Universidad Politécnica
“Antonio José de Sucre”
Vicerrectorado Puerto Ordaz
Departamento de Estudio Generales
Cátedra de Matemáticas II
Prof. Mariela Lezama.

GUÍA DE EJERCICIOS PARA INTEGRALES DEFINIDAS.

1. Calcule la integral definida de cada función dada en el intervalo indicado. usando la suma de Riemann. Además.

Mediante un análisis de la gráfica de cada función en el intervalo dado. Diga si el resultado obtenido por la integral definida en el inciso a) representa el área de la región definida.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 2;$ [-2,2] $\quad Resp.\ \frac{-8}{3}$
b) $f(x) = x^3 + 2x;\ [-2,1] \quad Resp. \frac{-27}{4}$
c) $f(x) = -mx;\ \ m > 0;\ \ x = a\ \ x = b;\ \ b > a > 0$
d) $f(x) = 3x^2 - 1;\ [0,2] \quad Resp. 6$
e) $f(x) = x^2 + 2x + 1;\ [-1,2] \quad Resp.\ \frac{64}{3}$
f) $f(x) = 3x^4;\ [0,1]; \quad Resp.\ \frac{3}{5}$
g) $f(x) = 2\sqrt{x};\ [0,4]; \quad Resp.\ \frac{32}{3}$
h) $f(x) = (x + 3)^2;\ [-3,0]; \quad Resp.\ 9$
i) $f(x) = 2 - |x|;\ [-2,2]; \quad Resp. 4$

2. En los siguientes casos calcule $\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n} f(C_i))\Delta_i x$

j) $f(x) = \sqrt{x};\ \ y = 0,\ x = 0;\ \ x = 2;\ \left(usar\ C_i = \frac{2i^2}{n^2}\right)$
k) $f(x) = \sqrt[3]{x};\ \ y = 0,\ x = 0;\ \ x = 2;\ \left(usar\ C_i = \frac{i^3}{n^3}\right)$
l) $f(x) = \frac{1}{x}; y = 0;\ \ x = 1;\ \ x = 6$
m) $f(x) = |x - 1|;\ \ y = 0;\ \ x = 1;\ \ x = 6$
n) $f(x) = 2 - |x|;\ \ y = 0;\ \ x = -2;\ \ x = 2$

3. Usando el 2do teorema fundamental, calcule: la siguientes integrales

o) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$
p) $\int_{0}^{0.53} \frac{arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$
q) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{(1+x^2)^4} dx$
r) $\int_{-1}^{2} (x - 1)\sqrt{2 - x}dx$
s) $\int_{-2}^{1} \sqrt{\frac{-21}{x}} dx$
t) $\int_{0}^{1/2} \frac{x-\sqrt{arctg(2x)}}{1+4x^2} dx$
u) $\int_{1/2}^{2} \left|\frac{ln(x)}{x}\right| dx$
v) $\int_{0}^{2} \sqrt{x}\sqrt{1 + x\sqrt{x}}dx$

$a) \int_{-3}^{3}\sqrt{3+|x|}dx$ $b) \int_{-1}^{1}\sqrt{|x|-x}\ dx$ $c) \int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$

$d) \int_{-1}^{4}\frac{|x-1|}{x+3}dx$ $e) \int_{0}^{1}(y+1).\sqrt{1-y}\ dy$ $f) \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{tg(x)}}{1-sen^2(x)}dx$

4. Realice un análisis de las siguientes afirmaciones. Y Decida si verdaderas o falas. Justifique su respuesta.

   a. *Si* $\int_a^a f(x)dx = 0$ *entonces* $f(a) = 0$.
   b. *Si* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ *entonces* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$.
   c. *Si* $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$.
   d. *Si f y g son funciones continuas en* $[a,b]$ *entonces* $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *es integrable en* $[a,b]$.
   e. *Si f es un función impar y continua en* $[-a,a]$ *entonces*
   f. $\int_{-a}^{a}(b+f(x))dx = -2ab$.
   g. *El valor de* $\int_1^1 \frac{1}{1-x}dx$ *es cero.*
   h. *Si F está definida por* $F(x) = \int_4^{sen(x)} arcsen(t)\,dt$, *entonces* $F'(x) = xcos(x)$.
   i. *La función F está definida por* $F(x) = sec(x)$ *es integrable en* $[0,\pi]$
   j. $\|P\| = \frac{b-a}{n}$
   k. $\frac{b-a}{n} \leq \|P\|$
   l. *Si* $n \to +\infty$ *entonces* $\|P\| \to 0$.
   m. *Si* $\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|$ *, entonces* $\|P\| \geq \Delta x_i$ *, para todo* $i = 1,2,\ldots, n$.
   n. $\|P\| \to 0$ *entonces el número de sub-intervalos de la partición tiende a infinito.*
   o. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_{i-1}) = a_0 + a_n + 2\sum_{i=1}^{n-1}a_i$

5. Expresar los siguientes límites como una integral definida.

$a) \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2(n^2-i^2)}{n^5}\right)$ $b) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ln\left(a+\frac{i}{n}\right)\right)$ $c) \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(n^2+i^2)^{-1/2}\right)$

$d) \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{sen\left(\frac{i}{n}\right)}{n+1}\right)$ $e) \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{7i^2}{n^3}+\frac{9}{n}\right)$ $f) \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{1+2n+2n^2}\right)$

6. Hallar el valor promedio de cada función en el intervalo dado, además encuentre todos los valores de x donde la función es igual a su promedio.

$f(x)=4-3x^2; \quad x\in[-2,2]$

$f(x)=(x^2-1)^2 \qquad x\in[-1,3]$

$f(x)=x\sqrt{4-x^2} \quad x\in[0,2]$

$f(x)=senx; \quad x\in[0,\pi]$

$f(x)=\cos\pi x; \quad x\in\left[0,\pi/2\right]$

$f(x)=2x\sqrt{x} \quad x\in[0,4]$

7. Hallar la derivada de la función F(x).

$$a)F(x)=\int_{x^3}^{x^2}\sqrt[4]{1+t^3}\,dt; \quad b)F(x)=\int_{a}^{senx}\frac{dt}{arcsent}$$

$$c)F(x)=\int_{0}^{\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2}; \quad d)\int_{2}^{\frac{1}{\cot x}}(t^3+t)\,dt$$

8. A partir de las siguiente ecuaciones utilice los teoremas fundamentales para halla lo que se indica.

a) Sí $\int_{-2}^{\frac{1}{\cot x}} f(t)dt=\frac{1}{2}\ln\left|sen(2x)+tg(2x)\right|$ Hallar $f(\frac{\pi}{2})$

b) Sí $\int_{0}^{x^2+4x} f(t)dt=2x+3$ Hallar $f(12)$

c) Sí $\int_{3}^{tgx} f(t)dt=g(x)$ y $f(x)=\frac{-1}{1+x^2}$ Hallar $g(x)$

d) Sí $\int_{0}^{senx} f(t)dt=g(x) \quad y \quad f(x)=\sqrt{1-x^2}; \quad hallar.g(\pi)$

9. Demuestre que el área de la región limitada por la gráfica de la función f(x)= px2 + qx + r, f(x) ≥ 0 para todo x∈[0, b] , y las rectas x = 0 , y = 0 , x = b es:

$$p\frac{b^3}{3}+q\left(\frac{b^2}{2}\right)+rb$$

.

10. Use la definición de integrales definidas para demostrar que el área de un triángulo de base b y altura h es $\frac{b.h}{2}$.

11. Aplique la propiedad de acotamiento de la integral definida para hallar un intervalo cerrado que contenga el valor de la integral definida dada.

$a)\quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{sen} x}.dx \qquad b)\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos^3 x - 9\cos x\right)dx \qquad c)\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\operatorname{sen}^3 x.dx$

12. Si f es continua en [a, b], demuestre que $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right|.dx$

13. En cada caso, halle el valor promedio de la función *f* en el intervalo dado. Además,

14. Halle los valores de x donde f(x) sea igual a valor Promedio.

$a)\quad f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}, \qquad x \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right] \quad , b)\quad f(x) = x^2 - 2x + 1, \qquad x \in [0,1]$

15. Sea *f* una función continua en [-2, 2], f par y *f* no negativa en [-2, 2], y *g* una Función continua e impar en [-2, 2]. Si $\int_0^2 f(x)dx = 5$, halle:

a) $\int_{-2}^{2} \left[\,|f(x)| + 3g(x)\right]dx$ b) $\int_{-2}^{2} \left(f(x).g(x)\right)dx$

16. Sea *f* continua para todo *x* tal que $\int_0^x f(t).dt = -\dfrac{1}{2} + x^2 + x.sen(2x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$,

Para todo x. Calcular $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

17. Supongamos que f, *g* son funciones continuas en [a, b] tales que $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$ para todo x∈[a, b]. Responda las siguientes preguntas, justificando su respuesta.

a) ¿ Se deduce que $\int_a^b \left(f(x) - g(x)dx\right) > 0$? b) ¿ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| > \left|\int_a^b g(x)dx\right|$?

c) ¿Se deduce que f (x)>g (x), para todo x ∈ [a, b]? d) ¿ $\int_a^b |f(x)|dx > \int_a^b |g(x)|dx$?

18. La temperatura diaria en grado Fahrenheit en cierta ciudad, t meses después del 15 de Julio, viene dada por: $T(t) = 61 + 18\cos\left(\dfrac{\pi\, t}{6}\right)$. Encuentre la temperatura promedio entre el 15 de septiembre y el 15 de diciembre.

19. Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^4 \left|x^2 - 4x + 3\right| dx$ b) $\int_{-4}^{4} |x-2|\, dx$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{1+(\cos x)^2}\, dx$

d) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} |x - \operatorname{tg}(x)|\, dx$

e) $\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen}(x) - \cos(x)|\, dx$

f) $\int_{-2}^{4} \left|\frac{x+1}{x+6}\right| dx$

g) $\int_{-2}^{2} x|x-2|\, dx$

h) $\int_0^1 \left(x^2+4x\right)\sqrt{x^3+6x^2+1}\, dx$

i) $\int_0^{\pi} \frac{3\cos(y)}{(\operatorname{sen} y)^2+\operatorname{sen} y+2}\, dy$

j) $\int_0^{0.5} \frac{3\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

k) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{(1+x^2)^4}\, dx$

l) $\int_1^2 (x-1)\sqrt{2-x}\, dx$

m) $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\, dx$

n) $\int_{-2}^{1} \sqrt{\frac{-21}{x}}\, dx$

20. Sin calcular el valor de la integral, y luego halle $F'(x)$:

a) $F(x)=\int_{-2}^{x^2+1}\left(t^2-2t+5\right)dt$

b) $F(x)=\int_{2x}^{5}\sqrt{t^2+2}\,dt$

c) $F(x)=\int_{x}^{x^3}\sqrt{1+s^2}\,ds$

d) $F(x)=\int_{2}^{\operatorname{sen}(x)}\sqrt{1-t^2}\operatorname{sen}(t)\,dt$.

21. Calcule $f(2)$ sabiendo que f es continua para $x\geq 0$ y que:

$$\int_0^{f(x)} t^2\,dt = x^2(1+x)$$

22. Sea f continua para cualquier x tal que:

$$\int_0^x f(t)dt = -\frac{1}{2}+x^2+x\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{2}\cos(2x).$$ Calcule: $f\left(\pi/4\right)$, $f'\left(\pi/4\right)$

23. Sea F definida por $F(x)=\int_4^{x^2}\ln\left(t^3+4\right)dt$, halle la ecuación de la recta tangente a la curva en $x=2$.

24. Para F definida por $F(x)=\int_{-1}^{x}\ln\left(t^2+2t+2\right)dt$, halle la ecuación de la recta tangente en $x=-1$.

25. Halle el valor promedio de la función dada en el intervalo dado. Luego, halle todos los valores de x donde $f(x)$ iguala a su promedio.

e) $f(x)=4-x^2,\quad x\in[-2,2]$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2},\quad x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$

26. Cierto día, la temperatura t horas después de la medianoche era:

$$T(t)=80+10\,sen\left(\frac{\pi}{12}(t-10)\right)$$

¿Cuál era la temperatura promedio entre el mediodía y las 6 de la tarde?

27. La intensidad de una corriente alterna de un circuito eléctrico viene dada por: $I(t)=2\operatorname{sen}(60\pi t)+\cos(120\pi t)$, donde I se mide en amperios, t en segundos. Calcule la corriente promedio para los siguientes intervalos de tiempo:

f) $0 \le t \le \frac{1}{60}$ b) $0 \le t \le \frac{1}{240}$ c) $0 \le t \le \frac{1}{30}$

28. Demuestre que f definida por $f(x) = \int_{2x}^{5x} \frac{dt}{t}$ es constante en $(0, +\infty)$.

29. Sabiendo que : f es una función impar , g es una función par en $[-1, 1]$, y $\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 g(x) dx = 3$. Calcule:

a) $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ b) $\int_{-1}^{1} g(x)\, dx$ c) $\int_{-1}^{1} (f(x))^3 g(x)\, dx$ d) $\int_{-1}^{1} (f(x) + g(-x))\, dx$

30. Decida si las siguientes proposiciones son verdaderas y cuales falsas:

g) Sí $\sum_{i=1}^{10} a_i^2 = 100$ y $\sum_{i=1}^{10} a_i = 20$ entonces $\sum_{i=1}^{10} (a_i + 1)^2 = 150$.

h) Sí f es una función continua tal que $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)\, dx \ge 0$.

i) Sí $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

j) Sí $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in [-a, a]$ y f es integrable en $[-a, a]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

k) Sí $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [0, b]$ entonces $\int_0^b f(x)\, dx = F(b)$.

l) Sí $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ entonces:

i) $\int_a^b |f(x)| dx \le \int_a^b |g(x)|\, dx$ ii) $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \left| \int_a^b g(x)\, dx \right|$

m) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$.

n) Sí $\int_a^b f(x)\, dx \ge 0$ entonces $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a, b]$.

o) Sí $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \ge 0$ entonces $f(x) \ge g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

p) Sí f es acotada en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$.

q) Sí $\int_a^b (f(x))^2\, dx = 0$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

r) Sí $F'(x) = G'(x)$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

s) La función $f(x)=\dfrac{senx}{x}+\cos x$ es integrable en $\left[\pi/2,\pi\right]$.

t) Sí f no es acotada en $[a,b]$ entonces f no es integrable en $[a,b]$.

u) El valor de la integral $\displaystyle\int_{1}^{1}\frac{1}{x^2-1}\,dx$ es cero.

v) La pendiente de la recta tangente a la curva $g(x)=\int_3^{x^2}\ln\left(t^3+4\right)dt$, en el punto donde $x=3$ es $28\ln(2)$.

31. Demostrar que $\displaystyle\int_0^x |\,t\,|\;dt=\frac{1}{2}x|\,x\,|$ para todo número real x.

32. Demostrar que: $\displaystyle\int_0^x \left(t+|\,t\,|\right)^2 dt=\frac{2x^2}{3}\left(x+|x|\right)$ para todo x real.

33. Encontrar una función f y un valor de la constante c, tal que:

$$\int_0^x f(t)dt=\cos(x)-\frac{1}{2} \qquad \text{para todo x real.}$$

34. Encontrar una función f y un valor de la constante c, tal que:

$$\int_0^x t\;f(t)dt=sen(x)-x\cos(x)-\frac{1}{2}x^2 \qquad \text{para todo x real.}$$

35. Existe una función f definida y continua para todo número real x que satisface una ecuación de la forma: $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 t^2 f(t)dt+\frac{x^{16}}{8}+\frac{x^{18}}{9}+c$

Donde c es una constante. Encontrar una fórmula explícita para $f(x)$ y hallar el valor de la constante c.

36. Dada una función g, continua para todo x tal que $g(1)=5$ e $\int_0^1 g(t)dt=2$. Además se tiene que $f(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$. Demostrar que:

a) $f'(x)=x\displaystyle\int_0^x g(t)dt-\int_0^x t\,g(t)dt$ b) calcular $f''(1)$, $f'''(1)$.