Rev. Reflexiones 88 (1): 89-105, ISSN: 1021-1209 / 2009

LA PROGRAMACIÓN LINEAL APLICACIÓN DE LA PEQUEÑAS Y MEDIANAS EMPRESAS

Jorge Alvarado Boirivant[*]
aboiriva@gmail.com

Fecha de recepción: 1° noviembre 2008 - Fecha de aceptación: 13 abril 2009

Resumen:

En este artículo se hace una revisión de la aplicación de la programación lineal como método matemático que logra aportar información para la toma de decisiones en la gestión de las PYMES, considerando que estas unidades productivas son eficientes palancas en el desarrollo social. La técnica de programación lineal no ha sido aprovechada por los planificadores y asesores del sector PYMES. Se trata, entonces, de dejar al descubierto el detalle de las peculiaridades metodológicas de la técnica mediante la presentación de un modelo generado para una pequeña unidad productiva, dejando así clara evidencia de que la misma constituye un potente instrumento analítico al servicio de las pequeñas y medianas empresas.
Palabras claves: *Programación lineal, PYMES, solución óptima, valor óptimo, restricciones, optimización, maximización, minimización, precios duales, función objetivo.*

Abstract:

This article assesses the application of a mathematical method, Linear Programming, for providing supporting information in managerial decision making processes of small and medium-sized businesses (PYMES in Spanish). These productive entities are efficient stimulants in social development, but the technique of Linear Programming has not been utilized to its maximum potential by developers and advisors of the PYMES sector. This research, then, attempts to discover, in detail, the methodological peculiarities of this technique through the presentation of a model generated for one small productive business. The results will provide clear evidence that Linear Programming constitutes a powerful analytical instrument for members of the PYMES sector.
Key Words: *Linear Programming, PYMES, Optima solution, Optima Value, Restrictions, Optimization, Maximization, Minimization, Dual Prices, Functional Objective.*

Introducción

Los tiempos de crisis alimentaria, de crisis financiera global y de aumento de la pobreza mundial, resultados del proceso neoliberal globalizado sustentado en la obediencia a las directrices que dictaban y siguen dictando los organismos financieros internacionales, nos obligan hoy a plantear el rescate urgente del sector de las PYMES como instrumento estratégico de desarrollo de los países pobres y en vías de desarrollo. Con esta iniciativa se favorece la generación de empleo, la democratización de oportunidades y la participación de los ciudadanos, es decir, la inclusión

* Sede de Guanacaste, Universidad de Costa Rica

social. Este trabajo de rescate es urgente ante la amenaza permanente de las empresas transnacionales, en cuyos planes estratégicos se incluye el ataque dirigido a la extinción de las PYMES, incluso en muchas de estas grandes empresas esa posición está explícita en su misión. En estas condiciones, se deben realizar esfuerzos desde diversos frentes para fortalecer las PYMES, a saber: apoyo crediticio, seguros, capacitación, incentivos, tecnología, carreteras, centros de acopio, mercados, etc.

Pero un frente importante debe estar formado por un amplio grupo de asesores y extensionistas, quienes impulsen el uso de métodos matemáticos que han quedado por años en el abandono y que han mostrado en otras latitudes y en diversas ocasiones, que son base importante para la toma de decisiones acertadas: estamos hablando en particular de la programación lineal aplicada en las pequeñas y medianas empresas para minimizar sus costos o maximizar sus ingresos, sin perder nunca la perspectiva de que el desarrollo social es un derecho de los pueblos y la distribución de la riqueza debe ser cada día más justa.

En este trabajo se presenta, en primer término, una descripción general del método matemático denominado Programación lineal, luego se detalla su importancia y se expone, a manera de ejemplo, el procedimiento efectuado para construir un modelo real de programación lineal de maximización de ingresos generado por el autor. Finalmente, se presenta la interpretación y discusión de los resultados relacionados con la toma de decisiones.

La programación lineal y su importancia

Según Beneke y Winterboer (1984: 5) los métodos matemáticos de optimización (aquellos que permiten identificar los valores máximos o mínimos de determinadas expresiones matemáticas) alcanzaron un desarrollo notable en la década de los años 40. Afirman estos autores que ya en 1945 Stiegler define y soluciona el problema particular de la obtención de la dieta de mínimo costo para la alimentación de ganado.

A partir de 1949 aparece un extraordinario número de publicaciones sobre la base teórica de la programación lineal así como de sus aplicaciones a las diversas ramas de la economía. Merecen mención especial, por la decidida influencia que tuvieron en el perfeccionamiento y difusión de estas técnicas matemáticas, los trabajos y actividades de la Cowles Commission for research in econoomics, la Rand Corporation, el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Princeton y el Carnegie Institute of Technology.

Moya (1998: 63) menciona que fue George B. Dantzig y otro grupo de personas asociadas que en el año 1947, acatando la solicitud de autoridades militares del gobierno de los Estados Unidos, se dedicaron a investigar cómo se podía aplicar las matemáticas y la estadística para resolver problemas de planeación y programación con fines puramente militares. En ese mismo año Dantzig y sus colaboradores plantean por primera vez la estructura matemática básica del problema de programación lineal.

Al principio a la programación lineal se le conocía como "Programación en una Estructura Lineal". Según Anderson y otros (2004: 224), en el año 1948 Tjalling Koopmans le comentó a Dantzig que el nombre era demasiado largo y que era conveniente cambiarlo, ante lo cual Dantzig accedió y el nombre fue sustituido por el "Programación Lineal", que se usa incluso en la actualidad.

En términos generales, se puede decir que cualquier fenómeno en que interviene un número determinado de variables no negativas (es decir, variables cuyo valor es positivo o cero), que se pueden ligar entre sí mediante relaciones de desigualdad o igualdad y que reflejen las limitaciones o restricciones que el fenómeno presenta con miras a optimizar un objetivo, puede ser formulado como un modelo de programación matemática. Si tanto las restricciones como la función objetivo se pueden enunciar mediante expresiones lineales, estamos frente a un campo particular de la programación matemática denominada "programación lineal".

En este caso la palabra "programación" no se refiere a programación en computadoras; sino que se le utiliza como sinónimo de planeación.

La programación lineal trata sobre la planeación de las actividades para obtener un

 Rev. Reflexiones 88 (1): 89-105, ISSN: 1021-1209 / 2009

resultado óptimo, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo matemático) entre las alternativas de solución.

Para Weber (1984: 718), el problema de programación lineal trata acerca de la maximización o minimización de una función lineal de varias variables primarias, llamada función objetivo, con sujeción a un conjunto de igualdades o desigualdades lineales llamadas restricciones, con la condición adicional de que ninguna de las variables puede ser negativa. Esta última condición puede ser obviada, cuando el problema lo requiera, mediante el ingenioso artificio de expresar la variable de interés como la diferencia de dos variables no negativas.

En forma resumida se afirma que la programación lineal es un método matemático de resolución de problemas donde el objetivo es optimizar (maximizar o minimizar) un resultado a partir de seleccionar los valores de un conjunto de variables de decisión, respetando restricciones correspondientes a disponibilidad de recursos, especificaciones técnicas, u otras condicionantes que limiten la libertad de elección.

Como caso de especial interés tenemos que mediante la programación lineal podemos representar un sistema de producción mediante un modelo o matriz en el que se incluyen:

- Costos e ingresos generados por unidad de actividad (función objetivo).
- Aportes y requerimientos de insumos y productos por unidad de cada actividad considerada (coeficientes insumo/producto).
- Disponibilidad de recursos, especificaciones técnicas y empresariales a respetar (valores del lado derecho de las restricciones).

En concreto, la programación lineal es un método matemático que permite analizar y elegir la mejor entre muchas alternativas. En términos generales podemos pensar en la programación lienal como un medio para determinar la mejor manera de distribuir una cantidad de recursos limitados en procura de lograr un objetivo expresable en maximizar o minimizar una determinada cantidad.

El modelo general de un problema de programación lineal consta de dos partes muy importantes: la función objetivo y las restricciones.

La función objetivo lineal

La expresión matemática del objetivo se llama función objetivo y la meta debe ser maximizar o minimizar esa expresión.

La función objetivo lineal se puede representar de las siguientes maneras:

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots + C_n X_n$$

o utilizando la notación de sumatorias

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

Donde:

Z = Función objetivo lineal.
C_j = Precio neto o costo unitario, según sea el modelo.
X_j = Actividad o proceso.

El objetivo puede ser la maximización de algunas variables de ingreso que pueden variar desde los ingresos netos o brutos, dependiendo según se estructure el modelo. La programación lineal puede también aplicarse a los problemas de minimización de costos y estos programas parten de un diferente conjunto de criterios para su optimización.

Los coeficientes C_1, C_2...., C_n son los coeficientes de costo (conocidos) o de ingresos, según el tipo de problema que estemos resolviendo. Por otra parte, $X_1, X_2. . . . , X_n$ son las variables de decisión (variables, o niveles de actividad) que deben determinarse de tal manera que se alcance el objetivo dentro de las restricciones que enfrenta el problema.

Un conjunto de restricciones o desigualdades lineales

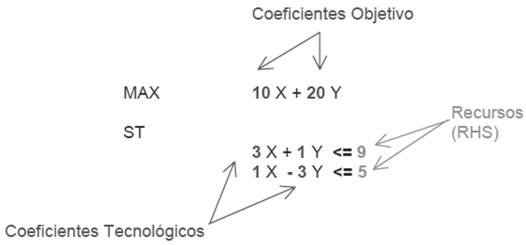
Las restricciones, expresadas mediante desigualdades lineales, están compuestas por los coeficientes técnicos (A_{ij}), las actividades o procesos (X_n), las cuales también se tomaron en cuenta en la función objetivo y además los niveles o limitaciones (B_i). El conjunto de restricciones se expresan de la siguiente manera:

$$A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \ldots + A_{1n} X_n \leq B_1$$
$$A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + \ldots + A_{2m} X_n \geq B_2$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$A_{m1} X_1 + A_{m2} X_2 + \ldots + A_{mn} X_n = B_m$$
$$X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0$$

Según Beneke y Winterboer (1984: 25), hay tres tipos básicos de restricciones: de "mayor que" (≥), de "menor que" (≤) o de igualdad (=), y estas pueden ser clasificadas en razón a su naturaleza:

- Restricciones de recursos o entradas: como tales pueden incluirse terreno, capital, mano de obra e instalaciones.
- Restricciones externas: esta clase incluye conceptos tales como las asignaciones gubernamentales de superficie de terreno, los límites de crédito asignado a los productos u obligaciones de tipo legal.
- Restricciones subjetivas: estas restricciones se las impone el propio operador. Los límites pueden ser difíciles de definir, pero frecuentemente son reales y significativos en el proceso de planificación. A menudo las restricciones impuestas provienen de los propios objetivos personales o del negocio del planeador. Entre las limitaciones de ese tipo pueden citarse las siguientes:
    - Limitaciones sobre el nivel de crédito que el planeador está dispuesto a utilizar. En muchas ocasiones es inferior a la cantidad que los prestamistas están dispuestos a aportar. La motivación típica para tal tipo de limitaciones es el deseo poco explícito de evitar los azares de la deuda.
    - Restricciones por el riesgo del nivel de las actividades que presentan aspectos ligados a ingresos altamente variables como pueden ser la cría de ovejas o de ganado mayor.
    - Restricciones de mínimos respecto a que el operador considere deseable por razones no propiamente de ingresos directos como puede ser el mantener vacas de raza pura, vacas lecheras o cultivos para mantener las cualidades del terreno.

A continuación se muestra un ejemplo de un modelo de programación lineal de maximización:



Se tiene una función objetivo que se va a maximizar, a saber, 10 X+20 Y, constituida por las variables X e Y con sus respectivos coeficientes técnicos. Además, están las restricciones, a saber, 3X+1 Y≤9 y 1 X-3 Y≤5, con las variables de decisión, los coeficientes tecnológicos y los valores del lado derecho que son los recursos de que dispone la unidad de producción.

En cuanto a la aplicación que ha tenido la programación lineal, Moya (1998, 63) indica que algunos de los problemas más importantes que se vinieron a resolver con esta herramienta se ubican en tres áreas: 1. Administración de la producción, 2. Evaluación de proyectos de inversión y 3. Aplicaciones agrícolas. Indicamos que esta lista no agota en modo alguno las opciones en las que la programación lineal ha mostrado ser una excelente herramienta para apoyar la toma de decisiones.

Un modelo real de programación lineal

Este apartado tiene como propósito mostrar el procedimiento necesario para construir un modelo agrícola de programación lineal que optimiza las ganancias, contemplando la rotación de cultivos como estrategia para el logro de los mejores precios de mercado. Para describir el proceso de construcción de un modelo aplicado a la agricultura se consideró el modelo generado por el autor en el año 1992 para la finca de la Estación Experimental de Ganado Lechero "Alfredo Volio Mata" de la Universidad de Costa Rica.

El modelo fue procesado por medio del programa de cómputo denominado "LINDO" que es la abreviación de su nombre en inglés: Linear Interactive Discrete Optimization. Otros paquetes informáticos que también se pueden usar para este fin son LINGO (Linear Interactive Goal Analizer) y el macro SOLVER de Excel.

Construcción del modelo

Como se mencionó anteriormente un modelo de programación lineal está compuesto por dos partes, la función objetivo lineal y un conjunto de restricciones expresadas mediante igualdades o desigualdades lineales.

Para construir esas dos partes se hizo necesario establecer lo siguiente:

1) Definir los cultivos o actividades (cuadro 1) que se podían explotar de acuerdo a las características físicas de la finca y su ubicación geográfica.
2) Calcular las necesidades de mano de obra y capital para explotar esas actividades.
3) Estimar la ganancia por actividad por hectárea proyectada al período en el que se desarrollaría cada actividad.
4) Definir el área disponible con riego para el proyecto agrícola.
5) Evaluar la mano de obra disponible en la zona.
6) Determinar el monto del capital inicial que se podía disponer para iniciar el proyecto.
7) Decidir en qué mes se debía vender la producción de cada actividad con base al comportamiento histórico de los precios, para esto se elaboró una matriz de rotación de cultivos la cual se muestra en el cuadro 2.

Para efectos de la construcción del modelo utilizaremos la abreviación del nombre común de los cultivos de la siguiente forma: CH: chile dulce, ZA: zanahoria, RE: repollo, CE: cebolla, EL: maíz para elote y PA: papa. Cada actividad o cultivo se podrá cultivar más de una vez en el período enero 1993 a enero 1994, por lo que se le asignará un número a la abreviación de su nombre para diferenciarlas.

Cuadro 1
Cultivos seleccionados a incluir en el modelo

Nombre Común	Nombre Científico
Chile dulce	*Capsicum annum*
Zanahoria	*Daucus carota* var. sativa
Repollo	*Brassica oleracea* var. capitata
Cebolla	*Allium cepa*
Maíz para elote	*Zea mays*
Papa	*Solanum tuberosum*

Fuente: (Alvarado, 1992: 47).

Cuadro 2
Plan de rotación de cultivos. Período: enero 1993 a enero 1994

Mes	CH2	CH1	ZA3	ZA1	ZA2	RE1	RE2	RE3	CE2	CE1	EL2	EL1	PA2	PA1
Ene	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Feb	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Mar	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
Abr	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
May	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
Jun	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
Jul	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
Ago	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
Set	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
Oct	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
Nov	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
Dic	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
Ene	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Fuente: (Alvarado, 1992: 40)

Donde: 0 = cultivo no activo en ese mes.
1 = cultivo en actividad en ese mes.

En el Cuadro 3 se define el grupo de variables y coeficientes de la función objetivo, en donde los coeficientes vienen a ser la ganancia por actividad y las variables representan cada cultivo según el período de explotación indicado por el plan de rotación de cultivos expuesto en el cuadro 2.

Cuadro 3
Actividades y coeficientes de la función objetivo

VARIABLE	ACTIVIDAD	PERIODO CULTIVO		COEFICIENTE
	(Cultivo)	Desde	Hasta	Ganancia/Ha.
CH1	Chile dulce	Febrero	Julio	599049,00
CH2	Chile dulce	Agosto	Enero	642608,00
ZA1	Zanahoria	Enero	Abril	435680,00
ZA2	Zanahoria	Mayo	Agosto	970869,00
ZA3	Zanahoria	Setiembre	Diciembre	1021643,00
RE1	Repollo	Mayo	Julio	384381,00
RE2	Repollo	Setiembre	Noviembre	366175.00
RE3	Repollo	Diciembre	Febrero	208270,00
CE1	Cebolla	Marzo	Julio	2070255.00
CE2	Cebolla	Agosto	Diciembre	2383952,00
EL1	Elote	Febrero	Junio	2189,00
EL2	Elote	Agosto	Diciembre	18075.00
PA1	Papa	Marzo	Junio	537029.00
PA2	Papa	Setiembre	Diciembre	778195,00

Fuente: (Alvarado, 1992:50).

Función objetivo:

Con el propósito de maximizar las ganancias y encontrar así la combinación óptima de las actividades, se procedió a construir la siguiente función objetivo:

Maximizar

Z=599049CH1+642608CH2+435680ZA1+970869ZA2+1021643ZA3+384381RE1+366175RE2+208270RE3+2070255CE1+2383952CE2+2189EL1+18075EL2+537029PA1+778195PA2

Conjunto de restricciones:

Los valores del lado derecho (recursos disponibles) de las restricciones se obtuvieron de la siguiente forma:

Tierra, se definió un área máxima de 3,38 hectáreas con riego, de las cuales para el cultivo de chile dulce, por aspectos de riesgo en cuanto a plagas y enfermedades se sembrará un máximo de 1,5 hectáreas. El área total en general es apta para todos los cultivos. La combinación de actividades en la parcela está sujeta al plan de rotación de cultivos presentado en el cuadro 2.

Mano de obra disponible, en base a muestreo realizado en las zonas aledañas a la Finca, se cuantificó un máximo de 7 trabajadores disponibles a laborar 8 horas diarias en cualquier época del año en actividades agrícolas, esto representa 1456 horas hombre disponible por mes.

Capital disponible, se asumió disponer de un capital inicial de 1374014,00 colones proveniente de la Empresa Auxiliar de la Estación Experimental Alfredo Volio Mata, para el financiamiento de las actividades agrícolas, utilizable a partir de enero 1993.

A continuación se explica la forma en que se construyeron las restricciones de tierra, mano de obra y capital a que está sujeta la función objetivo:

Restricciones de Tierra

Se construyeron las restricciones de tierra para el período de enero de 1993 a enero de 1994 con base al plan mensual de rotación de cultivos (cuadro 2). Cada restricción corresponde a un mes (iniciando en enero 1993), exceptuando las filas 4, 5 y 8 se incluyen varios meses ya que el terreno, según el plan de rotación, es ocupado por los mismos cultivos en esos períodos. Se elaboraron también las restricciones de tierra para los cultivos de chile dulce (CH1 y CH2), ya que sólo se cultivará 1,5 hectáreas de esa actividad por cuestión de riesgo, estas se incluyen en la filas 11 y 12.

El área para los semilleros no se considera en las restricciones de tierra por ser áreas sumamente pequeñas y de toda forma se ubicarán fuera del terreno agrícola.

En el Cuadro 4 se detalla las restricciones de tierra para todas las actividades incluidas en el modelo.

Restricciones de mano de obra

Se diseñaron las restricciones de mano de obra para el período de enero de 1993 a enero de 1994, multiplicando cada variable por los requerimientos de horas hombre por mes por hectárea para cada cultivo, cada restricción corresponde a un mes. En el Cuadro 5 se muestran estas restricciones. Cabe mencionar que se consideró en este grupo de restricciones las horas hombre requeridas para los semilleros de los cultivos de cebolla y repollo, los cuales se realizan durante los dos meses antes del establecimiento del cultivo, específicamente en los siguientes meses: CE1 en enero, febrero de 1993 y enero de 1994, RE1 en marzo y abril, CE2 en junio y julio, RE2 en julio y agosto y RE3 en octubre y noviembre de 1993.

Restricciones de capital

Fueron tratadas en forma dinámica mensualmente, o sea se construyeron multiplicando cada variable por los costos de producción por

Cuadro 4
Restricciones de tierra. Periodo: enero de 1993 a enero de 1994

Fila	Mes	Restricciones: Actividades	Ha. Disp.
2	Enero (1993)	ZA1	≤ 3,38
3	Febrero	CH1 + ZA1 + EL1	≤ 3,38
4	Marzo - Abril	CH1 + ZA1 + CE1 + EL1 + PA1	≤ 3,38
5	Mayo - Junio	CH1 + ZA2 + RE1 + CE1 + EL1 + PA1	≤ 3,38
6	Julio	CH1 + ZA2 + RE1 + CE1	≤ 3,38
7	Agosto	CH2 + ZA2 + CE2 + EL2	≤ 3,38
8	Set - Oct - Nov	CH2 + ZA3 + RE2 + CE2 + EL2 + PA2	≤ 3,38
9	Diciembre	CH2 + ZA3 + RE3 + CE2 + EL2 + PA2	≤ 3,38
10	Enero (1994)	CH2 + ZA1 + RE3	≤ 3,38
11		CH1	≤ 1,50
12		CH2	≤ 1,50

Fuente: (Alvarado 1992:53).

hectárea menos los ingresos netos generadas en los meses en que se realizan ventas de la producción, esta técnica permitió tratar las restricciones de capital en forma más realista; la disponibilidad de capital para cada período se calculó dentro del modelo, por eso se puede observar en el cuadro 7 que en algunas restricciones existen coeficientes negativos.

Para los cultivos en que no se realiza semillero (zanahoria, chile dulce, elote y papa) las restricciones de capital se construyeron multiplicando la actividad por el costo total de producción en el mes de siembra, se consideró el costo total como un sólo egreso en el momento en que inician las labores del cultivo.

En los cultivos en que se necesita sembrar semillero (repollo y cebolla), primero se incluyeron las restricciones por los costos de semillero para el mes en que inician esas labores, se presenta en el Cuadro 6 el detalle.

Una vez incluidos los costos de semillero para esos cultivos, en el mes correspondiente, se procede dos meses después a incluir el restante del costo total de producción de la actividad en el grupo de restricciones.

Se contempló el mes de enero de 1994 (fila 38) debido a que en ese mes todavía se presentan ingresos por la venta de la cosecha del cultivo de chile dulce (CH2), también se consideró en esa restricción el costo proyectado por la siembra nuevamente de zanahoria (ZA1). Las actividades inician en enero de 1993, por lo que el primer ingreso por ventas será en el mes de abril (ZA1) y el primer egreso de efectivo en enero (ZA1) de ese mismo año. En el Cuadro 7 se muestra el grupo de restricciones de capital para el período de enero de 1993 a enero de 1994.

Finaliza de esta forma la construcción del modelo, el cual quedó compuesto por su función objetivo con 14 variables y 38 restricciones.

Cuadro 5
Restricciones de mano de obra. Período: enero de 1993 a enero de 1994

Fila	Mes	Restricciones: Horas Hombre/actividad	Horas Hombre Disp.
13	Enero	251 ZA1 + 171 CE1	≤ 1456
14	Febrero	389 CH1 + 171 ZA1 + 91 CE1 + 91 EL1	≤ 1456
15	Marzo	204 CH1 + 139 ZA1 + 65 RE1 + 858 CE1 + 33 EL1 + 292 PA1	≤ 1456
16	Abril	780 CH1 + 75 ZA1 + 51 RE1 + 182 CE1 + 25 EL1 + 200 PA1	≤ 1456
17	Mayo	184 CH1 + 237 ZA2 + 367 RE1 + 147 CE1 + 20 EL1 + 100 PA1	≤ 1456
18	Junio	270 CH1 + 157 ZA2 + 143 RE1 + 111 CE2 + 91 CE1 + 135 EL1 + 288 PA1	≤ 1456
19	Julio	252 CH1 + 125 ZA2 + 203 RE1 + 45 RE2 + 31 CE2 + 1179 CE1	≤ 1456
20	Agosto	337 CH2 + 61 ZA2 + 11 RE2 + 847 CE2 + 71 EL2	≤ 1456
21	Setiembre	189 CH2 + 237 ZA3 + 367 RE2 + 171 CE2 + 13 EL2 + 256 PA2	≤ 1456
22	Octubre	765 CH2 + 157 ZA3 + 143 RE2 + 45 RE3 + 147 CE2 + 5 EL2 + 196 PA2	≤ 1456
23	Noviembre	189 CH2 + 125 ZA3 + 203 RE2 + 11 RE3 + 91 CE2 + 100 PA2	≤ 1456
24	Diciembre	295 CH2 + 81 ZA3 + 387 RE3 + 1199 CE2 + 115 EL2 + 308 PA2	≤ 1456
25	Enero (94)	277 CH2 + 251 ZA1 + 156 RE3 + 171 CE1	≤ 1456

Fuente:(Alvarado, 1992:54).

Cuadro 6
Costo proyectado del semillero para los cultivos de cebolla y repollo.
Enero 1993 a enero 1994

Fila	Mes	Actividad	Costo del semillero (¢)	% del costo total de la actividad
26	Ene	CE1	115080,00	17,38
28	Mar	RE1	47855,00	21,89
31	Jun	CE2	107021,00	15,45
32	Jul	RE2	45571,00	19,02
35	Oct	RE3	43356,00	18,71
38	Ene	CE1	131292,00	17,38

Fuente: (Alvarado, 1992:55).

Cuadro 7
Restricciones de capital. Periodo: enero de 1993 a enero de 1994

F	Mes	Restricciones					
26	Ene	225820	ZA1	+	115080	CE1	≤ 1374014
27	Feb	616784	CH1	+	225820	ZA1	+
		94657	EL1	+	115080	CE1	≤ 1374014
28	Mar	616784	CH1	+	225820	ZA1	+
		662145	CE1	+	94657	EL1	+
		539371	PA1	+	47855	RE1	≤ 1374014
29	Abr	616784	CH1	-	435680	ZA1	+
		662145	CE1	+	94657	EL1	+
		539371	PA1	+	47855	RE2	≤ 1374014
30	May	616784	CH1	-	435680	ZA1	+
		230631	ZA2	+	218619	RE1	+
		662145	CE1	+	94657	EL1	+
					539371	PA1	≤ 1374014
31	Jun	- 26463	CH1	-	435680	ZA1	+
		230631	ZA2	+	218619	RE1	+
		662145	CE1	-	2189	EL1	-
		537029	PA1	+	107021	CE2	≤ 1374014
32	Jul	- 599049	CH1	-	435680	ZA1	+
		230631	ZA2	-	384381	RE1	-
		2070255	CE1	-	2189	EL1	-
		537029	PA1	+	107021	CE2	+
					45571	RE2	≤ 1374014
33	Ago	599049	CH1	+	659636	CH2	-
		435680	ZA1	-	970869	ZA2	-
		384381	RE1	-	2070255	CE1	+
		692698	CE2	-	2189	EL1	+
		90883	EL2	-	537029	PA1	+
					45571	RE2	≤ 1374014
34	Set	- 599049	CH1	+	659636	CH2	-
		435680	ZA1	-	970869	ZA2	+
		247357	ZA3	-	384381	RE1	+
		223825	RE2	-	2070255	CE1	+
		692698	CE2	-	2189	EL1	+
		90883	EL2	-	537029	PA1	+
					582255	PA2	≤ 1374014
35	Oct	- 599049	CH1	+	659636	CH2	-
		435680	ZA1	-	970869	ZA2	+
		247357	ZA3	-	384381	RE1	+
		223825	RE2	-	2070255	CE1	+
		692698	CE2	-	2189	EL1	+
		90883	EL2	-	537029	PA1	+
		43356	RE3	+	582255	PA2	≤ 1374014
36	Nov	- 599049	CH1	+	659636	CH2	-
		435680	ZA1	-	970869	ZA2	+
		247357	ZA3	-	384381	RE1	-
		366175	RE2	-	2070255	CE1	+
		692698	CE2	-	2189	EL1	+
		90883	EL2	-	537029	PA1	+
		582255	PA2	+	43356	RE3	≤ 1374014
37	Dic	- 599049	CH1	-	79821	CH2	-
		435680	ZA1	-	970869	ZA2	-
		1021643	ZA3	-	384381	RE1	-
		366175	RE2	+	231730	RE3	-
		2070255	CE1	-	2383952	CE2	-
		2189	EL1	-	18075	EL2	-
		537029	PA1	-	778195	PA2	≤ 1374014
38	Ene	- 599049	CH1	-	642608	CH2	-
		174825	ZA1	-	970869	ZA2	-
		1021643	ZA3	-	384381	RE1	-
		366175	RE2	+	231730	RE3	-
		1938963	CE1	-	2383952	CE2	-
		2189	EL1	-	18075	EL2	-
		537029	PA1	-	778195	PA2	≤ 1374014

F= fila, Fila 38= enero 1994
Fuente: (Alvarado, 1992:57)

Interpretación de los resultados una vez procesado el modelo en el programa de computo "lindo"

En la primera parte del reporte que emite el programa, nos informa sobre el número de iteraciones para resolver el modelo, el valor que maximiza la función objetivo (valor óptimo) y las cantidades de cada variable que responden a la función objetivo o sea la solución óptima.

Número de iteraciones

Se reportan nueve iteraciones, esto indica cuántas iteraciones fueron necesarias para resolver el problema en cuestión. Es decir es la cantidad exacta de vértices visitados para llegar a la solución óptima. "LINDO" utiliza el método de optimización simplex.

Valor óptimo

El valor óptimo es de **10203880,00 colones**, esta cifra equivale a la máxima ganancia que se puede obtener del área agrícola (3,38 hectáreas) de la finca. Esto se logra explotando durante el período de enero de 1993 a diciembre del mismo año los cultivos o actividades indicados en la solución óptima.

Solución óptima

La solución óptima es la cantidad de terreno que se debe cultivar de cada una de las actividades o variables que fueron seleccionadas de las catorce que integran la función objetivo, si las variables de la función objetivo son sustituidas por esas áreas se obtiene entonces el valor óptimo. En el Cuadro 8 se detalla el área de terreno, en hectáreas, de los cultivos que deben explotarse y que maximizan la función objetivo.

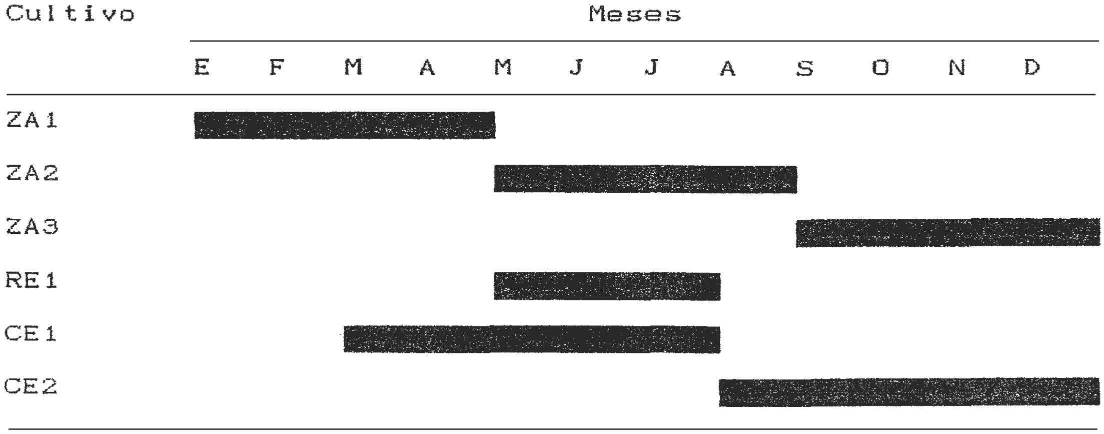
La ganancia máxima (valor óptimo), se logra al cultivar 2,439 hectáreas de zanahoria (ZA1), 2,322 hectáreas de zanahoria (ZA2), 2,322 hectáreas de zanahoria (ZA3), 0,116 hectáreas de repollo (RE1), 0,940 hectáreas de cebolla (CE1) y 1,057 hectáreas de cebolla (CE2). Para captar los mejores índices de precios mensuales en el momento de cosecha y por ende obtener las ganancias máximas del período, se requiere

Cuadro 8
Actividades que maximizan la función objetivo

VARIABLE (Actividad)	ÁREA A SEMBRAR (Hectáreas)	COSTO REDUCIDO
CH1	0	283777,9
CH2	0	1187213,0
ZA1	2,439182	0
ZA2	2,322558	0
ZA3	2,322559	0
RE1	0,116623	0
RE2	0	667017,0
RE3	0	11952,7
CE1	0,940818	0
CE2	1,057442	0
EL1	0	534840,0
EL2	0	1709317,0
PA1	0	0
PA2	0	372622,6

Fuente: (Alvarado, 1992:58)

Cuadro 9
Cronograma de explotación de los cultivos que maximizan la función objetivo



Fuente: (Alvarado, 1992:59).

que los cultivos antes citados sean sembrados en los siguientes meses: zanahoria (ZA1) en enero, zanahoria (ZA2) en mayo, zanahoria (ZA3) en septiembre, repollo (RE1) en mayo, cebolla (CE1) en marzo y cebolla (CE2) en agosto, esto según el plan de rotación expuesto en el cuadro 2, en el cuadro 9 se presenta el uso mensual de la tierra disponible para las actividades que maximizan la función objetivo.

El costo reducido presentado en el cuadro 8 es el valor en el cual, al menos, debe mejorar el coeficiente de esa variable en la función objetivo para que ésta alcance un valor positivo en la solución óptima. Consecuentemente, cuando la variable es positiva el costo reducido es cero, tal como ocurre con los valores de los costos reducidos de las variables ZA1, ZA2, ZA3, RE1, CE1, CE2 y PA1. En el caso de las variables cuyo valor es cero en la solución óptima el costo reducido es positivo, significa entonces que el valor de ese costo reducido representa la cantidad que debe subir el coeficiente (ganancia) de la variable en la función objetivo para que tenga sentido producir esa actividad. Por ejemplo la variable CH1 tiene un costo reducido de 283777,9 colones, esto significa que el coeficiente objetivo de esta variable en la función objetivo debe ser mayor o igual a 882826,9 colones (599049 + 283777,9) para que tenga sentido producirla con el propósito de maximizar la ganancia. En otras palabras, si el coeficiente de CH1 en la función objetivo alcanza al menos el valor de 882826,90 y se resuelve de nuevo el modelo de programación lineal, se obtendrá al menos una nueva solución óptima en la cual CH1 tendrá un valor positivo. La actividad PA1 no se encuentra en la solución óptima con valor positivo y su costo reducido es cero, esto significa que este modelo tiene muchas soluciones óptimas para alcanzar el mismo valor óptimo.

En la segunda parte del informe que brinda el programa "LINDO" se obtienen los cuadros de holgura y precio dual para las restricciones de tierra, mano de obra y capital, en el cuadro 10 se muestran estos resultados y de seguido su interpretación.

La holgura nos informa cuan cerca estamos de satisfacer una restricción como una igualdad. Si la restricción es de menor o igual nos referimos a variables de holgura y si es de mayor o igual nos referimos a variables de excedente. En este modelo todas las restricciones son de menor o igual, por lo tanto los datos se deben interpretar como de holgura. Por ejemplo las restricciones de las filas 2 y 3 del cuadro 10, la holgura es de 0,94 hectáreas en ambas, esto significa que para lograr el valor óptimo no se requiere de toda el área de terreno para cumplir con esas restricciones. Las restricciones con holgura cero se les llaman restricciones activas,

Cuadro 10
Holgura y precio dual de las restricciones de tierra y trabajo y capital

TIERRA			
FILA	**HOLGURA**	**PRECIO DUAL**	**MES**
2	O,940819	0	ENE
3	O,940819	0	FEB
4	0	435680,0	MAR-ABR
5	0	101349,0	MAY-JUN
6	0	23001,88	JUL
7	0	686401,1	AGO
8	0	975549,9	SET-OCT-NOV
9	0	0	DIC
10	0,940819	0	ENE
11	1,5	0	-
12	1,5	0	-

TRABAJO			
FILA	**HOLGURA**	**PRECIO DUAL**	**MES**
13	682,885	0	ENE
14	953,285	0	FEB
15	302,151	0	MAR
16	1,095,885	0	ABR
17	724,452	0	MAY
18	871,690	0	JUN
19	0	1280,93	JUL
20	418,670	0	AGO
21	724,731	0	SET
22	935,914	0	OCT
23	1,069,453	0	NOV
24	0	569,50	DIC
25	682,885	0	ENE

CAPITAL			
FILA	**HOLGURA**	**PRECIO DUAL**	**MES**
26	714928,8	0	ENE
27	714928,8	0	FEB
28	194658,9	0	MAR
29	1808178,0	0	ABR
30	1252609,0	0	MAY
31	1139440,0	0	JUN
32	3780456,0	0	JUL
33	5951691,0	0	AGO
34	5377190, 0	0	SET
35	5377190,0	0	OCT
36	5377190,0	0	NOV
37	11577900,0	0	DIC
38	10818100,0	0	ENE

Fuente: (Alvarado, 1992:72).

significa que esas restricciones usarán todos los recursos disponibles para que se alcance el valor óptimo. En este modelo las restricciones del recurso disponible tierra de la fila 4 hasta la 9 son activas, al igual que las restricciones de las filas 19 y 24 que disponen del recurso mano de obra.

El precio dual es el índice de mejoría del valor óptimo ante el aumento de una unidad del valor del lado derecho de una restricción, manteniendo fijos los demás parámetros. El análisis de los precios sombra o precios duales nos puede ayudar a valorar adecuadamente las limitaciones impuestas por cada una de las restricciones. Cada precio sombra estará asociado a una restricción del problema, y nos indicará en cuánto "mejoraría" la función objetivo, evaluada en el punto solución, si dicha restricción se "relajase" en una unidad. En el contexto anterior, "mejorar" significa: "aumentar" en el caso de un problema de maximización, y "disminuir" en el caso de un problema de minimización. Por su parte, "relajar" una restricción en una unidad significa: "incrementar" el lado derecho de la restricción en una unidad en caso de que la restricción sea con <=, y "disminuir" el lado derecho en una unidad en caso de que la restricción sea con >=.

Cuando el objetivo es maximizar el resultado, el costo de oportunidad o precio dual es el beneficio que se deja de percibir por no contar con una unidad adicional de un recurso. El costo de oportunidad de un recurso se determina en base al mejor uso alternativo. En términos económicos, es equivalente al valor del producto marginal del recurso. Los recursos escasos se asignan a aquellas actividades en las que el valor del producto marginal de cada recurso sea mayor.

Se dan cuatro casos en los resultados de los precios duales:

1) **Cuando el modelo es de minimización y la restricción es menor o igual:** el precio dual siempre será mayor o igual a cero. En este caso, el resultado del precio dual haría que quede igual (en caso de ser cero el precio dual) o mejore en ese monto el valor óptimo ante el aumento de una unidad del valor del lado derecho de la restricción, o sea, que por cada unidad que se aumenta el valor del lado derecho se debe restar el monto del precio dual al valor óptimo, ya que se está minimizando la función objetivo. Si se disminuye el lado derecho, entonces, desmejora (aumenta el valor óptimo) o queda igual.
2) **Cuando el modelo es de minimización y la restricción es mayor o igual:** el precio dual será menor igual a cero. En este caso un aumento en una unidad del valor del lado derecho hace que aumente (desmejore) el valor óptimo.
3) **Cuando el modelo es de maximización y la restricción es menor o igual:** el precio dual es mayor o igual a cero. En este caso el resultado del precio dual hace que aumente en ese monto el valor óptimo ante el aumento de una unidad del valor del lado derecho de la restricción.
4) **Cuando el modelo es de maximización y la restricción es mayor o igual:** el precio dual será menor o igual a cero. En este caso al aumentar en una unidad el valor del lado derecho entonces el valor óptimo disminuye en el monto que indica el precio dual.

El modelo que se está analizando es de maximización y todas sus restricciones son de menor o igual. Resumiendo se puede decir que el valor óptimo solo podría mejorar ampliando la disponibilidad de tierra en las restricciones 4 hasta la 8 y aumentando la disponibilidad de mano de obra en las restricciones 20 y 25. Los precios duales que tienen un mayor efecto de incremento sobre el valor óptimo ante el aumento de una unidad del valor del lado derecho se ubican en las restricciones de tierra, por lo que se debe tomar muy en cuenta el acrecentar este recurso para que la ganancia aumente, desde luego evaluando el costo de oportunidad de la tierra (alquiler o compra) contra la ganancia adicional. Los precios duales de todas las restricciones de capital (cuadro 10) tienen valor cero. Esto indica que el valor del lado derecho de esas restricciones puede ser aumentado y no tendrá ningún efecto en el valor óptimo. Muy importante tomar en cuenta que los valores del lado derecho de todas restricciones sólo pueden disminuirse o aumentarse en el rango que indica el análisis de sensibilidad de los recursos (cuadro 12) para que los precios duales se mantengan iguales, fuera de ese rango se debe replantear el modelo.

En la tercera parte del informe que emite el programa se presenta un análisis de sensibilidad relacionado con los coeficientes de la función objetivo, en el cuadro 11 se detallan los rangos en los cuales esos valores pueden ser variados (aumentar o disminuir) sin que esto haga variar la solución óptima (plan de producción).

En el cuadro 12 se presenta otro análisis de sensibilidad, se muestra los rangos en que pueden variar los valores del lado derecho de las restricciones para que los precios duales se mantengan iguales. El valor "infinito" significa que ningún cambio en la cantidad en el lado derecho de la desigualdad de una restricción afectará los valores de los precios duales ni los valores de los precios reducidos.

Existen dos formas de analizar la "sensibilidad" de una solución respecto a cambios en los coeficientes y valores. Una forma es volver a resolver todo el problema cada vez que se desea cambiar los datos originales, desde luego, utilizando este método, podría llevar bastante tiempo determinar todas las variantes en los resultados cuando se tiene un conjunto amplio de posibles cambios. La otra forma es aprovechando el análisis de sensibilidad que emite el programa una vez resuelto un modelo, se podrá analizar cómo afectaría a la solución óptima y al valor de la función objetivo la variación dentro de un rango "tolerable", de uno de los parámetros, manteniendo fijos los restantes. Por supuesto, en caso de que se quiera estudiar los efectos de la variación de más de un parámetro o de un parámetro más allá del "rango de tolerancia" se deberá reconstruir el modelo y volverlo a procesar en un programa de cómputo.

El análisis de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo y de los valores del lado derecho de las restricciones nos permite estudiar cómo afectaría a la solución óptima obtenida y a la función objetivo el cambio, dentro de un rango predeterminado, de uno de los parámetros, manteniendo fijos los restantes. Por ejemplo, en el modelo anterior, las ganancias por hectárea de

Cuadro 11
Rangos en los cuales pueden ser variados los coeficientes de las variables de la función objetivo sin que esto haga variar la solución óptima

VAR	COEFICIENTE ACTUAL	INCREMENTO PERMITIDO	DECREMENTO PERMITIDO
CH1	599049,00	283777,90	infinito
CH2	642608,00	1187213,00	infinito
ZA1	435680,00	101349,00	19041,42
ZA2	970869,00	34530,04	686401,42
ZA3	1021643,00	34530,05	467555,50
RE1	384381,00	635604,80	19041,42
RE2	366175,00	667017,00	infinito
RE3	208270,00	11952,70	infinito
CE1	2070255,00	110590,30	1250194,00
CE2	2383952,00	9206482,00	34530,04
EL1	2189,00	534840,00	infinito
EL2	18075,00	1709317,00	infinito
PA1	537029,00	23001,88	101349,00
PA2	778195,00	372622,60	infinito

Fuente: (Alvarado, 1992:81).

Cuadro 12
Rangos en que pueden variar los valores del lado derecho de las restricciones para que los precios duales se mantengan iguales

Fila	Valor actual	Incremento permitido	Decremento permitido	Mes
Tierra				
2	3,38	Infinito	0,94	ENE
3	3,38	Infinito	0,94	FEB
4	3,38	0.86	2,43	MAR-ABR
5	3,38	0.62	0	MAY-JUN
6	3,38	0	0,09	JUL
7	3,38	0.1	2,32	AGO
8	3,38	0	2,16	SET-OCT-NOV
9	3,38	Infinito	0	DIC
10	3,38	Infinito	0,94	ENE
11	1,50	Infinito	1,5	-
12	1,50	Infinito	1,5	-
Mano de obra				
13	1456,00	infinito	682,88	ENE
14	1456,00	infinito	953,28	FEB
15	1456,00	infinito	302,15	MAR
16	1456,00	infinito	1095,88	ABR
17	1456,00	infinito	724,45	MAY
18	1456,00	infinito	871,69	JUN
19	1456,00	113.82	918,23	JUL
20	1456,00	infinito	418,67	AGO
21	1456,00	infinito	724,73	SET
22	1456,00	infinito	935,91	OCT
23	1456,00	infinito	1069,45	NOV
24	1456,00	595.51	117,28	DIC
25	1456,00	infinito	682,88	ENE
Capital				
26	1374014,00	infinito	714928,80	ENE
27	1374014,00	infinito	714928,80	FEB
28	1374014,00	infinito	194658,90	MAR
29	1374014,00	infinito	1808178,00	ABR
30	1374014,00	infinito	1252609,00	MAY
31	1374014,00	infinito	1139440,00	JUN
32	1374014,00	infinito	3780456,00	JUL
33	1374014,00	infinito	5951691,00	AGO
34	1374014,00	infinito	5377190,00	SET
35	1374014,00	infinito	5377190,00	OCT
36	1374014,00	infinito	5377190,00	NOV
37	1374014,00	infinito	11577900,00	DIC
38	1374014,00	infinito	10818100,00	ENE-94

Fuente: (Alvarado, 1992:82).

cada cultivo pueden variar por la aplicación de cambios tecnológicos que aumenten la productividad o por variación de costos, también podría variar la disponibilidad de recursos como tierra, mano de obra y capital debido a la obtención de recursos financieros a más bajo costo (intereses) y a un mayor plazo, en estos casos el análisis de sensibilidad nos ayudará a conocer cómo afectarán estos cambios a la solución óptima obtenida y a los beneficios totales. El análisis de sensibilidad es relevante para el tomador de decisiones que debe operar en un contexto dinámico a partir de estimaciones imprecisas de los coeficientes del modelo de programación lineal. Este estudio permite realizar un razonamiento sobre los resultados que se obtendría a partir de modificaciones de determinados parámetros a nivel de un proyecto.

Conclusiones

- La programación lineal propone formas particulares de abordaje a problemas empresariales, aprovechando los actuales avances informáticos, ofreciendo gran ayuda a la hora de valorar futuras estrategias de desarrollo y mejora de una empresa, algunas ventajas que resultan de su aplicación son:
    - Brinda un plan óptimo detallado para lograr el resultado (máximo o mínimo) óptimo.
    - Ofrece rangos de precios de cada actividad dentro de la cual no se modifica la solución.
    - Permite evaluar costos de sustitución de las actividades.
    - Indica el uso de cada recurso limitante en el plan óptimo.
    - Identifica costos de oportunidad interno de cada recurso o insumo limitante
    - Define el rango dentro del cual se mantiene el costo de oportunidad de cada recurso.

- Desde un punto de vista práctico, algunas virtudes de los programas lineales con respecto a los no lineales son: resultan más fáciles de definir y formular, permiten trabajar de manera eficiente con mayor número de variables de decisión y se adaptan mejor al tratamiento algorítmico con computadores, aprovechando la rapidez de cálculo de éstos.

- Es muy importante que los profesionales ligados a las PYMES desarrollen mayor habilidad en el manejo de esta técnica, estos conocimientos les otorgarían mayores posibilidades de encontrar respuestas para un desarrollo sustentable.

- La contribución que las PYMES realizan a la economía de un país es su capacidad para generar empleo, pero esa capacidad va acompañada muchas veces con la creencia de que su condición de pequeña o mediana las coloca en inferioridad de condiciones para competir. Estas creencias pueden convertirse en una fuerte cultura de insatisfacciones y frustraciones que nos hacen olvidar que la robustez de las empresas no lo define su infraestructura, sino su capacidad de agregarle valor a la sociedad para la cual produce.

Referencias bibliográficas

Alvarado Boirivant, J. (1992). *Maximización de los ingresos agrícolas de la Empresa Auxiliar de la Estación Experimental Alfredo Volio Mata por medio de programación lineal*. Tesis de Licenciatura en Administración de Empresas Agropecuarias. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago.

Anderson, D., Sweeney, D. y T. Williams. (2004). *Métodos cuantitativos para los negocios*. México: Editorial THOMSON. 822 p.

Beneke, R. y R. Winterboer. (1984). *Programación lineal aplicación a la agricultura*. España: Editorial AEDOS. 222 p.

Moya, M. (1998). *La programación lineal*. Costa Rica: EUNED. 264 p.

Weber, J. (1984). *Matemática para administración y economía*. México: Editorial Hala. 823 p.