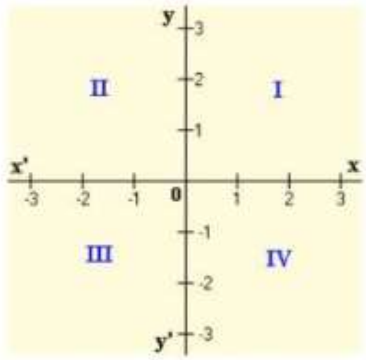
I) VECTORES EN EL PLANO

1) REPRESENTACION GRAFICA DE VECTORES EN EL PLANO

1.1) <u>Sistema rectangular de coordenadas cartesianas</u>:



Dos líneas rectas que se cortan constituyen un sistema de ejes coordenados. Si las líneas son perpendiculares entre sí tenemos un sistema de ejes coordenados rectangulares; si no lo son, tenemos un sistema de ejes oblicuos. Este Sistema Rectangular de Coordenadas Cartesianas fue llamado así en honor del célebre matemático francés René Descartes, fundador de la Geometría Analítica.

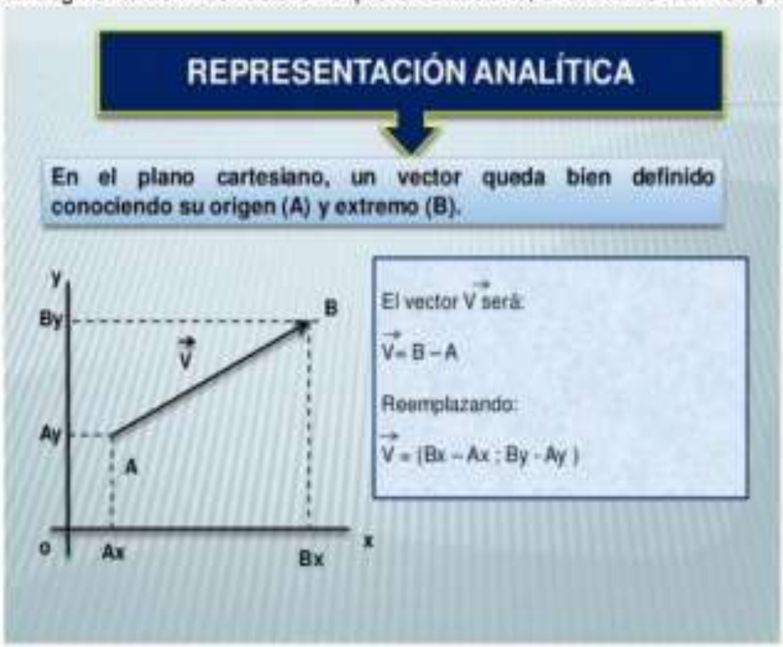
Si observamos la figura colocada arriba, tracemos dos líneas rectas XOX', y YOY', que se cortan en el punto O formando ángulo recto. Estas líneas constituyen un sistema de ejes coordenados rectangulares.

La línea XOX' se llama eje de las X o eje de las abscisas y la línea YOY' se llama eje de las Y o eje de las ordenadas. El punto O se llama origen de coordenadas.

Los ejes dividen al plano del papel en cuatro (4) partes llamadas cuadrantes. XOY es el I Cuadrante (Primer Cuadrante), YOX', el II Cuadrante (Segundo Cuadrante), X'OY', el III Cuadrante (Tercer Cuadrante) y Y'OX, el IV Cuadrante (Cuarto Cuadrante).

El origen O divide a cada eje en dos semi ejes, uno positivo y otro negativo. OX es el semi eje positivo y OX' es el semi eje negativo, ambos del eje X. OY es el semi eje positivo y OY' es el semi eje negativo del eje de las Y.

Un vector es un segmento de línea recta en el plano cartesiano, el cual está definido por dos puntos.



1.6) Módulo de un Vector:

Una recta en el plano cartesiano corresponde a un vector. Las coordenadas de un vector están dadas por la proyección de sus puntos extremos [origen (A) y final (B)] en un eje cartesiano

A (A_X ; A_Y) , B (B_X; B_Y); como se muestra en la figura anterior.

El módulo de un vector, es la longitud del segmento comprendido entre los puntos A y B, y su fórmula está dada por:

$|AB| = \sqrt{(Bx - Ax)^2 + (By - Ay)^2}$. Este valor es una distancia expresada en las unidades de medida lineal utilizada (milímetros, centímetros, metros, kilómetros, pies, millas, etc) siempre será positivo.

Ejercicio 1: Si tenemos un vector definido por los puntos A (0,80 ; 1,40) y B (4,50 ; 3,40), si queremos determinar su módulo o longitud, aplicamos la fórmula de la siguiente manera:

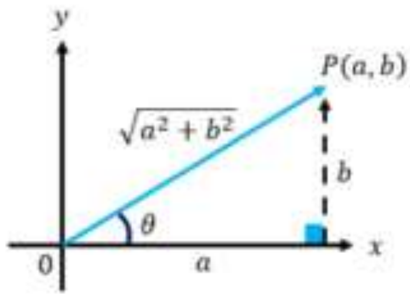
$|AB| = \sqrt{(4{,}50 - 0{,}80)^2 + (3{,}40 - 1{,}40)^2} = \sqrt{(3{,}70)^2 + (2{,}00)^2} = \sqrt{13{,}69 + 4{,}00} = \sqrt{17{,}69} = 4{,}21$

Ejercicio 2: Dados los puntos A (-4 ; 4) y B (7; -5) de un vector, calcular su módulo. La unidad de medida es el metro (m.)

Aplicando la fórmula, tenemos:

$|AB| = \sqrt{[7 - (-4)]^2 + (-5 - 4)^2} = \sqrt{(7 + 4)^2 + (-9)^2} = \sqrt{(11)^2 + (-9)^2} = \sqrt{121 + 81} = \sqrt{202} = 14{,}21\ m.$

1.7) Dirección de un vector en el plano vectorial:



La dirección de un vector en el plano vectorial se define como el ángulo (θ) que forma la recta que lo contiene con el eje de las abscisas (eje X o eje horizontal) partiendo de la rama positiva del eje X.

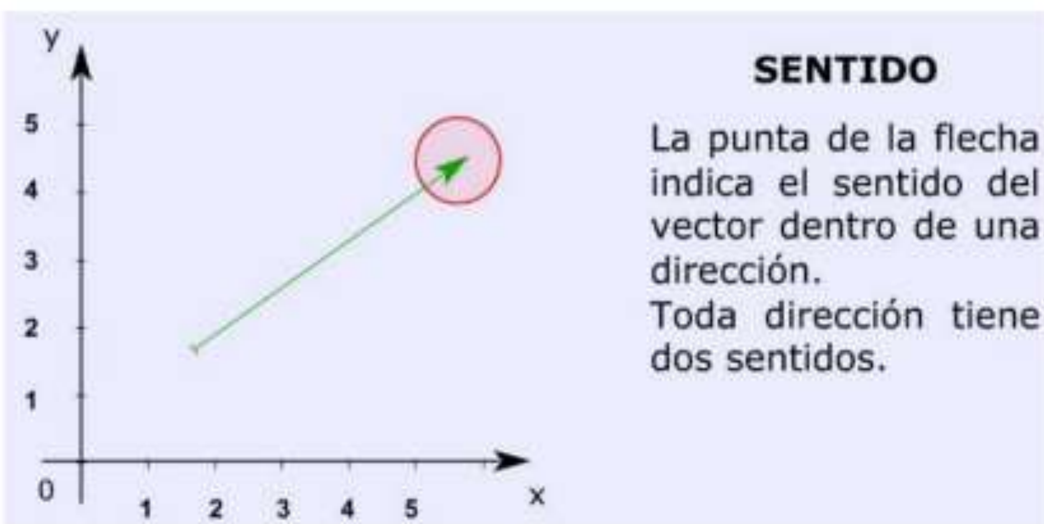
Este ángulo se denomina pendiente del vector y está definido por la fórmula:

$$m = \frac{Y_b - Y_a}{X_b - X_a}$$

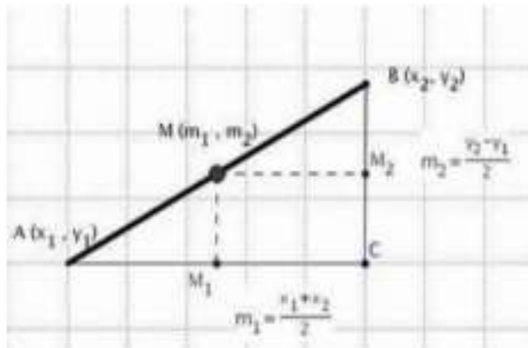
donde, m es la pendiente (ángulo) que el vector forma con el eje positivo de las abscisas; Y_b es la coordenada Y del punto extremo del vector; Y_a es la coordenada Y del punto origen del vector; X_b es la coordenada X del punto extremo del vector y X_a es la coordenada X del punto origen del vector.

El valor m corresponde a un ángulo, lo cual estaremos calculando en el lapso siguiente (Trigonometría plana). Por lo pronto este ángulo lo determinaremos de forma gráfica utilizando el transportador.

Este ángulo θ, lo definiremos trigonométricamente como: $\theta = \text{arc. tg m} = \text{arc. tg}\frac{Y_b - Y_a}{X_b - X_a}$



1.9) Punto Medio de un segmento:



En el vector representado en la figura tenemos los puntos A (x_1; y_1); B (x_2; y_2). Se nos pide calcular las coordenadas del punto medio M del vector: M (m_1; m_2).

El resultado está dado por la semisuma de las coordenadas de los puntos, de la siguiente manera:

$$m_1 = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad m_2 = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Ejercicio 3: Dado el vector, definido por los puntos A (1,25; 0,98) y B (5,21 ; 2,92), calcular el punto medio del vector.

Calculando las semisumas de los puntos A y B, tenemos:

$$m_x = \frac{1{,}25+5{,}21}{2} = \frac{6{,}46}{2} = 3{,}23 \qquad m_y = \frac{0{,}98+2{,}92}{2} = \frac{3{,}90}{2} = 1{,}95$$

El punto medio M del vector |AB|, será M (3,23 ; 1,95).

Ejercicio 4: Dado el vector definido por los puntos C (-3,28; -4,56) y D (- 8,96; -9,34), calcular el punto medio del vector dado.

Aplicando las fórmulas dadas, calculamos las semisumas de los puntos C y D:

$$M_x = \frac{(-3{,}28)+(-8{,}96)}{2} = \frac{-3{,}28-8{,}96}{2} = \frac{-12{,}24}{2} = -6{,}12 \qquad M_y = \frac{(-4{,}56)+(-9{,}34)}{2} = \frac{-4{,}56-9{,}34}{2} = \frac{-13{,}90}{2} = -6{,}95$$

El punto medio M del vector |CD|, será M (-6,12; -6,95)

Ejercicio 5: Si tenemos un triángulo cuyos vértices están representados por los puntos A (3,80; 4,00), B (3,20; 1,00) y C (1,00; 2,00), nos piden determinar, el perímetro, el baricentro y la superficie.

a) Determinación del Perímetro: El Perímetro |P| = |AB| + |BC| + |CA|.

$$|AB| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = \sqrt{(3{,}20 - 3{,}80)^2 + (1{,}00 - 4{,}00)^2} = \sqrt{(-0{,}6)^2 + (-3{,}00)^2} = \sqrt{0{,}36 + 9{,}00} = \sqrt{9{,}36} = 3{,}06\ m.$$

$$|BC| = \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2} = \sqrt{(1{,}00 - 3{,}20)^2 + (2{,}00 - 1{,}00)^2} = \sqrt{(-2{,}20)^2 + (1{,}00)^2} = \sqrt{4{,}84 + 1{,}00} = \sqrt{5{,}84} = 2{,}42\ m.$$

$$|CA| = \sqrt{(X_A - X_C)^2 + (Y_A - Y_C)^2} = \sqrt{(3{,}80 - 1{,}00)^2 + (4{,}00 - 2{,}00)^2} = \sqrt{(2{,}80)^2 + (2{,}00)^2} = \sqrt{7{,}84 + 4{,}00} = \sqrt{11{,}80} = 3{,}44\ m.$$

|P| = 3,06 m. + 2,42 m. + 3,44 m. = 8,92 m.

b) Las coordenadas del baricentro G, están dadas por el promedio de la suma de las coordenadas de los vértices:

$$X_G = \frac{X_A + X_B + X_C}{3} = \frac{3{,}80 + 3{,}20 + 1{,}00}{3} = \frac{8{,}00}{3} = 2{,}67$$

$$Y_G = \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3} = \frac{4{,}00 + 1{,}00 + 2{,}00}{3} = \frac{7{,}00}{3} = 2{,}33$$

Entonces: G (2,67; 2,33)

c) La superficie del triángulo la podemos calcular por la fórmula: $S = \frac{b \times h}{2}$

La altura h del triángulo, será la distancia entre el punto medio de la recta BC y el punto A.

El punto medio de la recta |BC| será:

$$X_{BC} = \frac{X_B + X_C}{2} = \frac{3{,}20 + 1{,}00}{2} = \frac{4{,}20}{2} = 2{,}10$$

$$Y_{BC} = \frac{Y_B + Y_C}{2} = \frac{1{,}00 + 2{,}00}{2} = \frac{3{,}00}{2} = 1{,}50$$

M_{BC} (2,10; 1,50)

La distancia entre el punto medio de la recta |BC| y el punto A será:

$$h = |M_{BC}A| = \sqrt{(X_A - X_{BC})^2 + (Y_A - Y_{BC})^2} = \sqrt{(3{,}80 - 2{,}10)^2 + (4{,}00 - 1{,}50)^2} = \sqrt{(1{,}70)^2 + (2{,}50)^2} = \sqrt{2{,}89 + 6{,}25} = \sqrt{9{,}14} = 3{,}02\ m.$$

El módulo de un vector es la longitud del segmento orientado que lo define. El módulo de un vector es un número siempre positivo y solamente el vector nulo tiene módulo cero. El módulo de un vector se nota con el símbolo vectorial entre dos barras de valor absoluto: $\overrightarrow{|AB|}$

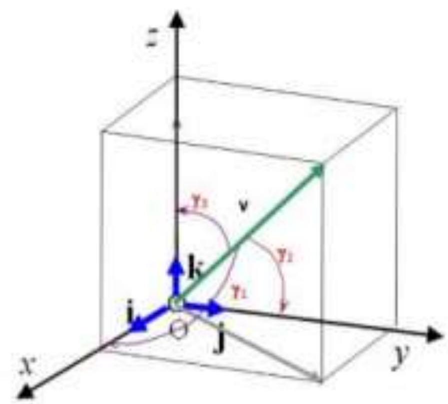
Existen dos maneras para calcular el módulo de un vector:

a) Conociendo las componentes del vector: $\overrightarrow{|AB|}$= (X_{ba}; Y_{ba}; Z_{ba})
b) Conociendo las coordenadas de los puntos que lo definen. A(X_a ; Y_a; Z_a); B(X_b; Y_b; Z_b)

a) En el primer caso, el módulo del vector será: $\overrightarrow{|AB|} = \sqrt{(X_{ba})^2 + (Y_{ba})^2 + (Z_{ba})^2}$
b) En el segundo caso, el módulo será: $\overrightarrow{|AB|} = \sqrt{(X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2 + (Z_b - Z_a)^2}$

1.3.3) <u>Dirección y sentido de un vector en R^3</u>

Cuando estudiamos vectores en el plano, vimos que la dirección de un vector podía determinarse si se conocía el ángulo que formaba con el eje X. La determinación de la dirección de un vector en el espacio es algo más complicada y envuelve el conocimiento de los ángulos que el vector forma con los tres ejes coordenados, X, Y, Z.



Consideremos la figura arriba mostrada, donde tenemos un vector V de posición OP, que va desde el punto (0; 0; 0), origen del vector, hasta el punto P(x; y; z), éste último marca el extremo del vector. y cuya magnitud o módulo por facilidad la llamaremos r.

El vector v forma los ángulos γ_1, γ_2, γ_3. Con los ejes X, Y, Z, respectivamente.

Los ángulos <x0P, y0P y z0P, son ángulos rectos y por tanto, los triángulos Δx0P, Δy0P, Δz0P, son triángulos rectángulos y por lo tanto podemos definir:

$$\cos\gamma_1 = \frac{x}{OP};\quad \cos\gamma_2 = \frac{y}{OP},\quad \cos\gamma_3 = \frac{z}{OP}$$

A las definiciones cos γ_1, cos γ_2, cos γ_3, se les llama cosenos directores del vector $\overrightarrow{OP}$.

Como r = $\overrightarrow{|OP|} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, se tiene:

$$\cos\gamma_1 = \frac{x}{OP} = \frac{x}{|\vec{v}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \cos\gamma_2 = \frac{y}{OP} = \frac{y}{|\vec{v}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \cos\gamma_3 = \frac{z}{OP} = \frac{z}{|\vec{v}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Elevando al cuadrado las relaciones anteriores y sumándoles, tenemos:

$$cos^2\gamma_1 + cos^2\gamma_2 + cos^2\gamma_3 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}[x^2+y^2+z^2] = 1$$

$cos^2\gamma_1 + cos^2\gamma_2 + cos^2\gamma_3 = 1$, es la ecuación fundamental de la trigonometría (vista en 4° Año en el plano).