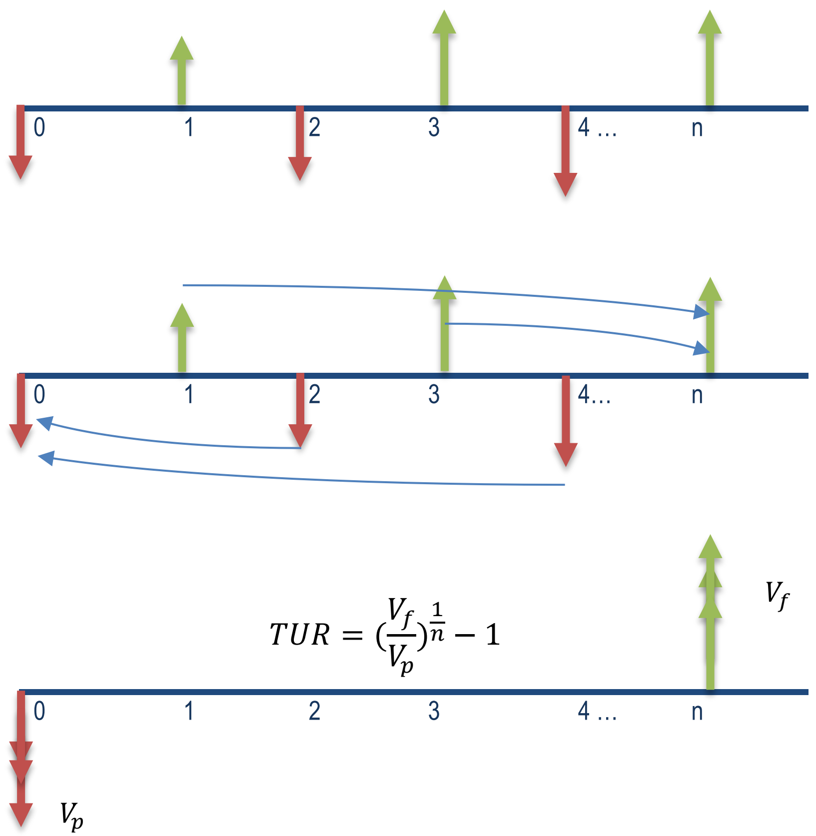
Conociendo la tasa de descuento i, para el cálculo de la TUR, se procede como sigue partiendo del flujo de caja del proyecto:

1) Los egresos netos se calculan en el momento cero (0), empleando como tasa de descuento i. Es decir, en este momento se realiza la sumatoria de los valores presentes de todos los egresos.
2) Por su parte, los ingresos netos se trasladan al momento final (n) utilizando la tasa de descuento i. Es decir, en este momento se realiza la sumatoria de los valores futuros de todos los ingresos.
3) Para el nuevo flujo de caja, con un egreso en el momento cero y un ingreso en el momento n, se calcula la Tasa Interna de Retorno; la cual, en este caso, toma el nombre de Tasa Única de Retorno (TUR), la cual también se denomina la tasa de rentabilidad verdadera del proyecto; matemáticamente:

$$TUR = \left(\frac{V_f}{V_p}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \qquad (60)$$

En la gráfica No 5.7 se ilustra el método de cálculo de la TUR

Gráfica No 5.7 – Ilustración del Cálculo de la TUR



2.4.2 Interpretación de la Tasa Única de Retorno

Los resultados de la TUR, se pueden interpretar como:

a) Si la $TUR < TMAR$ entonces el proyecto no es viable financieramente.

b) Si la $TUR = TMAR$ entonces el proyecto esta rentando exactamente lo que el inversionista espera; por consiguiente, debe considerarse aceptable financieramente.

c) Si la $TUR > TMAR$ entonces el proyecto está rentando más de lo que el inversionista espera; por consiguiente, debe considerarse aceptable financieramente.

Ejemplos y Casos

5.13 –Tasa Única de Rentabilidad

Un proyectista tiene como resultado de su estudio económico, el siguiente flujo de caja:

PERÍODO	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
FLUJO DE CAJA	-195.75	-27.95	-64.77	29.2	85.5	87.5	423.6

Si los valores están expresados en millones y considerando que la TMAR es del 23,6%, se pide determinar la viabilidad financiera del proyecto utilizando la TUR

Solución

a) Primero se halla el equivalente de los egresos en el período 0.

$$V_pE(23{,}6\%) = -195.75 - [(27.95)/(1+0{,}236)^1] - [(64.77)/(1+0{,}236)^2]$$

$$V_pE(23{,}6\%) = -260{,}7604$$

b) Seguidamente se halla el equivalente de los ingresos en período 6

$$V_fI(23{,}6\%) = [(29.2)\times(1+0{,}236)^3] + [(85.5)\times(1+0{,}236)^2] + [(87.5)\times(1+0{,}236)] + 423{,}6$$

$$V_f\, I(23{,}6\%) = 717{,}5043$$

c) Con estos dos valores en los períodos 0 y 6, se obtiene el nuevo flujo de caja, para el cual se calcula la TUR utilizando para ello la fórmula (60).

PERÍODO	0	1	2	3	4	5	6
FLUJO DE CAJA	-260,76						717,50

$$TUR = (\frac{V_f}{V_p})^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$TUR = (\frac{717,50}{260,76})^{\frac{1}{6}} - 1 = 0,1838$$

Respuesta:
La TUR del proyecto es igual 18,38% y considerando que es menor que la $TMAR$, el proyecto no es viable desde el punto de vista financiero

2.5 Análisis Beneficio-Costo (B/C)

Este criterio es especialmente usado en la evaluación de proyectos públicos. Bajo el criterio se comparan los Beneficios versus los Costos; para que el proyecto sea viable financieramente los beneficios deben ser mayores que los costos.

Matemáticamente, la relación Beneficio-Costo de un proyecto es el resultado de dividir la sumatoria del valor presente de los ingresos netos (beneficios) y la sumatoria de los egresos netos (Costos); todos ellos descontados a una tasa de descuento i $(TMAR)$; la fórmula matemática queda como:

$$\frac{B}{C}(i) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \frac{I_j}{(1+i)^j}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{E_j}{(1+i)^j}} \quad Para\ j = 0,1,2 \ldots n; \quad (61)$$

Si i es la Tasa Mínima Atractiva de Retorno $(TMAR)$, entonces la relación B/C se puede interpretar, como:

a) Si $\frac{B}{C}(i) < 1$, entonces el proyecto no se justifica desde el punto de vista financiero.

b) Si $\frac{B}{C}(i) = 1$, el proyecto está rentando justo la Tasa Mínima Atractiva de Retorno.

c) Si $\frac{B}{C}(i) > 1$, el proyecto es atractivo desde el punto de vista financiero ya que renta por encima de la Tasa Mínima Atractiva de Retorno

Ejemplos y Casos

5.14 – Análisis Beneficio / Costo (B/C)

Al estudiarse la construcción de la doble calzada Medellín-Santa Fe, que aumentara la velocidad de desplazamiento entre la dos ciudades en 30Km/h, se obtienen las siguientes consecuencias económicas: las inversiones se estiman en $100.000 mil millones; los beneficios por la disminución en desgaste de vehículos, gastos de mantenimiento, gasolina, etc., se estiman en $28.000 millones al año; y los perjuicios que dicha construcción trae para los comerciantes asentados en la carretera en $15.000 millones al año. Se pide determinar la viabilidad financiera del proyecto, utilizando la relación B/C.

a) para una TMAR del 20% y
b) para una TMAR del 10%

Solución
Parámetros

- Inversiones: $100.000´000.000
- Costos anuales: $15.000´000.000
- Beneficios anuales: $28.000´000.000
- Costos de capital: 20% y 10%

Cálculos

a) Del enunciado mismo se obtiene que el Beneficio Anual Equivalente (BAE) es de $\$13.000$ millones $(28.000 - 15.000)$; de otra parte el Costo Anual Equivalente (CAE), considerando la inversión se puede calcular de la fórmula (40) despejando A, usando como tasa de descuento la $TMAR$ del 20%

$$V_p = \frac{A}{i}$$

$$100.000 \times 0{,}20 = CAE = 20.000$$

Entonces la relación B/C, será igual a:

$$\frac{B}{C}(20\%) = \frac{13.000}{20.000} = 0{,}65$$

Respuesta a)
Considerando que la relación $\frac{B}{C} < 1$ entonces el proyecto no es viable financieramente

b) El Beneficio Anual Equivalente (BAE) es de \$13.000 millones; de otra parte el Costo Anual Equivalente (CAE), considerando la inversión se puede calcular de la fórmula (40) despejando A, usando como tasa de descuento la $TMAR$ del 10%

$$V_p = \frac{A}{i}$$

$$100.000 \times 0{,}10 = CAE = 10.000$$

Entonces la relación B/C, será igual a:

$$\frac{B}{C}(10\%) = \frac{13.000}{10.000} = 1{,}3$$

Respuesta b)
Considerando que la relación $\frac{B}{C} > 1$ entonces el proyecto es viable financieramente

3. Análisis de Sensibilidad

Considerando que la evaluación de los proyectos se basa en proyecciones de variables económicas, es lógico pensar que existe un factor de incertidumbre en los indicadores financieros calculados. Se pueden prever cambios de dichas variables cuando el proyecto se encuentre en operación; por esto, es importante que el proyectista realice análisis que le permitan determinar la sensibilidad de los indicadores financieros con respecto a algunas variables del proyecto; por ejemplo: ¿Qué tanto variara la TIR cuando se producen variaciones en el precio del producto?, ¿Cómo variara el VPN cuando hay un incremento o una disminución de los costos?, etc.

El análisis debe hacerse considerando la o las variables de mayor incertidumbre, las cuales dependerán de cada estudio en particular: el grado de detalle con el cual fue realizado el estudio, las fuentes utilizadas, las estimaciones realizadas, entre otros parámetros.

En general las variables más propensas a cambios son:

- La Tasa Mínima Atractiva de Retorno $(TMAR)$ o costo de capital
- El precio de venta del producto
- La demanda del producto
- El costo variable del producto (mano de obra, materiales y otros)
- Los gastos generales de administración
- La tasa de interés de los préstamos
- Impuestos

3.1 Punto de equilibrio entre dos alternativas

Cuando existen dos alternativas donde, bajo ciertas condiciones, una de ellas es mejor que la otra financieramente; es posible, que cambiando una de las variables, dejando fijas las demás, se puede hallar el valor que hace que las alternativas sean igualmente rentables. Este valor recibe el nombre del punto de equilibrio entre las dos alternativas

Cuando se usa el criterio de la TIR, de hecho se está haciendo un análisis de sensibilidad de la tasa de interés de descuento, siendo la TIR el punto de equilibrio; ya que si se exige una Tasa Mínima Aceptable de Rentabilidad $(TMAR)$

mayor a la TIR, el proyecto debe rechazarse y por el contrario si la exigencia es menor o igual el proyecto es aceptable desde el punto de vista financiero.

Ejemplos y Casos

5.15 – Punto de Equilibrio entre dos Alternativas

Un gerente de producción estudia la posibilidad de remplazar el trabajo manual por una nueva máquina que acaba de salir al mercado. Las consideraciones del proyecto, son las siguientes:

a) La producción de cada obrero es de 500 unidades semanales y por este trabajo se le paga un salario integral de $100.000 semanales
b) La máquina que tendrá un costo de $60´000.000 puede producir 10.000 unidades semanales, con un costo anual de operación inicial de $3´000.000 el cual se incrementa anualmente el 15%. Además la maquina requiere de solo un operario el cual recibirá de una remuneración de $250.000 semanales

Determine hasta qué punto es rentable la producción manual, suponiendo una $TMAR$ del 30%.

Solución
Parámetros
- Sea X el número de unidades producidas por año.

<u>Producción manual</u>

Costo de cada producto

$$Costo\ Unitario = \frac{100.000}{500} = 200$$

$$Costo\ anual\ total = CAE = 200X$$

<u>Producción a través de la Maquina</u>

$$Costo\ de\ la\ Mano\ de\ obra\ por\ unidad = \frac{250.000}{10.000} = 25$$

$$Costo\ tota\ mano\ de\ obra\ anual = \ 25X$$

Para hallar el Costo Anual Equivalente (CAE) con la máquina, se debe considerar la inversión y los costos de operación. Inicialmente se calcula el VPN de estos valores, considerando: la inversión y los costos de operación por $3´000.000 y un incremento anual de 15%; para esto aplicamos la fórmula (48), utilizando como tasa de descuento el $TMAR$ del 30% EA.

$$VPN = -I - \frac{A}{(i_1 - G_1)}$$

$$VPN = -60´000.000 - \frac{3´000.000}{(0{,}30 - 0{,}15)}$$

$$VPN = -80´000.000$$

Considerando que la alternativa tiene una vida útil infinita, para calcular el CAE, se utiliza la fórmula (40), y la tasa de descuento del 30%, despejando A

$$V_p = \frac{A}{i}; para\ i \neq 0$$

$$CAE = 80´000.000 \times 0{,}30 = 24´000.000$$

Entonces el Costo Anual Equivalente (CAE) de la alternativa con la maquina es:

$$24´000.000 + 25x$$

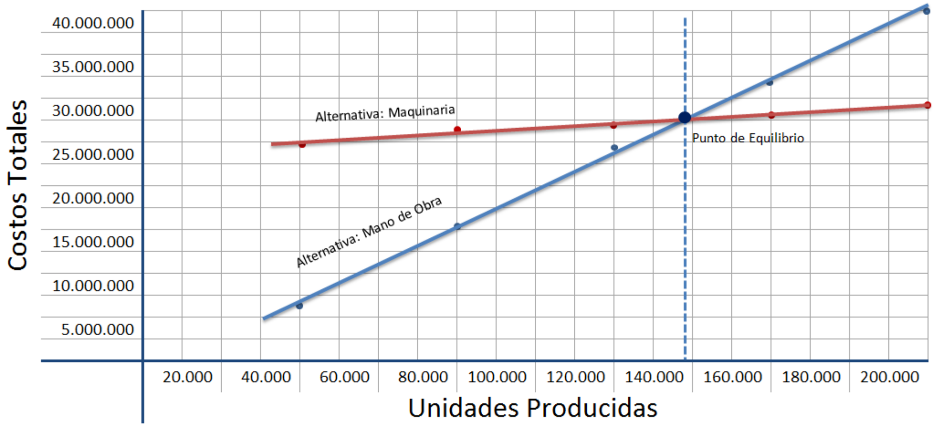
El punto de equilibrio será la cantidad X que hace que los CAE de las dos alternativas sean iguales; matemáticamente:

$$200X = 24´000.000 + 25X$$

Despejado X, se obtiene:

$$X = 137.142{,}85\ unidades$$

Lo que significa que para aproximadamente 137.143 unidades hay punto de equilibrio entre las dos alternativas; lo anterior, se puede visualizar en una gráfica donde se relacionen los costos de cada unidad con las unidades producidas.



En la siguiente tabla, para cada alternativa, se muestra el comportamiento de los costos para diferentes cantidades que están por encima y por debajo del punto de equilibrio entre las dos alternativas

Unidades Producidas	Alternativa: Mano de Obra	Alternativa: Maquina
	Costo	Costo
40.000	8´000.000	25´000.000
80.000	16´000.000	26´000.000
120.000	24´000.000	27´000.000
160.000	32´000.000	28´000.000
200.000	40´000.000	29´000.000

Respuesta

De acuerdo al punto de equilibrio hasta 137.143 unidades la alternativa mano de obra es más rentable que la alternativa maquinaria; y a su vez, a partir de este valor la mejor alternativa es la Maquina.

3.2 Procedimiento General para el Análisis de Sensibilidad

Para realizar el análisis de sensibilidad se proponen los siguientes pasos:

1) Se escogen las variables de mayor incertidumbre; como criterio se escogen aquellas que tienen una mayor contribución en los ingresos y costos del proyecto.
2) Para cada variable determine el rango de variación más probable.
3) Evalué la sensibilidad de cada variable, usando el criterio previamente establecido para el análisis. Una gráfica es un buen modo de presentar los resultados.
4) Calcular el factor de sensibilidad así: $K = \frac{V_e - V}{V}$; donde V_e es el punto de equilibrio, V es el valor de referencia y K es el porcentaje de error. Si este factor es cercano a cero la sensibilidad de la decisión será muy alta; por el contrario si K es grande la sensibilidad será baja.

Los resultados del análisis de sensibilidad sirven para realizar ajustes en los estudios de los proyectos, por ejemplo buscando información más detallada y confiable de una variable en particular.

3.3 Análisis de sensibilidad – Variación del Precio

El precio de los productos del proyecto se determina a partir de los estudios técnicos y de mercado, considerando, entre otras variables, costos, proveedores, competencia, clientes, entre otros. De esta manera, la probabilidad de que se produzcan cambios en esta variable, una vez el proyecto entre en operación, es muy alta; máxime si se considera la dinámica de los mercados hoy en día. El análisis de sensibilidad, variando el precio, permite al evaluador visualizar lo que sucede con la rentabilidad cuando se incrementan o disminuyen los precios del proyecto

Ejemplos y Casos

5.16 – ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD - PRECIO

Una empresa estima que al actualizar sus equipos puede aumentar su capacidad máxima de producción de 50.000 a 100.000 unidades. Las cifras económicas de este proyecto de actualización son las siguientes:

- Valor de la actualización de los equipos $90´000.000, depreciación a 5 años, sin valor de salvamento.
- El costo anual de operación será de $10´000.000, y se estima que se incrementara en $1´000.000 anualmente.
- Los impuestos sobre las ganancias son del 30%.
- La capacidad de producción se irá incrementando en el tiempo como sigue: 1er año: 70.000 unidades, 2do año: 85.000 y a partir del tercer año: 100.000 unidades
- Del estudio de mercado se determina que el precio aproximado de los productos es de $700; aunque se estima que este puede variar
- La tasa mínima aceptable de retorno ($TMAR$) es 30%.

Determine las condiciones mínimas en cuanto al precio bajo las cuales es aconsejable la realización del proyecto.

Solución

Calculo de los Ingresos

Año	Producción	Ingreso
1	70.000	49.000.000
2	85.000	59.500.000
3	100.000	70.000.000
4	100.000	70.000.000
5	100.000	70.000.000

Flujo de caja

Concepto	Período (Años)					
	0	1	2	3	4	5
Ingreso		49.000.000	59.500.000	70.000.000	70.000.000	70.000.000
Costo de Operación		10.000.000	11.000.000	12.000.000	13.000.000	14.000.000
Depreciación		18.000.000	18.000.000	18.000.000	18.000.000	18.000.000

Utilidad		21.000.000	30.500.000	40.000.000	39.000.000	38.000.000
Impuesto (30%)		6.300.000	9.150.000	12.000.000	11.700.000	11.400.000
Ajuste por depreciación		18.000.000	18.000.000	18.000.000	18.000.000	18.000.000
Inversión	90.000.000					
Flujo de Caja	(90.000.000)	32.700.000	39.350.000	46.000.000	45.300.000	44.600.000

Calculo de la TIR

Con base en el flujo de caja se calcula la tasa interna de retorno: $TIR = 33{,}89\%$

Considerando que la TIR es mayor que la $TMAR$ el proyecto es viable desde el punto de vista financiero. No obstante, como el precio de venta es incierto se debe analizar la variación de la TIR cuando se varía el precio.

Precio	600	650	700	750	800
TIR	25,81%	29,91%	33,89%	37,76%	41,53%

Para determinar el precio mínimo al cual se debe vender el producto se debe calcular el precio para el cual la TIR es igual a la $TMAR$.

Teniendo en cuenta que la $TMAR$ es 30%, de la serie calculada en la tabla anterior, se puede deducir que el precio que permite obtener dicha tasa esta entre los $650 y $700; con lo cual se puede realizar una interpolación. Si para una diferencia de 50 pesos (700-650) la diferencia en la TIR es de 3,98% (33,89-29,91) para una diferencia de TIR de 0,09 que diferencia de precio le corresponde; calculando se obtiene: $1,1306.

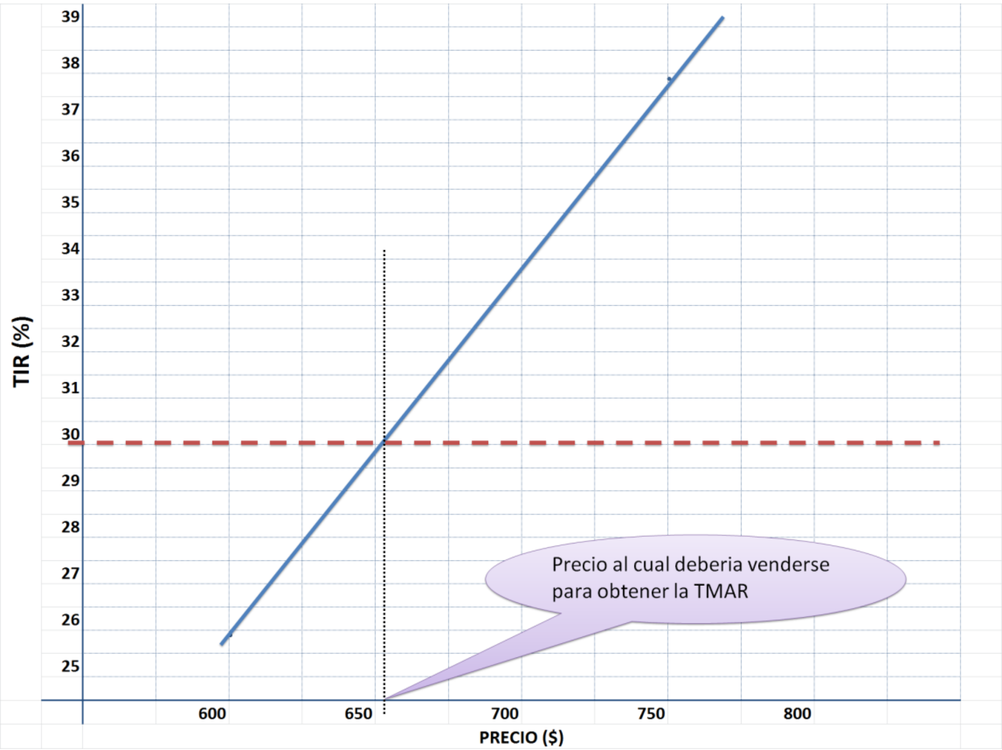
De esta forma el precio para obtener la $TMAR$ es $651,13. En la siguiente gráfica se ilustra el cálculo del precio mínimo.

Para calcular el coeficiente de sensibilidad se utiliza:

$$K = \frac{V_e - V}{V}$$

$$K = \frac{651{,}13 - 700}{700} = -0{,}0698$$

Considerando que el valor está muy próximo a cero, la sensibilidad de tomar una decisión con un precio de venta de $700 es muy sensible, es decir de alto riesgo



3.4 Análisis de sensibilidad – Variación de la Demanda

Igual que el precio, la demanda de los productos, determinada a través del estudio de mercado, no tiene cien por ciento de certeza; ya que la exactitud con la cual se determina tiene que ver con el universo del mercado, la muestra utilizada para el cálculo, el precio del producto, los vaivenes de la economía, entre otras variables.

De esta manera la probabilidad de que se produzcan cambios en la demanda, una vez el proyecto esté en operación, es muy alta. Por esta razón, es muy útil para el proyectista el análisis de sensibilidad de la demanda con el fin de determinar cómo varían los indicadores financieros del proyecto

Ejemplos y Casos

5.17 – Análisis de Sensibilidad - Demanda

Una empresa estima que al actualizar sus equipos puede aumentar su capacidad máxima de producción y ventas de 50.000 a 100.000 unidades.

Las cifras económicas de este proyecto son las siguientes:

- Valor de la actualización de los equipos $100´000.000, depreciación a 5 años, sin valor de salvamento.
- El costo anual de operación será de $15´000.000; se estima que se incrementara en $2´000.000 anualmente.
- Los impuestos sobre las ganancias son del 30%.
- Las ventas se estiman en 90.000 unidades; pero de los estudios se estima que dicho valor puede variar en +/- 10%
- El precio de venta del producto es de $800.
- La tasa mínima de retorno es 35%.

Determine las condiciones mínimas de la demanda bajo las cuales es aconsejable la realización del proyecto.

Solución

Calculo de los Ingresos

Inicialmente los ingresos se calculan con base en el estimativo de ventas, sin considerar las variaciones que los estudios confirman que se pueden presentar.

Año	Producción	Ingreso
1	90.000	72.000.000
2	90.000	72.000.000
3	90.000	72.000.000
4	90.000	72.000.000
5	90.000	72.000.000

Flujo de caja

Concepto	Período (Años)					
	0	1	2	3	4	5
Ingreso		72.000.000	72.000.000	72.000.000	72.000.000	72.000.000
Costo de Operación		15.000.000	17.000.000	19.000.000	21.000.000	23.000.000
Depreciación		20.000.000	20.000.000	20.000.000	20.000.000	20.000.000
Utilidad		39.000.000	35.000.000	33.000.000	31.000.000	29.000.000
Impuesto		11.100.000	10.500.000	9.900.000	9.300.000	8.700.000
Ajuste por depreciación		20.000.000	20.000.000	20.000.000	20.000.000	20.000.000
Inversión	100.000.000					
Flujo de Caja	**(100.000.000)**	**45.900.000**	**44.500.000**	**43.100.000**	**41.700.000**	**40.300.000**

Calculo de la TIR

Con base en el flujo de caja se calcula la tasa interna de retorno: $TIR = 33{,}55\%$. Considerando que la TIR es menor que la $TMAR$, el proyecto no es viable desde el punto de vista financiero.

Como la demanda es incierta se debe analizar la variación de la TIR para la variación de la demanda. De los estudios, se sabe que la variación es $\pm 10\%$ teniendo como base 90.000 unidades.

Demanda	81.000	85.000	90.000	95.000	99.000
TIR	26,99%	29,94%	33,55%	37,09%	39,88%

Del anterior tabla se puede visualizar que la TIR alcanza el valor de la $TMAR$ cuando la demanda esta entre 90.000 y 95.000 unidades. Para conocer las unidades exactas que hay que vender para obtener la $TMAR$, en la tabla anterior se realiza una interpolación.

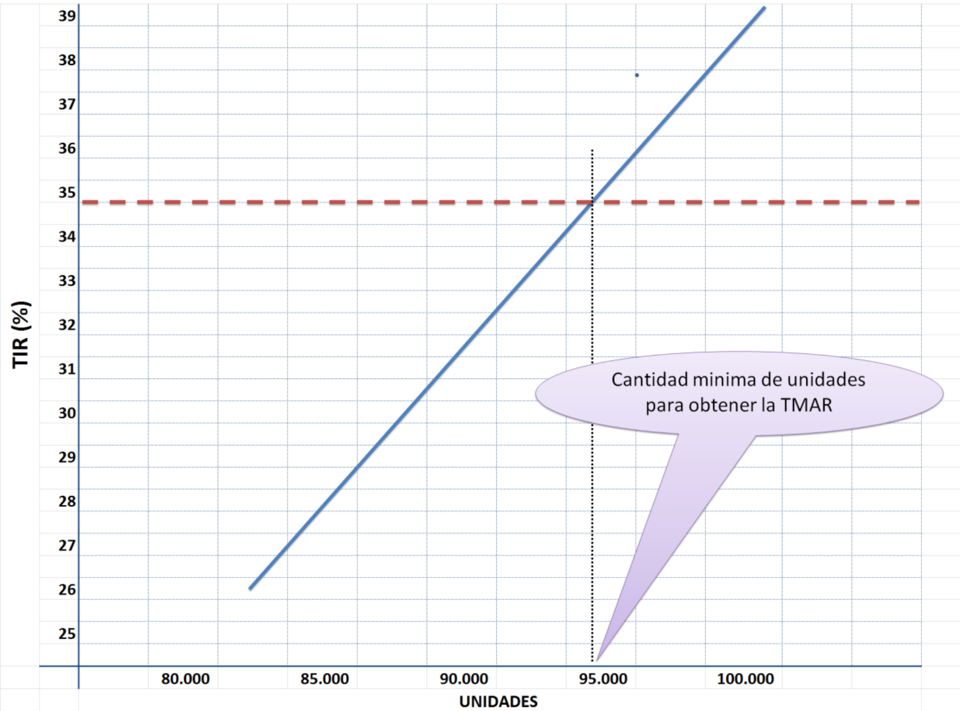
Si para una diferencia de 5000 unidades (95000-90000) la diferencia en la TIR es de 3,55% (36,34-32,79) para una diferencia de TIR de la 1,45 (35%-33,55%); qué diferencia de unidades le corresponde; calculando se obtiene: 2043 unidades. De esta forma las unidades a vender para obtener la $TMAR$ es 92.043

En la siguiente Gráfica se ilustra el cálculo del precio mínimo.

Para calcular el coeficiente de sensibilidad se utiliza:

$$K = \frac{V_e - V}{V}$$

$$K = \frac{93112 - 90000}{90000} = 0{,}0345$$



Respuesta
Considerando que el coeficiente de sensibilidad está muy próximo a cero, tomar una decisión con una demanda de 93.112 unidades, es de alto riesgo.

3.5 Análisis de sensibilidad – Multi-variable

El análisis de sensibilidad multi-variable, considera la variación de más de una variable; por ejemplo: precios y demanda simultáneamente. Este tipo análisis son muy útiles en los casos en que los estudios no son confiables; ya sea porque no se cuenta con la información suficiente; o porque el estudio no se ha hecho con la suficiente rigurosidad.

Modelos Matemáticos

RELACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS

(1)	$V_f = V_p + I$	Valor futuro de un Capital
(2)	$I = V_p \times i \times n$	Interés Simple
(3)	$V_f = V_p\,(1 + i \times n)$	Valor Futuro-Interés Simple
(4)	$V_p = \dfrac{V_f}{(1 + i \times n)}$	Valor Presente-Interés simple
(5)	$i = \left(\dfrac{V_f}{V_p} - 1\right) \times \dfrac{1}{n}$	Tasa de Interés - Interés Simple
(6)	$n = \left(\dfrac{V_f}{V_p} - 1\right) \times \dfrac{1}{i}$	Número de Períodos-Interés Simple
(7)	$D = V_f \times d \times n$	Valor del Descuento
(8)	$V_t = V_f \times (1 - d \times n)$	Valor Liquido de una Operación de

		Descuento
(9)	$V_f = \dfrac{V_t}{(1 - d \times n)}$	Valor Nominal de una Operación de Descuento
(10)	$D = A[1 - (1 - d_1)(1 - d_2) \ldots (1 - d_{n-1})(1 - d_n)]$	Descuento Comercial
(11)	$A_f = A(1 - d_1)(1 - d_2) \ldots (1 - d_n)$	Valor de la Factura final – Descuento Comercial
(12)	$\bar{d} = 1 - (1 - d_1)(1 - d_2) \ldots (1 - d_n)$	Descuento Promedio
(13)	$V_f = V_p(1 + i)^n$	Valor Futuro-Interés Compuesto
(14)	$I = V_p[(1 + i)^n - 1]$	Interés-Interés Compuesto
(15)	$V_p = \dfrac{V_f}{(1 + i)^n}$	Valor Presente-Interés Compuesto
(16)	$n = \dfrac{\log\left(\dfrac{V_f}{V_p}\right)}{\log(1 + i)}$	Número de Períodos-Interés Compuesto
(17)	$i = \left(\dfrac{V_f}{V_p}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$	Tasa de Interés - Interés Compuesto
(18)	$j = i \times m$	Relación Tasa Nominal y Tasa Efectiva
(19)	$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$	Relación entre Tasas Efectivas

(20)	$i = \frac{i_a}{(1 - i_a)}$	Relación Interés vencido e interés anticipado
(21)	$i_a = \frac{i}{(1 + i)}$	Relación Interés anticipado e interés vencido
(22)	$\sum ingresos = \sum egresos \ (en\, la\, ff)$	Ecuación de Valor
(23)	$\sum Obligaciones = \sum Pagos \ (en\, la\, ff)$	Ecuación de Valor
(24)	$D_v = \frac{TC_f - TC_i}{TC_i}$	Devaluación
(25)	$TC_f = TC_i \times (1 + D_v)^n$	Tasa de cambio
(26)	$i_c = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2$	Tasas Combinadas
(27)	$i_r = \frac{i - f}{1 + f}$	Tasa de Interés Deflactada
(28)	$V_p = A\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0$	Valor Presente de una Anualidad
(29)	$V_p = A(V_p/A, i\%, n); para\ i \neq 0$	Valor Presente de una Anualidad
(30)	$A = V_p\left[\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}\right]; para\ i \neq 0$	Pagos o Rentas de una Anualidad, dado el Valor Presente
(31)	$A = V_p(A/V_p, i\%, n); para\ i \neq 0$	Pagos o Rentas de una Anualidad, dado el Valor Presente
(32)	$A = V_f\left[\frac{i}{(1 + i)^n - 1}\right]; para\ i \neq 0$	Pagos o Rentas de una Anualidad, dado

		el Valor Futuro
(33)	$A = V_f\left(A/V_f\,, i\%\,, n\right); para\ i \neq 0$	Pagos o Rentas de una Anualidad, dado el Valor Futuro
(34)	$V_f\ = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]; para\ i \neq 0$	Valor Futuro de una Anualidad
(35)	$V_f\ = A\left(V_f/A\,, i\%\,, n\right); para\ i \neq 0$	Valor futuro de una Anualidad
(36)	$n = \frac{Log(V_f i + A) - LogA}{Log(1+i)}\ ; para\ i \neq 0$	Número de Períodos de una Anualidad dado el Valor Futuro
(37)	$n = \frac{\log A - Log\ (A - iV_p)}{\log(1+i)}\ ; para\ i \neq 0$	Número de Períodos de una Anualidad dado el Valor Presente
(38)	$\ddot{V}_p = A\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]; para\ i \neq 0$	Valor Presente de una Anualidad Anticipada
(39)	$\ddot{V}_f\ = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i); para\ i \neq 0$	Valor Futuro de una Anualidad Anticipada
(40)	$V_p = \frac{A}{i}; para\ i \neq 0$	Valor Presente de una Anualidad Perpetua
(41)	$i = \frac{A}{V_p}; para\ V_p\ \neq 0$	Tasa de Interés de una Anualidad Perpetua
(42)	$A = V_p \times i$	Pagos o Rentas de una Anualidad Perpetua

(43)	$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{K}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$	Valor Presente de un Gradiente Aritmético
(44)	$V_f = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{K}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$	Valor futuro de un gradiente Aritmético
(45)	$V_p = \frac{A}{i} + \frac{K}{i^2}\ ; para\ i \neq 0$	Valor presente de un gradiente aritmético Perpetuo
(46)	$V_p = \frac{A}{(G-i)}\left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1\right] \quad si\ G \neq i$	Valor presente de un gradiente geométrico
(46)	$V_p = \frac{nA}{(1+i)} \quad si\ G = i$	Valor presente de un gradiente geométrico
(47)	$V_f = \frac{A}{(G-i)}[(1+G)^n - (1+i)^n]; \quad si\ G \neq i$	Valor futuro de un gradiente geométrico
(47)	$V_f = \frac{nA}{(1+i)^{-n+1}}; \quad si\ \ G = i$	Valor futuro de un gradiente geométrico
(48)	$V_p = \frac{A}{(i-G)}; \quad si\ G < i$	Valor futuro de un gradiente geométrico perpetuo
(48)	$V_p = \infty; \quad si\ \ G \geq i$	Valor futuro de un gradiente geométrico perpetuo
(49)	$V_k = \frac{V_p}{n}$	Valor de la Amortización de capital
(50)	$K_o = \frac{(K_d \times D)}{(D+P)} + \frac{(K_e \times P)}{(D+P)}$	Costo de Capital
(51)	$K_d = K'(1-t)$	Costo de la deuda

(52)	$K_e = R_f + R_p$	Costo del Capital Propio
(53)	$R_p = \beta(R_m - R_f)$	Prima Riesgo del Negocio
(54)	$K_e = \left(\frac{D_v}{P_r}\right) + g$	Costo de Capital Propio
(55)	$1 + i_c = (1 + i_r)(1 + f)$	Tasa de descuento corriente y constante
(56)	$VPN(i) = I_o + \sum_{j=1}^{n} V_P I\,(i)_j - \sum_{j=1}^{n} V_P E(i)_j$	Valor Presente Neto
(57)	$VPN(i) = I_o + \sum_{j=1}^{n} \frac{I_j}{(1+i)^j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{E_j}{(1+i)^j}$	Valor Presente Neto
(58)	$VPN(i) = \sum_{j=0}^{n} \frac{FC_j}{(1+i)^j}$	Valor Presente Neto
(59)	$VPN(i) = 0 = I_o + \sum_{j=1}^{n} \frac{I_j}{(1+i)^j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{E_j}{(1+i)^j}$	Definición de Tasa Interna de Retorno
(60)	$TUR = (\frac{V_f}{V_p})^{\frac{1}{n}} - 1$	Tasa Única de Retorno
(61)	$\frac{B}{C}(i) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \frac{I_j}{(1+i)^j}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{E_j}{(1+i)^j}}$	Relación Beneficio / Costo

Referencias Bibliográficas

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Aching-Guzmán, Cesar. (s.f). *Matemáticas financieras para la toma de decisiones empresariales*. Editorial Serie MYPES.
2. Alvarez-Arango, Alberto. (2005). *Matemáticas Financieras.* Bogotá, Colombia: Editorial McGraw-Hill.
3. Baca-Currea, Guillermo. (2002). *Ingeniería económica*. Bogotá, Colombia: Editorial Fondo Educativo Panamericano.
4. Baca-Urbina, Gabriel. (2010). *Fundamentos de Ingeniería económica*. México: Editorial Mc Graw Hill.
5. Blank, Leland y Tarquín, Anthony. (2004). *Ingeniería Económica.* México: Editorial McGraw-Hill.
6. Boronat-Ombuena, Gonzalo J y Ruiz-Hall David B. (2005) Operaciones de refinanciación y reestructuración financiera. *Revista Estrategia Financiera*, No 285.
7. Cabeza de Vergara, Leonor. (2010). Cavilaciones sobre el interés simple. *Revista del Instituto de Estudios en Educación Universidad del Norte*, 12, 158-175

8. Cabeza, L. y Castrillon, J. (2008). Matemáticas Financieras. Barranquilla: Ediciones Uninorte.

9. Cavazos-Arroyo, Guillermo., Rivas-Aceves, Salvador. (2009) Relación entre la inflación y tasas de interés en México y Estados Unidos. *Revista Latinoamericana de Economía*, 40, (157), 111-135.

10. Devoto-Ratto, Renzo y Núñez-Abarca, Mauro. (2001). *Matemáticas financieras: un enfoque para la toma de decisiones*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso de la Universidad Católica de Valparaíso.

11. Edwards, Gonzalo. (2002). La tasa de descuento en proyectos de Inversión de largo plazo. *Revista de Análisis Económico*, 17, (2), 123-141.

12. Ekstrôm, Erik. (2004). *Selected Problems in Financial Mathematics*. Uppsala: Uppsala University.

13. Fuentes, Javier., López, Carlos.A., Pardo, Ana.María., Camargo, Rafael., Lizarazo, Fernando. (2011). Metodología para estimar el costo del patrimonio en empresas colombianas que no cotizan en bolsa. *Global Conference on Business and Finance Proceedings*, 6, 1089-1101

14. García-S, Oscar.León. (2009). *Administración financiera: Fundamentos y aplicaciones.* Cali, Colombia: Prensa Moderna Impresores.

15. Goviden, Lincoyán. (1988). *Matemáticas Financieras.* México: Editorial McGraw-Hill

16. Infante-Villareal, Arturo. (1985). *Evaluación Financiera de Proyectos de Inversión*. Bogotá, Colombia: Editorial Norma.

17. Molina, Carlos.Alberto y Santos, Miguel.Ángel. (2008) ¿Qué tasa de descuento se debe usar para evaluar proyectos de inversión en Venezuela? *Revista Debates IESA*, 13, (2), 58-65

18. Montero-Montiel, Gabriela. (2005). *Apuntes para la asignatura matemáticas financieras*. México: Editorial Universidad Autónoma de México.

19. Ortiz-Anaya, Héctor. (2003). *Finanzas Básicas para no Financieros*. Bogotá, Colombia: Editorial Thompson.

20. Ramírez, Vicente. (2007). *Apuntes de Formulación y Evaluación de Proyectos de Inversión*. Merida-Venezuela: Editorial Universidad de los Andes.

21. Sapag-Chaín, Nassir. (1993). *Criterios de Evaluación de Proyectos*. España: Editorial McGraw-Hill.

22. Vélez-Pareja, Ignacio. (2002). *Decisiones de inversión enfocado a la valoración de empresas*. Bogotá, Colombia: Editorial CEJA.

CIBERGRAFÍA

Listado o referencia de sitios webs, blogs o portales de internet relacionados:

1. Banco de la Republica. (s.f). *Intereses*. Recuperado de: http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/ayudadetareas/economia/econo104.htm

2. Castañeda, Sebastián., Villarreal, Julio., y Echeverry Diego. (2007). *Modelo de valoración financiera de proyectos especializados en ingeniería de la construcción: A model for financial evaluation of specialized construction engineering projects*. Recuperado de: https://www.google.com/search?q=Modelo+de+valoraci%C3%B3n+financiera+de+proyectos+especializados+en+ingenier%C3%ADa+de+la+construcci%C3%B3n&rls=com.microsoft:es:%7Breferrer:source?%7D&ie=UTF8&oe=UTF8&sourceid=ie7&rlz=1I7ADSA_esCO436

3. Castrillon-Cifuentes. y Castrillon-Henao, Liliana. (2009). *El caos de las tasas de interés*. Recuperado de: http://rcientificas.uninorte.edu.co/index.php/pensamiento/article/viewFile/875/519

4. CEF. (s.f). *Curso de Operaciones financieras*. Recuperado de: http://www.matematicas-financieras.com/Prologo-P1.htm

5. Comisión de regulación de agua potable y Saneamiento Básico. (2011). *Documento de trabajo – definición de la tasa de descuento aplicable a los servicios públicos domiciliarios de acueducto y alcantarillado*. Recuperado de: http://www.cra.gov.co/apcaafiles/30653965346361386366633062643033/DOCUMENTO_DE_TRABAJO_WACC.pdf

6. Damrauf, Guillermo. (2010). *Capítulo 12 Costo de capital*. Recuperado de:

http://www.uv.mx/personal/alsalas/files/2012/06/Capitulo-12_Costo-de-capital.pdf

7. Mian M. A. y Vélez-Pareja, Ignacio. (2007). *Applicability of the Classic WACC Concept in Practice.* Recuperado de: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=804764

8. Monoyios, Michael. (s.f). *EC5006: Financial engineering*. Brunel University. Recuperado de: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.199.4874&rep=rep1&type=pdf

9. Muñoz-Valdés, Felipe.Tomás., y Ramírez-Monárdez, Milton. (s.f). *Optimización en las decisiones de financiamiento de proyectos*. Recuperado de: http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3995831.pdf

10. Navarro-Castaño, Diego. (s.f). UNAL- Virtual Ingeniería económica. Recuperado de: http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/manizales/4010045/index.html

11. Sarmiento S, Julio. (2002). *Matemáticas Financieras*. Recuperado de: http://www.javeriana.edu.co/decisiones/Julio/presentaciones/Matfin.pdf

12. Watts, John M Jr. and Chapman Robert E. (s.f) *Engineering Economics*. Recuperado de: http://fire.nist.gov/bfrlpubs/build02/PDF/b02155.pdf