UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL POLITÉCNICA
ANTONIO JOSE DE SUCRE
VICERRECTORADO PUERTO ORDAZ
DEPARTAMENTO DE ESTUDIOS GENERALES
SECCION DE MATEMÁTICA
CATEDRA : MATEMÁTICA II

CAPITULO 8

SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Lic. ELIZABETH VARGAS

CIUDAD GUAYANA 2007

8.1 SISTEMA DE COORDENADAS POLARES.

Hasta ahora se ha representado un punto P del plano utilizando el Sistema de Coordenadas Rectangulares. En esta sección se describirá otra forma de representar un punto en el plano; dicho sistema se llama Sistema de Coordenadas Polares.

Para construir este sistema se procede así:

i) Se elige un punto 0 fijo, llamado polo u origen.

ii) Se traza una semirrecta de origen el polo. A esta semirrecta se le llama eje polar.

iii) A cada punto P del plano se le asigna las coordenadas polares (r, θ), donde: r es la distancia dirigida del origen al punto P, θ es la medida en radianes del ángulo orientado, cuyo lado inicial es el eje polar, y el lado final es la semirrecta $\overrightarrow{OP}$. (Ver figura 8.1).

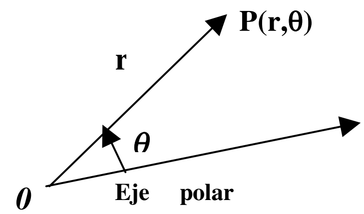
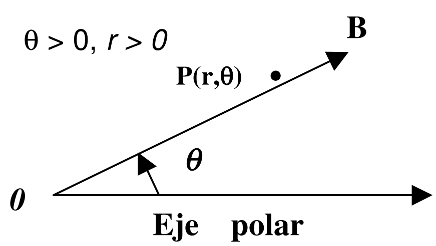


Figura 8.1

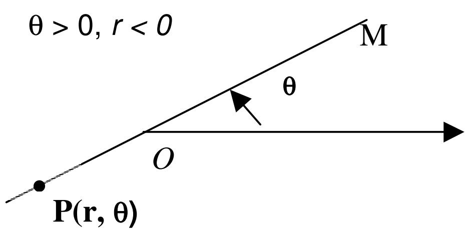
Como θ es un ángulo orientado entonces $\theta > 0$ significa que el ángulo se mide en sentido contrario a las agujas del reloj, y si $\theta < 0$ el ángulo se mide en el mismo sentido de las agujas del reloj ; r es una distancia dirigida, por lo que r puede ser positiva, negativa o cero. A continuación se presentan los diferentes casos:

i) $\theta > 0$, $r > 0$



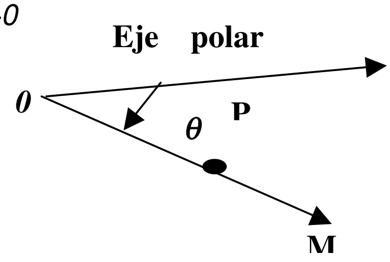
Se mide θ en sentido contrario a las agujas del reloj, se traza la semirrecta $\overrightarrow{OB}$ y sobre ella se miden r unidades.

ii) $\theta > 0$, $r < 0$



Se mide θ en sentido positivo y se traza la semirrecta $\overrightarrow{OM}$. Como $r < 0$ se mide r unidades en la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{OM}$.

iii) $\theta < 0$, $r > 0$



Se mide θ en sentido contrario a las agujas del reloj, y se traza la semirrecta $\overrightarrow{OM}$ y sobre ella se mide r unidades.

iv) $\theta < 0$, $r < 0$: se deja al lector la realización del gráfico y comentarios correspondientes

8.2 RELACIÓN ENTRE SISTEMA DE COORDENADAS POLARES Y EL SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS.

Para hallar la relación entre estos sistemas se hace coincidir el eje polar con el semieje positivo de las abscisas, el polo con el origen de coordenadas, y el semieje positivo de las ordenadas con el eje $\pi/2$.

Sea P un punto del plano, cuyas coordenadas rectangulares son (*x, y*) y las coordenadas polares son (*r*, θ), como se muestra en la figura 8.2. Del triángulo OXP se tiene:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{r}, \qquad \cos(\theta) = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{y}{x}, \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

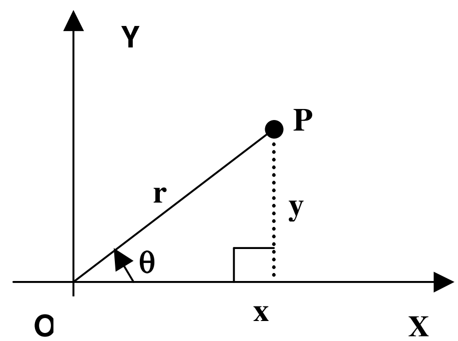


Figura 8.2

De allí que las relaciones que permiten pasar del Sistema Rectangular al Sistema Polar y viceversa son :

$$y = r.\operatorname{sen}(\theta), \quad x = r.\cos(\theta), \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{y}{x}, \qquad r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \qquad (8.1)$$

Ejemplo 8.1 i) Representar los siguientes puntos en el sistema de coordenadas polares , luego halle las coordenadas rectangulares de los puntos A y D.

a) $A\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $B\left(-5, \frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $C\left(5, \frac{5\pi}{4}\right)$ **d)** $D\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$

Solución: Para hallar las coordenadas rectangulares se usan las relaciones (8.1) . En la figura 8.3 se muestra la representación polar de los puntos dados. Observe que B y C representan el mismo punto en el plano.

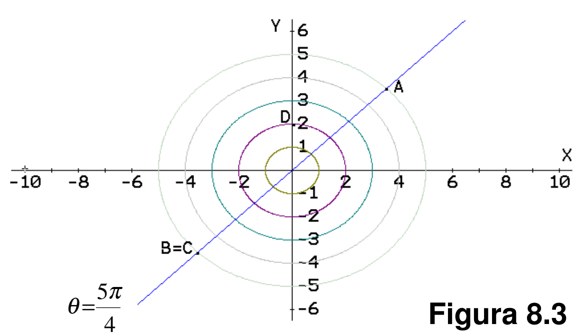


Figura 8.3

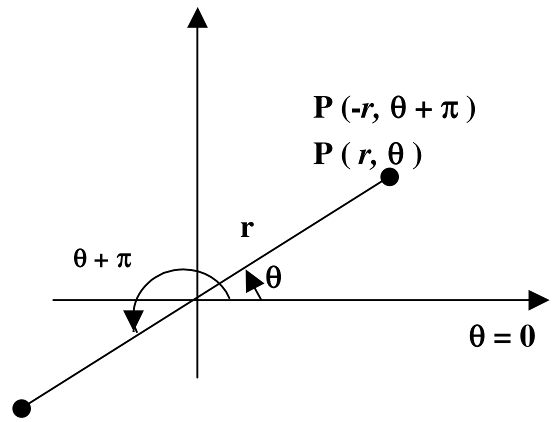
Para el punto $A\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ se tiene :

$$x = 5.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad y = 5.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$ Así las coordenadas rectangulares del

punto A son $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$. Las coordenadas rectangulares del punto D son D(0, 2).

Del ejemplo anterior se concluye que la representación polar de un punto no es única. Veamos, sea P(r, θ) un punto en el Sistema de Coordenadas Polares entonces:

otras representaciones del punto P son: $P(r,\theta+2\pi)$, $P(-r,\theta+\pi)$. En general $P(r,\theta+2n\pi)$, $P(-r,\theta+(2n+1)\pi)$. De todos estos puntos el par principal es aquel donde : $r > 0$ y $\theta \in [\,0, 2\pi\,]$.



Las coordenadas del polo son (0, θ), θ > 0.

Ejemplo 8.2 Halle dos representaciones en el Sistema de Coordenadas Polares , una con r> 0 y otra con r <0 , para los puntos con las coordenadas rectangulares dadas :

a) $A(1,1)$ b) $B(-3,4)$.

Solución: a) Para $A(1,1)$ se tiene: $\operatorname{tg}(\theta)=\frac{1}{1}=1$, de donde $\theta=\frac{\pi}{4}$ o $\theta=\frac{5\pi}{4}$.

De $r^2=1^2+1^2$ se tiene $r=\pm\sqrt{2}$. Así se tienen las siguientes combinaciones:

$\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$. El punto A está ubicado en el primer cuadrante, entonces sus coordenadas polares son: $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$.

b) Para el punto $B(-3,4)$: $\operatorname{tg}(\theta)=-\frac{4}{3}$, de donde $\theta_1=\pi-0.9272$ y $\theta_2=2\pi-0.9272$,

y $r^2=(-3)^2+4^2$, de donde $r=\pm 5$. Como el punto $B(-3,4)$ esta en el segundo cuadrante entonces sus coordenadas polares son: $(5,\theta_1)$ **,** $(-5,\theta_2)$ **.**

Ejemplo 8.3 Transformar las siguientes ecuaciones del Sistema de Coordenadas Rectangulares al Sistema de Coordenadas Polares. Identifique las curvas.

i) $x = a$ ii) $y = b$ iii) $x^2+4y-4=0$ iv) $x^2-y^2=xy$.

Solución: Se utilizan las relaciones (8.1):

i) Para *x = a* se tiene $r\cos(\theta) = a$ (Recta vertical)

ii) Para y = *b* se tiene: $r\,\text{sen}(\theta) = b$ (Recta horizontal)

iii) Sustituyendo $x = r\cos(\theta)$ $y = r\,\text{sen}(\theta)$ en $x^2 + 4y - 4 = 0$, se tiene :

$r^2\cos^2(\theta) + 4r\,sen(\theta) - 4 = 0$. Resolviendo para *r* se obtiene:

$r = \dfrac{-2}{1 - sen(\theta)}$, $r = \dfrac{2}{1 + sen(\theta)}$ (Parábolas cuyo eje focal es el eje *Y*).

iv) Para $x^2 - y^2 = xy$ se tiene: $r^2\cos^2(\theta) - r^2\,\text{sen}^2(\theta) = r^2\cos(\theta).\text{sen}(\theta)$. Sí r $\neq$ 0

entonces $cos^2(\theta) - sen^2(\theta) = cos(\theta).sen(\theta)$, lo cual equivale a $Tg(2\theta) = 2$.

Ejemplo 8.4 Halle la ecuación cartesiana de las siguientes ecuaciones polares:

a) $r^2 = \cos(\theta)$, b) $r^2 = cos(2\theta)$, c) $\theta = \alpha$, d) $r = \dfrac{6}{2 - 3\,\text{sen}(\theta)}$

Solución: a) $r^2 = \cos(\theta)$ se eleva al cuadrado: $(r^2)^2 = \cos^2(\theta)$. Ahora se sustituye $x^2 + y^2 = r^2$ y $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$ obteniéndose $(x^2 + y^2)^3 = x^2$.

b) La ecuación $r^2 = cos(2\theta)$ se puede expresar así : $r^2 = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)$. Ahora se sustituye $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$, $\text{sen}(\theta) = \dfrac{y}{r}$, $r^2 = x^2 + y^2$, se simplifica y se obtiene :
$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

c) De $\theta = \alpha$ se tiene $\text{tg}(\theta) = \text{tg}(\alpha)$, como $\text{tg}(\theta) = \dfrac{y}{x}$ entonces $y = \text{tg}(\alpha)x$. Sea $m = \text{tg}(\alpha)$ entonces *y* = *mx*. Así $\theta = \alpha$ representa la ecuación de una recta que pasa por el origen y forma un ángulo de α radianes con el eje polar.

d) De $r = \dfrac{6}{2 - 3\,\text{sen}(\theta)}$ se obtiene $2r - 3r\,\text{sen}(\theta) = 6$, pero $y = r\,\text{sen}(\theta)$ entonces se tiene: *2r = 6 + 3y* . Elevando al cuadrado y sustituyendo $r^2 = x^2 + y^2$ se obtiene $4(x^2 + y^2) = (6 + 3y)^2$.

8.3 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL SISTEMA POLAR.

Sean $P_1(r_1,\theta_1)$, $P_2(r_2,\theta_2)$ dos puntos cualesquiera del Sistema de Coordenadas Polares (ver figura 8.4), se quiere hallar la distancia d entre los puntos P_1 y P_2.

En el triángulo OP_1P_2 de la figura se aplica el Teorema de Coseno:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2.r_1.r_2.\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

De allí que:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2.r_1.r_2.\cos(\theta_2 - \theta_1)} \qquad (8.2)$$

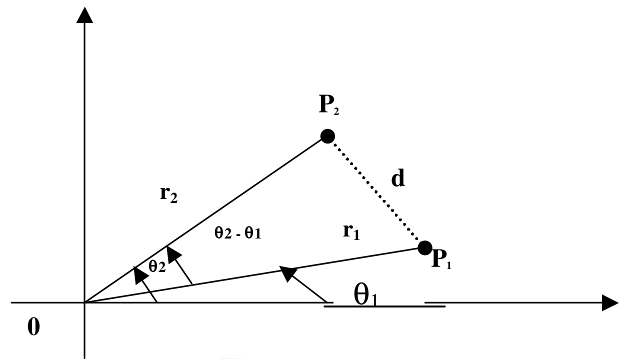
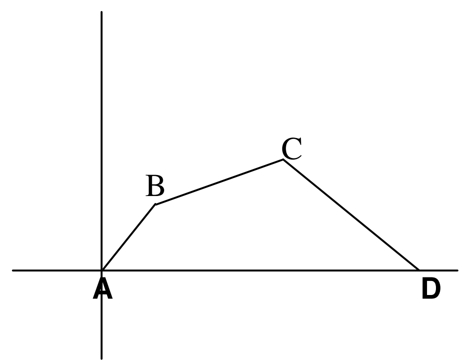


Figura 8.4

Ejemplo 8.5 Halle el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son: A(0, 20°), B(1, $\pi/3$), C(2, $\pi/4$), D(3, 0).

Solución. En la figura adjunta se muestra la ubicación de los puntos. Para hallar el perímetro del cuadrilátero ADCB se hallan las longitudes de los lados usando la fórmula (8.2):



$$\overline{AD} = \sqrt{0^2 + 3^2 - 2.0.3\cos(0 - 20^0)} = 3$$

$$\overline{DC} = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2.2.3\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)} = \sqrt{13 - 6\sqrt{2}} \approx 2{,}124787$$

$$\overline{CB} = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2.1.2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{5 - 4.\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} \approx 1{,}065972$$

$$\overline{AB} = \sqrt{0^2 + 1^2 - 2.0.1\,cos\left(\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{3}\right)} = 1.$$

Luego, el perímetro buscado mide 7,190759.

8.4 ECUACIÓN POLAR DE UNA CIRCUNFERENCIA.

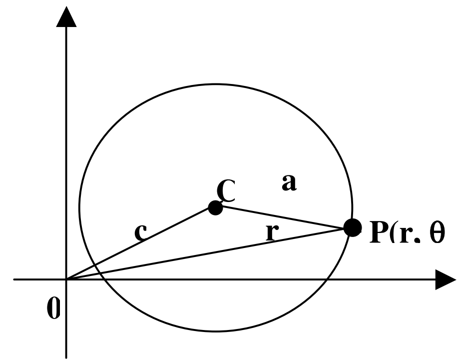
Consideremos una circunferencia de centro C(c, α) y radio a **:** sea P(r, θ) un punto de esta circunferencia, entonces la distancia del punto P al centro es :

$$a^2 = c^2 + r^2 - 2.r.c.\cos(\theta - \alpha)$$

de donde :

$$r^2 - 2.r.c.\cos(\theta - \alpha) + c^2 - a^2 = 0 \qquad (8.3)$$

La ecuación (8.3) representa la ecuación general de una circunferencia de radio a y centro C(c, α).



Casos Particulares:

i) $r^2 = a^2$ es la ecuación de una circunferencia de centro el polo y radio a. También se puede expresar así: $r = |a|$.

ii) Si la circunferencia tiene centro c(a, 0°) (sobre el eje polar), radio a y pasa por el polo su ecuación es: *r = 2a.cos(θ).*

iii) La ecuación de una circunferencia de radio a, centro $c\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ y que pasa por el polo es: *r = 2a.sen(θ).*

iv) La ecuación de una circunferencia que pasa por el polo y su centro tiene coordenadas rectangulares (a, b) es: *r = 2acos(θ)+ 2bsen(θ).*

Demostración de (iv): La ecuación rectangular de una circunferencia de centro (a, b) y que pasa por el origen es: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$, lo cual equivale a: $x^2 - 2.a.x + y^2 - 2.b.y = 0$. Se sustituyen $x = r.\cos(\theta)$ e $y = r.\text{sen}(\theta)$ en la ecuación , luego se simplifica obteniéndose : $r^2 - (2.a\cos(\theta) + 2.b.\text{sen}(\theta)).r = 0$. De allí que: *r = 0* (polo), *o* $r = 2.a\cos(\theta) + 2.b.\text{sen}(\theta)$ (ecuación pedida)

Ejemplo 8.6 Halle la ecuación de la circunferencia de centro $C\left(8, \frac{\pi}{3}\right)$ y radio 8.

Solución: En este caso a = 8, c = 8, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ lo cual se sustituye en (8.3):

$$r^2 = 2.8.r.\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + 8^2 - 8^2 = 0$$

Simplificando se obtiene: $r = 8.\left(\cos(\theta) + \sqrt{3}.sen(\theta)\right)$.

8.5 GRÁFICA DE CURVAS EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES.

La gráfica de una ecuación polar es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Para graficar la ecuación $r = f(\theta)$ se procede así:

a) Encontrar el dominio de f

b) Buscar los puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Verificar si el polo pertenece a la curva.

d) Chequear la simetría de la curva con respecto al eje polar, al eje $\pi/2$ y al polo.

En el siguiente cuadro se resumen estos criterios:

Simetría con respecto al:	**Cuando la ecuación dada no se altera al sustituir (r, θ) por:**
Eje Polar	$(r, -\theta)$, $(-r, \pi - \theta)$
Eje $\pi/2$	$(r, \pi - \theta)$, $(-r, -\theta)$
Polo	$(r, \pi + \theta)$, $(-r, \theta)$

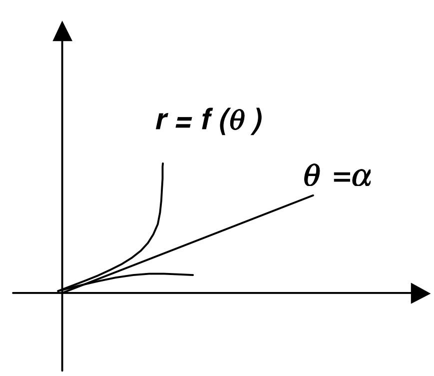
e) Extensión del lugar geométrico:

- Sí r es finito para todo θ entonces la curva es cerrada. Sí r no es finito para ciertos valores de θ, la curva no es cerrada. Para los valores de θ que hacen r complejo no hay lugar geométrico.
- Sí la curva es cerrada se buscan los extremos relativos: sí $r = f(\theta)$ es derivable, entonces los extremos relativos de r se pueden determinar usando el criterio de la primera derivada; pero se debe tener en cuenta que la distancia entre un punto P(r, θ) y el polo es $|r|$. Se sigue que los valores máximos y mínimos relativos de r conducen a puntos cuya distancia al polo es un máximo o un mínimo relativo ($r \neq 0$).

e) Tangentes en el Polo.

Sí $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$ entonces la recta $\theta = \alpha$ es una es una tangente en el polo a la gráfica $r = f(\theta)$: cuando $\theta \to \alpha$ entonces $r \to 0$

Una curva polar puede tener más de una tangente en el polo.



f) Finalmente se construye una tabla de valores.

Ejemplo 8.7 Graficar la curva cuya ecuación polar es $r = 1 + \cos(\theta)$.

Solución: Sea $r = f(\theta) = 1 + \cos(\theta)$. Siguiendo los pasos anteriores:

a) Intersecciones con los ejes:

θ	0	π / 2	π	3π / 2	2π
r	2	1	0	1	2

b) Para verificar si el polo pertenece al gráfico de la curva se hace $r = 0$ entonces: $1 + \cos(\theta) = 0$, de allí que $\theta = \pi$. Por lo tanto el polo si pertenece al gráfico.

c) Simetrías:

c.1- Con respecto al eje polar: en $r = 1 + \cos(\theta)$ se sustituye (r, θ) por $(r, -\theta)$ obteniéndose $r = 1 + \cos(\theta)$. Observe que la ecuación no cambia, por lo tanto la curva es simétrica con respecto al eje polar.

c.2- Con respecto al eje $\pi / 2$: al sustituir (r, θ) por $(-r, -\theta)$ o por $(r, \pi - \theta)$ la ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ cambia . Por lo tanto la gráfica no es simétrica con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$.

c.3- Con respecto al polo: al sustituir (r, θ) por $(-r, \theta)$ ó por $(r, \pi + \theta)$ fallan ambas condiciones, por lo que no existe simetría respecto al polo.

d) Extensión del lugar geométrico : sea $r = 1 + \cos(\theta)$ entonces $\frac{dr}{d\theta} = -\operatorname{sen}(\theta)$.

$\frac{dr}{d\theta} = 0$ sí $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, así los puntos críticos son $(0, \pi)$, $(2, 0)$. Otra forma de hacerlo es la siguiente: como $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ entonces $0 \leq 1 + \cos(\theta) \leq 2$, es decir, $0 \leq r \leq 2$, los valores de *r* son finitos por lo tanto la curva es cerrada.

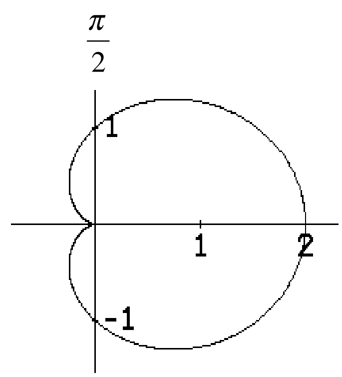
f) Tangentes en el polo: hacer $r = 1 + \cos(\theta) = 0$, de allí que $\theta = \pi$.

g) Construir una tabla de valores**.** Como la gráfica es simétrica con respecto al eje polar se construye una tabla con los valores entre [0, π]:

θ	0	π/12	π/6	π/4	π/3	5π/12	π/2	105°	2π/3	5π/6	11π/12	π
r	2	1.97	1.87	1.70	1.5	1.26	1	0.74	0.5	0.13	0.03	0

Observe que el máximo valor que puede tomar r es 2, y que cuando θ se acerca a 180° los valores de r tienden a cero.

h) La gráfica de la curva se muestra a la derecha :



8.6 CURVAS POLARES ESPECIALES.

8.6.1) Caracoles o Limazón: $r = a \pm b.\cos(\theta)$, $r = a \pm b.\text{sen}(\theta)$ $a, b > 0$

La gráfica de $r = a \pm b.\cos(\theta)$ es simétrica con respecto al eje polar, y la de $r = a \pm b.\text{sen}(\theta)$ tiene simetría con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$.

Tipos de Caracoles:

a) Limazón con rizo interno: a < b. La gráfica tiene dos tangentes en el polo. (Figura 8.6)
b) Limazón sin rizo interno: a = b. También se les llama corazones, cardioides. La gráfica tiene una tangente en el polo. (Figura 8.5)
c) Si a > b entonces la gráfica no tiene tangentes en el polo . Además:

$1 < \frac{a}{b} < 2$ Limazón con un hoyuelo (Figura 8.7) , $\frac{a}{b} \geq 2$ Limazón conexo (Figura 8.8)

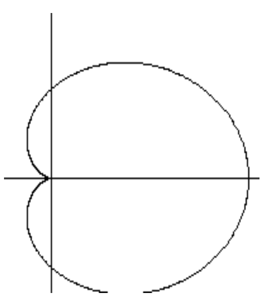


Figura 8.5

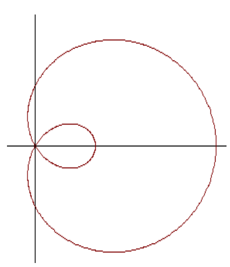


Figura 8.6

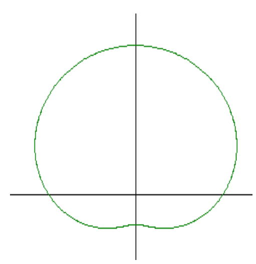


Figura 8.7

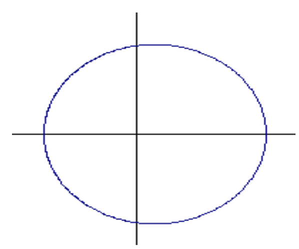


Figura 8.8

8.6.2 Lemniscatas: $r^2 = a^2.\text{sen}(2\theta)$, $r^2 = a^2.\cos(2\theta)$, $a > 0$

Al graficar una Lemniscata se debe buscar los valores de θ para los cuales r es real. La gráfica de una lemniscata tiene dos lazos.

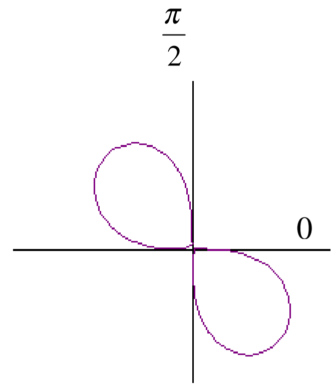
Ejemplo 8.8 Graficar $r^2 = -4.\text{sen}\,(2\theta)$

Solución: a) Como $r \geq 0$ entonces $-4.\text{sen}\,(2\theta) \geq 0$, de allí que $\text{sen}\,(2\theta) \leq 0$, lo cual se cumple cuando: $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$.

b) La curva es simétrica con respecto al polo: en $r^2 = -4.\text{sen}\,(2\theta)$ se sustituye (r, θ) por $(r, \pi + \theta)$ obteniéndose la misma ecuación.

La gráfica no es simétrica con respecto al eje polar y al eje $\pi/2$.

c) Tangente en el polo : hacer $r = 0$, esto es $r^2 = -4.\text{sen}(2\theta) = 0$ de donde $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Como la gráfica es simétrica con respecto al polo entonces $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$ también son tangentes en el polo, y además todos los valores de θ para los cuales r es real son: $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$.



d) Extremos relativos: sí $\text{sen}(2\theta) = -1$ entonces $r = 2$ y $r = -2$, luego los extremos relativos son: $\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-2, \frac{3\pi}{4}\right)$.

e) La gráfica correspondiente se muestra a la derecha

8.6.3) Rosas de n pétalos: $r = a\cos(n\theta)$, $r = a\,\text{sen}(n\theta)$, $n \in N$, $n \geq 2$

Sí n es par la rosa tiene 2n pétalos , sí n es impar la rosa tiene n pétalos.

Ejemplo 8.9 Graficar $r = 4\cos(2\theta)$.

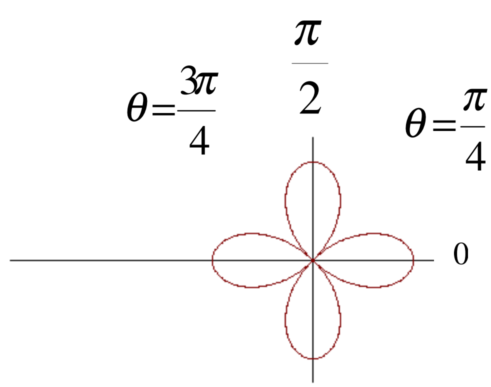
Solución: La gráfica corresponde a una rosa de 4 pétalos.

a) Para hallar los extremos relativos resolver $\frac{dr}{d\theta} = -8.\,\text{sen}(2\theta) = 0$, lo cual se cumple si $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, luego $r = 4$, $r = -4$.

b) La gráfica es simétrica con respecto al eje polar, al polo y al eje $\frac{\pi}{2}$.

c) Las tangentes en el polo son: $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \frac{5\pi}{4}$, $\theta = \frac{7\pi}{4}$

La gráfica se muestra a la derecha



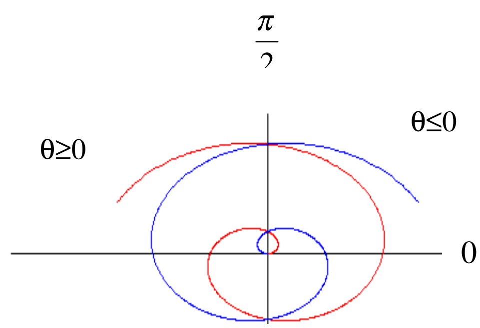
8.6.4 Espiral de Arquímedes: *$r = a.\theta$, a un número real.*

Ejemplo 8.10 Graficar $r = 2.\theta$, $\theta \in$ IR

Solución. La gráfica es simétrica con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$. Como $\theta \in$ IR, entonces θ toma valores positivos y negativos :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$-\pi/6$	$-\pi/4$	$-\pi/3$
r	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	2π	$7\pi/3$	$5\pi/2$	$8\pi/3$	3π	$-\pi/3$	$-\pi/2$	$-2\pi/3$

La gráfica correspondiente es :



8.6.5 Otros tipos de espirales:

i) Hiperbólica: $r.\theta = a$, $\theta \in$ IR.

ii) Exponencial: $r = e^{\theta}$

iii) Parabólica: $(r-a)^2 = b\theta$, $a, b \in$ *IR*.

8.7 PENDIENTES Y TANGENTES.

No debe caerse en el error de que $\frac{dr}{d\theta}$ es la pendiente de la recta tangente de una curva polar de ecuación *$r = f(\theta)$*. A continuación se ilustra esta situación:

Sea $r = 1+\cos(\theta)$, entonces $\frac{dr}{d\theta} = -\operatorname{sen}(\theta)$; en el punto (2, 0°) se cumple que $\frac{dr}{d\theta} = 0$, lo que significa que la recta tangente es horizontal, lo cual es falso pues en el punto (2, 0°) la recta tangente es vertical (ver gráfica del ejemplo 8.7). Por tanto $\frac{dr}{d\theta}$ no representa la pendiente de la recta tangente a una curva polar. A continuación se explica como hallar la pendiente de la recta tangente a la curva polar *$r = f(\theta)$* en cualquier punto (*r, θ*) , l as ecuaciones paramétricas de una curva polar son:

$$x = f(\theta).\cos(\theta) \quad , \quad y = f(\theta).\operatorname{sen}(\theta) \qquad (8.4)$$

Aplicando la fórmula 7.9 se obtiene la pendiente de la recta tangente a la curva *r = f (θ)* en cualquier punto (*r, θ*):

$$m_T = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r'\,sen(\theta) + r.cos(\theta)}{r'\,cos(\theta) - r.sen(\theta)} \qquad (8.5)$$

Ejemplo 8.11 Halle la pendiente de la recta tangente a la curva $r = 1 + \cos(\theta)$ en el punto donde $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Solución: Aplicando la fórmula (8.5) se tiene: $m_T = \dfrac{-\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos(\theta) + \cos^2(\theta)}{-2.\operatorname{sen}(\theta).\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)}$

Evaluando en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ se tiene $m = \dfrac{-\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$.

8.8 ECUACIONES EQUIVALENTES.

Dos ecuaciones diferentes que representan el mismo lugar geométrico se llaman ecuaciones equivalentes. Sea *r = f(θ)* la ecuación polar de una curva, entonces:

$$(-1)^n.r = f(\theta + n\pi), \qquad n \in Z \qquad (8.6)$$

son sus ecuaciones equivalentes.

Ejemplo 8.12 Halle las ecuaciones equivalentes de $r = 4.\operatorname{sen}(2\theta)$.

Solución: Sí n = 1 entonces $(-1)^1.r = 4.\operatorname{sen}(2(\theta + \pi))$ es decir $r = -4.\operatorname{sen}(2\theta)$.

Con n = 2 entonces $(-1)^2.r = 4.\operatorname{sen}(2(\theta + 2\pi))$ es decir $.r = 4.\operatorname{sen}(2\theta)$.

En general: las ecuaciones equivalentes de $r = 4.\operatorname{sen}(2\theta)$ son :

$.r = 4.\operatorname{sen}(2\theta)$ con n es par

$r = -4.\operatorname{sen}(2\theta)$ con n impar.

8.9 INTERSECCIÓN DE CURVAS EN EL SISTEMA POLAR.

En el sistema de coordenadas cartesianas si se quería hallar los puntos de intersección de las curvas *y = f(x)* e *y = g (x)* se resolvía el sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ obteniéndose todos los puntos de intersección.

En el sistema de coordenadas polares se procede de manera similar, solo que a veces no se obtiene todos los puntos de intersección .

Ejemplo 8.13 Halle los puntos de intersección de las curvas $r = 2$ y $r = 4.\text{sen}(2\theta)$ **.**

Solución: a) Se verifica si el polo pertenece a ambas curvas: en este caso solo pertenece a la gráfica de $r = 4.\text{sen}(2\theta)$, por lo tanto el polo no esta en la intersección.

b) Igualando ambas ecuaciones: $2 = 4.\text{sen}(2\theta)$, se obtiene $\theta = \dfrac{\pi}{12}$ y $\theta = \dfrac{\pi}{12}$; en ambos casos $r = 2$. Así se obtienen los puntos $A\left(2, \dfrac{\pi}{12}\right)$, $B\left(2, \dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Observe que $r = 4.\text{sen}(2\theta)$ es una rosa de 4 pétalos y $r = 2$ es una circunferencia centrada en el origen por lo que tiene 8 puntos de intersección y sólo se hallaron dos puntos. Para hallar los restantes se buscan las ecuaciones equivalentes de ambas curvas, las cuales son: $\begin{cases} r = 4.\text{sen}(2\theta) \\ r = -4.\text{sen}(2\theta) \end{cases}$, $\begin{cases} r = 2 \\ r = -2 \end{cases}$ y se forman los sistemas:

$$i)\ \begin{cases} r = 4.\text{sen}(2\theta) \\ r = 2 \end{cases} \quad ii)\ \begin{cases} r = 4.\text{sen}(2\theta) \\ r = -2 \end{cases} \quad iii)\ \begin{cases} r = -4.\text{sen}(2\theta) \\ r = 2 \end{cases} \quad iv)\ \begin{cases} r = -4.\text{sen}(2\theta) \\ r = -2 \end{cases}$$

Los sistema (i) y (iv) tienen por solución la obtenida en (b). Los sistemas (ii) y (iii) son equivalentes y su solución es $D\left(2, \dfrac{7\pi}{12}\right)$, $E\left(2, \dfrac{11\pi}{12}\right)$. Aún así faltan cuatro puntos, los cuales se hallan usando la simetría de las curvas , obteniéndose:

$$H\left(2, \frac{13\pi}{12}\right),\quad I\left(2, \frac{17\pi}{12}\right),\quad J\left(2, \frac{19\pi}{12}\right),\quad K\left(2, \frac{23\pi}{12}\right).$$

En la figura (8.9) se muestra la gráfica de ambas curvas:

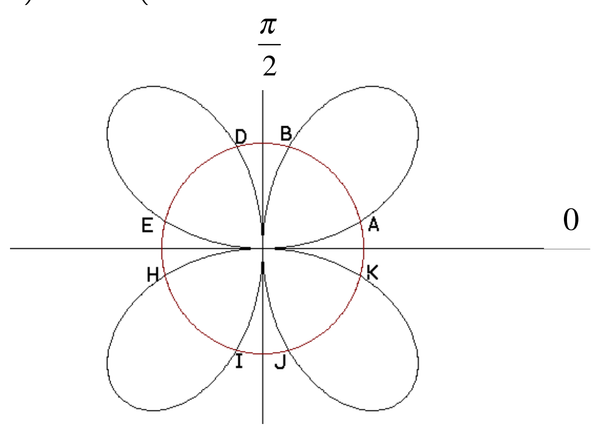


Figura 8.9

En conclusión: para hallar la intersección de las curvas $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ proceda así:

a) Grafique ambas curvas en el mismo sistema de coordenadas.
b) Verificar si el polo perteneces a ambas curvas.
c) Resolver el sistema $\begin{cases} r = f(\theta) \\ r = g(\theta) \end{cases}$. Si no se obtienen todos los puntos de intersección, utilice la gráfica.

8.10 LONGITUD DE ARCO.

Sí $r = f(\theta)$, f' continua en [a,b] entonces la longitud de la gráfica desde $\theta = a$ hasta $\theta = b$, se calcula así:

$$L = \int_a^b \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\,.d\theta \qquad (8.7)$$

(Para demostrar esto , utilice las ecuaciones paramétricas de la curva y luego aplique la fórmula 7.9) .

Ejemplo 8.14 Halle la longitud total de la curva dada:

a) $r = 4.\text{sen}(2\theta)$ b) $r = 1 + \text{sen}(\theta)$ c) $r = 2.\cos(\theta)$

Solución: a) La gráfica de $r = 4.\text{sen}(2\theta)$ es una rosa de 4 pétalos (ver figura 8.9), los cuales son congruentes, por lo que se calcula la longitud de un pétalo y el resultado se multiplica por 4:

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(4.\text{sen}(\theta))^2 + (8.\cos(2\theta))^2}\,.d\theta = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3.\cos^2(2\theta)}\,.d\theta = 38{,}75379$$

b) La gráfica de $r = 1 + \text{sen}(\theta)$ es un corazón simétrico con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$:

$$L = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 + sen(\theta))^2 + \cos^2(\theta)}\,.d\theta = 2.\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + sen(\theta)}\,.d\theta = 8$$

c) La gráfica de $r = 2.\cos(\theta)$ es una circunferencia cuyo centro esta sobre el eje polar y es tangente al polo. Sí $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ entonces $r \geq 0$, por lo que se forma la semicircunferencia superior. Cuando $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ se tiene $r \leq 0$, formándose así la semicircunferencia interior. Por lo tanto la longitud total de esta circunferencia es:

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(2.\cos(\theta))^2 + (-2.\text{sen}(\theta))^2}\,.d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4.\cos^2(\theta) + 4.\text{sen}^2(\theta)}\,.d\theta = 4.\pi$$

8.11 ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES.

8.11.a) Sea la región R limitada por dos rectas que parten del polo: $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, y una curva continua de ecuación $r = f(\theta)$, con $\theta \in [\alpha, \beta]$. (Ver figura 8.10). Sea P una partición de $[\alpha, \beta]$ definida por:

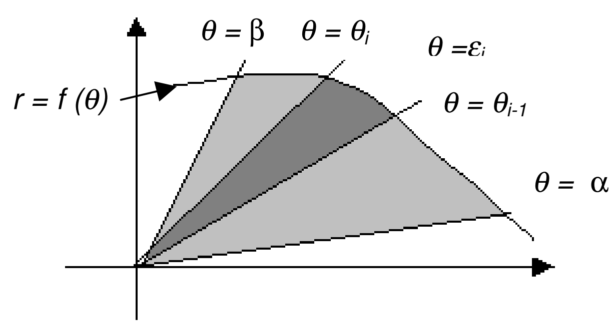


Figura 8.10

$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{i-1} < \theta_i \prec ... < \theta_n = \beta$. Así se tienen n subintervalos de la forma: $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, *i = 1, 2, 3, ..., n.* Se forman n regiones, donde la i- ésima región R_i es un sector circular limitado por las rectas $\theta = \theta_{i-1}$, $\theta = \theta_i$ y la gráfica de *r = f(θ)*; este sector tiene ángulo central $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ y radio $r_i = f(\varepsilon_i)$, ε_i entre θ_{i-1} y θ_i, por lo tanto su área es igual a : $\Delta A_i = \frac{1}{2}(f(\varepsilon_i))^2.\Delta\theta_i$, *i = 1, 2, 3, ..., n.* La suma de las medidas de las áreas de estos n sectores circulares es: $\sum_{i=1}^{n}\Delta.A_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(f(\varepsilon_i))^2.\Delta\theta_i$. Tomando límite cuando $\| P \| \to 0$ se tiene :

$$A = \lim_{\|P\|\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\right) = \lim_{\|P\|\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(f(\varepsilon_i))^2.\Delta\theta_i\right)$$

Luego el área A es el área de la región $\Re$ es : $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(f(\theta))^2.d\theta$ (8.8)

La integral (8.8) permite calcular el área de una región limitada por las rectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y la gráfica de *r = f (θ).*

Ejemplo 8.15 Calcular el área de la región limitada por la gráfica de $r = 4.\text{sen}(2\theta)$**.**

Solución: En la figura 8.9 se muestra la gráfica de $r = 4.\text{sen}(2\theta)$, que corresponde a una rosa de 4 pétalos, por lo que se calcula el área de un pétalo y se multiplica por 4:

$$A = 4.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4.sen(2\theta))^2.d\theta = 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(\ 2\theta\ ).d\theta = 8\pi$$

Ejemplo 8.16 Sea la región limitada por la gráfica de $r = 1 - 2.\text{sen}(\theta)$. Calcule:

a) Área del rizo interno. b) Área del rizo externo.

c) Área de la región situada entre el rizo interno y el rizo externo.

Solución: La gráfica de $r = 1 - 2.\text{sen}(\theta)$ se muestra en la figura 8.11.

a) Las tangentes en el polo son $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$. El rizo interno se genera cuando θ varía entre $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$, por lo tanto el área del rizo interno se calcula así:

$$A_i = \frac{1}{2}.2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1 - 2.sen(\theta))^2.d\theta = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

b) El rizo externo se genera cuando θ varía entre $\frac{5\pi}{6}$ y $\frac{13\pi}{6}$, luego:

$$A_E = \frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}} (1-2.sen(\theta))^2 .d\theta = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

c) El área A de la región situada entre el rizo interno y el rizo externo viene dada por:

$$A = A_E - A_I = \pi + 3\sqrt{3}$$

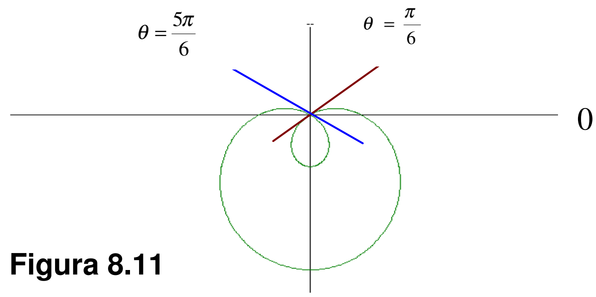
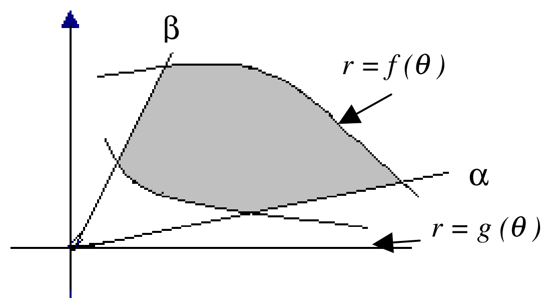


Figura 8.11

8.11b) Ahora se calcula el área A de la región $\Re$ limitada por las rectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y las gráficas de las curvas de ecuación $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, f y g continuas para todo $\theta \in [\alpha, \beta]$
(ver figura de la derecha).



El área A de la región $\Re$ se calcula así:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 .d\theta - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (g(\theta))^2 .d\theta$$

Lo cual equivale a: $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left[(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2\right] d\theta$ (8.9)

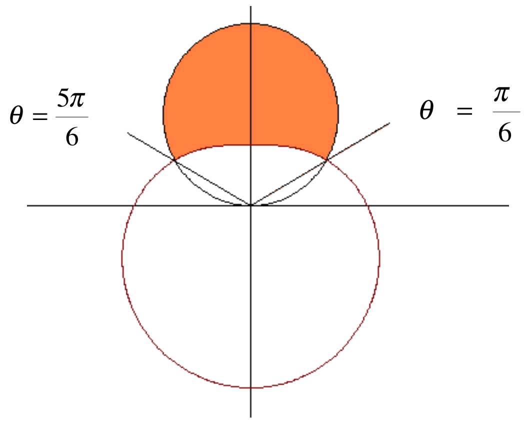
Ejemplo 8.17 Calcule el área de la región $\Re$ que está dentro de $r = 3.\text{sen}(\theta)$ y fuera de $r = 2 - \text{sen}(\theta)$.

Solución: En la figura siguiente se muestra la región $\Re$ (sombreada). Se buscan los puntos de intersección de ambas curvas: $3.\text{sen}(\theta) = 2 - \text{sen}(\theta)$, de allí que $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Luego el área de la región sombreada se calcula así:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left[(3.sen(\theta))^2 \; - \; (2-sen(\theta))^2\right].d\theta$$

$$=\frac{1}{2}.2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(10.sen^2(\theta)+4.sen(\theta)-4\right)d\theta$$

de donde $A=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.



EJERCICIOS RESUELTOS 8.1

1) Sea el punto $A\left(9,\dfrac{8\pi}{3}\right)$. a) Halle las coordenadas del par principal.

b) Halle las coordenadas rectangulares. Halle el simétrico del punto A con respecto al eje polar, eje $\dfrac{\pi}{2}$, polo.

c) Halle la ecuación polar de la circunferencia de centro en el punto A y que pasa por el polo.

Solución: a) El par principal tiene coordenadas $\left(9,\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

b) Para hallar las coordenadas rectangulares se usan las ecuaciones (8.1):

$$x=9.\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)=-\frac{9}{2} \qquad , \qquad y=9.sen\left(\frac{8\pi}{3}\right)=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Así las coordenadas rectangulares del punto A son $\left(-\dfrac{9}{2},\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) El simétrico del punto $A\left(9,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ con respecto al Eje polar es $A_1\left(9,\dfrac{4\pi}{3}\right)$, al Eje $\dfrac{\pi}{2}$ es $A_2\left(9,\dfrac{\pi}{3}\right)$ y al Polo es $A_3\left(9,-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

d) La circunferencia pasa por el punto A y el polo, por lo tanto, tiene radio 9. Luego su ecuación polar es: $r^2+81-2.9.r.\cos\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)=81$, de donde $r=18.\cos\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

2) Halle la longitud de la curva en el intervalo señalado:

a) $r=e^{\theta}$ $\quad\theta\in[0,1]$, $\qquad$ b) $r=2\theta$ $\quad\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Solución: a) La gráfica de $r = e^{\theta}$ es una espiral:

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(e^{\theta}\right)^2 + \left(e^{\theta}\right)^2}\,.d\theta = \sqrt{2}\int_0^1 e^{\theta}\,.d\theta = \sqrt{2}(e-1)$$

b) La gráfica de $r = 2\theta$ se muestra en el ejemplo 8.10 y la longitud pedida es :

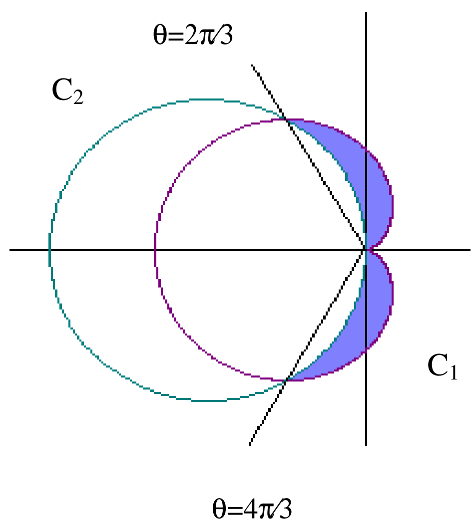
$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4.\theta^2 + 4}.d\theta = 2\int_0^1 \sqrt{\theta^2 + 1}.d\theta = \frac{\pi}{4}\sqrt{\pi^2 + 4} + Ln\left(\frac{\pi + \sqrt{\pi^2 + 4}}{2}\right)$$

3) Calcule la longitud total de la curva $r = 2 - 2.\cos(\theta)$.

Solución: La gráfica de $r = 2 - 2.\cos(\theta)$ es un corazón cuya gráfica es simétrica con respecto al eje polar, por lo tanto se calcula la longitud de la curva comprendida entre θ=0 y θ=π :

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\left(2 - 2.\cos(\theta)\right)^2 + \left(2.sen(\theta)\right)^2}\,.d\theta = 2\sqrt{8}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos(\theta)}.d\theta$$

4) Halle el área de la región interior a $C_1 : r = 2 - 2.\cos(\theta)$ y exterior a $C_2 : r = -6.\cos(\theta)$.



Solución: En la gráfica de la derecha la región sombreada corresponde al área pedida.

Los puntos de intersección de ambas curvas son $\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$. El área sombreada de la figura 8.12 viene dada por:

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(2 - 2.\cos(\theta)\right)^2.d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(-6\cos(\theta)\right)^2.d\theta\right]$$

4) Sean las curvas $c_1 : r^2 = \cos(2\theta)$, $c_2 : r^2 = \text{sen}(2\theta)$. Halle el área de la región dentro de c_2 y fuera de c_1.

Solución:

La región se muestra en la figura 8.12

Para hallar los puntos de intersección de ambas curvas se igualan ambas ecuaciones : $\cos(2\theta) = \text{sen}(2\theta)$, de allí que: $\theta = \dfrac{\pi}{8}$, $\theta = \dfrac{9\pi}{8}$.

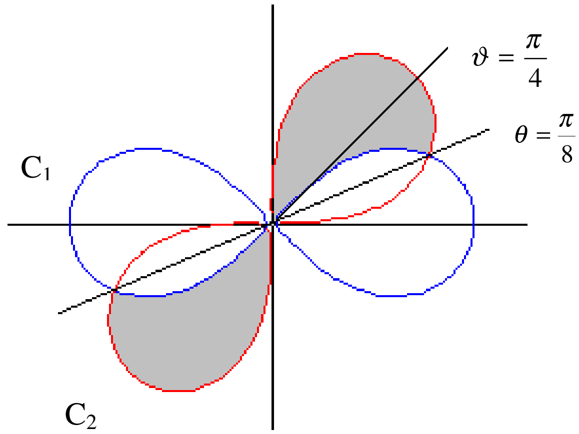


Figura 8.12

Luego el área es igual a :

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} sen(2\theta).d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta).d\theta\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 8.1

1. Grafique los puntos dados en el Sistema de Coordenadas Polares y encuentre las coordenadas rectangulares.

   a) $\left(3, 3\pi/2\right)$ b) $\left(-2, 2\pi/3\right)$ c) $\left(1, -\pi/3\right)$ d) $\left(-2, 7\pi/6\right)$

2. Encuentre dos representaciones en coordenadas polares, una con r>0 y la otra con r<0, de los puntos con las siguientes coordenadas rectangulares.

   a) $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ b) $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ c) $(2,2)$

3. Escriba la ecuación polar de:

   a) Rosa de cuatro pétalos tal que el valor máximo de *r* es 3.
   b) Una circunferencia cuyo diámetro tiene extremos (5, 15°) y (-5, 15°).
   c) Recta que pasa por el polo y tiene pendiente 2.

4. Halle la ecuación rectangular de las siguientes ecuaciones polares:

a) $r^2 = \cos(2\theta)$ b) $r = 4.\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ c) $r = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cos(\theta)$

5. Halle las tangentes en el polo:

a) $r = 3.\text{sen}(\theta)$ b) $r = 3.(1 - \cos(\theta))$ c) $r = 2.\cos(3\theta)$

d) $r^2 = 4.\cos(2\theta)$ e) $r = 3.\text{sen}(\theta)$ f) $r = 3.\text{sen}(2\theta)$

6. Halle la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

a) $r = 1 - \cos(\theta)$, $A\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. b) $r = 1 + \text{sen}(\theta)$, $B\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$.

7. Graficar las siguientes curvas:

a) $r = 3 + 2.\text{sen}(\theta)$ b) $r = 3 + 3.\text{sen}(\theta)$ c) $r^2 = -4.\cos(2\theta)$

d) $r^2 = 5.\text{sen}(2\theta)$ e) $r = e^{\theta}$ f) $r = \frac{1}{\theta}$

g) $r = 2 + 4\cos\theta$ h) $r = 1 + \cos\theta$ i) $r^2 = -4sen2\theta$

j) $r = 5\cos 3\theta$ k) $r = 2sen\theta + 2\cos\theta$

8. Halle los puntos de tangencia vertical y horizontal.

a) $r = 2.(1 - \cos(\theta))$ b) $r = 4 + 4.\text{sen}(\theta)$ c) $r = 2\cos ec(\theta)$

9. En cada caso, halle los puntos de intersección.

a) $\begin{cases} 2.r = 3 \\ r = 3.\text{sen}(\theta) \end{cases}$ b) $\begin{cases} r = 4\theta \\ r = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} r = \cos(\theta) - 1 \\ r = \cos(2\theta) \end{cases}$ d) $\begin{cases} r = 3\sqrt{3}\cos\theta \\ r = 3sen\vartheta \end{cases}$

10. Halle el área de la región indicada:

a) Región dentro de $r^2 = a^2.\cos(2\theta)$ y fuera de $r^2 = a.\sqrt{2}.\text{sen}(\theta)$

b) Región dentro de $r = a.\sqrt{2}.\text{sen}(\theta)$ y fuera de $r^2 = a^2.\cos(2\theta)$

c) Región dentro de $r = a.\sqrt{2}.\text{sen}(\theta)$ y fuera de $r^2 = -a^2.\cos(2\theta)$

d) Región interior a $r = 3 + 3.\cos(\theta)$ y exterior a $r = 3 + 3.\text{sen}(\theta)$

11. Demuestre que el área acotada por las curvas $r = a.\text{sen}(\theta)$ y $r = 2.b.\cos(\theta)$, $a, b > 0$ es: $A = \frac{1}{2}.\pi.b^2. - a.b + \left(a^2 - b^2\right)\alpha$, $\alpha = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$

12. Halle el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son: $A(0{,}19^o)$, $B(1, \pi/3)$, $C(2, \pi/4)$, $D(3{,}0^o)$.

13. Determine si los puntos $P_1(3, \pi/6)$, $P_2(7, \pi/3)$, $P_3(3, \pi/2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

14. Dos vértices de un triángulo equilátero son $(0, 73^o)$ y $(1, \pi)$, halle las coordenadas del otro vértice.

AUTOEVALUACIÓN Nº 8

1) Escriba la ecuación polar de las siguientes curvas:

a) Recta que pasa por el punto $A\left(8, \frac{2\pi}{3}\right)$ y por su simétrico con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$.

b) Circunferencia de centro (4, π) y tangente al polo.

c) Recta de pendiente –1 y pasa por el punto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

2) Sean $C_1 : r^2 = -\cos(2\theta)$, $C_2 : r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

a) Halle la ecuación rectangular de C_1.

b) Halle todos los puntos de intersección de C_1 y C_2.

c) Determine las simetrías que posea C_1.

d) Halle el área de la región dentro de C_2 y fuera de C_1.

e) Calcule la longitud total de la curva C_1.

3) Escriba la ecuación rectangular de las siguientes curvas polares:

a) $(3 - \text{sen}(\theta - \pi)).\, r = 2$

b) $r = -\sqrt{2}\cos(2\theta)$

c) $r = 3\cos(\theta) + \frac{1}{2}\text{sen}(\theta)$

d) $r = \sec(2\theta)$