OBJETIVO 4

CINEMÁTICA DE DOS DIMENSIONES

Cinemática bi y tridimensional

En el objetivo 3 se encontró que el movimiento de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta se conoce por completo si sus coordenadas se conocen como una función del tiempo. Ahora se extenderá esta idea al movimiento en el plano **xy**. Se describirá primero la posición de una partícula con un vector de posición **r**, trazado desde el origen de algún sistema de coordenadas hasta la partícula localizada en el plano **xy**, como se muestra la figura 1. En el tiempo $\mathbf{t_t}$ la partícula se encuentra en el punto $\boxed{\boldsymbol{A}}$, y en algún instante posterior t_f la partícula está en el punto $\boxed{\boldsymbol{B}}$. La trayectoria de $\boxed{\boldsymbol{A}}$ a $\boxed{\boldsymbol{B}}$ no es necesariamente una línea recta. Cuando la partícula se mueve de $\boxed{\boldsymbol{A}}$ a $\boxed{\boldsymbol{B}}$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, el vector de posición cambia de $\mathbf{r_i}$ a $\mathbf{r_f}$.

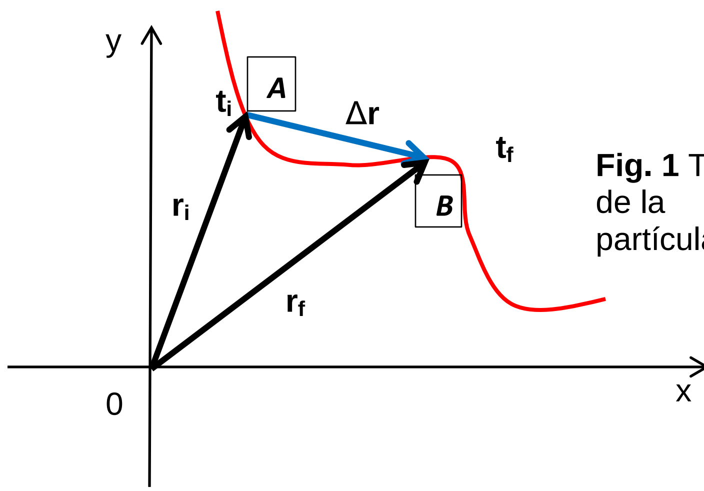


Fig. 1 Trayectoria de la partícula

$$\vec{r}_i = x_i i + y_i j$$

$$\vec{r}_f = x_f i + y_f j$$

Desplazamiento ($\Delta\vec{r}$)

Es la diferencia entre su vector de posición final y su vector de posición inicial.

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{2}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{1}}$$

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_i})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_i})\boldsymbol{j}$$

Velocidad media$\left(\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{media}}\right)$

Se define velocidad promedio o velocidad media de la partícula durante el intervalo de tiempo *Δt* como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo

$$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{media}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta\boldsymbol{t}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}}}{\boldsymbol{t_2} - \boldsymbol{t_1}}$$

Velocidad instantánea $(\vec{v})$

Se define como el límite de la velocidad promedio, Δ**r**/ Δt, cuando Δt tiende a cero

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_r}{\Delta_t} \to \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Para 2 dimensiones

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{xi} + \boldsymbol{yj}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(xi + yj)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v_x i} + \boldsymbol{v_y j}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt}$$

Magnitud de $\vec{\boldsymbol{v}}$

$$\boldsymbol{v} = |\vec{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{\boldsymbol{v_x}^2 + \boldsymbol{v_y}^2}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{d_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_y}{dt}\right)^2}$$

Para 3 dimensiones

$$\boldsymbol{\vec{r} = x i + y j + z k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k$$

$$\boldsymbol{\vec{v} = v_x i + v_y j + v_z k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Magnitud de $\boldsymbol{\vec{v}}$

$$\boldsymbol{v = |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}}$$

Aceleración media ($\boldsymbol{\bar{a}_{med}}$)

La aceleración promedio de una partícula cundo se mueve de una posición a otra se define como el cambio del vector de velocidad instantánea, Δv, divido entre el tiempo Δt durante el cual ocurrió dicho cambio

$$\bar{a}_{med} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Aceleración instantánea ($\boldsymbol{\vec{a}}$)

Se define como el valor límite de la relación Δv/Δt cuando Δt tiende a cero

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Pero

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

Para 2 dimensiones

$\boldsymbol{\vec{r} = xi + yj}$ **,** $\qquad$ $\boldsymbol{\vec{v} = v_x i + v_y j}$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} i + \frac{dv_y}{dt} j$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt} i + \frac{d^2y}{dt} j$$

$$\boldsymbol{\vec{a} = a_x i + a_y j}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt}$$

Solución de: $\quad \vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}$

CASO 1: $(\vec{a}_x = 0)$

Velocidad constante

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{v}(t_2 - t_1)$$

CASO 2: $(\vec{a} = constante)$

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{a}(t_2 - t_1)$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{v}_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\vec{a}(t_2 - t_1)^2$$

$$v_2{}^2 - v_1{}^2 = 2\vec{a}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

LANZAMIENTO DE PROYECTILES

La pelota de beisbol en movimiento se mueve en una trayectoria curva y su movimiento es simple de analizar si se hacen estas dos suposiciones: 1) la aceleración de caída libre **g** es constante en todo el intervalo de movimiento y está dirigida hacia abajo, 2) el efecto de la resistencia del aire es despreciable. Con estas suposiciones encontramos que el camino de un proyectil, al que se llamará *trayectoria*, *siempre* es una parábola. Como se muestra en la figura 2

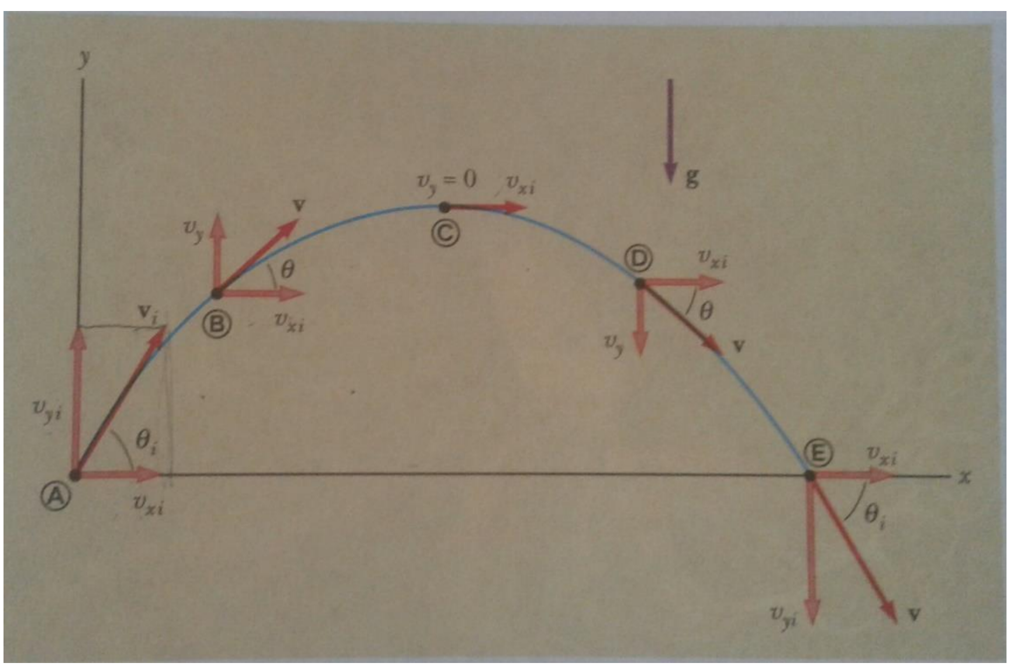


Fig. 2 La trayectoria parabólica de un proyectil

En la figura 2 se muestra la trayectoria parabólica de un proyectil que deja su origen con una velocidad **v_i.** El vector velocidad **v** cambia con el tiempo tanto en magnitud como en dirección. Este cambio es el resultado de la aceleración en la dirección **y** negativa. La componente **x** de la velocidad permanece constante en el tiempo debido a que no existe aceleración a lo largo de la dirección horizontal. La componente **y** de la velocidad es cero en la parte más alta de la trayectoria,

Para mostrar que la trayectoria de un proyectil es una parábola elija un marco de referencia tal que la dirección **y** sea vertical y positiva hacia arriba. Dado que la resistencia del aire es despreciable, se sabe que

t_i = 0s **r_i** = 0m **a_y = -gj (condiciones iniciales)**

Velocidad inicial ($\vec{v}_i$)

$$\boldsymbol{\vec{v}_i = v_{ix}i + v_{iy}j}$$

$$\boldsymbol{v_{ix} = v_i \cos\theta}$$

$$\boldsymbol{v_{iy} = v_i \operatorname{sen}\theta}$$

Velocidad para cualquier instante

$$\vec{v} - \vec{v}_i = \vec{a}(t - \cancel{t_i})$$

$$\vec{v} = v_{ix}i + v_{iy}j - gtj$$

$$\vec{v} = v_{ix}i + (v_{iy} - gt)j$$

$$\boldsymbol{\vec{v}_x = v_{ix}}$$

$$\boldsymbol{\vec{v}_y = v_{iy} - gt}$$

Desplazamiento para cualquier tiempo ($\boldsymbol{\vec{r}}$)

$$\vec{r} - \cancel{\vec{r}_i} = \vec{v}_i(t - \cancel{t_i}) + \tfrac{1}{2}\vec{a}(t - \cancel{t_i})^2$$

$$\vec{r} = \vec{v}_i t - \frac{1}{2}gt^2 j$$

$$\vec{r} = v_{ix}ti + v_{iy}tj - \frac{1}{2}gt^2 j$$

$$\vec{r} = v_{ix}ti + (v_{iy}t - \frac{1}{2}gt^2)j$$

$$\boldsymbol{x = v_{ix}t}$$

$$\boldsymbol{y = v_{iy}t - \frac{1}{2}gt^2}$$

Tiempo máximo ($t_{máx}$)

Cuando el proyectil alcanza su altura máxima

$V_y = 0$

$$\boldsymbol{\vec{v}_y = v_{iy} - gt = 0}$$

$$\rightarrow t = t_{máx} = \frac{v_{iy}}{g}$$

$$\boldsymbol{t_{máx} = \frac{v_i sen\theta}{g}}$$

Tiempo de vuelo (t_v)

Cuando el proyectil está en el suelo y = 0

$$y = v_{iy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t = (v_{iy} - \frac{1}{2}gt)$$

Para t = 0s

$$v_{iy} - \frac{1}{2}gt = 0$$

$$t = \frac{2v_{iy}}{g} \rightarrow t_v = 2t_{máx}$$

$$\boldsymbol{t_v = \frac{2v_i sen\theta}{g}}$$

Altura máxima ($y_{máx}$)

Suponga que un proyectil se lanza desde el origen en $t_i = 0$ con una componente v_{yi} positiva, como se muestra la figura 3.

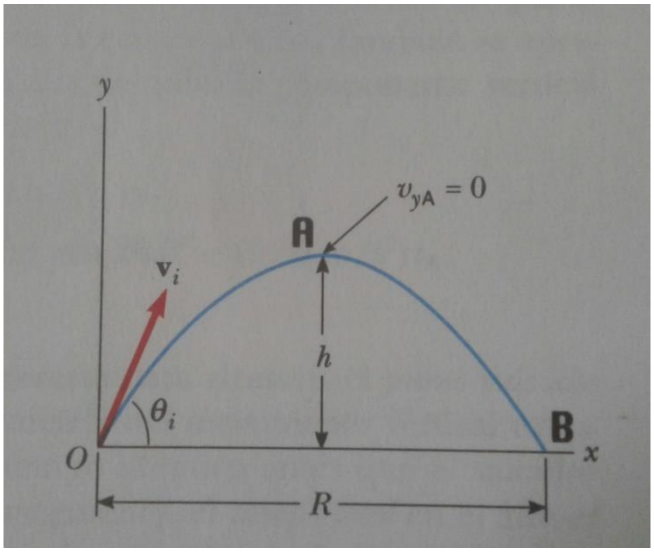


Fig. 3 Un proyectil disparado desde el origen en $t_t = 0$, a una velocidad inicial $\mathbf{v_i}$. La altura máxima de un proyectil es **h**, y el alcance horizontal es **R**

La distancia **R** se conoce como alcance horizontal del proyectil, y la distancia h es su altura máxima.

$Y = h = y_{máx}$ = altura máxima

Si $t = t_{máx}$ entonces $y = y_{máx}$

$$y = v_{iy}t_{máx} - \frac{1}{2}g{t_{máx}}^2$$

$$y_{máx} = v_{iy}\frac{v_{iy}}{g} - \frac{1}{2}g\frac{{v_{iy}}^2}{g^2}$$

$$y_{máx} = \frac{{v_{iy}}^2}{2g}$$

$$\boldsymbol{y_{máx} = \frac{{v_i}^2 sen^2\theta}{2g}}$$

Alcance máximo (R, $x_{máx}$)

Si x = v_{ix}.t

Si t = t_v y x = R = $x_{máx}$

R = $x_{máx}$ = $v_{ix}t_v$

$$R = x_{máx} = v_{ix}t_v$$

$$R = x_{máx} = v_{ix}2\frac{v_{iy}}{g} = \frac{2v_{ix}v_{iy}}{g}$$

$$R = x_{máx} = \frac{2v_i cos\theta v_i sen\theta}{g}$$

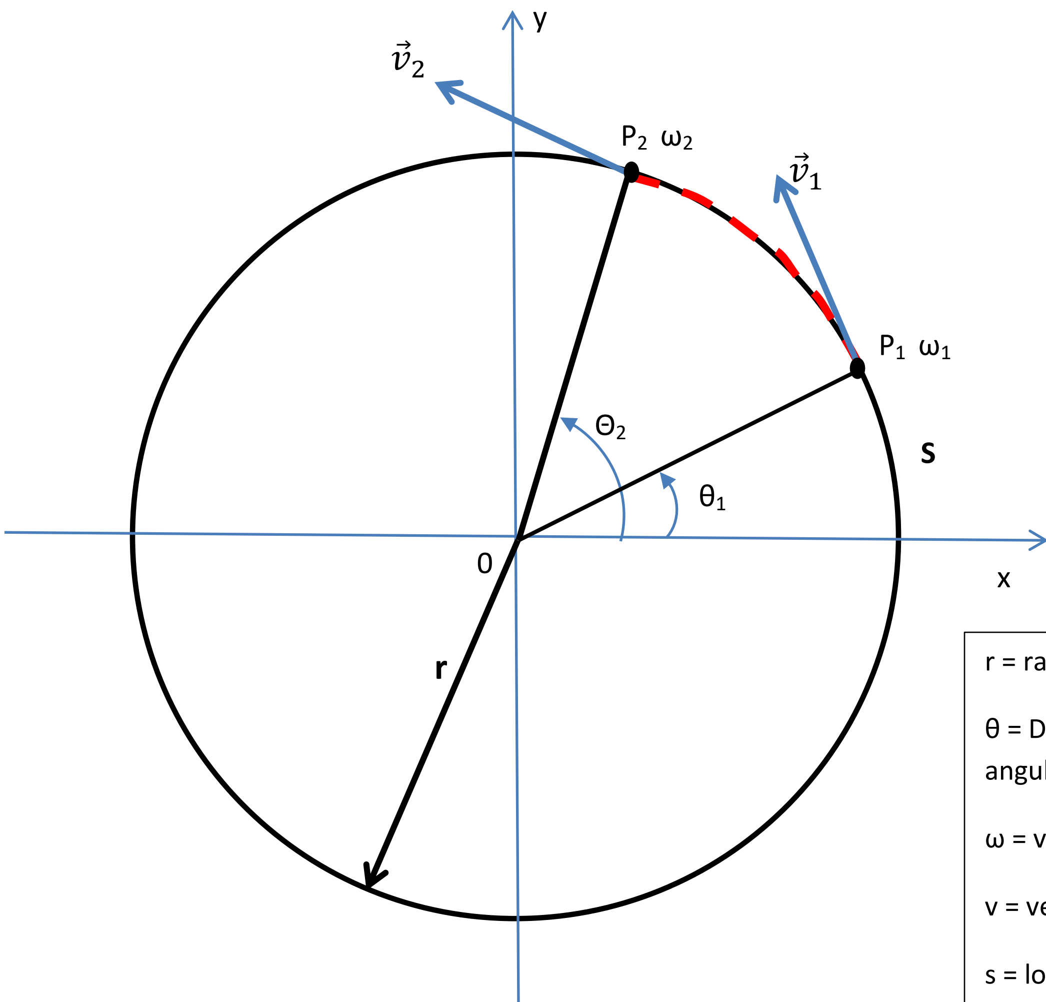
Usando la identidad sen2θ = 2senθcosθ, se tiene que

$$\boldsymbol{R = x_{máx} = \frac{v_i{}^2 sen2\theta}{g}}$$

MOVIMIENTO CIRCULAR (M.C.)

La figura 4 ilustra un objeto rígido plano de forma arbitraria confinado al plano xy, el cual gira en torno al eje fijo que pasa por 0. El eje es perpendicular al plano de la figura, y 0 es el origen de cualquier sistema coordenado xy. Una partícula sobre el objeto P_1 está a una distancia fija **r** del origen y gira alrededor de éste en un círculo de radio **r**. Es conveniente representar la posición de P_1 con sus coordenadas polares (**r**, θ_1) donde **r** es la distancia desde el origen a P_1 y θ_1 *se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj* desde alguna dirección preferida se mide en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* desde alguna dirección preferida, en este caso el eje positivo x. En esta representación cambia en el tiempo el ángulo θ_1, la velocidad angular ω_1, la velocidad lineal v_1. Conforme la partícula se mueve a lo largo del circulo desde el eje **x** positivo (θ = 0) desde P_1 hasta P_2, se mueve a través de una longitud de arcos **s**, la cual se relaciona con la posición angular θ_1 por medio de la relación

S = r θ entonces **θ = S/r**



r = radio del circulo

θ = Desplazamiento angular

ω = velocidad angular

v = velocidad tangencial

s = longitud de arco

Fig. 4 Una partícula sobre un objeto rígido en rotación se mueve de P_1 a P_2 a lo largo del arco de un circulo. En el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, el vector radio barre un ángulo $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

Desplazamiento angular

Conforme la partícula sobre el objeto rígido viaja de P_1 a P_2 en un tiempo Δt, como se muestra en la figura, el radio vector barre un ángulo $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$. Esta cantidad $\Delta\theta$ se define como desplazamiento angular de la partícula.

$$\boldsymbol{\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1}$$

Velocidad angular promedio o media ($\overline{\omega}$)

Se define como la relación entre desplazamiento angular y el intervalo de tiempo Δt

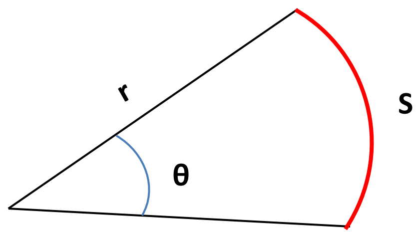
$$\overline{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{media}} = \frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta\boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1}{\boldsymbol{t}_2 - \boldsymbol{t}_1}$$

Velocidad angular instantánea (ω)

Se define como el límite de la razón Δθ/ Δt cuando Δt tiende a cero

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \to \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Relación entre v y ω



$$\theta = \frac{s}{r} \quad \rightarrow \qquad s = \text{r.}\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = \frac{dr}{dt}\theta + r\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r\omega} \quad \textbf{(Velocidad lineal)}$$

Si $\overline{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{media}} = \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{constante}$ entonces el movimiento es circular uniforme

Dimensiones y unidades de θ y ω

Como θ es la relación entre una longitud de un arco y el radio del círculo, se trata de un número puro. Sin embargo, por lo común se le da a θ la unidad artificial **radián** (rad), donde

Un radián es el ángulo subtendido por una longitud de arco igual al radio del arco.

Puesto que la circunferencia de un círculo es 2π**r**, que 360° corresponden a un ángulo de 2πr/r rad = 2π rad (una revolución). Por tanto, un rad = 360°/2π ≈ 57,3°. Para convertir un ángulo en grados a un ángulo en radianes se usa el hecho de que 2π radianes = 360°

$$\theta(rad) = \frac{\pi}{180°}\theta(grados)$$

Por ejemplo, 60° es igual a π/3 rad, y 45° es igual a π/4 rad

$$[\theta] = \frac{[s]}{[r]} = \frac{[long]}{[long]} = adimensional$$

$$[\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = \frac{rad}{s} = (s^{-1})$$

Aceleración angular media$(\bar{\boldsymbol{\alpha}})$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta\boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{\omega_2} - \boldsymbol{\omega_1}}{\boldsymbol{t_2} - \boldsymbol{t_1}}$$

Aceleración angular instantánea$(\boldsymbol{\alpha})$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \alpha_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Pero

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \to \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Si $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ = α = constante el movimiento es circular uniformemente acelerando

Unidades

$$[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{\left[\frac{\theta}{t}\right]}{[t]} = \frac{[\theta]}{[t^2]} = \frac{rad}{s^2} = (s^{-2})$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0 \rightarrow \omega = constante\ (ctte) \rightarrow M.C.U.$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow d\theta = \omega dt$$

Integrando

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt$$

$$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$$

$$\boxed{\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)}$$

Para M.C.U.

El (M.C.U.) es periódico

Un periodo

$$T = \frac{t}{n}$$

Una frecuencia

$$f = \frac{n}{t}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$$

Si t_0 = 0s θ_0 = 0

Θ = 2π , t = T

2π = ωT

ω = 2π f   **(velocidad para M.C.U.)**

CASO 2: $(\alpha = constante)$

$$\alpha = constante\ (ctte) \rightarrow M.C.U.A.$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = d\omega = \alpha dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt$$

$$\boxed{\omega - \omega_0 = \alpha(t - t_0)}$$

M.C.U.A.

Ahora tenemos que

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow d\theta = \omega dt$$

Integramos y utilizando integrar por parte se tiene que

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt + \int_{t_0}^{t} \alpha(t - t_0) dt \quad \left\{ \begin{array}{l} u = (t-t_0) \\ du = dt \end{array} \right.$$

$$\boxed{\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2}$$

M.C.U.A.

Por último, es posible obtener una expresión para la velocidad final que no contenga un intervalo de tiempo partiendo de la siguiente ecuación

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = d\omega = \alpha dt$$

Multiplicamos ω en ambos miembros de la igualdad

$$\omega d\omega = \alpha\omega dt$$

$$\omega d\omega = \alpha\omega dt$$

$$\omega d\omega = \alpha \frac{d\theta}{dt} dt$$

$$\omega d\omega = \alpha \frac{d\theta}{dt} \cancel{dt}$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega = \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha d\theta$$

$$\boxed{\omega^2 - {\omega_0}^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)}$$

M.C.U.A.

Componente normal (a_N) y tangencial (a_T) de la aceleración

Considere el movimiento de una partícula a lo largo d una trayectoria curva donde la velocidad cambia tanto en dirección como en magnitud, como se describe en la figura 5.

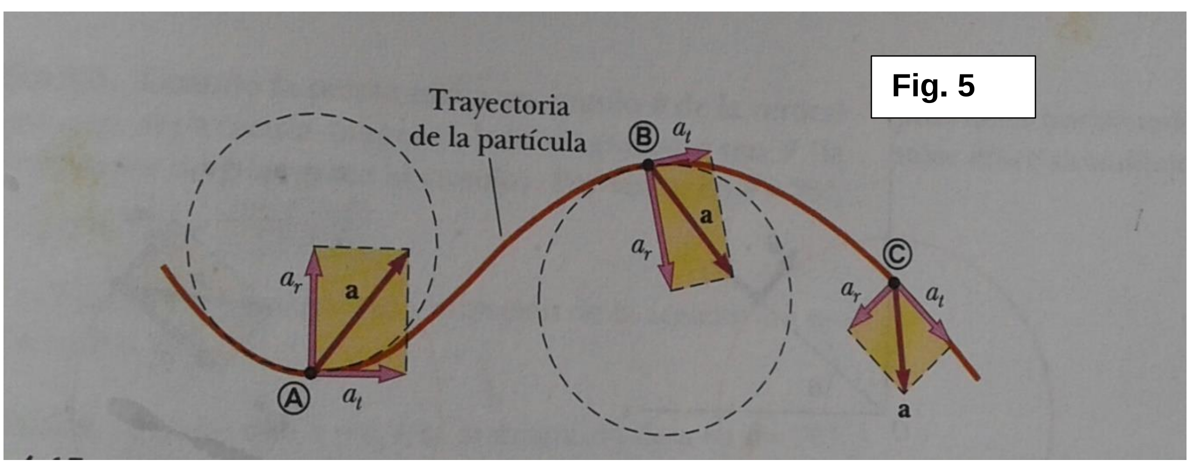


Fig. 5

El vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria, pero ahora la dirección del vector aceleración **a** cambia de punto a punto. Este vector puede resolverse en dos vectores componentes: un vector componente radial, $\mathbf{a_r}$**,** y un vector componente tangencial, $\mathbf{a_t}$**.** Es decir, **a** puede escribirse como la suma vectorial de estos vectores componente:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_r} + \boldsymbol{a_t}$$

La aceleración tangencial provoca cambio en la rapidez de la partícula. Es paralela a la velocidad instantánea y su magnitud es

$$a_t = \frac{d|v|}{dt}$$

La aceleración radial surge del cambio en la dirección del vector velocidad, como se describe con anterioridad, y tiene una magnitud absoluta dada por

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Donde r es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto en cuestión. Puesto que $\mathbf{a_r}$ y $\mathbf{a_t}$ son los vectores componentes mutuamente perpendicular de **a,** se deduce que

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{\boldsymbol{a_r}^2 + \boldsymbol{a_t}^2}$$

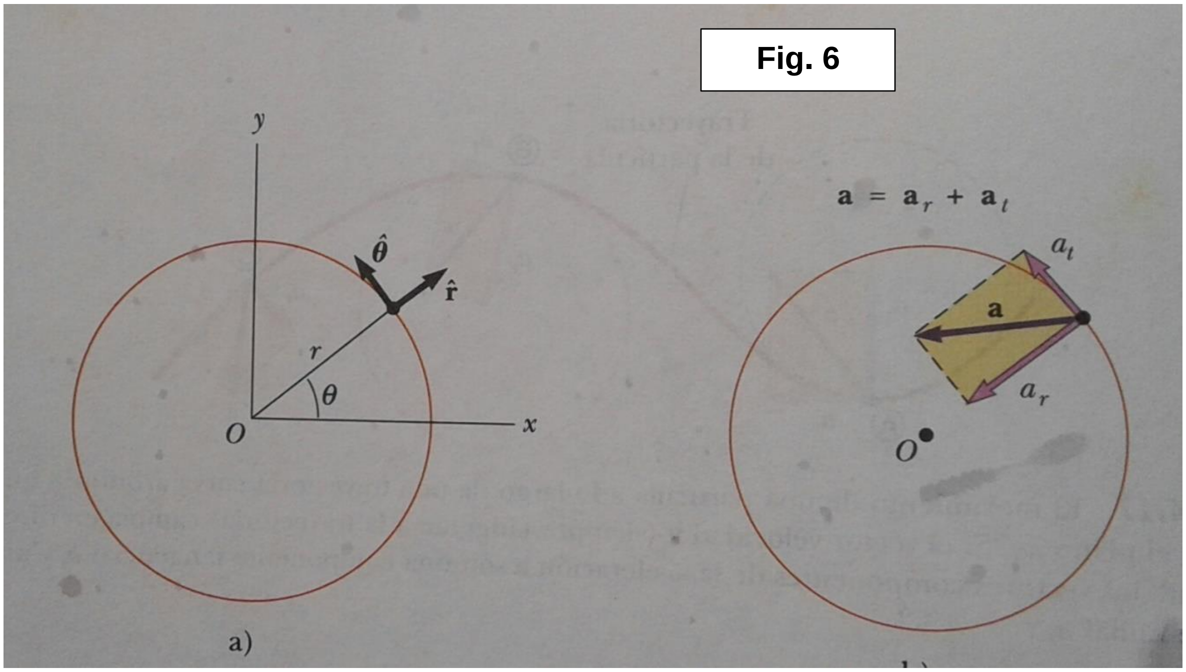
a_r siempre apunta hacia el centro de curvatura

$\mathbf{a_t}$ la dirección de aceleración tangencial es la misma que **v** (si v está aumentando) u opuesta a **v** (si v está disminuyendo)

En el movimiento circular uniforme, donde v es constante, $a_t = 0$ y la aceleración siempre es radial.

Si la **v** no cambia, entonces no hay aceleración radial y el movimiento es rectilíneo (M.R.)

En la figura 6, donde $\hat{\boldsymbol{r}}$ es un vector unitario a lo largo del radio vector dirigido radialmente hacia afuera desde el centro del círculo, y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es un vector unitario tangente al círculo.



$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_t} + \boldsymbol{a_r} = \frac{\boldsymbol{d|v|}}{\boldsymbol{dt}}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}$$

El signo negativo en el término v^2/r indica que la aceleración radial siempre está dirigida radialmente hacia dentro, *opuesta a* $\hat{\boldsymbol{r}}$

Ejemplo
Problemas propuestos de la guía de la profesora Lucia Moncada del objetivo 4

2.- La posición de un cuerpo en un determinado Sistema de Referencia viene dada por el vector: $r(t) = t^2\hat{\imath} - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\hat{\jmath}\ (m)$

Calcular a) La velocidad media entre t=0 s y t=2 s b)La aceleración media entre t=0s y t=2s C)La aceleración instantánea en t= 6s

a) La velocidad media t = 0 s y t = 2 s

$$\bar{V} = \frac{r_f - r_0}{\Delta t}$$

$$r_0(0s) = (0)\hat{\imath} - \sin\left(\frac{\pi}{2}(0)\right)\hat{\jmath}m = 0m$$

$$r_f(2s) = (2)^2\hat{\imath} - \sin\left(\frac{\pi}{2}(2)\right)\hat{\jmath}m = 4\hat{\imath} - \sin\pi\hat{\jmath}\,m = 4m\hat{\imath}$$

$$\bar{V} = \frac{r_f - r_0}{\Delta t} = \frac{4m\hat{\imath} - 0m}{2s - 0s} = \frac{4}{2}\frac{m\hat{\imath}}{s} = 2m\hat{\imath}$$

a) La aceleración media entre t=0s y t=2s

$$\bar{a} = \frac{v_f - v_0}{\Delta t}$$

Para obtener la velocidad derivamos la posición $r(t) = t^2\hat{\imath} - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\hat{\jmath}\ (m)$ con respeto al tiempo.

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = 2t\hat{\imath} - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\hat{\jmath}\frac{m}{s}$$

$$v(0s) = 2(0)\hat{\imath} - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}(o)\right)\hat{\jmath}\frac{m}{s} = -\frac{\pi}{2}\cos 0\hat{\jmath}\frac{m}{s} = -\frac{\pi}{2}\hat{\jmath}\frac{m}{s}$$

$$v(2s) = 2(2)\quad \hat{\imath} - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}(2)\right)\frac{m}{s} = 4\hat{\imath} - \frac{\pi}{2}\cos\pi\hat{\jmath}\frac{m}{s} = 4\hat{\imath} + \frac{\pi}{2}\hat{\jmath}\frac{m}{s}$$

$$\bar{a} = \frac{v_f - v_0}{\Delta t} = \frac{\left(4\hat{\imath} + \frac{\pi}{2}\hat{\jmath}\frac{m}{s}\right) - (-\frac{\pi}{2}\hat{\jmath}\frac{m}{s})}{2s - 0s} = \frac{4\hat{\imath} + \pi\hat{\jmath}}{2}\frac{m}{s^2} = \left(2\hat{\imath} + \frac{\pi}{2}\right)\frac{m}{s^2}$$

b) La aceleración instantánea en t= 6 s

Para calcular la aceleración instantánea se deriva la velocidad

$$v(t) = 2t\hat{\imath} - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\hat{\jmath}\frac{m}{s}$$

con respecto al tiempo

$$a = \frac{dv}{dt} = 2\hat{\imath} + \frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\hat{\jmath}$$

La aceleración instantánea en t = 6s

$$a_{(6s)} = 2\hat{\imath} + \frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}6\right) = 2\hat{\imath} + \frac{\pi^2}{4}\sin(3\pi) = 2\hat{\imath}\frac{m}{s^2}$$

5.- Un barco cruza el Orinoco, en Boca Grande, en el Delta (Ancho de 24 Km.) si mantiene una velocidad de (40 mi/h ,80º) respecto al río y la velocidad del río es de (8 mi/h, 0º). a) ¿A qué velocidad se mueve el barco en m/s? b) Cuántos minutos tarda en cruzar y c) ¿Cuál es la distancia en Km. que recorre?

Datos:

V_R = (8mi/h, 0°) = $\frac{8mi}{h}.\frac{1609m}{1\,mi}.\frac{1h}{3600s} = 3{,}6\frac{m}{s}$

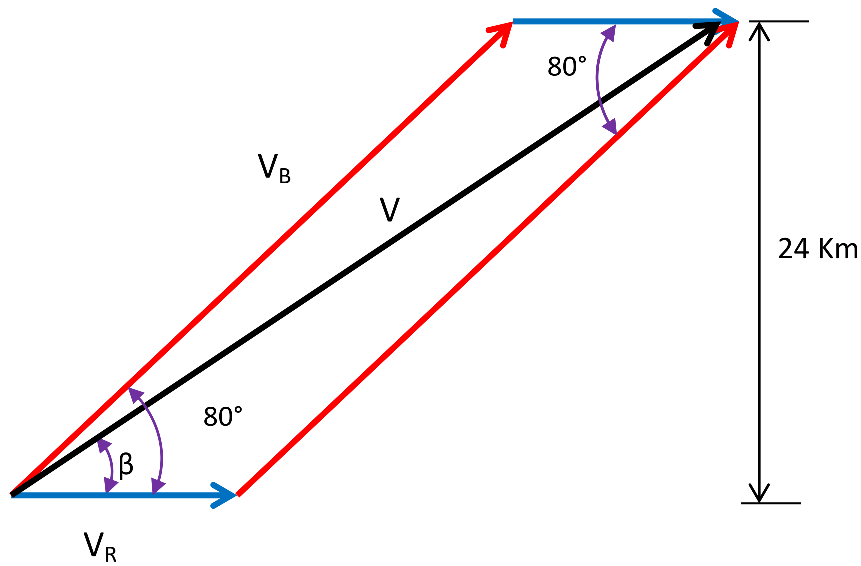
V_B = (40mi/h, 0°) = $\frac{40mi}{h}.\frac{1609m}{1\,mi}.\frac{1h}{3600s} = 17{,}9\frac{m}{s} \approx 18m/s$

A = 24 Km = 24000m

a) v_B = ?

b) t = ?

c) d = ?



El ángulo formado dentro del paralelogramos es 360° menos 160° es igual 200°

200° entre dos es igual 100° que es ángulo formado entre V_B y V_R

a.- Calcular V

Aplicando el teorema del coseno para calcular V

$$v^2 = {v_R}^2 + {v_B}^2 - 2v_R v_B cos\theta$$

$$v^2 = (3{,}6m/s)^2 + (18m/s)^2 - 2(3{,}6\,m/s)\,(18\,m/s)cos100°$$

$$v^2 = 12{,}96\,m^2/s^2 + 324\,m^2/s^2 + m^2/s^2$$

$$v = \sqrt{12{,}96\,m^2/s^2 + 324\,m^2/s^2 + 22{,}5\,m^2/s^2} = \sqrt{359{,}46\,m^2/s^2}$$

$$v = 18{,}9m/s$$

b.- Calcular t

Para calcular el tiempo primero se calcular la distancia recorrida ósea la pregunta **c**, ¿Cuál es la distancia en Km que recorre?

Aplicando el teorema del seno para calcular β

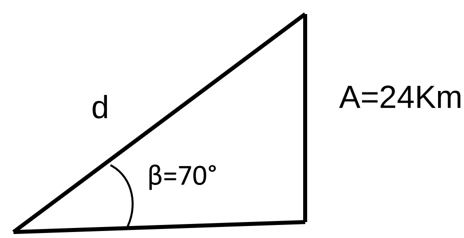
$$\frac{v}{sin100°} = \frac{v_B}{\sin\beta}$$

$$vsin\beta = v_B sin100° \rightarrow sin\beta = \frac{v_B sin100°}{v}$$

$$sin\beta = \frac{18\,m/s\,.\,sin100°}{18{,}9m/s} = 0{,}93$$

$$\beta = sin^{-1}0{,}93 = 69{,}7° \approx 70° \rightarrow \boldsymbol{\beta = 70°}$$

Entonces para calcular la distancia utilizamos trigonometría



$$\sin\beta = \frac{C.O.}{H} = \frac{A}{d}$$

$$d = \frac{A}{sin\beta} = \frac{24Km}{sin70°} \rightarrow \boldsymbol{d = 25,5Km}$$

Calcular el tiempo

d = v. t

$$t = \frac{d}{v} = \frac{25500m}{18{,}9m/s} = 1220{,}1\ s \rightarrow \boldsymbol{t = 22,5\ min}$$

9.- La Luna gira alrededor de la tierra, dando una revolución completa en 27,3 días. Suponiendo que la órbita sea circular y tenga un radio de 239.000 millas ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de la luna hacia la tierra?

Datos

t = 27,3 días en una rev.

r = 239 000 millas

Se calcula el periodo T

$$T = \frac{t}{n} = \frac{tiempo}{número\ de\ vuelta}$$

$$t = 27{,}3\ días.\frac{24h}{1\ dia}.\frac{3600s}{1h} = 2{,}4\ x\ 10^6 s$$

$$T = \frac{2{,}4\ x\ 10^6 s}{1} \rightarrow \boldsymbol{T = 2{,}4\ x\ 10^6 s}$$

El radio

$$r = 239000mi.\frac{1609m}{1\ mi} = 3{,}85\ x\ 10^8 m$$

La velocidad angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi rad}{2{,}4x10^6 s} \rightarrow \boldsymbol{\omega = 2{,}6x10^{-6}\frac{rad}{s}}$$

La velocidad lineal

$$v = r\omega = (3{,}85\ x\ 10^8 m).(2{,}6x10^{-6}\frac{rad}{s}) \rightarrow \boldsymbol{v = 1001m/s}$$

La aceleración radial

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(1001m/s)^2}{3{,}85\ x\ 10^8 m} \rightarrow \boldsymbol{a_r = 2{,}6x10^{-3}\frac{m}{s^2}}$$

15.- Un tren viaja a lo largo de una curva circular horizontal que tiene un radio de 600 m. Si la rapidez del tren aumenta uniformemente de 40 km/h a 70 km/h en 4 s, determine la magnitud de la aceleración en el instante en que la rapidez del tren es de 60 Km/h.

<u>Datos</u>

r = 600m

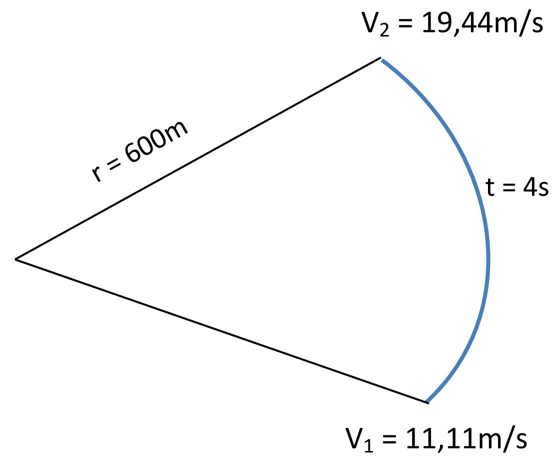
$$v_1 = 40\frac{Km}{h}.\frac{h}{3600s}.\frac{1000m}{1Km} = 11{,}11\frac{m}{s}$$

$$v_2 = 70\frac{Km}{h}.\frac{h}{3600s}.\frac{1000m}{1Km} = 19{,}44\frac{m}{s}$$

t = 4s

a = ?

$$v = 60\frac{Km}{h}.\frac{h}{3600s}.\frac{1000m}{1Km} = 16{,}66\frac{m}{s}$$



Calcular las velocidades angulares

$$v_1 = \omega_1 r \rightarrow \omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{11{,}11m/s}{600m} \rightarrow \boldsymbol{\omega_1 = 1{,}85x10^{-2}rad/s}$$

$$v_2 = \omega_2 r \rightarrow \omega_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{19{,}44m/s}{600m} \rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = 3{,}24x10^{-2}rad/s}$$

Aceleración angular promedio es

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{3{,}24x10^{-2}rad/s - 1{,}85x10^{-2}rad/s}{4s} \rightarrow \boldsymbol{\alpha = 3{,}5x10^{-3}\frac{rad}{s^2}}$$

Se calcula la aceleración tangencial y radial a 60Km/h

$$a_t = r\alpha = (600m)\left(3{,}5x10^{-3}\frac{rad}{s^2}\right) \rightarrow \boldsymbol{a_t = 2{,}1m/s^2}$$

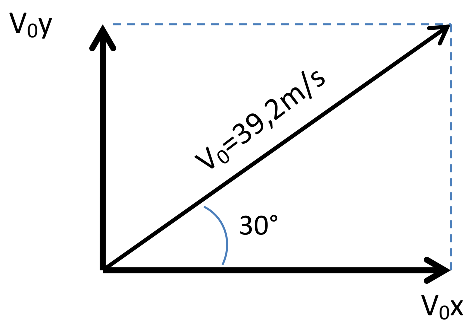
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(16{,}66m/s)^2}{600m} \rightarrow \boldsymbol{a_r = 0,46m/s^2}$$

Para finalizar se calcular la aceleración con Pitágoras

$$a = \sqrt{ar^2 + at^2} = \sqrt{(2{,}1m/s)^2 + (0{,}46m/s)^2} \rightarrow \boldsymbol{a = 2,13m/s^2}$$

17.- Una pequeña pelota se dispara con una velocidad de (39,2 m/s ; 30º) con respecto piso. Calcule a) las componentes de la velocidad al cabo de 1, 2, 3 y 4 seg. b) las componentes de la posición al cabo de los tiempos anteriores. c) Compruebe la trayectoria parabólica graficando altura en función del alcance.

Datos



Se calculas las componentes de las velocidades iniciales

$$v_0x = v_0 cos\theta = 39{,}2\, m/s\, cos30° \rightarrow \boldsymbol{v_0x = 33,9m/s}$$

$$v_0y = v_0 sin\theta = 39{,}2\, m/s\, sin30° \rightarrow \boldsymbol{v_0y = 19,6m/s}$$

a) **Se calcula las velocidades a los t = 1, 2, 3, 4s**

Para t_1 = 1s

$$\vec{v}_x = v_{ix} = v_0x = 33{,}9m/s$$

$$\vec{v}_y = v_{iy} - gt = 19{,}6m/s - \left(9,\frac{8m}{s^2}\right)(1s) = 19{,}6m/s - 9{,}8m/s = 9{,}8m/s$$

Para t_2 = 2s

$$\vec{v}_x = v_{ix} = v_0 x = 33{,}9 m/s$$

$$\vec{v}_y = v_{iy} - gt = 19{,}6 m/s - \left(9{,}\frac{8m}{s^2}\right)(2s) = 19{,}6 m/s - 19{,}6 m/s = 0 m/s$$

Para t_3 = 3s

$$\vec{v}_x = v_{ix} = v_0 x = 33{,}9 m/s$$

$$\vec{v}_y = v_{iy} - gt = \frac{19{,}6m}{s} - \left(9{,}\frac{8m}{s^2}\right)(3s) = \frac{19{,}6m}{s} - \frac{29{,}4m}{s} = -9{,}8 m/s$$

Para t_4 = 4s

$$\vec{v}_x = v_{ix} = v_0 x = 33{,}9 m/s$$

$$\vec{v}_y = v_{iy} - gt = \frac{19{,}6m}{s} - \left(9{,}\frac{8m}{s^2}\right)(4s) = \frac{19{,}6m}{s} - \frac{39{,}2m}{s} = -19{,}6 m/s$$

Recordando que las dos componentes de la velocidad son independientes. Para t=1, 2, 3, 4s sus componentes horizontales son todas iguales: 33,9m/s. Se mantiene constante durante todo el trayecto de lanzamiento. Debido a que el movimiento vertical es en caída libre, las componentes verticales de los vectores de velocidad cambian, segundo a segundo, de 19,6 a 9,8 en la dirección hacia arriba es por eso que el resultado dio positivo, y luego es 0m/s, esto significa que a los 2 segundo la pelota llega a su altura máxima, y t = 2seg es su tiempo máximo. Posteriormente, su velocidad se vuelve -9,8 , -19,6 m/s en la dirección hacia abajo dado que el resultados de sus componentes nos dio negativo y aumentando debido a que va en la misma dirección de la gravedad.

b) las componentes de la posición al cabo de los tiempos anteriores

Para t_1 = 1s

$$x = v_{ix} t = (33{,}9 m/s)(1s) \rightarrow \boldsymbol{x = 33{,}9m}$$

$$y = v_{iy} t - \frac{1}{2} g t^2 = \left(19{,}6\frac{m}{s}\right)(1s) - \frac{1}{2}\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(1s)^2 = 19{,}6m - 4{,}9m \rightarrow \boldsymbol{y = 14{,}7m}$$

Para t_2 = 2s

$$x = v_{ix}t = \left(\frac{33{,}9m}{s}\right)(2s) \rightarrow \boldsymbol{x = 67,8m}$$

$$y = v_{iy}t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(19{,}6\frac{m}{s}\right)(2s) - \frac{1}{2}\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(2s)^2 = 39{,}2m - 19{,}6m \rightarrow \boldsymbol{y = 19,6m}$$

Para t_3 = 3s

$$x = v_{ix}t = (33{,}9m/s\,)(3s) \rightarrow \boldsymbol{x = 101,7m}$$

$$y = v_{iy}t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(19{,}6\frac{m}{s}\right)(3s) - \frac{1}{2}\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(3s)^2 = 58{,}8m - 44{,}1m \rightarrow \boldsymbol{y = 14,7m}$$

Para t_4 = 4s

$$x = v_{ix}t = \left(\frac{33{,}9m}{s}\right)(4s) \rightarrow \boldsymbol{x = 135,6m}$$

$$y = v_{iy}t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(19{,}6\frac{m}{s}\right)(4s) - \frac{1}{2}\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(4s)^2 = 78{,}4m - 78{,}4m \rightarrow \boldsymbol{y = 0m}$$

Recordemos que las componentes de desplazamiento son independientes durante todo el trayecto. La componente horizontal está en aumento de segundo a segundo desde 33,9, 67,9 101,5 y 135, 8m. Donde a los 4 segundo 135,6m es su alcance máximo debido a que la componente vertical (**y=0m**) a los 4segundo es 0m. De esta manera le toma a la pelota 2 segundos ir hacia arriba y dos segundo bajar, para un total de vuelo de 4 segundos. Así pues, su altura máxima a los 2 segundo es y = 19,6m.

C)