UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL POLITÉCNICA
ANTONIO JOSE DE SUCRE
VICERRECTORADO PUERTO ORDAZ
DEPARTAMENTO DE ESTUDIOS GENERALES
SECCION DE MATEMÁTICA
ASIGNATURA : MATEMÁTICA II

CAPITULO 7

ECUACIONES PARAMETRICAS

Lic. ELIZABETH VARGAS

CIUDAD GUAYANA 2007

7. 1 ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Para iniciar este tema, estudiaremos la siguiente pareja de ecuaciones:

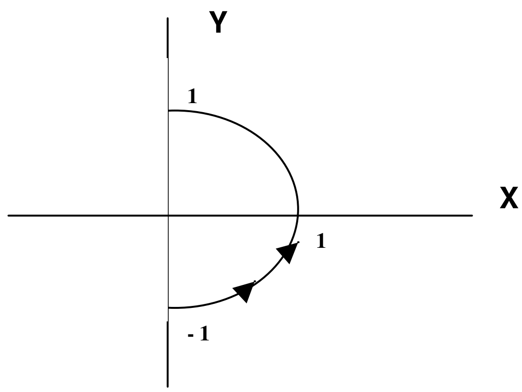
$$\begin{cases} x = \sqrt{1-n^2} \\ y = n \end{cases}$$

Observe que tanto la variable x como la variable y dependen cada una de una tercera variable. Cada valor de n determina un valor de x y un valor de y. Por lo que a cada valor de n se le asocia un punto (x,y) del plano. En nuestro ejemplo, el conjunto de valores que puede tomar el parámetro es $n \in$ [-1, 1] . A continuación se presenta una tabla de valores obtenida asignando algunos valores a *n* en [-1, 1]

n	-1	-0.5	-0.25	0	0.25	0.50	0.75	1.00
x	0	0,866	0,968	1	0,968	0,866	0,661	0
y	-1	-0,5	-0,25	0	0,25	0,50	0,75	1

Para hallar los puntos de corte con el eje X hacer $y = 0$: de donde $n = 0$, luego $x = 1$. Así, el punto de corte con el eje X es (1, 0). Los puntos de corte con el eje Y se obtienen haciendo $x = \sqrt{1-n^2} = 0$, así $n = 1$, $n = -1$, luego $y = 1$, $y = -1$.
Los cortes con el eje Y son (0, 1) y (0,-1).

La gráfica correspondiente es la siguiente:



A n se le llama parámetro y a las ecuaciones $\begin{cases} x = \sqrt{1-n^2} \\ y = n \end{cases}$ se les llama ecuaciones paramétricas.

En este capítulo se considera la representación analítica de una curva por medio de un par de ecuaciones, en las cuales cada una de las variables *x* e *y* están en función de una tercera variable. Sea $H(x, y) = 0$ la ecuación rectángular de una curva plana C, y cada una de las variables x e y son función de una tercera variable t :

$$x = f(t) \qquad (7.1)$$
$$y = g(t)$$

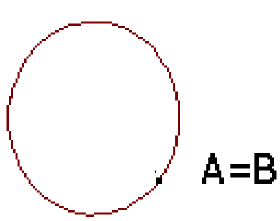
A las ecuaciones (7.1) se les llaman ecuaciones paramétricas o representación paramétrica de la curva C, a la variable t se le llama parámetro.

NOTAS:

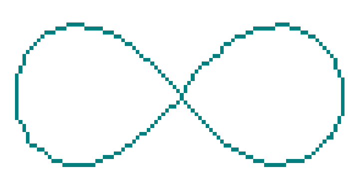
1. L a grafica de las ecuaciones paramétricas es el conjunto de puntos del plano que se obtiene cuando el parámetro toma todos sus valores posibles, es decir, si f y g son funciones cuyos dominios son $Domf$, $Domg$ entonces $t \in Domf \cap Domg$.
2. Un punto $P(x, y)$ de C se representa así: $(x(t_1), y(t_1))$ para algún $t_1 \in Domf \cap Domg$
3. Sí f y g son continuas en cierto intervalo I, entonces la curva C se llama continua.
4. La representación paramétrica de estas curvas ordena los puntos de la misma, es decir, establece una orientación de la curva: sí t_1 , $t_2 \in$ I tal que $t_1 < t_2$ entonces el punto $(f(t_1), g(t_1))$ precede al punto $(f(t_2), g(t_2))$.
5. Dos o más valores distintos de t pueden producir el mismo punto P en la curva. Si esto ocurre, se dice que P es un punto múltiple. (La gráfica se “autointersecta” en ese punto).
6. Si la curva C no tiene puntos múltiples entonces C es una curva simple.

A continuación se muestran algunas curvas:

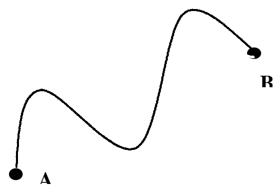
a) Curva cerrada y simple



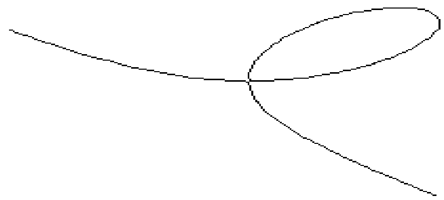
b) Curva cerrada y no simple



c) Curva no cerrada y simple



d) Curva no cerrada y no simple.

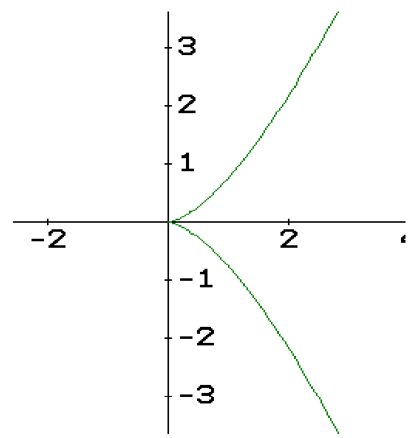


Ejemplo 7. 1 Sin eliminar el parámetro halle: a) Conjunto de valores que puede tomar el parámetro. b) Puntos de corte con los ejes coordenados. c) Trace la gráfica.

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 4t^3 \end{cases}$$

Solución. Para el conjunto de ecuaciones paramétricas $x = 3t^2$, $y = 4t^3$, el parámetro t puede tomar cualquier valor real. Note que $x \geq 0$ para todo t , la ordenada y puede ser positiva, negativa o cero. Por lo que la gráfica de esta curva esta ubicada en el primer y cuarto cuadrante. A continuación se muestra la tabla de valores para algunos valores de t y la gráfica correspondiente a la curva.

t	x	y
0	0	0
0.5	0.75	0.5
1	3	4
2	12	32
-0.5	0.75	-0.5
-1	3	-4
-2	12	-32



Note que la gráfica correspondiente a estas ecuaciones paramétricas no definen a y como función de x. La gráfica de las ecuaciones paramétricas y la gráfica de la ecuación rectangular correspondiente es la misma.

Nos preguntamos ¿ qué condiciones deben cumplir las ecuaciones paramétricas para qué definen a y como función de x ? A continuación se responde esta pregunta :

Sean las ecuaciones paramétricas de una curva C:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad t \in I \tag{7.2}$$

Sí f es biyectiva en I entonces las ecuaciones paramétricas (7.2) corresponden a una función H tal que : $H = \{ (x, y) \in R^2 \ / \ y = g\left(f^{-1}(x)\right) \ , t \in I \}$.

Ejemplo 7.2 Sin eliminar el parámetro determine si las siguientes ecuaciones paramétricas representan funciones: $a) \begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2 \end{cases}$ $\quad b) \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 4t^3 \end{cases}$

Solución. a) Sea x = f (t) = t + 1, la cual es biyectiva para todo t real , por lo tanto las ecuaciones paramétricas (a) sí definen a y como función de x.

b) Sea x = h (t) = $3t^2$, no es biyectiva, por lo tanto estas ecuaciones no definen a y como función de x.

7.2 MÉTODO DE ELIMINACIÓN DEL PARÁMETRO.

Este método permite obtener la ecuación rectangular de una curva, a partir de sus ecuaciones paramétricas. Algunas veces, este proceso no es tan fácil e incluso resulta imposible. No existe un proceso general que permita eliminar el parámetro. En el siguiente ejemplo se dan algunas sugerencias

Ejemplo 7.3 En cada caso, halle (si es posible) la ecuación rectangular correspondiente a las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$a)\begin{cases} x = \sqrt{1-n^2} \\ y = n \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x = \dfrac{1-p^2}{1+p^2} \\ y = \dfrac{2p}{1+p^2} \end{cases} \ p \in [-1,1] \qquad c)\begin{cases} x = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ y = \cos\theta \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x = n^5 + Ln(n) \\ y = n^3 + tg(n) \end{cases}$$

Solución. a) Sustituir n = y en x obteniéndose : $x = \sqrt{1-y^2}$.

b) De $x = \dfrac{1-p^2}{1+p^2}$ se despeja p^2 obteniéndose : $p^2 = \dfrac{1-x}{1+x}$ (7.3)

Elevar al cuadrado ambos miembros de y : $y^2 = \dfrac{4p^2}{(1+p^2)^2}$ (7.4)

Se sustituye (7.3) en (7.4) obteniéndose: $x^2 + y^2 = 1$. Como $p \in [-1, 1]$, entonces $x \geq 0$, por lo que la gráfica corresponde a una semicircunferencia (ver figura 7.1). Así, la ecuación rectangular es : $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $|y| \leq 1$

Note que las ecuaciones paramétricas (a) y (b) representan la misma ecuación rectangular. Se concluye que las ecuaciones paramétricas de una curva no son única.

c) En la identidad trigonométrica $sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}$ se sustituye $y = \cos(\theta)$ y $sen(\theta/2) = x$ obteniéndose: $y = 1 - 2x^2$.

d) En este caso es imposible despejar el parámetro.

7.3 ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LAS CÓNICAS Y OTRAS CURVAS.

Se darán las ecuaciones paramétricas más usuales:

i) **Circunferencia de radio r y centro (0, 0) :** sea θ el ángulo que forma el radio con el semieje positivo de las abscisas (ver figura 7.1). Sea p(x, y) un punto de la circunferencia, entonces:

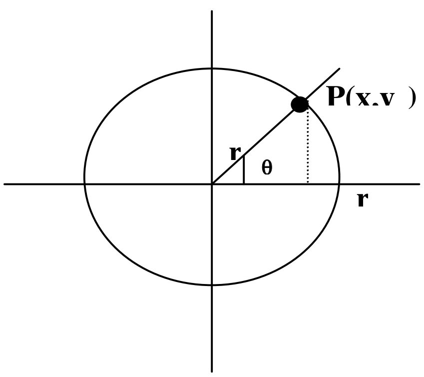


Figura 7.1

$$sen(\theta) = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{x}{r}$$

Luego las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de centro (0,0) y radio r son :

$$x = r\cos(\theta) \qquad (7.5)$$
$$y = r sen(\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

Si la circunferencia es de centro (h, k) y radio r las ecuaciones paramétricas son:

$$x = r\cos(\theta) + h \quad , \quad y = r sen(\theta) + k \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

ii) Elipse de centro (0, 0) y eje focal horizontal: $\begin{cases} x = a\cos(\theta) \\ y = b sen(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$

Se despeja sen(θ) y cos(θ): $sen(\theta) = \frac{y}{b}$, $\cos(\theta) = \frac{x}{a}$. Luego se sustituyen en la identidad trigonométrica $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$, obteniéndose: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Si el centro es (h , k) las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = a.\cos(\theta) + h \\ y = b.sen(\theta) + k \end{cases}$ $\theta \in [0,2\pi]$

iii) Hipérbola de centro (0, 0) y eje focal horizontal: $\begin{cases} x = a\sec(\theta) \\ y = btg(\theta) \end{cases}$ $\theta \in [0,2\pi]$

$\theta \neq \frac{\pi}{2}$, $\theta \neq \frac{3\pi}{2}$ (Para comprobar use la identidad $\sec^2(\theta) = tg^2(\theta) + 1$).

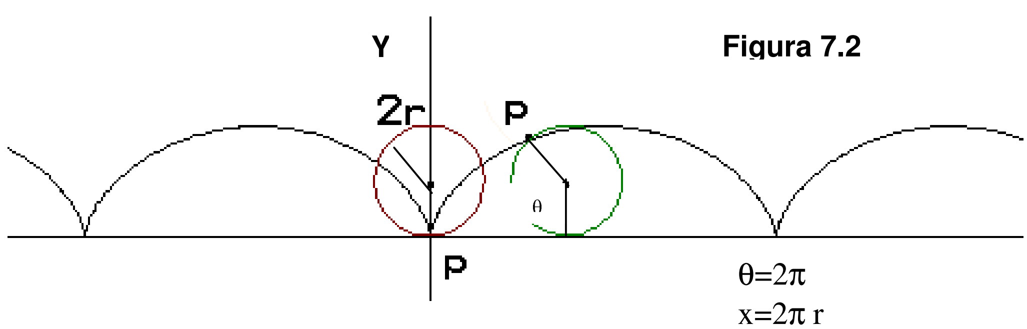
iv) Para una parábola de ecuación $y^2 = 4px$: se tiene que un par de ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = p.ctg^2(\theta) \\ y = 2p.ctg(\theta) \end{cases}$, donde el parámetro θ es el ángulo de inclinación de las tangentes a la parábola $y^2 = 4px$.

v) Cicloide: Es el lugar geométrico descrito por cualquier punto fijo de una circunferencia que rueda sobre una recta.

Supongamos que la circunferencia tiene radio r, inicialmente el punto P(x, y) está en el origen de coordenadas, la circunferencia rueda a lo largo (por encima) del eje X en el sentido positivo. Se toma como parámetro el ángulo θ que gira la circunferencia al rodar partiendo del origen (ver figura 7.2). bajo estas condiciones se puede demostrar que las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = r(\theta - sen\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$ $\theta \in$ IR (7.6)

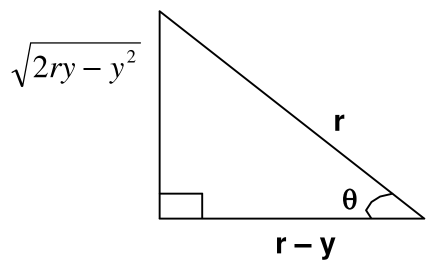
Cuando la circunferencia gira θ = π, el punto P tiene coordenadas (πr, 2r) (punto más alto del arco). El punto P toca al eje X cuando la circunferencia da un giro completo, en este caso θ = 2π y las coordenadas de P son (2π r, 0) .

Figura 7.2



La circunferencia puede girar hacia la derecha ($\theta > 0$), o hacia la izquierda ($\theta < 0$), sobre el eje X. El punto medio de cada arco se llama vértice, todos los arcos tienen la misma longitud . A la cicloide también se le llama braquistocrona o curva del más rápido descenso.

Para hallar la ecuación rectangular de la cicloide se procede así: despejar θ de $y = r(1-\cos\theta)$, obteniéndose: $\cos\theta = \dfrac{r-y}{r}$, y con esto se forma el siguiente triángulo rectángulo:



De allí se tiene:

$$sen(\theta) = \frac{\sqrt{2ry-y^2}}{r} \qquad (7.7)$$

Ahora se sustituye $\cos(\theta) = \dfrac{r-y}{r}$ y (7.7) en la expresión correspondiente y se obtiene la ecuación rectangular:

$$x = r.ar\,cos\left(\frac{r-y}{r}\right) \pm \sqrt{2ry-y^2} \qquad (7.8)$$

Es obvio que trazar la gráfica de una cicloide usando las ecuaciones paramétricas resulta más fácil que usar la ecuación rectangular .

vi) Astroide: Se llama astroide a la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = a.\cos^3(t) \\ y = a.sen^3(t) \end{cases} \qquad a>0, \quad t \in [0,2]$$

La ecuación rectangular es

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad .$$

La gráfica es simétrica con especto a los ejes coordenados , se muestra a la derecha:

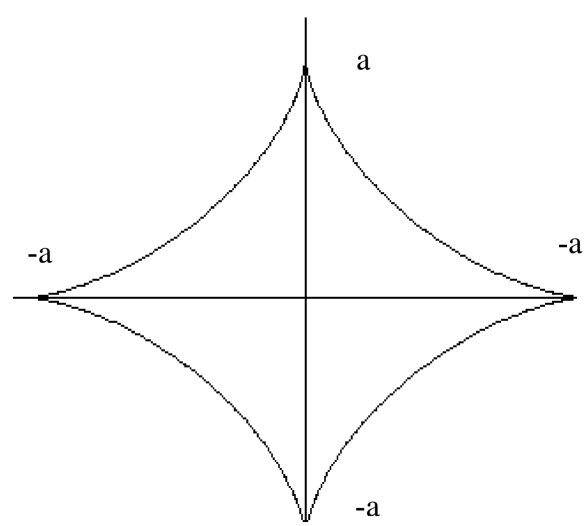


Figura 7.3

vii) El conjunto de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \end{cases}$ donde a y b no son simultáneamente ceros, representa una recta en el plano, la cual pasa por el punto (x_0, y_0).

NOTA: Sí C es una curva cuya ecuación rectangular es y = f (x), con f continua entonces se pueden hallar las ecuaciones paramétricas definiendo:

$$x = t \quad , \quad y = f(t), \quad \text{con} \quad t \in \text{Domf}.$$

Ejemplo 7.4 Halle las ecuaciones paramétricas de la curva f (x) = 1- x^2 , usando los siguientes parámetros: a) t = x b) $m = {dy}/{dx}$

Solución a) Sí x = t entonces y = 1 – t^2, así un par de ecuaciones paramétricas para f son: t= *x*, *y = 1 –* t^2, $t \in R$.

b) Sí y = 1 – x^2, entonces $m = {dy}/{dx} = -2x$, de allí que $x = -\frac{m}{2}$, e $y = 1 - \left(\frac{-m}{2}\right)^2$,

así: $\begin{cases} x = -{m}/{2} \\ y = 1 - \dfrac{m^2}{4} \end{cases}$ con $m \in$ IR

Ejemplo 7.5 Escriba un par de ecuaciones paramétricas para:

i) Recta que pasa por los puntos (2, 0), (2, 4).
ii) Recta que pasa por los puntos (0, 2), (4, 2).
iii) Elipse de vértices (5, 0), (-5, 0) y focos (4, 0), (-4, 0).
iv) Circulo de centro (-2, 1) y diámetro 5.
v) Recta de ecuación y - 3x + 5 = 0.

Solución . i) La recta que pasa por los puntos (2, 0), (2, 4) es una recta vertical, por lo que un par de ecuaciones paramétricas son: x = 2 , y = t , $t \in$ IR.

ii) La recta pasa que por (0, 2) y (4, 2) es horizontal, así las ecuaciones parametricas son : x = t , y = 2 , $t \in$ IR.

iii) Si los vértices de la elipse son (5, 0) y (-5, 0) entonces el eje mayor mide a = 10, de allí que a = 5. Como los focos son (4, 0) y (-4, 0), entonces c = 4. Luego para calcular b se usa la fórmula $a^2 = b^2 + c^2$, y se obtiene b = 3. Luego las ecuaciones paramétricas son:

$$x = 5\cos(\theta), \quad y = 3\text{sen}(\theta) \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

iv) En este caso , h = 2 , k = 1 , r = 5/2 , luego: $\begin{cases} x = \frac{5}{2}Cos(\theta) - 2 \\ y = \frac{5}{2}Sen(\theta) + 1 \end{cases}$

v) En y = 3x – 5, hacer x = t, luego y = 3t –5 . Así $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 5 \end{cases}$ t ∈ IR.

7.4 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN USANDO LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS.

Suponga que una función y = F(x) viene dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} , \quad t \in [a, b] \qquad (7.8)$$

Sí f , g son derivables en (a, b) entonces se tiene:

i) F´(x) $= \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$, $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ (7.9)

representa la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (x, y).

ii) F´´(x) $= \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{dy'/dt}{dx/dt}$ de donde F''(x) $= \dfrac{dy'/dt}{dx/dt}$.

iii) Análogamente se tiene: $\dfrac{d^3y}{d^3x} = \dfrac{d}{dx}(y´) = \dfrac{dy''/dt}{dx/dt}$.

NOTAS.

a) Sí la recta tangente es horizontal se tiene que su pendiente es cero, por lo que $\dfrac{dy}{dt} = 0$ y $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ (con estas condiciones se hallan todos los puntos la tangencia horizontal)

b) Para hallar los puntos de tangencia vertical se hace: $\dfrac{dy}{dt} \neq 0$ y $\dfrac{dx}{dt} = 0$.

c) Sí se cumple que $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 0$, no se puede asegurar la existencia de tangentes horizontales o tangentes verticales.

d) Sí $\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \neq 0 \right)$ entonces la gráfica de la curva C tiene una tangente en cada punto de la curva (Condición suficiente para asegurar la existencia de tangente, pero no es condición necesaria).

Ejemplo 7.6 Sea la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son: x = a.(t – sent), y = a.(1 - cost) con $t \in [0, 2\pi]$. Halle: a) dy/dx , d^2y/d^2x

b) La pendiente de la recta tangente a la curva C en el punto donde $t = \pi/4$.

c) Halle todos los puntos de tangencia horizontal (si existen).

d) Halle todos los puntos de tangencia vertical (si existen).

Solución a) $\frac{dy}{dx} = \frac{asent}{a(1 - \cos t)} = \frac{sent}{1 - \cos t}$, así $\frac{dy}{dx} = \frac{sent}{1 - \cos t}$. La segunda

derivada es : $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{sent}{1-\cos t}\right]}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{a.(1-\cos t)^2}$. Note que $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ para todo $t \neq 2n\pi$, $n \in Z$, por lo que la gráfica de la curva C es cóncava hacia abajo.

b) Para hallar la pendiente m de la recta tangente a la curva C en el punto donde $t = \pi/4$, se evalúa dy/dx en $t = \pi/4$: $m = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$.

c) Para hallar los puntos de tangencia horizontal se buscan los valores de t tal que $\frac{dy}{dt} = 0$ y $\frac{dx}{dt} \neq 0$: esto se cumple cuando t = 0, t = π, t = 2π. Se verifica sí $\frac{dx}{dt} \neq 0$ para estos valores obteniéndose que el único punto de tangencia horizontal ocurre en t = π, y las coordenadas de dicho punto es (πa, 2a).

d) Los puntos de tangencia vertical se hallan resolviendo $\frac{dx}{dt} = 0$, lo cual ocurre si a(1 – cos(t)) = 0, de allí t = 0, t = 2π ; y $\frac{dy}{dt} \neq 0$ para t = 0 y t = 2π. Así los puntos de tangencia vertical son (0, 0), (2πa, 0).

EJERCICIOS PROPUESTOS 7.1

1) En cada caso halle : a) $\dfrac{dy}{dx}$ (sin eliminar el parámetro) b) la ecuación rectángular :

a) $\begin{cases} x = 3.(1-\cos\theta) \\ y = 2sen\theta \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = e^{t} + e^{-t} \\ y = e^{t} - e^{-t} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 2sen(t) - 3\cos(t) \\ y = 4sen(t) + 2\cos(t) \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - 4t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{1}{6}(4t+1)^{3/2} \end{cases}$ g) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = \ln(t) \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x = arcsen\theta \\ y = Ln\sqrt{1-\theta^2} \end{cases}$ $,\theta \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

2) Dibuje la curva asignando valores a los parámetros:

a. $x = 2t,\ y = 3t,\ t \in R$. b. $x = t^2,\ y = t^3,\ -1 \le t \le 2$.

3) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada, en el punto que se indica (sin eliminar el parámetro).

1. $x = 2t^2 + 1, \quad y = 3t^3 + 2, \quad t = 1$
2. $x = 2\,sec(t), \quad y = 2tg(t) + 2, \quad t = -\pi/6$
3. $x = tsen(t), \quad y = t\,cos(t), \quad t = \pi/2$
4. $x = \dfrac{3t}{1+t^3},\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3},\ t = 1$