UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL POLITÉCNICA
ANTONIO JOSE DE SUCRE
VICERRECTORADO PUERTO ORDAZ
DEPARTAMENTO DE ESTUDIOS GENERALES
SECCION DE MATEMÁTICA
ASIGNATURA : MATEMÁTICA II

CAPITULO 3

METODOS DE INTEGRACIÓN

Lic. ELIZABETH VARGAS

CIUDAD GUAYANA 2007

Algunas funciones se pueden integrar usando las reglas básicas dadas en el Capitulo 1, o aplicando ciertas reglas llamadas métodos de integración. Existen otras funciones que a pesar de tener primitivas, estas no se pueden hallar usando estos métodos. En este capítulo se estudiarán los métodos de integración más usuales.

3.1 INTEGRACIÓN POR PARTES.

Para calcular la integral $\int \cos(x).e^x.dx$ no se puede aplicar el método por sustitución, ni expresar la integral en la forma: $\int \cos(x).e^x.dx = \int \cos(x).dx.\int e^x.dx$. Recuerde que $\int f(x).g(x).dx \neq \int f(x).dx.\int g(x).dx$.

Para calcular este tipo de integrales se debe transformar la integral dada en otra que sea más fácil de evaluar, para ello se aplica el método de integración por partes, el cual se basa en la regla de derivación del producto de dos funciones: sean *u* y *v* funciones continuas de x, tal que sus derivadas son continuas, entonces:

$$d(uv) = u.dv + vdu \ . \qquad (3.1)$$

De allí que.

$$udv = d(uv) - vdu \qquad (3.2)$$

Integrando ambos miembros de (3.2) resulta:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (3.3)$$

La fórmula (3.3) se conoce con el nombre de ***fórmula de integración por partes***.

OBSERVACIONES: 1) De (3.1) se puede despejar *vdu*, por lo que la fórmula de integración por parte sería: $\int vdu = uv - \int udv$. Se acostumbra a usar la fórmula (3.3)

2) Para calcular una integral de la forma: $\int f(x).g(x).dx$ usando el método de integración por partes, se deben elegir *u* y *dv* , de tal manera que después de aplicar la fórmula (3.3) la integral $\int vdu$ sea fácil de calcular. Además, la obtención de *v* a partir de *dv* debe ser un trabajo sencillo.

3) Al elegir *u* y *dv* se debe tomar en cuenta que el producto *udv* debe ser igual al elemento de integración de la integral dada.

Ejemplo 3.1 Usando el método de integración por partes, halle: $\int x.\cos(x).dx$

Solución: Existen varias opciones para elegir *u* y *dv :*

a) *u = cos(x)* *dv = x.dx* *b) u = x* *dv = cos(x).dx* *c) u =xdx,* *dv =cos(x)*

Para (a) se tiene : *u = cos(x),* *dv = x.dx* entonces: $du = -\text{sen}(x).dx$, $v = \frac{x^2}{2}$.

Aplicando la fórmula (3.3): $\int x\cos(x)dx = \frac{x^2}{2}\cos(x) + \int \frac{x^2}{2} sen(x)dx$. Observe que la integral de la derecha es más "complicada" de evaluar que la integral dada (aumento el exponente de x); por lo que la elección de *u* y *dv* no es correcta.

b) Con $u = x$ y $dv = \cos(x)$ se tiene que: $du = dx$, $v = \text{sen}(x) + C_1$, luego:

$$\int x.\cos(x).dx = x.(\text{sen}(x) + C_1) - \int (\text{sen}(x) + C_1).dx$$

$$= x\text{sen}(x) + xC_1 - \int \text{sen}(x).dx + \int C_1.dx$$

$$= x\text{sen}(x) + xC_1 + \cos(x) - C_1 x + C$$

de donde: $$\int x.\cos(x).dx = x\text{sen}(x) + \cos(x) + C$$

Note que, la constante de integración C_1 , que aparece al calcular *v,* desaparece durante el proceso, por tanto no es necesario colocarla.

c) La elección $u = xdx$ y $dv = \cos(x)$, no es correcta, ya que la diferencial *dx* debe ir como un factor en la expresión para *dv*.

La habilidad para elegir *u* y *dv* se adquiere con la práctica, sin embargo existen algunas recomendaciones útiles, entre ellas se pueden mencionar:

1) En $\int x^n e^{ax} dx$, $n \in N$; hacer $u = x^n$, $dv = e^{ax}\,dx$

2) Para $\int x^n \text{sen}(ax)dx$, $\int x^n \cos(ax)dx$, $n \in N$; hacer $u = x^n$, $dv = \text{sen}(ax)dx$ (o $dv = \cos(ax)dx$, según el caso).

3) En las integrales: $\int x^n \text{Ln}(x)dx$, $\int x^n \text{arctg}(ax)dx$, $\int x^n \text{arcsen}(ax)dx$, $\int x^n \text{ar}\cos(ax)dx$, $n \in N$, tomar $dv = x^n dx$ *y* *u* el resto del integrando.

4) Para las integrales a) $\int e^{ax}\cos(bx).dx$, b) $\int e^{ax} sen(bx).dx$, tomar:

a) $u = e^{ax}$ y $dv = \cos(bx)dx$ o $u = \cos(bx)$ y $dv = e^{ax}dx$

b) $u = e^{ax}$ y $dv = \text{sen}(bx)dx$ o $u = \text{sen}(bx)$ y $dv = e^{ax}dx$

Ejemplo 3.2 Calcular $\int x^2 e^x dx$

Solución: Sea $u = x^2$ y $dv = e^x dx$, entonces $du = 2xdx$ y $v = e^x$, luego:

$$\int x^2 e^x dx = x^2.e^x - 2\int e^x.x.dx \qquad (3.4)$$

La integral $\int e^x.x.dx$ se calcula usando la fórmula de integración por partes, así para $u = x$ y $dv = e^x dx$ se tiene : $du = dx$ y $v = e^x$, luego:

$$\int x.e^x.dx = x.e^x - \int e^x.dx = x.e^x - e^x \qquad (3.5)$$

Sustituyendo (3.5) en (3.4) se obtiene: $\int x^2 e^x dx = x^2.e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

NOTA: En el ejemplo anterior, inicialmente se tomó $u = x^2$ y $dv = e^x dx$, después se eligió $u = x$, $dv = e^x dx$. Intente resolver la integral (3.5) tomando $u = e^x$ y $dv = xdx$

Ejemplo 3.3 Calcular $\int e^x .\cos(3x)dx$

Solución: Sea $u = e^x$, $dv = \cos(3x)dx$ entonces $du = e^x dx$, $v = \frac{1}{3}\text{sen}(3x)$. Luego:

$$\int e^x \cos(3x)dx = \frac{1}{3}e^x \text{sen}(3x) - \frac{1}{3}\int \text{sen}(3x).e^x dx \qquad (3.6)$$

Para calcular la integral de la derecha se aplica nuevamente la fórmula de integración por partes con $u = e^x$ y $dv = sen(3x)dx$ resultando:

$$\int \text{sen}(3x).e^x dx = -\frac{1}{3}e^x \cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x).e^x .dx \qquad (3.7)$$

Sustituyendo (3.7) en (3.6) resulta:

$$\int e^x \cos(3x)dx = \frac{1}{3}e^x sen(3x) + \frac{1}{9}e^x \cos(3x) - \frac{1}{9}\int \cos(3x).e^x.dx \qquad (3.8)$$

Observe que la integral que se está calculando aparece a la derecha de (3.8), por lo que se transpone al miembro de la izquierda, resultando:

$$\frac{10}{9}\int e^x \cos(3x)dx = \frac{1}{3}e^x \text{sen}(3x) + \frac{1}{9}e^x \cos(3x)$$

De donde: $$\int e^x \cos(3x)dx = \frac{3}{10}e^x .\left(\text{sen}(3x) + \frac{1}{3}\cos(3x)\right) + C$$

NOTA: La fórmula de integración por partes para la integral definida es:

$$\int_a^b udv = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b vdu \qquad (3.9)$$

Ejemplo 3.4 Evaluar $\int_1^2 xLn(x).dx$

Solución: Haciendo *u = Ln(x)* y *dv = xdx* se tiene: $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^2}{2}$, luego:

$$\int_1^2 xLn(x).dx = \frac{x^2}{2}Ln(x)\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx = \frac{1}{2}\left(4Ln(2) - Ln(1)\right) - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^2 = 2Ln(2) - \frac{3}{4} .$$

EJERCICIOS RESUELTOS 3.1

1) Calcule $\int (Ln(x))^2 dx$

Solución: Sea u =(Ln(x))^2 , dv =dx entonces du = $\frac{2Ln(x)}{x}dx$, $v = x$, luego:

$$\int (Ln(x))^2 dx = x\,(Ln(x))^2 - 2\int Ln(x)dx \qquad (3.10)$$

La integral $\int Ln(x)dx$ se calcula haciendo *u = Ln(x) y dv =dx ,* obteniéndose:

$$\int Ln(x)dx = xLn(x)-x \qquad (3.11)$$

Sustituyendo (3.11) en (3.10) se tiene: $\int (Ln(x))^2 dx$ = x (Ln(x))^2 - 2xLn(x) +2x +C.

2) Calcule $\int x^n Ln(x)dx \quad n \in N$

Solución: Sea *u = Ln(x)* y *dv = x^{n}dx* entonces $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Aplicando la fórmula de integración por partes se tiene:

$$\int x^n Ln(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}Ln(x) - \int \frac{x^{n+1}\,dx}{(n+1)x} = \frac{x^{n+1}}{n+1}Ln(x) - \int \frac{x^n\,dx}{(n+1)}$$

Luego: $$\int x^n Ln(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right) + C$$

En particular , resolviendo la integral $\int x^3 Ln(x)dx$ usando el resultado anterior se obtiene:

$$\int x^3 Ln(x)dx = \frac{x^4}{4}\left(Ln(x) - \frac{1}{4}\right) + C$$

3) Calcular $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx$

Solución: Primero se hará el cambio de variable: y =x^2 por lo que dy =2xdx. Luego:

$$\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}xdx = \frac{1}{2}\int \frac{ye^y}{(y+1)^2}dy \qquad (3.12)$$

La integral (3.12) se resuelve aplicando el método de integración por partes con u = ye^y, dv = $\dfrac{dy}{(y+1)^2}$, du = (y +1) e^y dy , $v = -\dfrac{1}{y+1}$; lo cual se sustituye en (3.12) :

$$\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{ye^y}{y+1} + \int \frac{e^y(y+1)dy}{y+1}\right] = \frac{e^y}{2(y+1)} + C \qquad (3.13)$$

Ahora se sustituye y =x^2 en (3.13) obteniéndose: $\displaystyle\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2(x^2+1)} + C$

4) Calcular $\displaystyle\int arctag(\frac{1}{z})dz$

Solución: Sea u = $arctag(\frac{1}{z})$, dv = dz entonces du = - $\dfrac{dz}{z^2+1}$, v = z. Luego:

$$\int arctag(\frac{1}{z})dz = z\, arctag(\frac{1}{z}) + \int \frac{z}{z^2+1}dz = z\, arctag(\frac{1}{z}) + 0.5Ln(z^2+1) + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 3.1

1) Calcular las siguientes integrales, usando el método apropiado.

a) $\int t.Ln(t+1)dt$

b) $\int (Ln(t))^2 dt$

c) $\displaystyle\int \frac{te^{2t}}{(2t+1)^2}dt$

d) $\displaystyle\int \frac{Ln(x)}{x^2}dx$

e) $\int (x^2-1)e^x dx$

f) $\int_1^2 Ln(x+x^2).dx$

g) $\int sen(Ln(t))dt$

h) $\int x.arctg(\sqrt{x})dx$

i) $\displaystyle\int \frac{(x-3)}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

j) $\displaystyle\int \frac{(3x-1)}{4x^2-4x+17}dx$

k) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}dx$

l) $\int x.sen(x).\cos(x).dx$

m) $\displaystyle\int arcsen\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)dx$

n) $\int x.\cos^2(x).\text{sen}(x).dx$

ñ) $\int \theta.\sec\theta.tag\theta.d\theta$

o) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2+3x}}dx$

p) $\int (arccsenx)^2 dx$

q) $\int \sqrt{x}.Ln(x).dx$

2) Calcule las integrales dadas, usando:
   a) Cambio de variable. b) Integración por partes y compare los resultados.

   i) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx$ ii) $\int 2x\sqrt{2x-3}dx$

3) Usando el método de integración por partes, demuestre las siguientes fórmulas:
   a) $\int x^n.\text{sen}(x).dx = -x^n.\cos(x) + n\int x^{n-1}\cos(x).dx$ (n entero positivo).

   b) $\int x^n.\cos(x).dx = x^n.\text{sen}(x) - n\int x^{n-1}\text{sen}(x).dx$ (n entero positivo).

4) Una fuerza de amortiguamiento afecta la vibración de un muelle de tal forma que el desplazamiento del muelle viene dado por: $y = e^{-4t}.(\cos(2t) + 5sen(2t))$. Calcular el valor medio de *y* en el intervalo $[o,\pi]$

3.2 INTEGRACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS.

En esta sección se estudian las integrales cuyos integrandos son: potencias de seno y coseno, potencias de tangente y secante, potencias de cosecante y cotangente, o productos de seno y coseno de diferentes ángulos.

3.2.1 Integrales que contienen productos de potencias de seno y coseno:

$\int \text{sen}^m(x).\cos^n(x).dx$ con m y n enteros no negativos. (3.14)

PASOS:

a) **Si el exponente del seno es impar, es decir : *m = 2k + 1,* con *k* $\in$ *Z*$^+$**

Se factoriza la potencia del sen(x) así:

$$\text{sen}^m(x) = (1-\cos^2(x))^k.\text{sen}(x) \quad (3.15)$$

Ahora se sustituye (3.15) en (3.14):

$$\int \text{sen}^m(x).\cos^n(x).dx = \int (1-\cos^2(x))^k.\cos^n(x).\text{sen}(x).dx \quad (3.16)$$

La integral (3.16) se resuelve haciendo la sustitución: *z = cos(x)*

EJEMPLO 3.5 Calcular $\int \text{sen}^5(x).\cos^{3/2}(x)dx$

Solución: El exponente de *sen(x)* es impar, por lo que se procede así:

$$\int sen^5(x).\cos^{3/2}(x)dx = \int (sen^2(x))^2.sen(x).\cos^{3/2}(x).dx = \int (1-\cos^2(x))^2.\cos^{3/2}(x).sen(x).dx$$

Hacer *z = cos(x)* , entonces *dz = -sen(x)dx* , luego:

$$\int sen^5(x).\cos^{3/2}(x)dx = -\int \left(1-z^2\right)^2 .z^{3/2}.dz \ = -\int \left(z^{2/3} - 2z^{7/2} + z^{11/2} \right).dz$$

$$= -\frac{2}{5}z^{5/2} + \frac{4}{9}z^{9/2} - \frac{2}{13}z^{13/2} + C$$

Luego: $\int sen^5(x).\cos^{3/2}(x)dx = -\frac{2}{5}\left(\cos(x)\right)^{5/2} + \frac{4}{9}\left(\cos(x)\right)^{9/2} - \frac{2}{13}\left(\cos(x)\right)^{13/2} + C$

b) Si el exponente de cos(x) es impar se procede de manera análoga al caso anterior .

Ejemplo 3.6 Calcular $\int \cos^5(x).sen^4(x)dx$ **.**

Solución. Expresar la integral de la siguiente forma:

$$\int \cos^5(x).sen^4(x)dx = \int \left(\cos^2(x)\right)^2 .\cos(x).sen^4(x).dx$$

$$= \int \left(1-sen^2(x)\right)^2 .sen^4(x).\cos(x)dx$$

Hacer *u = sen(x)* , por lo que *du = cos(x)dx* , luego:

$$\int \cos^5(x).\mathrm{sen}^4(x)dx = \int \left(1-u^2\right)^2 .u^4du = \frac{1}{5}u^5 - \frac{2}{7}u^7 + \frac{1}{9}u^9 + C$$

de donde $\int \cos^5(x).sen^4(x)dx = \frac{1}{5}(sen(x))^5 - \frac{2}{7}(sen(x))^7 + \frac{1}{9}(sen(x))^9 + C$

Sí ambas potencias son impares, se aplica uno de los dos métodos (preferiblemente descomponer la potencia menor)

c) Si m y n son pares se usan las identidades:

$$\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad\qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad (3.17)$$

EJEMPLO 3.7 . Calcular $\int sen^2(x).\cos^4(x).dx$

Solución: Tanto la potencia del sen(x) y cos(x) son pares, por lo que se usan las identidades (3.17):

$$\int sen^2(x).\cos^4(x).dx = \int sen^2(x).\left(\cos^2(x)\right)^2.dx = \int \frac{\left(1-\cos(2x)\right)}{2}\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 .dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos(2x)-\cos^2(2x)-\cos^3(2x)\right)dx$$

$$\int sen^2(x).\cos^4(x).dx = \frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos(2x)dx - \int \cos^2(2x)dx - \int \cos^3(2x)dx\right] \qquad (3.18)$$

Se calculan por separado, cada una de las integrales de la derecha de (3.19):

a) $$\int \cos^2(2x)dx = \int \frac{(1+\cos(4x))}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{sen(4x)}{4}\right) + C_1 \qquad (3.19)$$

b) $$\int \cos^3(2x)dx = \int \cos^2(2x).\cos(2x).dx$$

$$= \int (1 - sen^2(2x)).\cos(2x).dx$$

$$= \frac{1}{2}sen(2x) - \frac{1}{6}sen^3(2x) + C_2 \qquad (3.20)$$

Se sustituyen (3.19) y (3.20) en (3.18), luego se simplifica, obteniendose:

$$\int sen^2(x).\cos^4(x).dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}sen(4x) - \frac{1}{48}sen^3(2x) + C$$

En particular se presentan las integrales $\int sen^n(x)dx$, $\int \cos^m(x)dx$, $n \in Z^+$ las cuales se resuelven aplicando el método de integración por partes (sin importar, si n es par o impar), obteniéndose las fórmulas de recurrencia:

$$\int sen^n(x)dx = -\frac{1}{n}(sen(x))^{n-1}.\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int (sen(x))^{n-2}dx \qquad (3.21)$$

$$\int \cos^n(x)dx = \frac{1}{n}(\cos(x))^{n-1}.sen(x) + \frac{n-1}{n}\int (\cos(x))^{n-2}dx \qquad (3.22)$$

Para aplicar la fórmula de integración por partes en la integral (3.21) se hace: $u = (sen(x))^{n-1}$ y $dv = sen(x)dx$.

Análogamente para la integral (3.22) se toma: $u = (\cos(x))^{n-1}$ y $dv = \cos(x)dx$.

Ejemplo 3.8. a) Demuestre la fórmula de recurrencia (3.21). b) Aplíquela para resolver la integral: $\int sen^5(2x)dx$

Solución: a) Sea $u = (sen(x))^{n-1}$ y $dv = sen(x)dx$, entonces:

du = (n-1). $(sen(x))^{n-2}.\cos(x).dx$, $v = -\cos(x)$

Aplicando el método de integración por partes:

$$\int sen^n(x)dx = \int (sen(x))^{n-1}.sen(x).dx$$

$$= -\cos(x).(sen(x))^{n-1} + (n-1)\int \cos^2(x).(sen(x))^{n-2}.dx$$

Sustituir *$\cos^2(x)$* por *$1 - sen^2(x)$*:

$$\int sen^n(x)dx = -\cos(x).(sen(x))^{n-1} + (n-1)\int\left((sen(x))^{n-2} - sen^n(x)\right)dx$$

$$= -\cos(x).(sen(x))^{n-1} + (n-1)\int (sen(x))^{n-2} - (n-1)\int sen^n(x)dx$$

Observe que $\int sen^n(x)dx$ aparece en el miembro derecho de la igualdad anterior, entonces se transpone para el lado izquierdo y se suma con su homóloga , resultando:

$$n\int sen^n(x)dx = -\cos(x).(sen(x))^{n-1} + (n-1)\int (sen(x))^{n-2}\, dx$$

Se dividen ambos miembros de la igualdad por n y se obtiene la fórmula (3.21).

b) Hacer la sustitución *$p = 2x$* y aplicar iterativamente la fórmula (3.21) para obtener:

$$\int sen^5(2x).dx = \frac{1}{2}\int sen^5(p).dp$$

$$= -\frac{1}{10}sen^4(2x).\cos(2x) - \frac{2}{15}sen^2(2x).\cos(2x) - \frac{4}{15}\cos(2x) + C$$

3.2.2 INTEGRALES DEL TIPO: $\int tg^n(x).dx$, $\int cotg^n(x).dx$, $n \in Z^+$, $n \neq 1$

Independientemente si n es par o impar , se hace la descomposición

$$tg^n(x) = tg^{n-2}(x).tg^2(x) \quad , \quad \cot g^n(x) = \cot g^{n-2}(x).\cot g^2(x).$$

Luego se usan las identidades: $\mathrm{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$, $\cot g^2(x) = \mathrm{cosec}^2(x) - 1$. Finalmente hacer la sustitución: *$u = tg(x)$* o $u = cotg(x)$ e integrar .

Para ilustrar el proceso calcular $\int \mathrm{tg}^n(x)dx$:

$$\int \mathrm{tg}^n(x)dx = \int \mathrm{tg}^{n-2}(x).\mathrm{tg}^2(x).dx = \int tg^{n-2}(x).\left(\sec^2(x) - 1\right)dx$$

$$= \int tg^{n-2}(x).\sec^2(x).dx - \int tg^{n-2}(x).dx$$

En la primera integral, hacer *$u = tg(x)$* , luego *$du = \sec^2(x)dx$* , resultando:

$$\int \mathrm{tg}^n(x)dx = \frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1}(x) - \int \mathrm{tg}^{n-2}(x).dx$$

El proceso se repite para la integral de la derecha.

EJEMPLO 3.9 Calcular $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^4(x).dx$ **.**

Solución: Primero se busca una primitiva de la función *$tg^4(x)$*:

$$\int \mathrm{tg}^4(x).dx = \int \mathrm{tg}^2(x).\mathrm{tg}^2(x).dx = \int tg^2(x).\left(\sec^2(x)-1\right)dx$$

$$= \int tg^2(x).\sec^2(x).dx - \int tg^2(x).dx$$

$$= \frac{1}{3}tg^3(x) - \int \left(\sec^2(x)-1\right).dx$$

$$= \frac{1}{3}tg^3(x) - tg(x) + x + C$$

Luego se evalúa la primitiva en $x = 0$ y $x = \pi/4$, obteniéndose: $\int_0^{\pi/4} tg^4(x)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

3.2.3 INTEGRALES DEL TIPO: $\int \sec^n(x).dx$, $\int \mathrm{cosec}^n(x).dx$, $n \in Z^+$, $n \neq 1$

Se usa el método de integración por partes , para ello se descompone la integral así :

$$\int \sec^n(x).dx = \int \left(\sec^n(x)\right)^{n-2}.\sec^2(x)dx$$

Sea $u = (sec(x))^{n-2}$, $dv = sec^2(x)dx$, $du = (n-2).(sec(x))^{n-3}\, sec(x).tg(x).dx$,

$v = tg(x)$. Luego:

$$\int sec^n(x).dx = tg(x).(sec(x))^{n-2} - \int (n-2).(sec(x))^{n-2}.tg^2(x)dx$$

$$= tg(x).(sec(x))^{n-2} - (n-2)\int .(sec(x))^{n-2}.\left(sec^2(x)-1\right)dx$$

$$= tg(x).(sec(x))^{n-2} - (n-2)\int .sec^n(x).dx + (n-2)\int (sec(x))^{n-2}dx$$

Simplificando se obtiene:

$$\int sec^n(x).dx = \frac{1}{n-1}tg(x).(sec\ x))^{n-2} + \frac{n-2}{n-1}\int (sec(x))^{n-2}dx \qquad (3.23)$$

Análogamente se obtiene una fórmula de recurrencia para:

$$\int cos\, ec^n(x).dx = -\frac{1}{n-1}cot\ g(x).(cos\, ec(x))^{n-2} + \frac{n-2}{n-1}\int (cos\, ec(x))^{n-2}dx$$

3.2.4 INTEGRALES DEL TIPO: $\int tg^m(x).sec^n(x)dx$, $\int cot^m(x).cosec^n(x)dx$ $m,n \in Z^+$

CASOS:

i) Si el exponente de la secante es un entero positivo par.

Descomponer dicha potencia así : $\sec^n(x) = \sec^{n-2}(x).\sec^2(x)$. Transformar la potencia de $\sec^{n-2}(x)$ en potencias de tangente, usando la identidad: *$sec^2(x) = tg^2(x) + 1$.* Finalmente, hacer la sustitución *u = tg(x)* e integre. Análogamente se resuelve la segunda integral.

EJEMPLO 3.10 Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \mathrm{tg}^{7/2}(x).\sec^6(x).dx$ b) $\int cot^6(x).cosec^4(x).dx$

Solución: a) $\int \mathrm{tg}^{7/2}(x).\sec^6(x).dx = \int \mathrm{tg}^{7/2}(x).\left(\sec^2(x)\right)^2.\sec^2(x).dx$

$$= \int tg^{7/2}(x).\left(tg^2(x)+1\right)^2.\sec^2(x).dx$$

Sea *u = tg(x)*, *du = sec²(x)dx*: entonces:

$$\int \mathrm{tg}^{7/2}(x).\sec^6(x).dx = \int u^{7/2}.\left(u^2+1\right)^2.du = \int\left(u^{15/2} + 2u^{11/2} + u^{7/2}\right).du$$

$$= \frac{2}{17}u^{17/2} + \frac{4}{13}u^{13/2} + \frac{2}{9}u^{9/2} + C$$

$$= \frac{2}{17}tg^{17/2}(x) + \frac{4}{13}tg^{13/2}(x) + \frac{2}{9}tg^{9/2}(x) + C$$

b) $\int cot^6(x).cosec^4(x).dx = \int cot^6(x).cosec^2(x).cosec^2(x).dx$

$$= \int cot^6(x).(cot^2(x)+1).cosec^2(x).dx$$

$$= -\frac{1}{9}cot^9(x) - \frac{1}{7}cot^7(x) + C$$

ii) Si el exponente de la tangente es un entero positivo impar.

Factorice *sec(x).tg(x)*, y el resto de la potencia de la tangente se transforma en secante usando: *$tg^2(x) = sec^2(x) - 1$*, luego se hace la sustitución u = sec(x) y se integra.

EJEMPLO 3.11 Resolver $\int sec^5(x).tg^3(x).dx$.

Solución: $\int sec^5(x).tg^3(x).dx = \int \left(sec^2(x)\right)^2.tg^2(x).sec(x).tg(x).dx$

$$= \int sec^4(x).(sec^2(x)-1).sec(x).tg(x).dx.$$

Hacer *u = sec(x)* , por lo que *du = sec(x).tg(x).dx :*

$$\int sec^5(x).tg^3(x).dx = \int u^4\left(u^2-1\right)du = \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{7}sec^7(x) - \frac{1}{5}sec^5(x) + C.$$

iii) Si el exponente de la secante es impar y el exponente de la tangente es par.

Se transforma la potencia de tangentes a potencias de secante e integre.

Por ejemplo: $\int \mathrm{tg}^2(x).\sec(x).dx = \int \left(\sec^2(x) - 1\right).\sec(x).dx$

$$= \int \sec^3(x).dx - \int \sec(x).dx$$

$$= \frac{1}{2} tg(x).\sec(x) - \frac{1}{2} Ln\left|\sec(x) + tg(x)\right| + C$$

EJEMPLO 3.12 **Calcular** $\int \frac{\sec^3(x)}{tg^4(x)} dx$

Solución: Esta integral no se adapta a los casos estudiados, por lo que se transforma el integrando a potencias de senos y cosenos , luego se integra:

$$\int \frac{\sec^3(x)}{tg^4(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{sen^4(x)} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{sen^3(x)} + C$$

3.3.5 Algunas veces se presentan integrales que contiene productos de senos y cosenos de ángulos diferentes.

Son ejemplos de este tipo de integrales:

$$\int sen(mx).sen(nx).dx, \quad \int \cos(mx).\cos(nx).dx, \quad \int sen(mx).\cos(nx).dx \ , \quad n \neq \pm m$$

En tales casos la idea es transformar estos productos en sumas de senos y cosenos. para ello se utilizan las siguientes idéntidades trigonométricas:

i) $sen(a).sen(y) = \frac{1}{2}\left(cos(a-y) - cos(a+y)\right)$

ii) $sen(a).cos(y) = \frac{1}{2}\left(sen(a-y) + sen(a+y)\right)$

iii) $cos(a).cos(y) = \frac{1}{2}\left(cos(a-y) + cos(a+y)\right)$

Por ejemplo para calcular $\int sen(mx).sen(nx).dx$ se utiliza la identidad (i) , luego se integran ambos miembros obteniéndose :

$$\int sen(mx).sen(nx)dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\right].dx$$

$$\int sen(mx).sen(nx)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{sen((m-n)x)}{m-n} - \frac{sen((m+n)x)}{m+n}\right] + C$$

Ejemplo 3.13 Calcular $\int sen(5x).\cos(6x).dx$.

Solución: Aplicando la identidad (ii):

$$\int sen(5x).\cos(6x).dx = \frac{1}{2}\int \left(sen(-x) + sen(11x)\right).dx = \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\cos(11x)}{22} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 3.2

1) Calcule las siguientes integrales:

a) $\int sen^6(2x^2+1).x.dx$ b) $\int sen^7(3x).\cos^4(3x).dx$ c) $\int_{-\pi}^{\pi} sen(3\theta).\cos(\theta).d\theta$

d) $\int sen^4(4x).\cos^4(4x).dx$ e) $\int tg^5(x+1).dx$ f) $\int_0^{\pi} sen^2(nx).dx$, $n \in Z^+$

g) $\int tg^{-2}(x).dx$ h) $\int \sec^3(2x+4).dx$ i) $\int x.tg^{3/2}(x^2).\sec^4(x^2)dx$

j) $\int tg^5(x).\sqrt{\sec(x)}.dx$ k) $\int \frac{cot^2(t)}{cosec(t)}dt$ l) $\int \frac{1-sec(t)}{cos(t)-1}dt$

2) Demuestre que: si n es un entero positivo impar entonces: $\int_0^{\pi} \cos^n(x).dx = 0$

3) Demuestre que: i) $\int_{-\pi}^{\pi} sen^2(mx)..dx = \pi$ con $m \in Z^+$

ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx).sen(nx).dx = 0$ con $m,n \in Z^+ \cup \{0\}$

3.3 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA.

El método de sustitución trigonométrica se aplica a integrales, cuyos integrando contienen expresiones de la forma: $\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{a^2+u^2}$, $\sqrt{u^2-a^2}$, a > 0.

El objetivo es eliminar el radical mediante las siguientes sustituciones:

i) Para $\sqrt{a^2-u^2}$ se hace $u = a.sen(\theta)$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ii) Para $\sqrt{a^2+u^2}$ se toma $u = a.tg(\theta)$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

iii) Para $\sqrt{u^2-a^2}$ se hace $u = a.sec(\theta)$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \bigcup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

EJERCICIOS RESUELTOS 3.2

Calcular las siguientes integrales:

1) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}.dx$: Hacer la sustitución $x = 2.sen(\theta)$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de donde $dx = 2cos(\theta)d\theta$, $\theta = arcsen\left(\frac{x}{2}\right)$, $\sqrt{4-x^2} = 2\,cos\,\theta$. Luego :

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{4\cos^2\theta}{4sen^2\theta}\,d\theta = = \int (\cos ec^2\theta - 1).d\theta = -\cot g\theta - \theta + C \qquad (3.24)$$

Como $sen\theta = \frac{x}{2}$ y $\cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$ entonces $\cot\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$, el cual se sustituye en (3.24) obteniéndose: $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}.dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} - arsen\left(\frac{x}{2}\right) + C$

2) $\int \frac{(2x-2).dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}}$: Se completa cuadrados: $2x^2+4x+5 = \left[\sqrt{2}(x+1)\right]^2 + 3$. Hacer $u = \sqrt{2}(x+1)$, de donde $du = \sqrt{2}.dx$ y $x = \frac{u}{\sqrt{2}} - 1$; lo cual se sustituye en la integral obteniéndose: $\int \frac{(2x-2).dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}} = \int \frac{(u-2\sqrt{2}).du}{\sqrt{u^2+3}}$. Ahora se hace la sustitución trigonométrica: $u = \sqrt{3}.tg\theta$, de donde $du = \sqrt{3}\sec^2\theta$ y $\sqrt{u^2+3} = \sqrt{3\,tg^2\theta + 3} = \sqrt{3}.\sec\theta$, luego:

$$\int \frac{(u-2\sqrt{2}).du}{\sqrt{u^2+3}} = \int \frac{(\sqrt{3}tg\theta - 2\sqrt{2})\sqrt{3}.\sec^2\theta.d\theta}{\sqrt{3}.\sec\theta} = \sqrt{3}\int tg\theta.\sec\theta.d\theta - 2\sqrt{2}\int \sec\theta.d\theta$$

$$= \sqrt{3}\sec\theta - 2\sqrt{2}Ln\left|\sec\theta + tg\theta\right| + C \qquad (3.25)$$

De $u = \sqrt{3}tg\theta$ se tiene $tg\theta = \frac{u}{\sqrt{3}}$, pero $u = \sqrt{2}(x+1)$, luego: $tg\theta = \frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{3}}$ y $\sec\theta = \frac{\sqrt{2x^2+4x+5}}{\sqrt{3}}$. Esto se sustituye en (3.25) obteniéndose:

$$\int \frac{(2x-2).dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}} = \sqrt{2x^2+4x+5} - 2\sqrt{2}Ln\left|\sqrt{2x^2+4x+5} + \sqrt{2}(x+1)\right| + C$$

3) $\int \frac{y^2}{(9-y^2)^{5/2}}\,dy$: hacer y = 3sen(θ) , dy = 3cos(θ)dθ ,y $\sqrt{9-y^2} = 3\cos(\theta)$. Luego:

$$\int \frac{y^2}{(9-y^2)^{5/2}}\,dy = \int \frac{9sen^2\theta.3\cos\theta}{(3\cos\theta)^5}.d\theta = \frac{1}{9}\int tg^2\theta\sec^2\theta.d\theta = \frac{1}{27}tg^3\theta + C$$

Pero $\operatorname{tg}(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{9-y^2}}$, entonces: $\displaystyle\int \frac{y^2}{\left(9-y^2\right)^{5/2}}\,dy = \frac{1}{27}.\frac{y^3}{\left(\sqrt{9-y^2}\right)^3} + C$.

4) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\left(5x^4+3\right)}{x^2\sqrt{x^2-1}}.dx$: Calcular la integral indefinida , haciendo la sustitución $x = sec\theta$, de donde $dx = \sec\theta.tg\theta.d\theta$, $\sqrt{x^2-1} = tg\theta$:

$$\int \frac{\left(5x^4+3\right)}{x^2\sqrt{x^2-1}}.dx = \int \frac{\left(5\sec^4\theta+3\right)\sec\theta.tg\theta}{\sec^2\theta.tg\theta}.d\theta = 5\int \sec^3\theta.d\theta + 3\int \cos\theta.d\theta$$

$$= \frac{5}{2}tg\theta.\sec\theta + \frac{5}{2}Ln\left|\sec\theta + tg\theta\right| + 3sen\theta + C \qquad (3.26)$$

De $x = \sec(\theta)$ se obtiene $\cos\theta = \dfrac{1}{x}$ y $sen\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. Luego se sustituyen en (3.26) obteniéndose: $\displaystyle\int \frac{\left(5x^4+3\right)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{5}{2}\,x.\sqrt{x^2-1} + \frac{5}{2}\,Ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + \frac{3\sqrt{x^2-1}}{x} + C$.

Luego se aplica el Teorema Fundamental del Cálculo Integral obteniéndose:

$$\int_2^3 \frac{\left(5x^4+3\right)}{x^2\sqrt{x^2-1}}.dx = 17\sqrt{2} + \frac{5}{2}\,Ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}\right) - \frac{13}{2}\sqrt{3}\,.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 3.3

1) $\displaystyle\int \frac{\left(x^2-1\right)dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^4+1}}$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}.dt$ 3) $\displaystyle\int \frac{\left(e^x+1\right)dx}{\sqrt{e^{2x}+2xe^x+x^2+1}}$

4) $\displaystyle\int \frac{Ln^3w.dw}{w\sqrt{Ln^2w-4}}$ 5) $\displaystyle\int e^{2x}.\sqrt{1+e^{2x}}.dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{\left(x^3+x+1\right)}{x^4+2x^2+1}.dx$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-6x)^3}}$ 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+\frac{3}{4}}}$ 9) $\displaystyle\int \frac{\left(Ln(x)+3\right)dx}{x\sqrt{Ln^2(x)+2Ln(x)+10}}$

10) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}.dx$ 11) $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+2ysen\theta+1}}$ 12) $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+2}.dx$