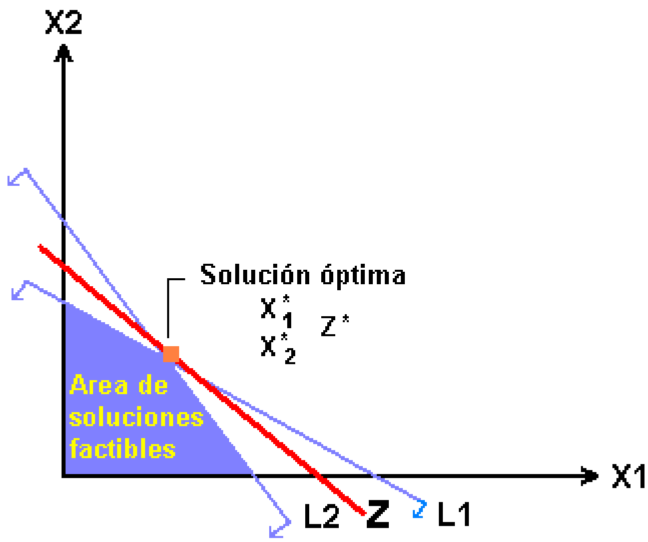
Capítulo 3
Método Gráfico

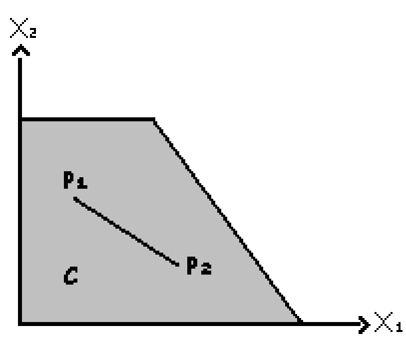


Introducción

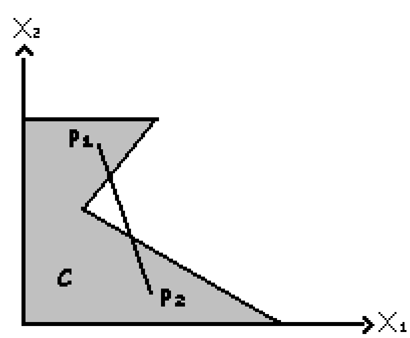
En el presente capítulo se muestra la solución a varios tipos de problemas de programación lineal que solamente tienen en su formulación dos variables empleando el método gráfico.

Conjunto convexo

Un conjunto *C* es un conjunto convexo si el segmento rectilíneo que une cualquier par de puntos de *C* se encuentra completamente en *C*.



Conjunto convexo



Conjunto no convexo

1. Problema de única solución

Maximice $Z = 2X_1 + X_2$

C.S.R.
$$\begin{aligned} 2X_1 - X_2 &\leq 8 \\ X_1 - X_2 &\leq 3 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 14 \\ X_1 + 4X_2 &\leq 24 \end{aligned}$$

$Xj \geq 0$; $j = 1, 2$

Cálculos analíticos para graficar el sistema de inecuaciones lineales, incluyendo la condición de no negatividad ($Xj \geq 0$; $j = 1, 2$), que nos indica que solamente trabajaremos en el primer cuadrante del plano cartesiano, cuadrante en donde X_1 y X_2 son positivas.

1° Restricción		2° Restricción		3° Restricción		4° Restricción		Función Objetivo	
$2X_1 - X_2 \leq 8$		$X_1 - X_2 \leq 3$		$X_1 + 2X_2 \leq 14$		$X_1 + 4X_2 \leq 24$		$Z = 2X_1 + X_2$	
$2X_1 - X_2 = 8$		$X_1 - X_2 = 3$		$X_1 + 2X_2 = 14$		$X_1 + 4X_2 = 24$		$2X_1 + X_2 = 2$	
$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = -8$	$X_1 = 4$	$X_2 = -3$	$X_1 = 3$	$X_2 = 7$	$X_1 = 14$	$X_2 = 6$	$X_1 = 24$	$X_2 = 2$	$X_1 = 1$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 8$		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 3$		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 14$		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 24$			
Verdad		Verdad		Verdad		Verdad			

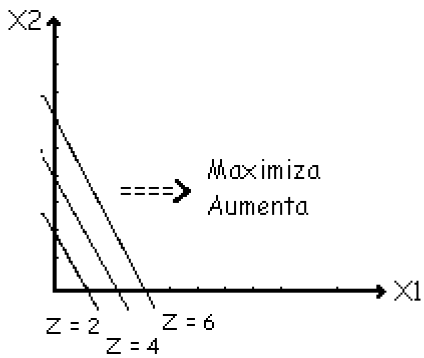
Restricciones

Fíjese que para cada inecuación, primero suponemos que es una igualdad y luego tabulamos dos puntos fáciles de calcular, como lo son las intersecciones de la recta con los ejes cartesianos abcisa y ordenada, esto siempre que el término independiente (Lado derecho de la inecuación) sea diferente de cero, es decir siempre y cuando la recta no pase por el origen de coordenadas P(0,0).

A continuación con un punto de prueba cualquiera $P(X_1, X_2)$, (Asegúrese que se encuentre al lado derecho ó izquierdo de la recta, NO sobre ella, es decir, el punto de prueba NO puede pertenecer a la recta), Aquí, como ya sabemos que la recta no pasa por el origen de coordenadas (Término independiente diferente de cero), usamos como punto de prueba P(0,0), es decir $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ que nos facilita los cálculos cuando lo remplacemos en la inecuación y observamos si la hace una verdad ó una falsedad; Averiguar esto nos permite conocer si el área solución de la inecuación está al lado derecho ó izquierdo (Por supuesto, incluyendo los puntos sobre la recta, ya que todas las inecuaciones son menor ó igual ($\leq$)); Si el punto de prueba hace verdad la inecuación lineal, entonces, todos los puntos que se encuentran al mismo lado del punto de prueba la harán verdad, si el punto de prueba no hace verdad la inecuación lineal, los puntos que la harán verdad están al lado contrario en donde se encuentra el punto de prueba. Esto es, si el punto de prueba se encuentra al lado izquierdo de la recta y hace verdad la inecuación, entonces el área de soluciones para ésta inecuación, son todos los puntos que pertenecen a la recta y los que se encuentran al lado izquierdo de ella. Si el punto de prueba situado a la izquierda de la recta, no hace verdad la inecuación, entonces el área de soluciones para ésta inecuación, son todos los puntos que pertenecen a la recta y los que se encuentran al lado derecha de ella.

Función objetivo

La función objetivo $Z = 2X_1 + X_2$ expresada como $2X_1 + X_2 = Z$ tiene la estructura de una línea recta, solo que no conocemos su término independiente. Graficando ésta ecuación con diferentes valores para Z, observamos que la función objetivo, representa una familia de rectas paralelas, que al aumentar el valor de Z la recta se desplaza hacia el lado derecho, por lo que concluimos que Z aumenta cuando la recta se desplaza paralelamente hacia la derecha, esto se cumple siempre que la ecuación de la función objetiva tenga pendiente negativa, es decir inclinada al lado izquierdo. Para funciones objetivo con pendiente positiva (Inclinadas al lado derecho), se recomienda dar varios valores a Z y graficar para observar si al desplazarse a la derecha Z aumenta o por el contrario disminuye.



$2X_1 + X_2 = 2$		$2X_1 + X_2 = 4$		$2X_1 + X_2 = 6$	
$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = 2$	$X_1 = 1$	$X_2 = 4$	$X_1 = 2$	$X_2 = 6$	$X_1 = 3$

Aquí se le ha dado a Z el valor arbitrario de 2, ya que solo necesitamos graficar una de las rectas que pertenece a la familia de rectas paralelas, para facilitar la tabulación de la función objetivo, se recomienda dar el valor arbitrario de Z como un múltiplo de los coeficientes de las variables, que se consigue fácilmente, multiplicando el coeficiente de X_1 por el coeficiente de X_2 . Es conveniente fijarse en los valores de las coordenadas para graficar la función objetivo observando que sean parecidos en magnitud a los hallados para graficar las restricciones (Observe que puede dar el valor adecuado a Z), esto hará que la gráfica quede convenientemente presentada para el análisis.

Existen dos procedimientos para encontrar la solución factible óptima:

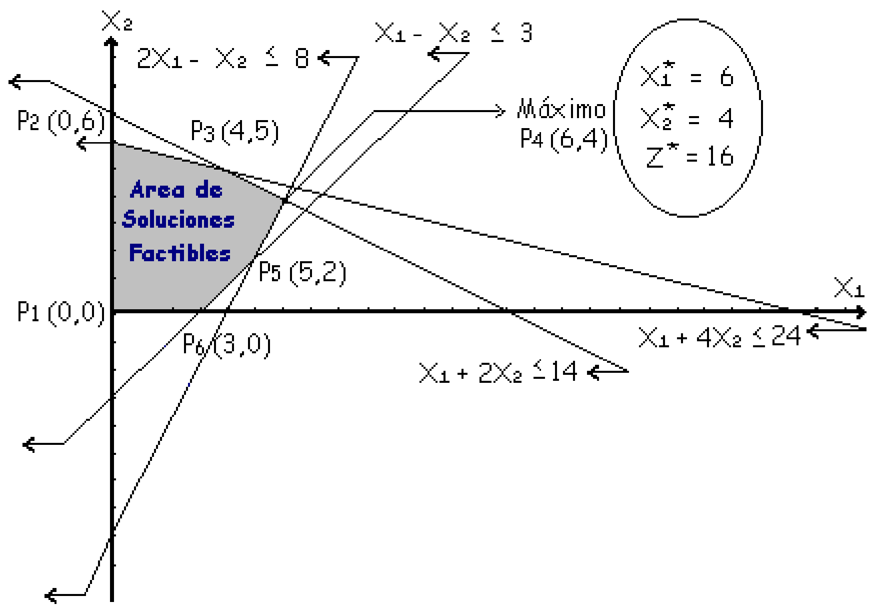
1. Evaluar la función objetivo Z en cada una de las esquinas del área de soluciones factibles. La debilidad de este procedimiento se presenta cuando se tienen muchas restricciones que por supuesto generan un área con muchas esquinas, volviéndose dispendiosa la consecución de sus coordenadas, que implica la solución de muchos sistemas de ecuaciones lineales.

2. Usando la función objetivo para determinar la esquina del área de soluciones factible que la optimiza. La debilidad de éste procedimiento se presenta cuando la función

objetiva es aproximadamente paralela a uno de los lados del área de soluciones factible, originando la duda visual sobre la gráfica de cual de los dos extremos (esquinas) es el que hace que la función objetivo se optimice.

Se recomienda usar el segundo procedimiento y en caso de dudas visuales sobre la gráfica, recurrir al primer procedimiento para dirimir la duda respecto al par de esquinas.

Primer procedimiento: Evaluar la función objetivo Z en cada una de las esquinas del área de soluciones factibles.



El valor de la función objetivo en cada una de las esquinas del área de soluciones factible es:

$Z_{(0,0)} = 2(0) + 0 = 0$

$Z_{(0,6)} = 2(0) + 6 = 6$

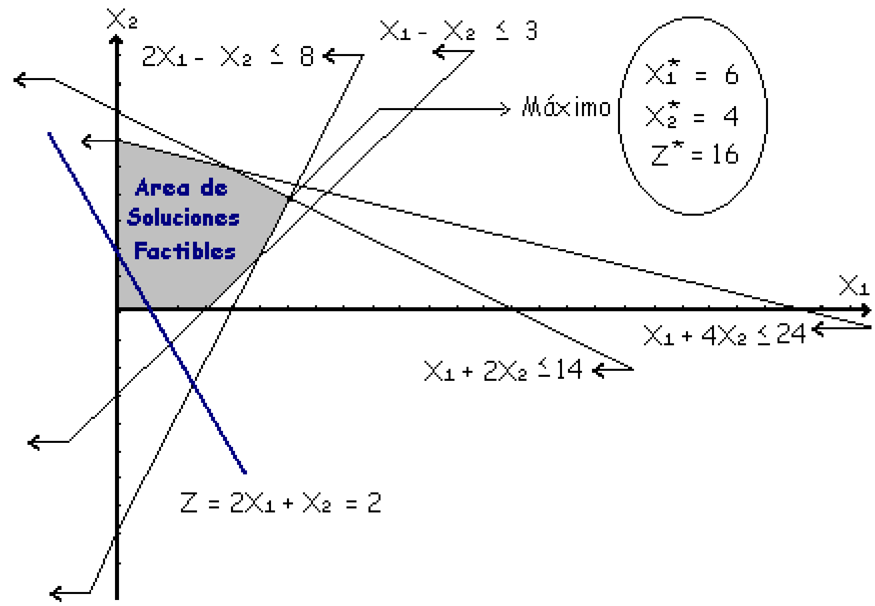
$Z_{(4,5)} = 2(4) + 5 = 13$

$Z_{(6,4)} = 2(6) + 4 = 16$ La función objetivo se maximiza cuando $X_1 = 6$ y $X_2 = 4$

$Z_{(5,2)} = 2(5) + 2 = 12$

$Z_{(3,0)} = 2(3) + 0 = 6$

Segundo procedimiento: Usando la función objetivo para determinar la esquina del área de soluciones factible que la optimiza.



Fíjese que al desplazar la función objetivo Z hacia la derecha, el último punto a la derecha del área de soluciones factible que toca es: X1 = 6 , $X_2 = 4$. Para encontrar las coordenadas debemos interceptar las ecuaciones de las restricciones $X_1 + 2X_2 = 14$ con $2X_1 - X_2 = 8$ Una manera de hacer esto es empleando el método de los determinantes, que para un sistema de dos ecuaciones y dos variables es:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-14 - 16}{-1 - 4} = \frac{-30}{-5} = 6 \qquad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{8 - 28}{-1 - 4} = \frac{-20}{-5} = 4$$

2. Problema de múltiples soluciones

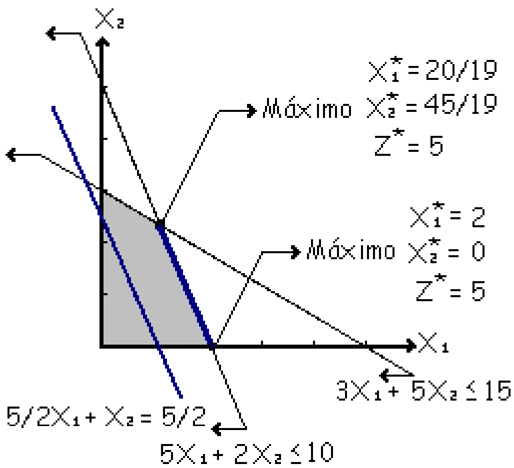
Maximice $Z = 5/2X_1 + X_2$

C.S.R. $3X_1 + 5X_2 \leq 15$

$5X_1 + 2X_2 \leq 10$

$X_j \geq 0$; j = 1, 2

1° Restricción		2° Restricción		Función Objetivo	
$3X_1 + 5X_2 \leq 15$		$5X_1 + 2X_2 \leq 10$		$Z = 5/2X_1 + X_2$	
$3X_1 + 5X_2 = 15$		$5X_1 + 2X_2 = 10$		$5/2X_1 + X_2 = 5/2$	
$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = 3$	$X_1 = 5$	$X_2 = 5$	$X_1 = 2$	$X_2 = 5/2$	$X_1 = 1$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 15$		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 10$			
Verdad		Verdad			



$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{30 - 50}{6 - 25} = \frac{-20}{-19} = 20/19$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{30 - 75}{6 - 25} = \frac{-45}{-19} = 45/19$$

Observe que la solución óptima recae sobre un lado del área de soluciones factible, o sea que todos los puntos que pertenecen a la recta $5X_1 + 2X_2 = 10$ entre los puntos (2,0) y (20/19, 45/19), maximizan la función objetivo, esto es, existen múltiples soluciones, dos de ellas son: $X_1^* = 2$, $X_2^* = 0$, $Z^* = 5$ ó $X_1^* = 20/19$, $X_2^* = 45/19$, y por supuesto $Z^* = 5$.
Una forma más técnica de expresar la solución es: La solución son todas las parejas de puntos que pertenecen a la recta $5X_1 + 2X_2 = 10$, en el intervalo $20/19 \leq X_1 \leq 2$ o en el intervalo $0 \leq X_2 \leq 45/19$; Cualquiera de estos dos puntos hace que Z valga 5

$Z^*_{20/19,45/19} = 5/2X_1^* + X_2^* = 5/2(20/19) + (45/19) = 5$
$Z^*_{2,0} = 5/2X_1^* + X_2^* = 5/2(2) + (0) = 5$

3. Problema de soluciones indeterminadas

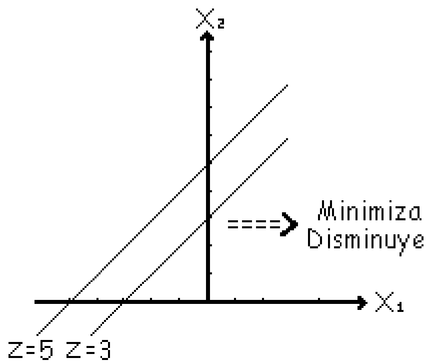
Minimice $Z = - X_1 + X_2$

C.S.R. $X_1 \geq X_2$
$- 0{,}5X_1 + X_2 \leq 1$

$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1, 2$

1° Restricción		2° Restricción		Función Objetivo	
$X_1 - X_2 \geq 0$		$-1/2X_1 + X_2 \leq 1$		$Z = - X_1 + X_2$	
$X_1 - X_2 = 0$		$-1/2X_1 + X_2 = 1$		$- X_1 + X_2 = 3$	
$X_1 = 0$	$X_2 = 5$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = 0$	$X_1 = 5$	$X_2 = 1$	$X_1 = -2$	$X_2 = 3$	$X_1 = -3$
$P(3,0) \Rightarrow 3 \geq 0$		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 1$			
Verdad		Verdad			

Fíjese que para tabular la ecuación de la primera restricción, cuyo término independiente es igual a cero, es una ecuación que pasa por el origen de coordenadas P(0,0) y por lo tanto corta el eje de la abcisa y la ordenada en el mismo punto P(0,0), esto hace necesario tabular un segundo punto, que para el presente caso se uso $X_2 = 5$ y se despejó X_1 obteniendo el valor de 5, con lo que obtenemos un segundo punto P(5,5), que delimita la línea recta.

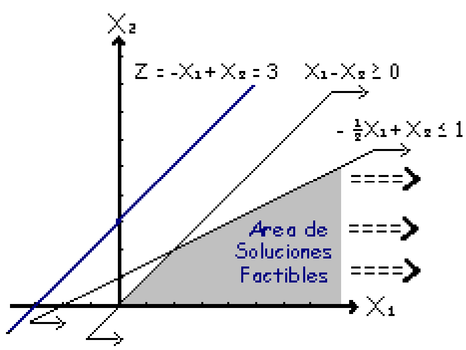


$- X_1 + X_2 = 3$

$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = 3$	$X_1 = - 3$

$- X_1 + X_2 = 5$

$X_1 = 0$	$X_1 = 0$
$X_2 = 5$	$X_2 = -5$

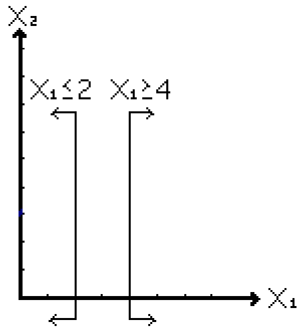


Fíjese que al desplazar la función objetivo hacia la derecha, siempre encontrará un punto más a la derecha del área de soluciones factible que la minimice. Entre más a la derecha se encuentre un punto (X_1 , X_2) que pertenezca al área de soluciones factibles, más pequeño será el valor de la función objetivo, pero siempre habrá una alternativa de encontrar un punto (X_1 , X_2) más a la derecha, por ser una área abierta. Se dice entonces que el problema tiene solución indeterminada.

Si se está modelando sobre un problema real y ocurre éste caso, falta considerar una restricción, que justamente cierre el área de soluciones factibles por el lado derecho. Se ha dejado de considerar la restricción de algún recurso, ya que los valores de las variables en la realidad no pueden crecer de manera ilimitada, irrestrictamente.

4. Problema sin solución

Este caso se presenta cuando entre las restricciones existen al menos dos de ellas que sean excluyentes, tal como: $X_1 \leq 2$ y $X_1 \geq 4$. Aquí nunca podremos encontrar un número que al mismo tiempo sea menor ó igual a 2 y mayor ó igual a 4, las dos restricciones son excluyentes y por lo tanto no existe área de soluciones factible, gráficamente se observa de la siguiente manera:



Si esto ocurre al formular sobre un caso de la vida real, revise la lógica de las restricciones involucradas, en especial el sentido de las desigualdades. Generalmente un par de variables de la vida real no tienen este comportamiento.

5. Problema de programación lineal

Para el siguiente problema de programación lineal: $Z = 3X_1 - 5X_2$ con las siguientes restricciones: $5X_1 - 4X_2 \geq -20$; $X_1 \leq 8$; $X_2 \leq 10$; $X_2 \geq 3$; $5X_1 + 4X_2 \geq 20$ y $Xj \geq 0$; $j = 1,2$

a) En un plano cartesiano grafique las restricciones y la función objetivo, señalando claramente el área de soluciones factible.
b) Calcule las coordenadas de los vértices del área de soluciones factibles.
c) Calcule el valor de la función objetivo Z en cada vértice del área de soluciones factibles.
d) Cuál es el valor de X_1 y X_2 que maximiza, y el que minimiza la función objetivo Z.

1° Restricción	**2° Restricción**	**3° Restricción**	**4° Restricción**	**5° Restricción**
$5X_1 - 4X_2 \geq -20$	$X_1 \leq 8$	$X_2 \leq 10$	$X_2 \geq 3$	$5X_1 + 4X_2 \geq 20$
$5X_1 - 4X_2 = -20$	$X_1 = 8$	$X_2 = 10$	$X_2 = 3$	$5X_1 + 4X_2 = 20$
$X_1 = 0$ $X_2 = 0$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 8$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 10$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \geq 3$	$X_1 = 0$ $X_2 = 0$
$X_2 = 5$ $X_1 = -4$	Verdad	Verdad	Falso	$X_2 = 5$ $X_1 = 4$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \geq -20$	Perpendicular al	Perpendicular al	Perpendicular al	$P(0,0) \Rightarrow 0 \geq 20$
Verdad	eje X_1	eje X_2	eje X_2	Falso

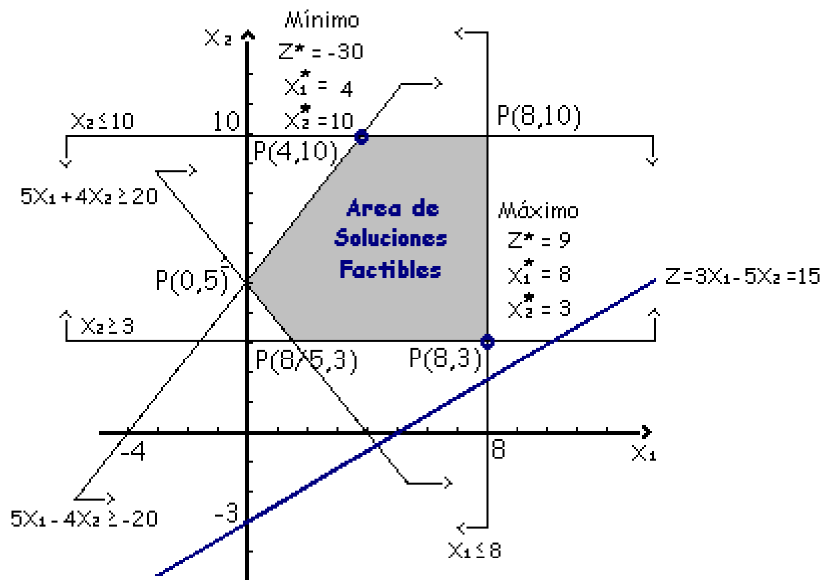
Función Objetivo

$Z = 3X_1 - 5X_2$

$3X_1 - 5X_2 = 15$

$X_1 = 0$ $X_2 = 0$

$X_2 = -3$ $X_1 = 5$



Para encontrar las coordenadas de algunas esquinas del área de soluciones factibles, que no se observan a simple vista en la gráfica, se hace necesario resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$5X_1 + 4X_2 = 20$	$5X_1 - 4X_2 = -20$
$X_2 = 3$	$X_2 = 10$
$5X_1 + 4(3) = 20$	$5X_1 - 4(10) = -20$
$X_1 = 8/5$	$X_1 = 4$
P(8/5,3)	P(4,2)

El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices es:

$Z = 3X_1 - 5X_2$

$Z_{8/5,\,3} = 3(8/5) - 5(3) = 25/4 - 60/4 = -35/4$

$Z_{8,\,3} = 3(8) - 5(3) = 24 - 15 = 9$ Máximo: $X_1^* = 8$; $X_2^* = 3$; $Z^* = 9$

$Z_{8,\,10} = 3(8) - 5(10) = 24 - 50 = -26$

$Z_{4,\,10} = 3(4) - 5(10) = 12 - 50 = -38$ Mínimo: $X_1^* = 4$; $X_2^* = 10$; $Z^* = -38$

$Z_{0,\,5} = 3(0) - 5(5) = 0 - 25 = -5$

Fíjese que la función objetivo del presente ejercicio, tiene pendiente positiva (está inclinada hacia la derecha), y que al desplazarse paralelamente hacia la derecha el valor de Z aumenta y hacia la izquierda el valor de Z disminuye. Al remplazar los valores de las variables (tanto del máximo como del mínimo) en las restricciones, estas deben cumplirse. Adicionalmente observe que el punto que hace que Z sea mínimo, es la intersección de las rectas $5X_1 - 4X_2 = -20$ y $X_2 = 10$, a estas restricciones se les denomina activas ó de estricto cumplimiento, el resto de restricciones se les denomina no activas o de no estricto cumplimiento. Igualmente para el caso de maximizar en el que las restricciones activas o de estricto cumplimiento son: $X_1 \leq 8$ y $X_2 \geq 3$. Para observar esto remplazamos tanto el punto máximo como el mínimo en cada una de las restricciones.

$X_1^* = 4$; $X_2^* = 10$ Valor que hace a $Z^*_{Mínimo} = -30$

$5X_1^* - 4X_2^* \geq -20$	$X_1^* \leq 8$	$X_2^* \leq 10$	$X_2^* \geq 3$	$5X_1^* + 4X_2^* \geq 20$
$5(4)-4(10) \geq -20$	$4 \leq 8$	$10 \leq 10$	$10 \geq 3$	$5(4)+4(10) \geq 20$
$20 - 40 \geq -20$				$20+40 \geq 20$
$-20 \geq -20$				$60 \geq 20$
Verdad	Verdad	Verdad	Verdad	Verdad
Activa	Inactiva	**Activa**	Inactiva	Inactiva
De estricto cumplimiento	De no estricto cumplimiento	**De estricto cumplimiento**	De no estricto cumplimiento	De no estricto cumplimiento

$X_1^* = 8$; $X_2^* = 3$ Valor que hace a $Z^*_{Maximo} = 9$

$5X_1^* - 4X_2^* \geq -20$	$X_1^* \leq 8$	$X_2^* \leq 10$	$X_2^* \geq 3$	$5X_1^* + 4X_2^* \geq 20$
$5(8)-4(3) \geq -20$	$8 \leq 8$	$3 \leq 10$	$3 \geq 3$	$5(8)+4(3) \geq 20$
$40 - 12 \geq -20$				$40+12 \geq 20$
$28 \geq -20$				$52 \geq 20$
Verdad	Verdad	Verdad	Verdad	Verdad
Inactiva	**Activa**	Inactiva	**Activa**	Inactiva
De no estricto cumplimiento	**De estricto cumplimiento**	De no estricto cumplimiento	**De estricto cumplimiento**	De no estricto cumplimiento

6. Un caso de producción

La corporación XYZ fabrica dos modelos de producto Z-1.200 y Z-1.500 . Los requerimientos de producción y las disponibilidades están mostradas a continuación.

Departamento	Requisitos de mano de obra		Capacidad Horas / día
	Modelo Z-1.200	Modelo Z-1.500	
1	20	0	2.300
2	0	30	1.540
3	25	23	2.440
4	11	11	1.300

Los beneficios unitarios logrados a la venta de los modelos Z-1.200 y Z-1.500 son de $50 y $40 , respectivamente. Encuentre el número óptimo de cada producto que va a producir.

Si la corporación XYZ está produciendo actualmente 30 unidades del modelo Z-1.200 y 20 unidades del modelo Z-1.500, ¿Cuánto está dejando de ganar?

Solución

Xj = Unidades a producir y vender del producto j-ésimo (j = 1 = Modelo Z-1.200, j = 2 = Modelo Z-1.500).

Maximice $Z = 50X_1 + 40X_2$

C.S.R.

$$
\begin{aligned}
20X_1 &\leq 2.300\\
30X_2 &\leq 1.540\\
25X_1 + 23X_2 &\leq 2.440\\
11X_1 + 11X_2 &\leq 1.300
\end{aligned}
$$

$Xj \geq 0$; j = 1, 2

1° Restricción	**2° Restricción**	**3° Restricción**		**4° Restricción**	
$20X_1 \leq 2.300$	$30X_2 \leq 1.540$	$25X_1+23X_2 \leq 2.440$		$11X_1 + 11X_2 \leq 1.300$	
$20X_1 = 2.300$	$30X_2 = 1.540$	$25X_1+23X_2 = 2.440$		$11X_1 + 11X_2 = 1.300$	
$X_1 = 115$	$X_2 = 51,3$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
		$X_2 = 106,08$	$X_1 = 97,6$	$X_2 = 118,18$	$X_1 = 118,18$
P(0,0)=>0 $\leq$ 2.300	P(0,0)=>0 $\leq$ 1.540	P(0,0) => 0 $\leq$ 2.440		P(0,0) => 0 $\leq$ 1.300	
Verdad	Verdad	Verdad		Verdad	

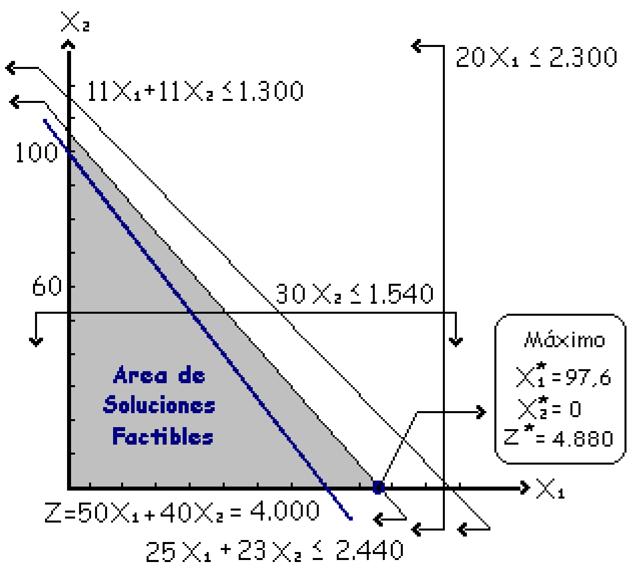
Función Objetivo

$Z = 50X_1 + 40X_2$

$50X_1+40X_2=4.000$

$X_1 = 0$ $X_2 = 0$

$X_2 = 100$ $X_1 = 80$



Fíjese en la gráfica que la cuarta restricción: $11X_1 + 11X_2 \leq 1.300$ es redundante, si la retiramos de la gráfica, el área de soluciones factible sigue siendo la misma y el óptimo también.

Si actualmente $X_1 = 30$ y $X_2 = 20$ entonces Z = 50(30) + 40(20) = 2.300 , luego se están dejando de ganar: \$4.880 – \$2.300 = \$2.580

Interpretación:

Para obtener el beneficio total máximo de $4.880, se deben producir y vender 97,6 unidades del modelo Z-1.200 y no producir el modelo Z-1.500. El modelo Z-1.200 contribuye al beneficio total con: 50(97,6) = $4.880, y el modelo Z-1.500 contribuye al beneficio total con: 40(0) = $0 . Un análisis sobre las restricciones, empleando la solución óptima nos permite conocer la siguiente información:

$20X_1 \leq 2.300$ $20(97,6) \leq 2.300$ $1.952 \leq 2.300$	El departamento 1 trabajará 1.952 horas / día de las 2.300 horas disponibles. Luego tendrá (2.300 – 1.952) 348 horas por día en que no produce ninguno de los dos modelos.
$30X_2 \leq 1.540$ $30(0) \leq 1.540$ $0 \leq 1.540$	En el departamento 2, todas las horas disponibles no serán usadas. No se producirán unidades de ninguno de los dos modelos.
$25X_1+23X_2 \leq 2.440$ $25(97,6)+23(0) \leq 2.440$ $2.440 \leq 2.440$	Todas la horas disponibles en el departamento 3, serán utilizadas, produciendo el modelo Z-1.200
$11X_1 + 11X_2 \leq 1.300$ $11(97,6)+ 11(0) \leq 1.300$ $1.073,6 \leq 1.300$	En el departamento 4 se trabajarán 1.073,6 horas / día de las 1.300 disponibles, se tendrán 226,4 horas / día ociosas.

7. Un caso de producción

Una compañía automotriz produce automóviles y camiones. Cada vehículo tiene que pasar por un taller de pintura y por un taller de montaje de la carrocería. Si el taller de pintura pintara solamente camiones, se podrían pintar 40 camiones al día, y si pintara solamente automóviles, se podrían pintar 60 automóviles. Si el taller de carrocerías ensamblara solamente camiones, podría ensamblar 50 camiones al día y si ensamblara solamente automóviles, podría ensamblar 50 automóviles al día. Cada camión aporta $300 a la utilidad y cada automóvil, $200

Solución

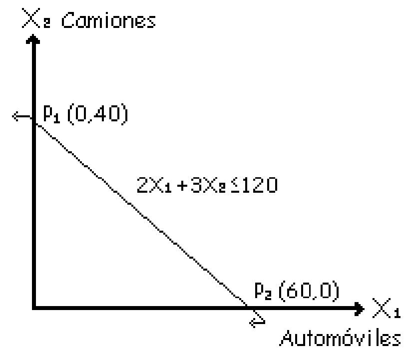
Fíjese que aquí nos han dado las coordenadas por donde cada restricción corta los ejes cartesianos abcisa y ordenada, por lo tanto debemos conseguir las ecuaciones de cada restricción, conociendo dos puntos que pertenecen a la recta.

Xj = Unidades a producir del j-ésimo tipo de vehículo (j = 1 = Automóviles, j = 2 = Camiones)

Taller de pintura

Si $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 40$
Si $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 60$
$m = Y_2 - Y_1 / X_2 - X_1$
$m = -40 / 60 = -2/3$

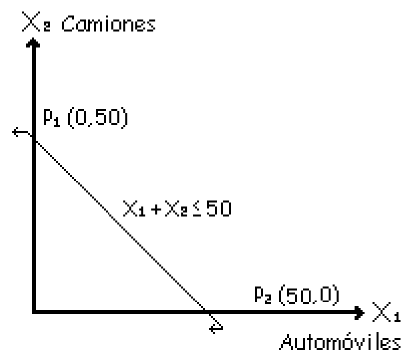
$Y = mX + b = -2/3X + 40$
$3Y=-2X+120 \Rightarrow 2X+3Y=120$
$2X_1+3X_2 = 120 \Rightarrow$
$\mathbf{2X_1+3X_2 \leq 120}$



Taller de ensamble de la carrocería

Si $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 50$
Si $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 50$
$m = Y_2 - Y_1 / X_2 - X_1$
$m = -40 / 50 = -1$

$Y = mX + b = -X + 50$
$X + Y = 50 \Rightarrow$
$\mathbf{X_1 + X_2 \leq 50}$

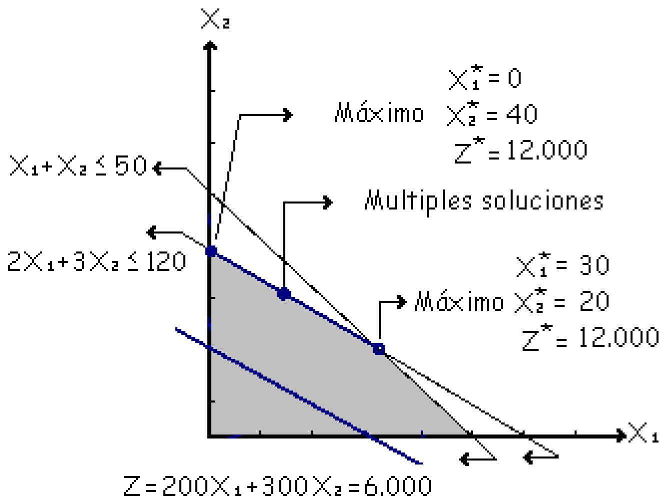


Maximice $Z = 200X_1 + 300X_2$

C.S.R.	$2X_1 + 3X_2 \leq$	120	Restricción debida a las horas disponibles en el taller de pintura.
	$X_1 + X_2 \leq$	50	Restricción debida a las horas disponibles en el taller de ensamble de la carrocería.

$Xj \geq 0$; $j = 1, 2$

1° Restricción		2° Restricción		Función Objetivo	
$2X_1 + 3X_2 \leq 120$		$X_1 + X_2 \leq 50$		$Z = 200X_1 + 300X_2$	
$2X_1 + 3X_2 = 120$		$X_1 + X_2 = 50$		$200X_1 + 300X_2 = 6000$	
$X_1 = 0$	$X_2 = 5$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = 40$	$X_1 = 60$	$X_2 = 50$	$X_1 = 50$	$X_2 = 20$	$X_1 = 30$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 120$		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 50$			
Verdad		Verdad			



$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 3 \\ 50 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{120 - 150}{2 - 3} = \frac{-30}{-1} = 30$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 120 \\ 1 & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{100 - 120}{2 - 3} = \frac{-20}{-1} = 20$$

$Z^* = 200X_1^* + 300X_2^* = 200(30) + 300(20) = 6.000 + 6.000 = 12.000$ ó
$Z^* = 200X_1^* + 300X_2^* = 200\ (0) + 300(40) = 0 + 12.000 = 12.000$

Interpretación:

El problema tiene múltiples soluciones, dos de ellas son las mostradas sobre la gráfica, analizando la solución $X_1^* = 30$; $X_2^* = 20$ sobre las restricciones, el departamento de pintura y el departamento de ensamble de la carrocería utilizarán todo el tiempo disponible.

$2X_1+3X_2 \le 120$ $2(30)+3(20) \le 120$ $60 + 60 \le 120$ $120 \le 120$	Todas la horas disponibles en el departamento de pintura, serán utilizadas así: 60 horas pintando automóviles y 60 horas pintando camiones.
$X_1 + X_2 \le 50$ $30 + 20 \le 50$ $50 \le 50$	Todas la horas disponibles en el departamento de ensamble de carrocería, serán utilizadas así: 30 horas ensamblando carrocerías en automóviles y 20 horas ensamblando carrocerías en camiones.

8. Regla de equivalencia y constante en la función objetivo

Una planta ensambladora de radios produce dos modelos, HiFi-1 y HiFi-2, en la misma línea de ensamble. La línea de ensamble consta de tres estaciones. Los tiempos de ensamble en las estaciones son:

Estación de trabajo	Minutos por unidad de producto producido	
	Radios HiFi-1	Radios HiFi-2
1	6	4
2	5	5
3	4	6

Cada estación de trabajo tiene una disponibilidad máxima de 480 minutos por día. Sin embargo, las estaciones de trabajo requieren mantenimiento diario, que constituye el 10%, 14% y 12% de los 480 minutos totales de que se dispone diariamente para las estaciones 1, 2 y 3 respectivamente. La compañía desea determinar las unidades diarias que se ensamblarán de HiFi-1 y HiFi-2 a fin de minimizar la suma de tiempos inactivos en las tres estaciones.

Solución

X_j = Cantidad de radios a producir del modelo j-ésimo (j = 1 = HiFi-1 ; j = 2 = HiFi-2)

Estación de trabajo	Disponibilidad Máxima minutos	Tiempo que se usará Cada estación de trabajo minutos	Tiempo inactivo de Cada estación de trabajo minutos
1	(1-0,10)480=432,0	$6X_1 + 4X_2$	$432,0 - 6X_1 + 4X_2$
2	(1-0,14)480=412,8	$5X_1 + 5X_2$	$412,8 - 5X_1 + 5X_2$
3	(1-0,12)480=422,4	$4X_1 + 6X_2$	$422,4 - 4X_1 + 6X_2$

$Z = 432,0 - 6X_1 + 4X_2 + 412,8 - 5X_1 + 5X_2 + 422,4 - 4X_1 + 6X_2$

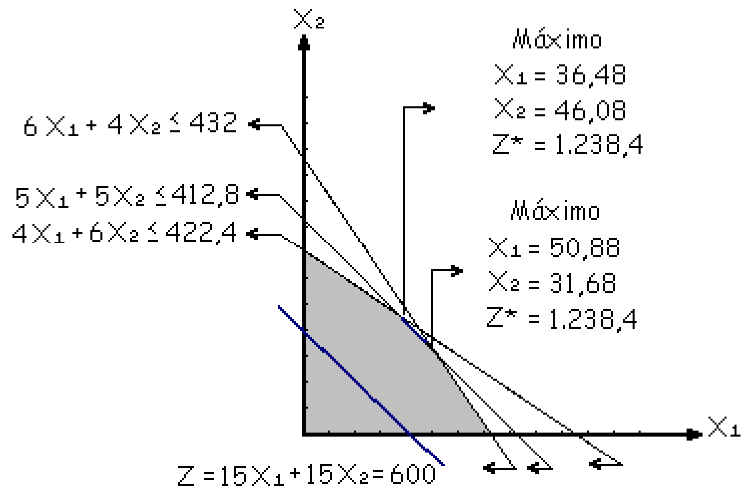
$Z = -15X_1 - 15X_2 + 1.267,2$	Para facilitar la solución del problema, hacemos los siguientes cambios:
$Z = -15X_1 - 15X_2$	Como el término independiente 1.267,2 es constante, lo podemos obviar y al final lo sumamos a la solución optima
$\text{Max } Z = 15X_1 + 15X_2$	Podemos multiplicar la función objetivo por (-1) y maximizar, al final volvemos a multiplicar a Z por (-1), esto se llama la regla de equivalencia: Min (-Z) = Max(+Z) ó Min (Z) = Max(-Z)

$Z = 15X_1 + 15X_2$

C.S.R.	$6X_1 + 4X_2 \leq 432,0$	Restricciones debidas a la disponibilidad de tiempo en cada una de las estaciones de trabajo 1, 2 y 3 respectivamente.
	$5X_1 + 5X_2 \leq 412,8$	
	$4X_1 + 6X_2 \leq 422,4$	

$X_j \geq 0$; j = 1, 2

1° Restricción	2° Restricción	3° Restricción	Función Objetivo
$6X_1 + 4X_2 \leq 432$	$5X_1 + 5X_2 \leq 412{,}8$	$4X_1 + 6X_2 \leq 422{,}4$	$Z = 15X_1 + 15X_2$
$6X_1 + 4X_2 = 432$	$5X_1 + 5X_2 = 412{,}8$	$4X_1 + 6X_2 = 422{,}4$	$15X_1 + 15X_2 = 600$
$X_1 = 0$ | $X_2 = 0$	$X_1 = 0$ | $X_2 = 0$	$X_1 = 0$ | $X_2 = 0$	$X_1 = 0$ | $X_2 = 0$
$X_2 = 108$ | $X_1 = 72$	$X_2 = 82{,}56$ | $X_1 = 82{,}56$	$X_2 = 70{,}4$ | $X_1 = 105{,}6$	$X_2 = 40$ | $X_1 = 40$
P(0,0) => $0 \leq 432$	P(0,0) => $0 \leq 412{,}8$	P(0,0) => $0 \leq 14$	
Verdad	Verdad	Verdad	



$5X_1 + 5X_2 = 412{,}8$	$5X_1 + 5X_2 = 412{,}8$
$6X_1 + 4X_2 = 432$	$4X_1 + 6X_2 = 422{,}4$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 412{,}8 & 5 \\ 432 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1.651{,}2 - 2.160}{20 - 30} = \frac{-508{,}8}{-10} = 50{,}88$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 412{,}8 \\ 6 & 432 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2.160 - 2.476{,}8}{20 - 30} = \frac{-316{,}8}{-10} = 31{,}68$$

$$Z^* = 15X_1^* + 15X_2^* = 15(50{,}88) + 15(31{,}68) = 1.238{,}4$$

$$Z^* = 1.238{,}4$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 412{,}8 & 5 \\ 422{,}4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2.476{,}8 - 2.112}{30 - 20} = \frac{364{,}8}{10} = 36{,}48$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 412{,}8 \\ 4 & 422{,}4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2.112 - 1.651{,}2}{30 - 20} = \frac{460{,}8}{10} = 46{,}08$$

$$Z^* = 15X_1^* + 15X_2^* = 15(36{,}48) + 15(46{,}08) = 1.238{,}4$$

$$Z^* = 1.238{,}4$$

Tiempo inactivo mínimo bajo las dos soluciones consideradas

$Z_{50,88\,;\,31,68} = -15X_1^* - 15X_2^* + 1.267{,}2 = -15(50{,}88) - 15(31{,}68) + 1.267{,}2 = 28{,}8$ minutos

$Z_{36,48\,;\,46,08} = -15X_1^* - 15X_2^* + 1.267{,}2 = -15(36{,}48) - 15(46{,}08) + 1.267{,}2 = 28{,}8$ minutos

Bajo cada una de las dos soluciones ofrecidas, de las múltiples, podemos saber en las restricciones el tiempo inactivo de cada estación de trabajo.

Bajo la solución $X_1^* = 50,88$; $X_2^* = 31,68$

Estación de trabajo 1	Estación de trabajo 2	Estación de trabajo 3
$6X_1^* + 4X_2^* \leq 432$	$5X_1^* + 5X_2^* \leq 412,8$	$4X_1^* + 6X_2^* \leq 422,4$
$6(50,88) + 4(31,68) \leq 432$	$5(50,88) + 5(31,68) \leq 412,8$	$4(50,88) + 6(31,68) \leq 422,4$
$432 \leq 432$	$412,8 \leq 412,8$	$393,6 \leq 422,4$
No estará inactiva	No estará inactiva	Tiempo inactiva: 28,8 minutos

Bajo la solución $X_1^* = 36,48$; $X_2^* = 46,08$

Estación de trabajo 1	Estación de trabajo 2	Estación de trabajo 3
$6X_1^* + 4X_2^* \leq 432$	$5X_1^* + 5X_2^* \leq 412,8$	$4X_1^* + 6X_2^* \leq 422,4$
$6(36,48) + 4(46,08) \leq 432$	$5(36,48) + 5(46,08) \leq 412,8$	$4(36,48) + 6(46,08) \leq 422,4$
$403,2 \leq 432$	$412,8 \leq 412,8$	$422,4 \leq 422,4$
Tiempo inactiva: 28,8 minutos	No estará inactiva	No estará inactiva

La estación de trabajo 2, nunca tendrá tiempo inactivo, siempre estará trabajando todo su tiempo disponible, 412,8 minutos.

9. Un caso especial del método gráfico

Hallar el máximo y el mínimo, mediante el método gráfico, al siguiente problema de programación lineal.

$Z = 3X_1 + X_2$

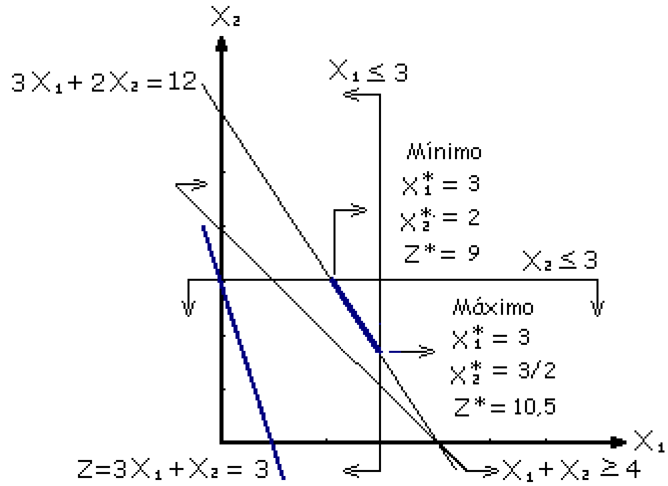
C.S.R.

$$X_1 \leq 3$$
$$X_2 \leq 3$$
$$X_1 + X_2 \geq 4$$
$$3X_1 + 2X_2 = 12$$

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2$

Solución:

1° Restricción	2° Restricción	3° Restricción		4° Restricción		Función Objetivo	
$X_1 \leq 3$	$X_2 \leq 3$	$X_1 + X_2 \geq 4$		$3X_1 + 2X_2 = 12$		$Z = 3X_1 + X_2$	
$X_1 = 3$	$X_2 = 3$	$X_1 + X_2 = 4$				$3X_1 + X_2 = 3$	
		$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
		$X_2 = 4$	$X_1 = 4$	$X_2 = 6$	$X_1 = 4$	$X_2 = 3$	$X_1 = 1$
P(0,0) => $0 \leq 3$	P(0,0) => $0 \leq 3$	P(0,0) => $0 \geq 4$					
Verdad	Verdad	Falso					



Mínimo	Máximo
$X_2^* = 3$	$X_1^* = 3$
$3X_1 + 2X_2 = 12$	$3X_1 + 2X_2 = 12$
$3X_1 + 2(3) = 12$	$3(3) + 2X_2 = 12$
$X_1^* = 2$	$X_2^* = 3/2$
$Z^*_{2,3} = 3X_1^* + X_2^* = 3(2) + 3 = 9$	$Z^*_{3,3/2} = 3X_1^* + X_2^* = 3(3) + 3/2 = 21/2 = 10,5$

Fíjese que aquí, el área de soluciones factible es un segmento de la recta $3X_1 + 2X_2 = 12$ Y sus extremos el mínimo y máximo respectivamente.

Nota: Puede darse el caso en que el área de soluciones factible, se reduzca a un punto, en cuyo caso el máximo = mínimo.

Ejercicios propuestos

1. Identifique el área de soluciones factible para cada una de las siguientes inecuaciones lineales, de forma independiente. Suponga que todas las variables son positivas.

   a) $-3X_1 + X_2 \leq 7$ b) $X_1 - 2X_2 \geq 5$ c) $2X_1 - 3X_2 \leq 8$

   d) $X_1 - X_2 \leq 0$ e) $-X_1 + X_2 \geq 0$ f) $X_1 \leq 4$

2. Identifique la dirección del crecimiento o decrecimiento de Z en cada uno de los siguientes casos:

   a) Maximizar $Z = X_1 - X_2$ b) Minimizar $Z = -3X_1 + X_2$

   c) Minimizar $Z = - X_1 - 2X_2$ d) Maximizar $Z = - 5X_1 - 6X_2$

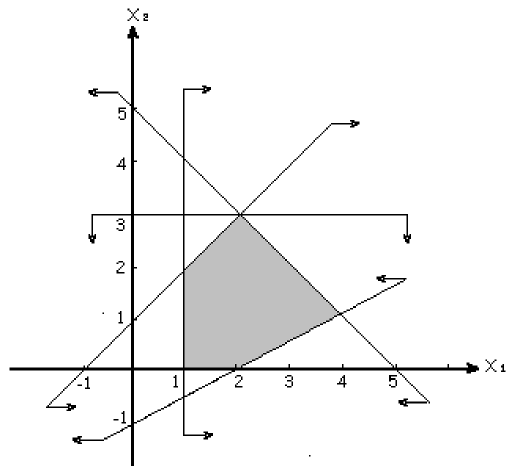
3. Determine el área de soluciones factibles para el siguiente sistemas de inecuaciones lineales:

$$X_1 + X_2 \leq 4$$
$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$
$$-X_1 + X_2 \geq 1$$
$$X_1 + X_2 \leq 6$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

¿ Qué restricciones son redundantes ?

Reduzca el sistema al menor número de restricciones que definirán el mismo espacio de soluciones

4. Escriba las restricciones asociadas con el espacio de soluciones que se presenta en la gráfica e identifique todas las restricciones redundantes.



5. Considere el siguiente problema:

Maximizar $Z = 6X_1 - 2X_2$

C.S.R. $X_1 - X_2 \leq 1$
$3X_1 - X2 \leq 6$

$Xj \geq 0 ; j = 1, 2$

Demuestre en forma gráfica que en la solución óptima, las variables X_1 y X_2 pueden aumentarse en forma indefinida en tanto que el valor de la función objetivo Z se mantiene constante.

6. Resuelva gráficamente el siguiente problema:

Maximizar $Z = 5X_1 + 6X_2$

C.S.R. $X_1 - 2X_2 \geq 2$
$-2X_1 + 3X2 \geq 2$

X_1, X_2 irrestricta en signo

7. Considere el siguiente problema:

Maximizar $Z = 3X_1 + 2X_2$ C.S.R. $2X_1 + X_2 \leq 2$ $3X_1 + 4X2 \geq 12$ $Xj \geq 0$; $j = 1, 2$	Demuestre gráficamente que el problema no tiene puntos extremos factibles. ¿Qué se puede concluir en relación con la solución al problema?

8. Resolver gráficamente:

Maximizar $Z = 5X_1 + 2X_2$

C.S.R.
$$X_1 + X_2 \leq 10$$
$$X_1 = 5$$

$Xj \geq 0$; $j = 1, 2$

9. Considere el espacio de soluciones del punto 4; Determine la solución óptima, suponiendo que la función objetivo es la siguiente:

a) Minimizar $Z = 2X_1 + 6X_2$ b) Maximizar $Z = -3X_1 + 4X_2$ c) Minimizar $Z = 3X_1 + 4X_2$

d) Minimizar $Z = X_1 - 2X_2$ e) Minimizar $Z = X_1$ f) Maximizar $Z = X_1$

10. Considere el siguiente problema de programación lineal:

Maximizar $Z = 3X_1 + 4X_2$ C.S.R. $-2X_1 + 4X_2 \leq 16$ $2X_1 + 4X2 \leq 24$ $-6X_1 - 3X_2 \geq -48$ $Xj \geq 0$; $j = 1, 2$	a) Use el método gráfico para encontrar la solución óptima (X_1, X_2) y el valor de la función objetivo Z^* b) b) Encuentre los valores de holgura o excedente de cada restricción.

11. Considere el siguiente problema de programación lineal:

Minimice $Z = 5X_1 + 2X_2$

C.S.R.
$$\begin{aligned} 3X_1 + 6X_2 &\geq 18 \\ 5X_1 + 4X2 &\geq 20 \\ 8X_1 + 2X_2 &\geq 16 \\ 7X_1 + 6X_2 &\leq 42 \end{aligned}$$

$Xj \geq 0$; $j = 1, 2$

a) Use el método gráfico para encontrar la solución óptima y Z^*
b) ¿Cuáles restricciones son activas?
c) ¿Cuáles son los valores de holgura o excedente de cada restricción?
d) ¿Cuántos puntos extremos tiene la región factible?