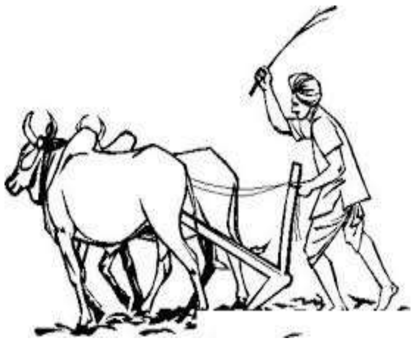
Trabajo y Energía



En esta unidad exploraremos algunos conceptos y principios muy importantes que están vinculados con la segunda ley de Newton. Esta unidad se fundamenta en los conceptos de trabajo y energía, y veremos cómo la segunda ley de Newton conduce a definiciones de estas cantidades. También consideraremos el concepto de cantidad de movimiento. Descubriremos que la energía total de un sistema aislado es constante en el tiempo. Este resultado está relacionado con el principio general de conservación de la energía. Principio importante en muchos campos, de la física, y la ingeniería.

Trabajo hecho por una fuerza constante

Según la segunda ley de Newton ($\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$), la aceleración de una partícula es proporcional a la fuerza total aplicada. Por tanto, una fuerza grande da una aceleración grande, mientras que una fuerza pequeña da una aceleración pequeña. Si estamos limitados de modo que solo podamos aplicar una pequeña fuerza, aún podemos producir un gran efecto (es decir, una gran velocidad o desplazamiento) simplemente aplicando la fuerza durante mucho tiempo, pero ¿cuánto tiempo se requiere? La noción de "trabajo" ofrece una forma de responder a esta y otras preguntas similares.

Consideremos un disco de hockey de masa *m* colocado sobre una superficie horizontal como se muestra en la figura 1. Supongamos que esta superficie es extremadamente resbaladiza, por lo que la fuerza de fricción en el disco es cero. El disco está inicialmente en reposo, y queremos considerar cómo una fuerza constante aplicada horizontalmente pondrá el disco en movimiento. Suponga que se da la magnitud *F* de la fuerza y deseamos calcular cuánto tiempo tarda el disco en alcanzar un valor particular de la velocidad final v_f. Ya hemos tratado este problema y conocemos la solución básica.

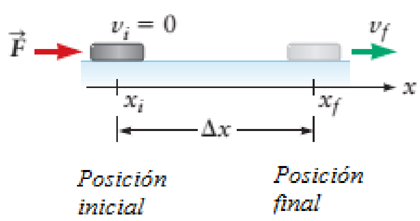


Figura 1. Disco de hockey sometido a la acción de una fuerza horizontal

Este problema presenta un movimiento en una dimensión: la aceleración, la velocidad y el desplazamiento son a lo largo de x, y la **F** es una fuerza horizontal total sobre el disco. Por tanto, la aceleración es F/ m y es constante, por lo que podemos aplicar nuestros conocimientos del movimiento con aceleración constante para deducir la velocidad y el desplazamiento en función del tiempo.

El disco comienza en reposo, por lo que su velocidad inicial es $v_i = 0$. Después de un tiempo t_f, la velocidad del disco es

$$v_f = v_i + at_f = at_f = \frac{F}{m}t_f \qquad (1)$$

Si t_f es el tiempo que se tarda en alcanzar una cierta velocidad final v_f,

$$v_f = \frac{F}{m}t_f \qquad (2)$$

Resolviendo para t_f nos queda,

$$t_f = \frac{mv_f}{F} \qquad (3)$$

En este momento, la posición del disco es x_f, por lo que el disco ha recorrido una distancia

$$\Delta x = x_f - x_i = v_i t + \frac{1}{2}at_f^2$$

Usando $v_i = 0$ junto con $a = F / m$ y el resultado para t_f de la Ecuación 2, podemos resolver para el desplazamiento x

$$\Delta x = \frac{1}{2}at_f^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t_f^2 = \frac{F}{2m}\left(\frac{mv_f}{F}\right)^2 \qquad (4)$$

$$\Delta x = \frac{mv_f^2}{2F} \qquad (5)$$

Supongamos ahora que repetimos el experimento de la figura 1, pero con una fuerza que es sólo la mitad de la anterior; es decir, usamos una fuerza de magnitud F/2. Entonces podemos ver de la Ecuación (2) que se tomará el doble de tiempo para que el disco alcance la misma velocidad final, porque t_f aumentará en un factor de dos.

$$v_f = \frac{F}{2m}t_f$$ Resolviendo para t_f, nos queda

$$t_f = 2\left(\frac{m}{F}v_f\right)$$

De acuerdo con la Ecuación (3), Δx aumentará en un factor de dos, por lo que el disco viajará el doble durante este tiempo. Así que,

$$\Delta x = \frac{mv_f^2}{F},$$

Si realizamos el producto FΔx, con F = F/2 tenemos

$$F\Delta x = \frac{F}{2}\left(\frac{mv_f^2}{F}\right) = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Podemos repetir este cálculo para otros valores de la fuerza, usando las ecuaciones (2) y (3) para encontrar cómo varían por diferentes factores el tiempo y la distancia recorrida al cambiar la fuerza. Curiosamente, el producto de la fuerza y la distancia recorrida es constante. Combinando las ecuaciones (2) y (3), el producto FΔx siempre está dado por

$$F\Delta x = F\left(\frac{mv_f^2}{2F}\right) = \frac{mv_f^2}{2} \qquad (6)$$

Independiente de la magnitud de la fuerza

Este resultado significa que si queremos acelerar un objeto a una velocidad particular, podemos ejercer una fuerza grande en una distancia corta o una fuerza pequeña en una distancia grande. Siempre que el producto de la fuerza y el desplazamiento sea el mismo, el objeto alcanzará la misma velocidad final. El producto F Δx se llama trabajo. En términos matemáticos

$$W = F\Delta x \qquad (7)$$

En unidades SI, tenemos trabajo = *fuerza* x *desplazamiento* = *Newton* x *metro* = *N. m*

El producto N. m se denomina joule (J). El término al lado derecho de la ecuación se conoce como energía cinética, de ella hablaremos luego. La definición de trabajo dada en la ecuación (7) solo aplica al movimiento unidimensional en el que actúa una fuerza constante ***F*** a lo largo de la dirección del movimiento.

En una definición más general debemos considerar el espacio tridimensional en el cual se encuentran los vectores fuerza ***F*** y desplazamiento ***Δr***. En este caso el trabajo realizado sobre la partícula viene dado por la expresión:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cos\theta \qquad (8)$$

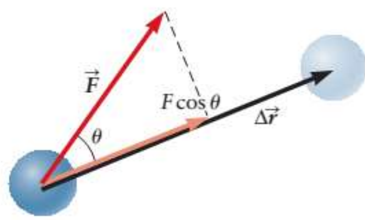
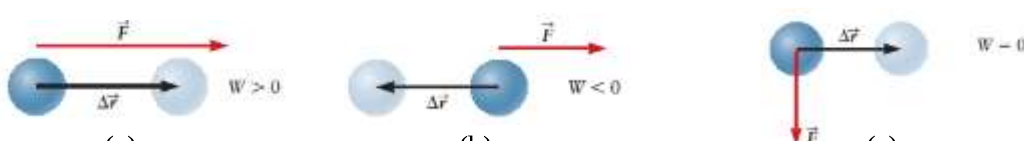


Figura 2. Fuerza actuando sobre una partícula, mientras la partícula se mueve realizando un desplazamiento, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$, el trabajo realizado por la componente de la fuerza es el resultado del producto escalar de los vectores ***F*** y ***Δr.***

La expresión indica que sólo la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento del cuerpo sobre el cual actúa, hace trabajo. El trabajo puede ser positivo, negativo o nulo, dependiendo del sentido de la fuerza aplicada; Es importante señalar que el trabajo es una transferencia de energía; si se transfiere energía al sistema (objeto), W es positivo; si se transfiere energía desde el sistema, W es negativo. En la figura 3 se muestran estas tres condiciones.

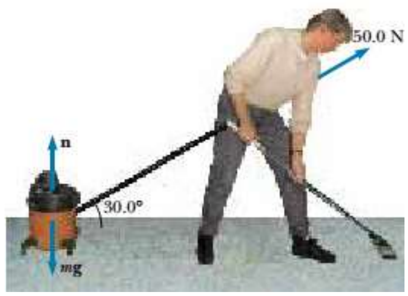


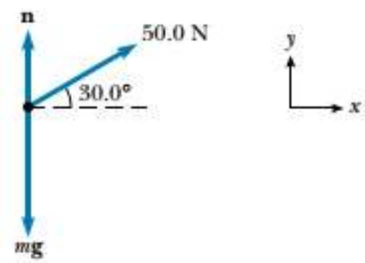
(a) (b) (c)

Figura 3. (a) El trabajo hecho sobre un objeto es positivo, cuando la fuerza aplicada y el desplazamiento del objeto son paralelos. (b) Es negativo cuando el sentido es opuesto entre ambos vectores paralelos. (c) Es nulo cuando la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento.

Ejercicio 1

Un hombre que limpia un piso tira de una aspiradora con una fuerza de magnitud F = 50,0 N con un ángulo de 30,0 ° con la horizontal. Calcule el trabajo realizado por la fuerza sobre la aspiradora cuando la aspiradora se desplaza 3,00 m hacia la derecha.





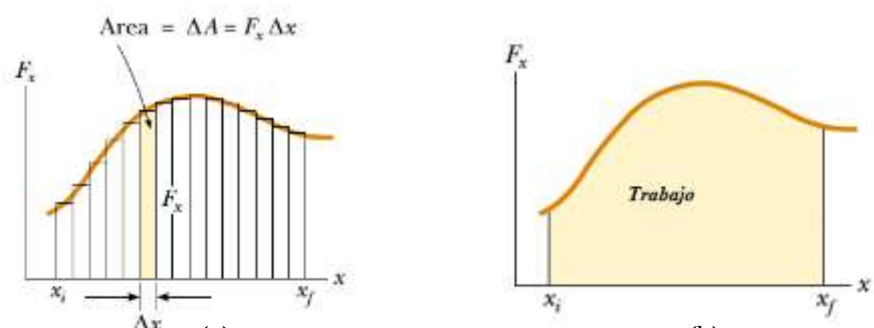
Solución: Utilicemos la ecuación

$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta = 50{,}0N \cdot 3{,}00\ m \cdot \cos 30{,}0 = 130\ J$$

Trabajo realizado por fuerzas variables

Consideremos una partícula que se desplaza a lo largo del eje x bajo la acción de una fuerza variable. La partícula se desplaza en la dirección x desde x_i hasta x_f. En tal situación, no podemos usar la ecuación (8) para calcular el trabajo realizado por la fuerza porque esta relación se aplica solo cuando **F** es constante en magnitud y dirección. Sin embargo, si imaginamos que la partícula sufre un desplazamiento x muy pequeño, como se muestra en la figura 4a, entonces la componente x de la fuerza F_x es aproximadamente constante en este intervalo; para este pequeño desplazamiento, podemos expresar el trabajo realizado por la fuerza como

$$\Delta W = F_x \cdot \Delta x$$



(a) (b)

Figura 4. (a) El trabajo hecho por la fuerza F_x, cuando la fuerza aplicada y el desplazamiento del objeto son paralelos. (b) El trabajo total es igual al área bajo la curva

Ésta es solo el área del rectángulo sombreado de la figura 4a. Si imaginamos que la curva F_x versus x se divide en un gran número de tales intervalos, entonces el trabajo total realizado para el desplazamiento de x_i a x_f es aproximadamente igual a la suma de un gran número de tales términos:

$$\Delta W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \cdot \Delta x$$

Si hacemos los desplazamientos más pequeños, es decir que tiendan a cero; entonces el número de términos en la suma aumenta sin límite, pero el valor de la suma se aproxima a un valor definido, igual al área delimitada por la curva F_x y el eje x, en forma matemática:

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \cdot \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, d_x \qquad (9)$$

Esta integral definida es numéricamente igual al área bajo la curva F_x versus Δx, es decir al trabajo realizado por la fuerza.

La expresión para el trabajo es

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \, d\vec{r} \qquad (10)$$

Trabajo realizado por un resorte

Un resorte proporciona un ejemplo importante de una fuerza que varía con la posición. Sabemos que un resorte ideal ejerce una fuerza proporcional a su desplazamiento desde el equilibrio: $F_x = -kx$ donde k es la constante del resorte y el signo menos muestra que la fuerza del resorte es opuesta a la dirección del desplazamiento. No son solo los resortes en espiral lo que nos interesa aquí; muchos sistemas físicos, desde moléculas hasta rascacielos y estrellas, se comportan como si contuvieran resortes. Las consideraciones de trabajo y energía que desarrollamos aquí se aplican también a aquellos sistemas.

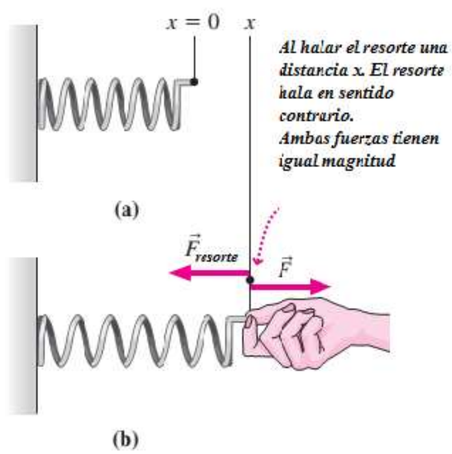


Figura 5. Fuerzas presentes al estirar un resorte

La fuerza ejercida por un resorte estirado es igual a - kx por lo que la fuerza ejercida sobre el resorte por la fuerza de estiramiento externa es + kx. Si consideramos que cuando x=0 el resorte está en equilibrio y si mantenemos un extremo fijo y tiramos del resorte hasta que su extremo libre esté en una nueva posición x, como se muestra en la figura 5, entonces la ecuación (9) muestra que el trabajo realizado sobre el resorte por la fuerza externa es

$$W = \int_0^x F_x \, d_x = \int_0^x kx \, d_x = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (11)$$

Energía cinética- Teorema trabajo y energía

Al inicio del tema, cuando definíamos trabajo, vimos que para el caso más simple de movimiento unidimensional, el producto de la fuerza constante aplicada, y el desplazamiento del cuerpo sometido a esta fuerza, nos daba una cantidad relacionada con la velocidad de la partícula; esta cantidad no es más que la energía asociada con el movimiento del cuerpo y es conocida como energía cinética.

Deduzcámosla de nuevo utilizando la segunda ley de Newton y la definición que hicimos de trabajo.

$$W = F_x \cdot \Delta x = m\vec{a} \cdot \Delta x$$

Por simplicidad en el tratamiento, asumamos que la fuerza es constante, así que la aceleración también es constante, entonces podemos utilizar las ecuaciones de movimiento rectilíneo con aceleración constante, tomemos la ecuación

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) = v_i^2 + 2a \cdot \Delta x$$

De acá tenemos que

$$a \cdot \Delta x = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2}$$

Y multiplicando por la masa a ambos lado de la ecuación obtenemos

$$ma \cdot \Delta x = m\left(\frac{v_f^2 - v_i^2}{2}\right) = W$$

Así que

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta E_c \qquad (16)$$

La expresión $\frac{1}{2}mv^2$, se conoce como la energía cinética (E_c) de un cuerpo que se mueve con velocidad v y tiene masa m. Entonces la ecuación (16) nos expresa que el trabajo es igual a la variación de la energía cinética del cuerpo sobre el cual actúa la fuerza, esto se conoce como ***teorema trabajo energía***. Dado que el trabajo es igual al cambio de energía cinética, las unidades de energía son las mismas que las del trabajo. En el sistema internacional, la unidad de energía es el joule, igual a 1 newton-metro. Sin embargo, en la ciencia, la ingeniería y la vida cotidiana, encontrará otras unidades de energía. Las unidades científicas incluyen el erg, utilizado en el sistema CGS, el electrón-voltio, utilizado en física nuclear, atómica y molecular; y la caloría, utilizada en termodinámica y para describir las energías de reacciones químicas.

Potencia

Subir un tramo de escaleras requiere la misma cantidad de trabajo sin importar qué tan rápido vaya. Pero es más difícil subir las escaleras corriendo que caminando. ¿Más difícil en qué sentido? En el sentido de que se hace el mismo trabajo en menos tiempo; la velocidad a la que haces el trabajo es mayor. Nosotros Defina la potencia como la razón de trabajo hecho en el tiempo:

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \ (potencia\ media) \qquad (17)$$

Como a menudo ΔW varía con el tiempo, definimos la potencia instantánea:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad (18)$$

Las ecuaciones (17) y (18) muestran que las unidades de potencia son joule sobre segundo. Se le da el nombre de watt (W) en honor a James Watt, un ingeniero e inventor escocés que fue fundamental en el desarrollo de la máquina de vapor como una fuente de energía práctica. El propio Watt definió otra unidad de potencia. Un caballo de fuerza (hp), que equivale aproximadamente a 746 J / s o 746 W.

Cuando la potencia es constante, la potencia promedio y la potencia instantánea son iguales, la cantidad de trabajo W realizado en el tiempo es

$$W = P\Delta t \qquad (19)$$

Cuando la potencia no es constante, podemos considerar pequeñas cantidades de trabajo, cada una en un intervalo de tiempo tan pequeño que la potencia es casi constante. Sumando todas estas cantidades de trabajo y tomando el límite como se vuelve arbitrariamente pequeño, tenemos

$$W = \lim_{\Delta t \to 0} \sum P\Delta t = \int_{t_i}^{t_f} P dt \qquad (20)$$

Podemos derivar una expresión que relacione la potencia, la fuerza aplicada y la velocidad para observar que el trabajo dW realizado por una fuerza que actúa sobre un objeto que sufre un desplazamiento infinitesimal.

Tomemos la ecuación (10) y dividamos ambos lados por el intervalo de tiempo asociado dt obtenemos que la potencia:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (21)$$

Ejercicio 2

Un automóvil de 1400 kg entra en una zona de adelantamiento y acelera de 70 a 95 km/h (a) ¿Cuánto trabajo se realiza en el automóvil? (b) Si el automóvil frena hasta detenerse, ¿cuánto trabajo se realiza en él?

Razonamiento: Se nos pregunta sobre el trabajo, pero no se nos da ninguna fuerza. Sin embargo, ahora conocemos el teorema trabajo-energía, que relaciona trabajo y energía cinética. La energía cinética depende de la velocidad, que se nos da. Entonces, este es un problema que involucra el teorema trabajo-energía.

Desarrollo: (a) El teorema trabajo energía dice:

$$W = E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Entonces

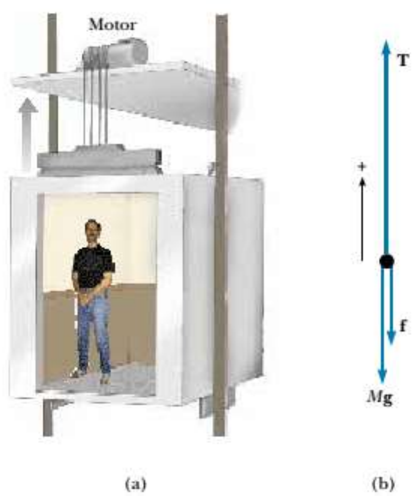
$$W = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \frac{1}{2}1400kg[(26{,}4\ m/s)^2 - (19{,}4\ m/s)^2] = 220\ kJoule$$

(b) Apliquemos de nuevo el teorema trabajo energía

$$W = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \frac{1}{2}1400kg[(0\ m/s)^2 - (26{,}4)^2] = -490\ kJoule$$

Ejercicio 2

Una cabina de ascensor tiene una masa de 1000 kg y transporta pasajeros con una masa combinada de 800 kg. Una fuerza de fricción constante de 4000 N retarda su movimiento hacia arriba, como se muestra en la figura. ¿Cuál debe ser la potencia mínima entregada por el motor para levantar la cabina del ascensor a una velocidad constante de 3.00 m / s?



El motor debe suministrar la fuerza de magnitud T que empuja la cabina del ascensor hacia arriba. Como se nos dice que la velocidad es constante entonces la aceleración es nula, por lo tanto, sabemos por la segunda ley de Newton que, $\sum F = 0$. De la figura (b) tenemos

$$\sum F = T - f - Mg = 0$$

Donde M es la masa total y *f* la fuerza de roce. Por lo tanto,

$$T = f + Mg = 2{,}16 \times\ 10^4 N$$

Aplicando la ecuación (21)

$$P = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 2{,}16 \times\ 10^4 N \cdot 3\frac{m}{s} = 6{,}48 \times\ 10^4\ W$$