OBJETIVO 3

CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN

Cinemática

Es la parte de la física que estudia el movimiento en términos de espacio y tiempo, sin tomar en cuenta los agentes que lo producen.

A partir de la experiencia cotidiana se reconoce que el movimiento representa el cambio continuo en la posición de un objeto. La física estudia trs tipos de movimiento:

1. Traslacional
2. Rotacional y
3. Vibratorio

Un auto que se mueve por una autopista experimenta un movimiento traslacional, el giro diario de la Tierra sobre su eje es un ejemplo de movimiento rotacional, y el movimiento hacia adelante y hacia atrás de un péndulo es un ejemplo de movimiento vibratorio.

En el objetivo 3 vamos a estudiar el movimiento traslacional, si es en el plano horizontal se tomara en cuenta cinemática en una dimensión como:

- Movimiento rectilíneo (M.R.)
- Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.) velocidad constante
- Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A) aceleración constante

Ahora en el plano vertical se tomara el movimiento traslacional como caída libre con aceleración constante (gravedad).

1.- Desplazamiento, velocidad y rapidez

El movimiento de una partícula se conoce por completo si su posición en el espacio se conoce en todo momento. Si una partícula está en movimiento se puede determinar fácilmente el cambio en su posición. **El desplazamiento de una partícula se define como el cambio en su posición.** Conforme se mueve desde una posición inicial x_f, su desplazamiento está dado por $x_f - x_i$. Se usa la letra griegra delta (Δ) para denotar el *cambio en cantidad. Por* lo tanto, el desplazamiento, o cambio en la posición de la partícula, s escribe como

$$\Delta \equiv \ x_f - x_i$$

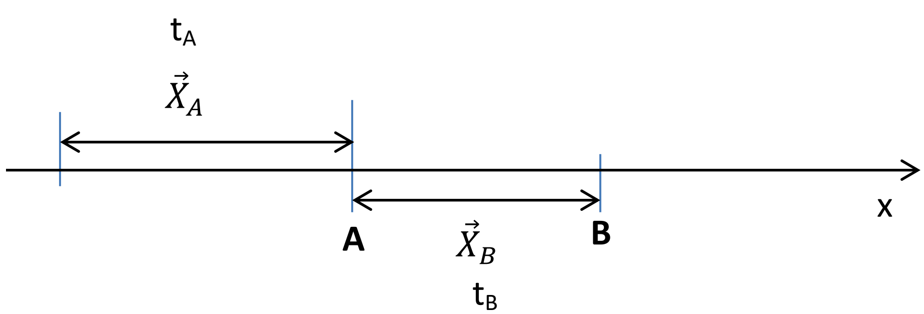
A partir de esta definición se ve que Δx positiva si x_f es mayor que x_i, y negativa si **x_f** es menor que x_i.

Un error muy común es no reconocer la diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida. Cuando un jugador de beisbol batea un *home run* recorre una **distancia** de 360 pies en su viaje alrededor de las bases; sin embargo, su **desplazamiento** es 0 porque las posición final e inicial son idénticas.

El desplazamiento es un ejemplo de cantidad vectorial por lo tanto es una cantidad física que requiere tanto una dirección como de una magnitud. En contraste, un escalar es una cantidad que tiene magnitud más no dirección. Se usara los signos más o menos para indicar la dirección del vector. Se puede hacer esto porque el objetivo 3 trata sólo de movimiento unidimensional; esto significa que cualquier objeto que se estudie sólo puede estarse moviendo a lo largo de una línea recta. Por ejemplo, para movimiento horizontal se especificará de manera arbitraria la derecha como la dirección positiva.

Velocidad promedio ($\vec{V}_{med}$)

La velocidad promedio de una partícula $\vec{v}_x$ se define como el desplazamiento de la partícula, Δ_x, dividido entre el intervalo de tiempo, Δ_t, durante el cual ocurre el desplazamiento



$$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{med}}\boldsymbol{AB} = \frac{\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{A}}}$$

$$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{med}}\boldsymbol{AB} = \frac{\vec{\Delta}_{\boldsymbol{x}}}{\Delta_{\boldsymbol{t}}}$$

$$\vec{V}_{med} = \frac{\textit{desplazamiento total}}{\textit{tiempo total}}$$

$$\vec{V}_{med} = constante \rightarrow M.R.U$$

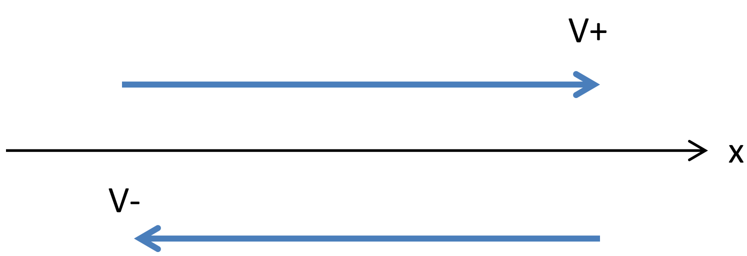
Dimensiones de la velocidad

A partir de esta definición la velocidad promedio tiene dimensiones de longitud divididas por tiempo (L/T), metro por segundo en unidades del SI.

$$[V] = \frac{[L]}{[t]} = \frac{long}{tiempo} = \frac{m}{s}$$

Acuerdo:

Aunque la distancia recorrida en cada movimiento siempre es positiva, la velocida promedio de una partícula moviéndose en una dimensión puede ser positiva o negativa, dependiendo del signo del desplazamiento. (El intervalo de tiempo Δt siempre es positivo). Si la coordenada de uan partícula aumenta con el tiempo (esto, si $x_f > x_i$), entonces Δx es positivo y $\vec{v}_x = \Delta x / \Delta t$ es positivo. Este caso corresponde al movimiento en la dirección x positiva. Si la coordenada disminuye en el tiempo (esto es, si $x_f < x_i$), entonces Δx es negativo y, por tanto $\vec{v}_x$ es negativa. Este caso corresponde al movimiento en la dirección x negativa.



Rapidez promedio

En la vida cotidiana los términos rapidez y velocidad son intercambiables. En física, sin embargo, existe una clara distinción entre estas dos cantidades. Considere un corredor de maratón que corre más de 40Km y, sin embargo, finaliza en el punto de partida. ¡Su velocidad promedio es cero! No obstante, se debe ser capaz de cuantificar qué tan rápido estaba corriendo. Una relación ligeramente diferente resuelve esto. **La rapidez promedio de una partícula, una cantidad , tiempo total que lleva viajar esta distancia:**

$$Rapidez\ promedio = \frac{distancia\ total}{tiempo\ total}$$

Velocidad y rapidez instantánea

Con frecuencia se necesita conocer la velocidad de una partícula en un instante de tiempo particular, más que sobre un intervalo de tiempo finito. Por ejemplo, aun cuando quiera calcular la velocidad promedio durante un largo viaje en automóvil, estará especialmente interesado en conocer la velocidad en el *instante* en que se distingue un carro de policía junto al camino frente a usted. En otras palabras, querrá ser capaz de especificar su velocidad de manera tan precisa como se pueda precisar la posición al notar qué está sucediendo en una lectura específica del reloj: esto es, en algún instante específico. En otras palabras, **la velocidad instantánea, v_x, es igual al valor límite del cociente Δx/Δt conforme Δt se acerca a cero:**

$$\vec{v}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_x}{\Delta_t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

En la notación del cálculo este límite se conoce como la *derivada* de x respecto de t, y se escribe dx/dt.

La velocidad instantánea puede ser positiva, negativa o cero (dependiendo de la pendiente de la recta)

La rapidez instantánea de una partícula se define como la magnitud de su velocidad

$$|\vec{v}_x| = v_x = \frac{dx}{dt}$$

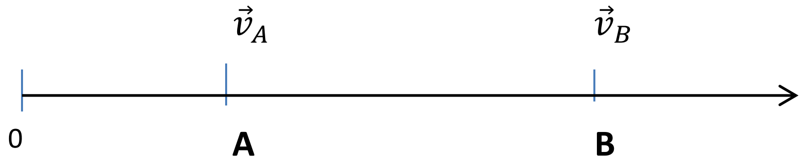
Como sucede con la rapidez promedio, la rapidez instantánea no tiene dirección asociada y, en consecuencia, no lleva signo algebraico.

Aceleración

La aceleración promedio de una partícula se define como el cambio de la velocidad de una partícula en un intervalo de tiempo. Por ejemplo, la velocidad de un auto aumenta cuando se pisa el acelerador y disminuye cuando se aplican los frenos.

$$\bar{a}_x \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{vx_{f\_}vx_i}{t_f - t_i}$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.)



$$\vec{a}_{media} = \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Como con la velocidad, cuando el movimiento que se va a analizar es unidimensional, se pueden usar signos positivo o negativo para indicar la dirección de la aceleración.

Dimensiones de la aceleración

$$[a] = \frac{[Velocidad]}{[tiempo]} = \frac{\frac{Longitud}{tiempo}}{tiempo} = \frac{[L]}{[t^2]} = \frac{m}{s^2}$$

La Unidad SI de la aceleración es metros por segundo al cuadrado (m/s^2)

Aceleración instantánea

Es igual a la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

$$\vec{a}_x = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_x = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_x = \frac{dv_x}{dt}$$

Pero

$$\vec{v}_x = \frac{d\vec{x}}{dt} \to \vec{a}_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)$$

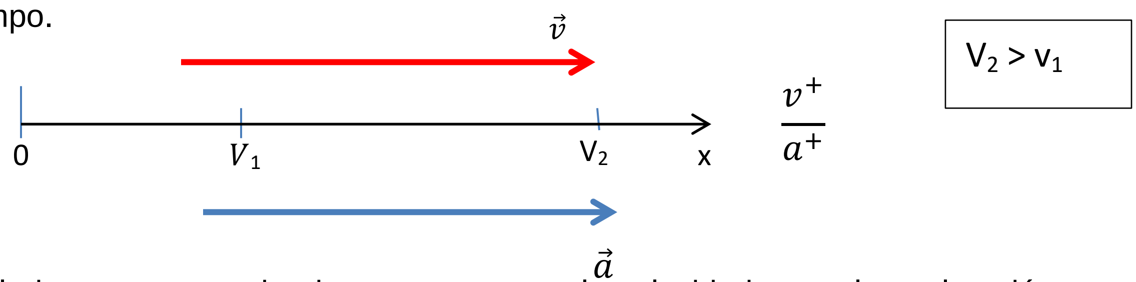
$$\vec{a}_x = \frac{d^2x}{dt^2}i$$

En un movimiento unidimensional la aceleración es igual a la *segunda derivada* de x con respecto al tiempo.

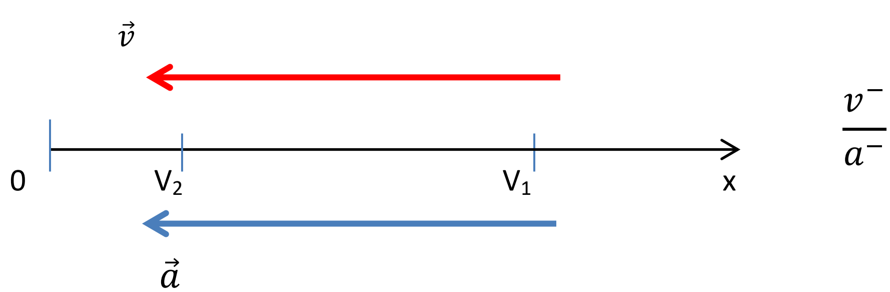
Relación vectorial entre $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en el M.R.

a) Uniformemente acelerado

A menudo se confunden los conceptos de velocidad y aceleración, pero de hecho son cantidades diferentes. Es instructivo usar diagrama de movimiento para describir la velocidad y la aceleración mientras un objeto está en movimiento. Para no confundir estas cantidades vectoriales, se usa rojo para los vectores de velocidad y azul para los vectores de aceleración. Como se puede observar tanto la velocidad y la aceleración tiene el mismo sentido de izquierda a derecha por lo tanto son positivos y la velocidad final (v_2) es mayor que la velocidad inicial (v_1). Esto quiere decir que la velocidad aumenta a transcurrir el tiempo debido a que el desplazamiento de la partícula entre posiciones adyacente se incrementa con el tiempo.

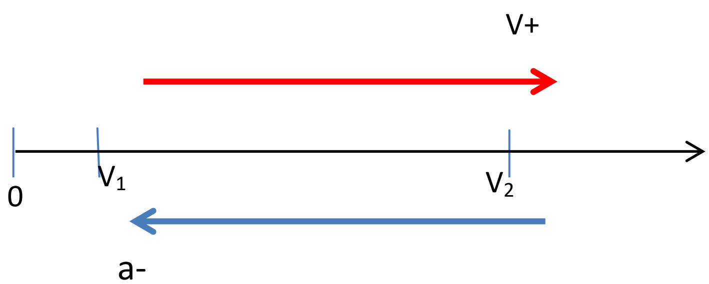


En la imagen se puede observar que tanto la velocidad como la aceleración esta de derecha a izquierda, hacía la **x** negativa. Ambos en el mismo sentido y dirección. La velocidad se incrementa a medida que transcurre el tiempo, donde su velocidad final (v_2) es mayor que la velocidad inicial (v_1).. Se mueve a una velocidad negativa con aceleración negativa.



b) Uniformemente retardado

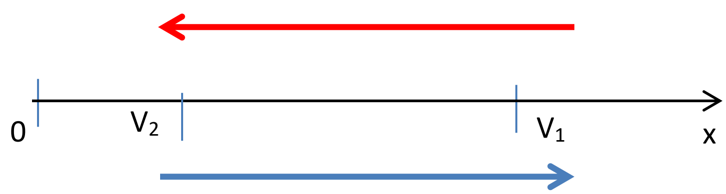
En la figura se puede observar que tanto la velocidad como la aceleración tienen sentido opuesto. La velocidad inicial (v_1) es mayor que la velocidad final (v_2) Esto quiere decir que la partícula se mueve de izquierda a derecha debido a su velocidad es positiva, y que la aceleración que está en sentido contrario hace que se detenga conforme se mueve a la derecha puesto que su desplazamiento disminuye con el tiempo.



$$\frac{v^+}{a^-}$$

$\boxed{V_1 > v_2}$

En este caso se observar que el móvil se mueva hacía la izquierda dado que su velocidad es negativa, disminuyendo conforme transcurre el tiempo y eventualmente llega a cero, debido a la aceleración que está en sentido contrario. Entonces su velocidad inicial (v_1) es mayor que la velocidad final (v_2). El móvil se detiene conforme se mueve a la izquierda. En la imagen se puede observar que tanto la velocidad como la aceleración no están en la misma dirección.



$$\frac{v^-}{a^+}$$

Resumiendo:

$$\vec{v}_x = \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad \vec{a}_x = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{a}_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

CASO 1: $(\vec{a}_x = 0)$

En una partícula cuando su desplazamiento es constante en cada intervalo de tiempo, se dices que su velocidad permanece constante debido a que su aceleración es cero. No hay cambio de velocidad has transcurrir el tiempo por lo tanto es un **Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U.)**

$$\vec{a}_x = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \ \rightarrow \vec{v}_x = constante\ (ctte) \rightarrow M.R.U.$$

$$\vec{v}_x = \frac{d\vec{x}}{dt} \rightarrow d\vec{x} = v_x dt$$

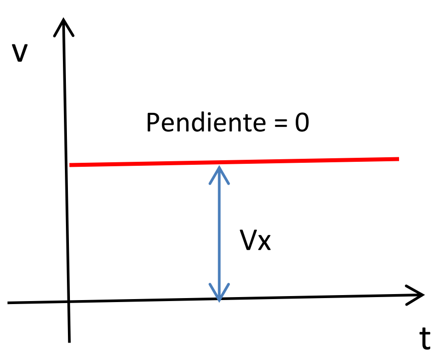
Integrando

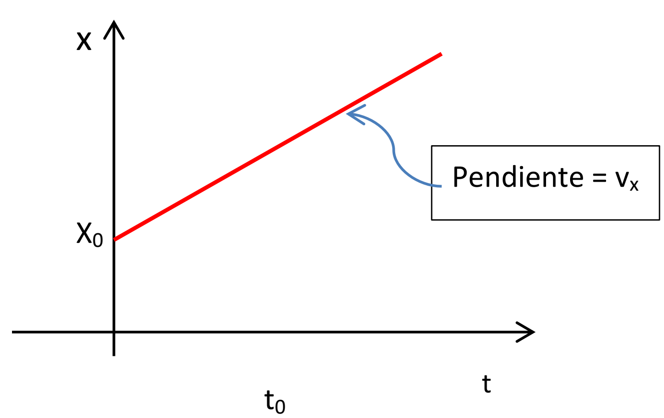
$$\int_{x_0}^{x} d\vec{x} = \int_{t_0}^{t} v_x dt$$

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = \vec{v}_x(t - t_0)$$

$$\boxed{x - x_0 = v_x(t - t_0)}$$ Para M.R.U.

Para la gráfica v-t (velocidad – tiempo) la pendiente permanece constante (línea paralela al eje x) de manera que la velocidad permanece constante. En la gráfica x-t (Posición – tiempo) la pendiente es positiva; esto indica una velocidad positiva que parte de una distancia inicial (x_0). Si la velocidad fuera negativa, la pendiente de la línea de la gráfica x-t sería negativa.





$x = x_0 + v_x t$

CASO 2: $(\vec{a}_x = constante)$

Si la aceleración de una partícula varía con el tiempo, el movimiento puede ser complejo y difícil de analizar. Sin embargo, un tipo muy común y simple de movimiento unidimensional ocurre cuando la aceleración es constante.

$$\vec{a}_x = constante\ (ctte) \rightarrow M.R.U.A.$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{a}$$

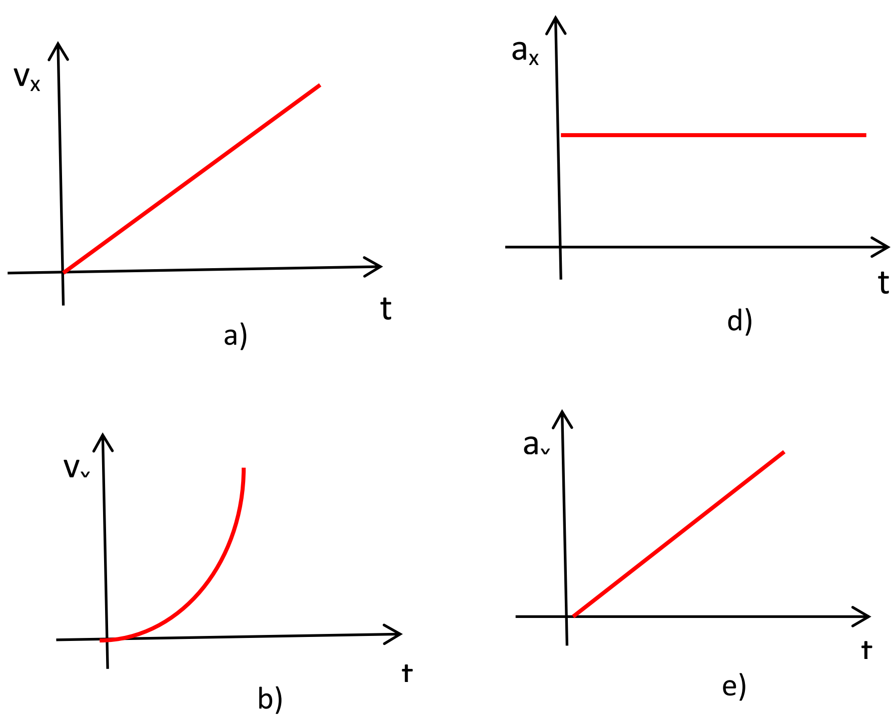
$$\vec{a}_x = \frac{dv_x}{dt} = d\vec{v}_x = \vec{a}_x dt$$

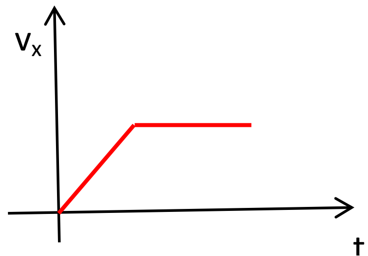
$$\int_{\vec{v}_{0x}}^{\vec{v}_x} d\vec{v}_x = \int_{t_0}^{t} \vec{a}_x dt$$

$$\boxed{\vec{v}_x - \vec{v}_{0x} = \vec{a}_x(t - t_0)} \qquad \text{M.R.U.A.}$$

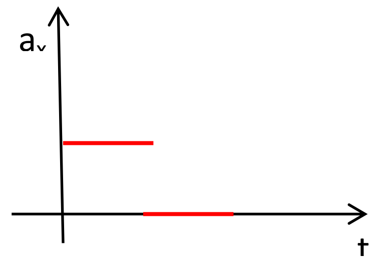
Esta poderosa expresión permite determinar la velocidad de un objeto en cualquier tiempo **t** si se conocen la velocidad inicial y la aceleración (constante).

En la siguiente imagen se puede observar las partes a), b) y c) son gráficas **v_x – t** de objetos en movimiento unidimensional. La aceleración de cada objeto como función del tiempo **(a_x – t)** se muestran en orden d), e) y f).





c)



f)

Ahora se puede usar la expresión ($V_x = v_{0x} + at$) en conjunto con la siguiente que también se sabe que

$$\vec{v}_x = \frac{d\vec{x}}{dt} \rightarrow d\vec{x} = \vec{v}_x dt$$

En combinación se puede usar para obtener el desplazamiento de cualquier objeto como función del tiempo. Recordemos que **dx** representa **x-x_0** y **dt** como **$t - t_0$**

Integramos y utilizando integrar por parte se tiene que

$$\int_{x_0}^{x} d\vec{x} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_x dt$$

$$\int_{x_0}^{x} d\vec{x} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_{0x} dt + \int_{t_0}^{t} \vec{a}_x (t - t_0) dt \quad \left\{ \begin{array}{l} u = (t - t_0) \\ du = dt \end{array} \right.$$

$$\boxed{x - x_0 = \vec{v}_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_x (t - t_0)^2}$$

M.R.U.A.

Por último, es posible obtener una expresión para la velocidad final que no contenga un intervalo de tiempo partiendo de la siguiente ecuación

$$\vec{a}_x = \frac{dv_x}{dt} = d\vec{v}_x = \vec{a}_x dt$$

Multiplicamos $\vec{v}_x$ en ambos miembros de la igualdad

$$\vec{v}_x d\vec{v}_x = \vec{a}_{x0} \vec{v}_x dt$$

$$v_x d\vec{v}_x = a_x \vec{v}_x dt$$

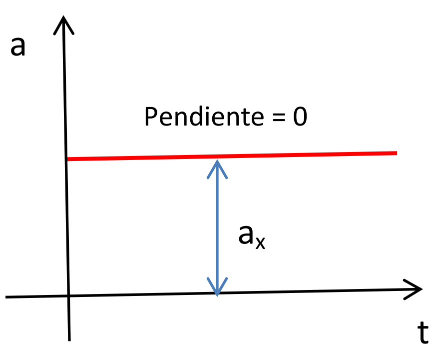
$$v_x d\vec{v}_x = a_x \frac{d\vec{x}}{dt} dt$$

$$v_x d\vec{v}_x = a_x \frac{d\vec{x}}{\cancel{dt}} \cancel{dt}$$

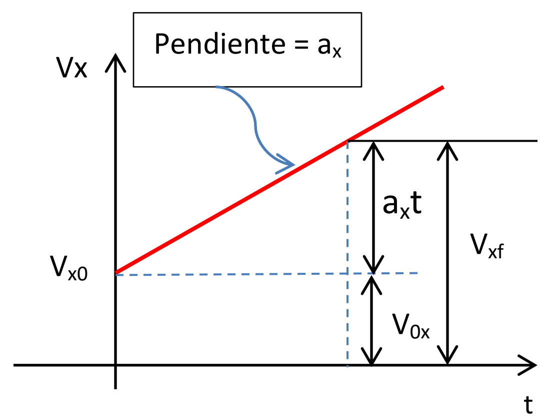
$$\int_{v_{0x}}^{v_x} v_x d\vec{v}_x = \int_{x_0}^{x} a_x dx$$

$$\boxed{{v_x}^2 - {v_{0x}}^2 = 2a_x(x - x_0)} \qquad \text{M.R.U.A.}$$

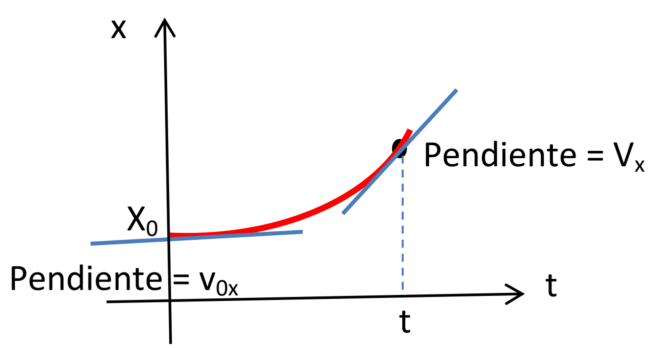
En la imagen se observa un objeto que se mueve a lo largo del eje x con aceleración constante a_x en el M.R.U.A. a) la gráfica aceleración-tiempo. b) La gráfica velocidad-tiempo. c) la gráfica posición-tiempo.



a)



b)



c)

Resumiendo

CASO 1: $(\vec{a}_x = 0)$

$$x - x_0 = v_x(t - t_0)$$

Para M.R.U.

Esta ecuación es una expresión para calcular cualquier problema con movimiento rectilíneo uniforme. Donde la velocidad permanece constante y la aceleración es cero.

CASO 2: $(\vec{a}_x = constante)$ Para M.R.U.A.

$$\vec{v}_x - \vec{v}_{0x} = \vec{a}_x(t - t_0)$$

$$x - x_0 = \vec{v}_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_x(t - t_0)^2$$

$$v_x{}^2 - v_{0x}{}^2 = 2a_x(x - x_0)$$

Estas ecuaciones son expresiones cinemáticas que pueden utilizarse para resolver cualquier problema de movimiento unidimensional con aceleración constante. Recuerde que estas relaciones se obtuvieron de las definiciones de velocidad y aceleración junto con algunos manejos algebraicos simples e integrales y el requerimiento de que la aceleración sea constante. La elección de cuál ecuación debe utilizarse en una situación determinada dependerá de qué se conoce de antemano. Algunas veces es necesario emplear dos de estas ecuaciones para resolver dos incógnitas.

Caída Libre

Ahora es bien sabido que, en ausencia de resistencia de aire, todos los objetos que se dejan caer cerca de la superficie de la Tierra caen hacia ella con la misma aceleración constante bajo la influencia de la gravedad terrestre. **Un objeto que cae libremente es cualquiera que se mueve con libertad bajo la influencia de la gravedad, sin importar su movimiento inicial. Los objetos lanzados hacia arriba o hacia abajo y los que se sueltan desde el reposo todos caen libremente una vez que se han liberado. Cualquier objeto que cae libremente experimenta una aceleración dirigida hacia abajo, independiente del movimiento inicial del objeto.**

Se denotará la magnitud de la aceleración de *caída libre* con el símbolo ***g.*** El valor de **g** cerca de la superficie de la Tierra disminuye conforme aumenta la altitud. También hay ligeras variaciones de **g** con los cambios en la latitud. Es común definir "arriba" como la dirección **+ y** y usar **y** como la posición variable en las ecuaciones. Durante el resto del semestre se utilizara **g = 9,8m/s^2**

Se desprecia la resistencia del aire, la latitud y la actitud para resolución de problemas

$$\vec{a} = \pm gj = 9{,}8m/s^2$$

$$\boxed{\vec{v}_y - \vec{v}_{0y} = \pm g(t - t_0)}$$

$$\boxed{y - y_0 = \vec{v}_{0y}(t - t_0) \pm \frac{1}{2}g(t - t_0)^2}$$

$$\boxed{{v_y}^2 - {v_{0y}}^2 = \pm 2g(y - y_0)}$$

El movimiento se realiza en la dirección vertical (la dirección **y**) la aceleración está dirigida hacia abajo y tiene una magnitud de 9,8m/s^2. De este modo siempre se tendrá a_y = -g = -9,8m/s^2 donde el signo menos significa que la aceleración de un objeto en caída libre está dirigida hacia abajo.

Ejemplo

De la guía de ejercicios de la Profesora Lucía Moncada del Objetivo 3 Cinemática de una dimensión.

UNA SOLA PARTÍCULA

3.- Un cuerpo cuando llevaba una velocidad de 2 m/s acelera con una magnitud de 2,5 m/s^2. a) Calcule la velocidad (componente horizontal) del cuerpo al cabo de 2, 8 y 10 segundos. b) Determine la posición (horizontal) al cabo de los tiempos anteriores. c) Determine el tiempo en alcanzar las posiciones 56 y 100 m. D) Calcule el tiempo que tardaría en alcanzar una componente de velocidad de 20 y 25 m/s . Efectúe las gráficas d(t) y v(t).

Datos:

V_0 = 2m/s

a = 2,5 m/s^2

a) v(2,8,10s) = ?

b) x (2, 8, 10s) = ?

c) t (56 y 100m) = ?

d) t (20 y 25 m/s) = ?

a) $$a = \frac{v - v_0}{t} \rightarrow v = v_0 + at$$

v (2s) = 2m/s + 2,5m/s.2s = 7m/s

v (8s) = 2m/s + 2,5m/s.8s = 22m/s

v (10s) = 2m/s + 2,5m/s.10s = 27m/s

b) $$x - \cancel{x_0} = \cancel{\vec{v}_{0x}}(t - \cancel{t_0}) + \frac{1}{2}\vec{a}_x(t - \cancel{t_0})^2$$

t_0= 0 , x_0 = 0, v_{0x} = 2m/s

$$x = \vec{v}_{0x}t + \frac{at^2}{2}$$

$$x(2s) = \frac{2m}{s}.2s + \frac{\left(2{,}5\,{}^{m}/{}_{s^2}\right)(2s)^2}{2} = 4m + \frac{(2{,}5\,{}^{m}/{}_{s^2})(4s^2)}{2} = 9m$$

$$x(8s) = \frac{2m}{s}.8s + \frac{\left(2{,}5\,{}^{m}/{}_{s^2}\right)(8s)^2}{2} = 16m + \frac{(2{,}5\,{}^{m}/{}_{s^2})(64s^2)}{2} = 96m$$

$$x(10s) = \frac{2m}{s}.10s + \frac{\left(2{,}5\,{}^{m}/{}_{s^2}\right)(10s)^2}{2} = 20m + 125m = 145m$$

c) $x = \vec{v}_{0x}t + \frac{at^2}{2}$

$$56 = 2t + \frac{2{,}5t^2}{2}$$

$$56 = 2t + 1{,}25t^2 = 1{,}25t^2 + 2t - 56 = 0$$

a =1,25
b= 2
c= -56

Utilizando la ecuación cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1{,}25)(-56)}}{2(1{,}25)}$$

$$= \frac{-2 \pm 16{,}8}{2{,}5}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 16{,}8}{2{,}5} = 5{,}92s$$

$$x_2 = \frac{-2 - 16{,}8}{2{,}5} = -7{,}52s$$

Se toma 5,92s para la distancia de 56m

Para x = 100m

a= 1,25

b = 2

c = .100

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1{,}25)(-100)}}{2(1{,}25)}$$

$$= \frac{-2 \pm 22{,}45}{2{,}5}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 22{,}45}{2{,}5} = 8{,}18s$$

$$x_2 = \frac{-2 - 22{,}45}{2{,}5} = -9{,}75s$$

Se toma 8,18s para x=100m

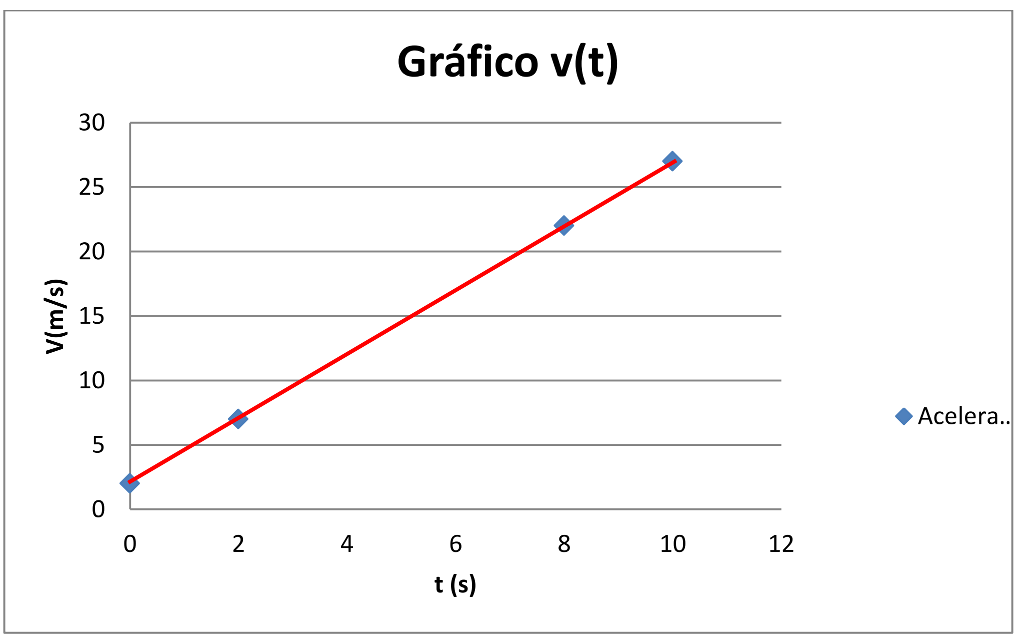
d)

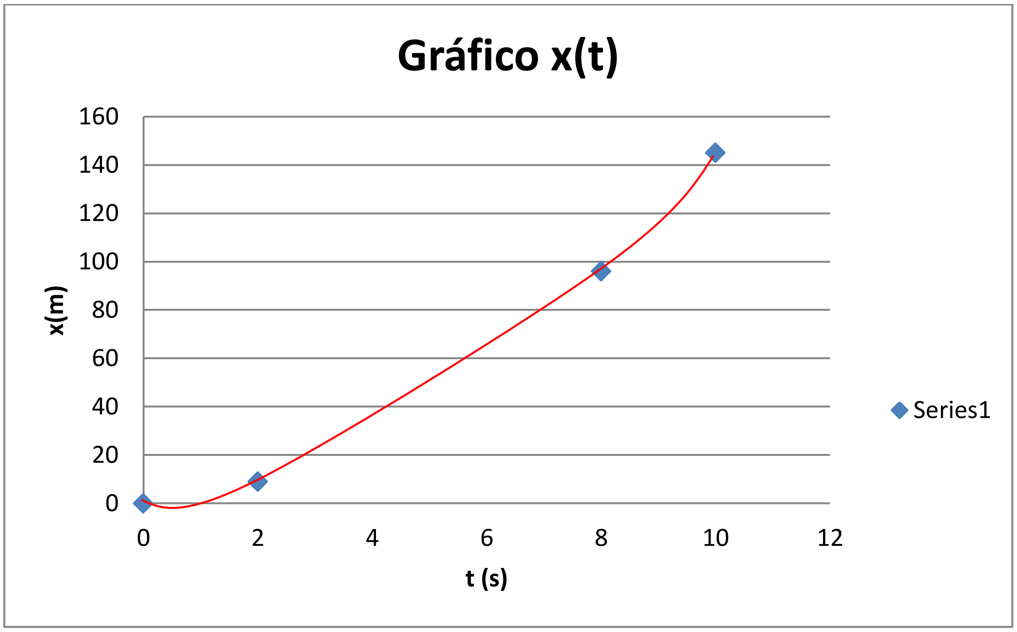
$$a = \frac{v - v_0}{t} \rightarrow at = v - v_0$$

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$t(20m/s) = \frac{20m/s - 2m/s}{2{,}5m/s^2} = 7{,}2s$$

$$t(25m/s) = \frac{25m/s - 2m/s}{2{,}5m/s^2} = 9{,}2s$$





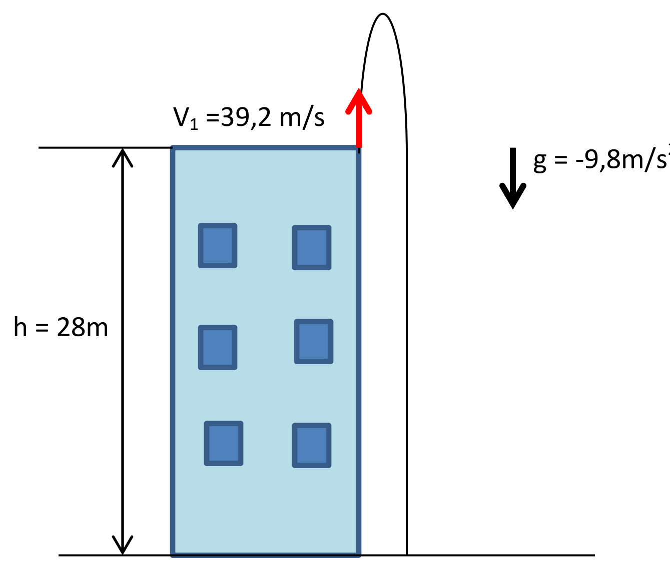
8.- Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 39,2 s m y desde una altura de 28 m a) Determine la velocidad en los siguientes tiempos 1, 2, 3, 4 y 5seg. b) Calcule la altura del cuerpo en esos tiempos. c) determine el tiempo en lograr las alturas de 39,2; 44,1; y 0 m d) Calcule el tiempo en alcanzar una componente vertical de velocidad de -29,4; -9,8; 30,5 y s m e) Calcule la altura máxima, tiempo máximo y tiempo de vuelo. F) Velocidad al llegar al suelo

<u>Datos:</u>

V_1 = 39,2 m/s

h_1 = 28m

a) V(1,2,3,4,y,5s) = ?
b) h (1, 2, 3, 4, y 5s) = ?
c) t (39,2m, 44,1m y 0m) = ?
d) t (-29,4m/s, -9,8m/s^2, 30,5m/s) = ?
e) hmax = ?
   tmax = ?
   tiempo de vuelo = ?
f) Velocidad al llegar al suelo = ?



a) Nos vamos a las fórmulas que cumpla en movimiento vertical, en este caso caída libre.

Ahora vemos los datos que tenemos en este caso tenemos velocidad inicial v_1 =39,2m/s y la altura inicial que la denotamos por h_1= 28m también podemos denotarlo por y_1 = 28m y tenemos que calcular esta velocidad en varios tiempo (t = 1, 2, 3, 4 y 5s). Para cada segundo lo vamos a nombrar por el abecedario en el mismo orden para organizar la posición durante el proyecto. Para t = 1 s se denotara por el literal B así sucesivamente para t = 2, 3, 4 y 5 seg C D E F

Respectivamente.

Para calcular la velocidad a t = 1s tenemos

$$\boxed{\vec{v}_y - \vec{v}_{0y} = \pm g(t - t_0)}$$

Usando t_A = 0s como el tiempo en que la pelota deja la mano del lanzador en la posición A

Cambiando el subíndice en la ecuación donde la V_{0y} en la posición A y la velocidad final Vy en la posición B

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = -g(t_B - t_A)$$

Despejamos v_B y sustituimos datos

$$\vec{v}_B = -g(t_B - t_A) + \vec{v}_A$$

$$\vec{v}_B = -9{,}8\, m/s^2\,(1s - 0s) + 39{,}2\, m/s$$

$$\vec{v}_B = -9{,}8\, m/s + 39{,}2\, m/s$$

$$\vec{v}_B = 29{,}4\, m/s$$

Para calcular las velocidades en t=2, 3, 4 y 5 s utilizamos la misma fórmula

t = 2 s

$$\vec{v}_C = -g(t_C - t_A) + \vec{v}_A = -9{,}8\, m/s^2\,(2s - 0s) + 39{,}2\, m/s = 19,6\, m/s$$

t = 3 s

$$\vec{v}_D = -g(t_D - t_A) + \vec{v}_A = -9{,}8\, m/s^2\,(3s - 0s) + 39{,}2\, m/s = 9,8\, m/s$$

t = 4 s

$$\vec{v}_E = -g(t_E - t_A) + \vec{v}_A = -9{,}8\,m/s^2\,(4s - 0s) + 39{,}2\,m/s = 0\,m/s$$

t = 5 s

$$\vec{v}_F = -g(t_F - t_A) + \vec{v}_A = -9{,}8\,m/s^2\,(5s - 0s) + 39{,}2\,m/s = -9{,}8\,m/s$$

b) Para calcular la altura se puede utilizar la siguiente ecuación. Desplazamiento en función del tiempo.

$$y - y_0 = \vec{v}_{0y}(t - t_0) \pm \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

Cambiamos el subíndice de acuerdo a la posición y trabajamos por tramos como hicimos con el anterior ecuación. Tomamos como altura inicial $\mathbf{y_0}$ = 28m y los denotamos como $\mathbf{y_A}$ **= 28m**, para tiempo inicial $\mathbf{t_0}$ = 0 s, vas ser $\mathbf{t_A}$ **= 0 s,** la velocidad inicial $\mathbf{v_{0y}}$ **= 39,2 m/s.** Despejamos la altura final $\mathbf{y_A}$, sustituimos los valores y obtenemos la altura a **1s**.

<u>TRAMO AB</u> (t = 1 s)

$$y_B - y_A = \vec{v}_A(t_B - t_A) - \frac{1}{2}g(t_B - t_A)^2$$

$$y_B = \vec{v}_A(t_B - t_A) - \frac{1}{2}g(t_B - t_A)^2 + y_A$$

$$y_B = 39{,}2\,m/s\,(1s - 0s) - \frac{1}{2}9{,}8\,m/s^2\,(1s - 0s)^2 + 28m$$

$$y_B = 39{,}2m - 4{,}9\,m/s^2.\,1s^2 + 28m = 39{,}2m - 4{,}9m + 28m$$

$$y_B = 57{,}4m$$

<u>TRAMO AC</u> (t = 2 s)

$$y_C = \vec{v}_A(t_C - t_A) - \frac{1}{2}g(t_C - t_A)^2 + y_A$$

$$y_C = 39{,}2\,m/s\,(2s - 0s) - \frac{1}{2}9{,}8\,m/s^2\,(2s - 0s)^2 + 28m$$

$$y_C = 78{,}4m - 4{,}9\,m/s^2.\,4s^2 + 28m = 78{,}4m - 19{,}6m + 28m$$

$y_C = 86{,}8m$

<u>TRAMO AD</u> (t = 3 s)

$$y_D = \vec{v}_A(t_D - t_A) - \frac{1}{2}g(t_D - t_A)^2 + y_A$$

$$y_D = 39{,}2\,m/s\,(3s - 0s) - \frac{1}{2}9{,}8\,m/s^2\,(3s - 0s)^2 + 28m$$

$$y_D = 117{,}6m - 4{,}9\,m/s^2.\,9s^2 + 28m = 117{,}6m - 44{,}1m + 28m$$

$y_C = 101{,}5m$

<u>TRAMO AE</u> (t = 4 s)

$$y_E = \vec{v}_A(t_E - t_A) - \frac{1}{2}g(t_E - t_A)^2 + y_A$$

$$y_E = 39{,}2\,m/s\,(4s - 0s) - \frac{1}{2}9{,}8\,m/s^2\,(4s - 0s)^2 + 28m$$

$$y_E = 156{,}8m - 4{,}9\,m/s^2.\,16s^2 + 28m = 156{,}8m - 78{,}4m + 28m$$

$y_E = 106{,}4m$

<u>TRAMO AF</u> (t = 5 s)

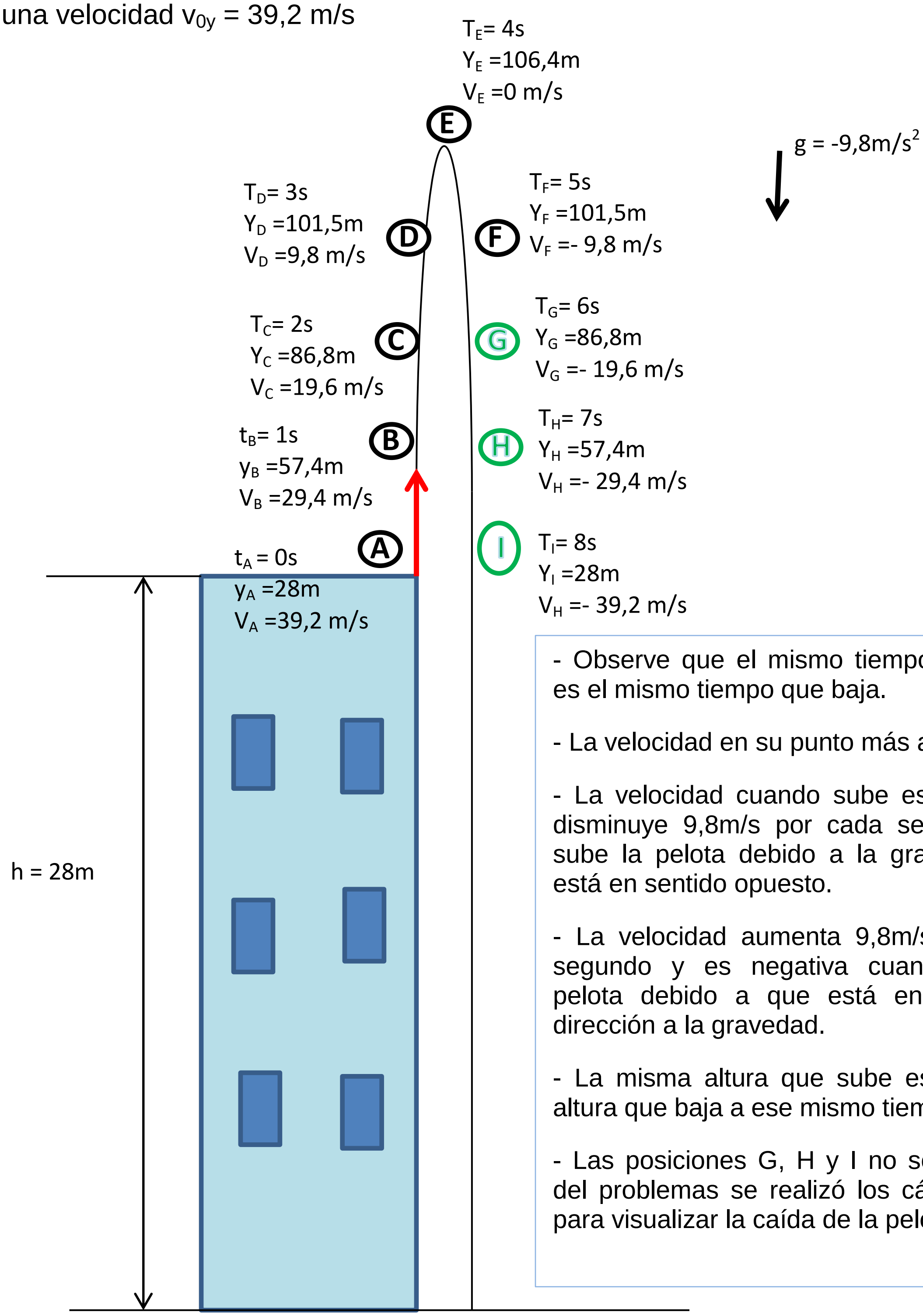
$$y_F = \vec{v}_A(t_F - t_A) - \frac{1}{2}g(t_F - t_A)^2 + y_A$$

$$y_F = 39{,}2\,m/s\,(5s - 0s) - \frac{1}{2}9{,}8\,m/s^2\,(5s - 0s)^2 + 28m$$

$$y_F = 196m - 4{,}9\,m/s^2.\,25s^2 + 28m = 196m - 122{,}5m + 28m$$

$y_F = 101{,}5m$

En la siguiente figura se visualiza la posición y velocidad versus tiempo para una pelota que cae en libertad luego de haber sido lanzada inicialmente hacia arriba con una velocidad v_{0y} = 39,2 m/s



- Observe que el mismo tiempo que sube es el mismo tiempo que baja.

- La velocidad en su punto más alto es cero

- La velocidad cuando sube es positiva y disminuye 9,8m/s por cada segundo que sube la pelota debido a la gravedad que está en sentido opuesto.

- La velocidad aumenta 9,8m/s por cada segundo y es negativa cuando cae la pelota debido a que está en la misma dirección a la gravedad.

- La misma altura que sube es la misma altura que baja a ese mismo tiempo.

- Las posiciones G, H y I no son cálculos del problemas se realizó los cálculos sólo para visualizar la caída de la pelota

c) Calcular el tiempo en lograr la altura de 39,2m; 44,1m y 0m. Para resolver

Utilizaremos la ecuación desplazamiento en función del tiempo. tenemos la distancia inicial y_0 = 28m, gravedad g = 9,8m/s^2, y la altura de la cual se requiere calcular el tiempo y = 39,2m. Despejamos, sustituimos los datos y calculamos la ecuación cuadrática para obtener el tiempo a esa altura.

$$y - y_0 = \vec{v}_{0y}(t - t_0) \pm \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

$$39{,}2m - 28m = 39{,}2\, m/s\, (t - 0) - \frac{1}{2}9{,}8\, m/s^2\, (t - 0)^2$$

$$11{,}2m = 39{,}2t - 4{,}9t^2$$

$$4{,}9t^2 - 39{,}2t + 11{,}2 = 0$$

Tenemos una ecuación de segundo grado

a = 4,9 b = -39,2 c = 11,2

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-39{,}2) \pm \sqrt{(-39{,}2)^2 - 4(4{,}9)(11{,}2)}}{2(4{,}9)}$$

$$= \frac{39{,}2 \pm 36{,}3}{9{,}8}$$

$$x_1 = \frac{39{,}2 + 36{,}3}{9{,}8} = 7{,}7s$$

$$x_2 = \frac{39{,}2 - 36{,}3}{9{,}8} = 0{,}3s$$

El tiempo a la altura de 39,2m es 0,3 s cuando la pelota sube, y t = 7,7 s cuando la pelota baja a esa misma altura.

<u>Calculo para la altura de 44,1m</u>

$$44{,}1m - 28m = 39{,}2\, m/s\, (t - 0) - \frac{1}{2}9{,}8\, m/s^2\, (t - 0)^2$$

$16{,}1m = 39{,}2t - 4{,}9t^2$

$4{,}9t^2 - 39{,}2t + 16{,}1 = 0$

Tenemos una ecuación de segundo grado

a = 4,9 b = -39,2 c = 16,1

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-39{,}2) \pm \sqrt{(-39{,}2)^2 - 4(4{,}9)(16{,}1)}}{2(4{,}9)}$$

$$= \frac{39{,}2 \pm 34{,}9}{9{,}8}$$

$$x_1 = \frac{39{,}2 + 34{,}9}{9{,}8} = 7{,}6s$$

$$x_2 = \frac{39{,}2 - 34{,}9}{9{,}8} = 0{,}43s$$

El tiempo que tarda en tener una altura de 44,1m es 0,43 s cuando la pelota sube, y 7,6 s cuando la pelota cae.

Para la altura de 0m

$0m - 28m = 39{,}2\,m/s\,(t-0) - \frac{1}{2}9{,}8\,m/s^2\,(t-0)^2$

$28m = 39{,}2t - 4{,}9t^2$

$4{,}9t^2 - 39{,}2t + 28 = 0$

Tenemos una ecuación de segundo grado

a = 4,9 b = -39,2 c = 28

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-39{,}2) \pm \sqrt{(-39{,}2)^2 - 4(4{,}9)(28)}}{2(4{,}9)}$$

$$= \frac{39{,}2 \pm 45{,}67}{9{,}8}$$

$$x_1 = \frac{39{,}2 + 45{,}67}{9{,}8} = 8{,}6s$$

$$x_2 = \frac{39{,}2 - 45{,}67}{9{,}8} = -0{,}66s$$

El tiempo que tarda cuando llega la pelota al suelo es 8,6 s

d) Para calcular el tiempo a una velocidad de -29,4m/s utilizamos la ecuación de la velocidad en función del tiempo.

$$\vec{v} - \vec{v}_A = -g(t - \cancel{t_A})$$

$$\vec{v} - \vec{v}_A = -gt$$

$$t = \frac{\vec{v} - \vec{v}_A}{-g} = \frac{-29{,}4\, m/s - 39{,}2\, m/s}{-9{,}8\, m/s^2} = \frac{-68{,}6\, m/s}{-9{,}8\, m/s^2}$$

$$t = 7s$$

<u>Para la v = 30,5 m/s</u>

$$t = \frac{\vec{v} - \vec{v}_A}{-g} = \frac{30{,}5\, m/s - 39{,}2\, m/s}{-9{,}8\, m/s^2} = \frac{-8{,}7\, m/s}{-9{,}8\, m/s^2}$$

$$t = 0{,}88s$$

e) Para calcular la altura máxima sabemos que cuando llega a su punto más alto la velocidad es cero y por los cálculos del incisivo **a)** calculamos el tiempo cuando llega a esa altura que es **4s** y en el incisivo **b)** ya se realizó el cálculo de su altura máxima que nos dio 106,4m. pero para su fines educativo se los voy a realiza con la ecuación de la velocidad en función del tiempo.

Tramo AE

$$\cancel{\vec{v}_E} - \vec{v}_A = -g(t_E - \cancel{t_A})$$

$$t_E = \frac{\vec{v}_A}{-g} = \frac{39{,}2\,m/s}{-9{,}8\,m/s^2} \rightarrow t_E = 4s$$

Tiempo en su punto más alto también es su tiempo máximo

$$t_{máx} = 4s$$

Para cálculo de la altura máxima se utiliza la ecuación velocidad en función del desplazamiento

$${v_y}^2 - {v_{0y}}^2 = \pm 2g(y - y_0)$$

$$\cancel{{v_E}^2} - {v_A}^2 = -2g(y_E - y_A)$$

$$y_E = \frac{-{v_A}^2}{-2g} + y_A = \frac{(39{,}2\,m/s)^2}{2(9{,}8\,m/s)} + 28m$$

$$y_E = \frac{1536{,}64\,m^2/s^2}{19{,}6\,m/s^2} + 28m = 78{,}4m + 28m$$

$$y_E = 106{,}4m$$

El tiempo de vuelo se calculó y dio 8,6 s lo hicimos en el incisivos **c)** con h = 0m

f) Para calcular la velocidad para llegar al suelo utilizamos la ecuación la velocidad en función del tiempo.

$$\vec{v}_y - \vec{v}_{0y} = \pm g(t - t_0)$$

$$v = -gt + v_A = -9{,}8\,m/s^2 .\, 8{,}6s + 39{,}2\,m/s$$

$$v = -45{,}08\,m/s$$

12.- La posición de un cuerpo en un determinado Sistema de Referencia viene dada por el vector: $r(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)(m)$ Calcular a) La velocidad media entre t=0 s y t=3 s b)La aceleración media entre t=0s y t=3s c)La aceleración instantánea en t= 2 s

a) La velocidad media t = 0 s y t = 3 s

$$\bar{V} = \frac{r_f - r_0}{\Delta t}$$

$$r_0(0s) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(0)\right)m = 0m$$

$$r_0(3s) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(3)\right)m = \sin\frac{3\pi}{2}m = -1m$$

$$\bar{V} = \frac{r_f - r_0}{\Delta t} = \frac{-1m - 0m}{3s - 0s} = \frac{-1}{3}\frac{m}{s}$$

b) La aceleración media entre t=0s y t=3s

$$\bar{a} = \frac{v_f - v_0}{\Delta t}$$

Para obtener la velocidad derivamos la posición $r(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)(m)$ con respeto al tiempo.

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\frac{m}{s}$$

$$v(0s) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}(o)\right)\frac{m}{s} = \frac{\pi}{2}\cos 0\frac{m}{s} = \frac{\pi}{2}\frac{m}{s}$$

$$v(3s) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}(3)\right)\frac{m}{s} = \frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2}\frac{m}{s} = 0\frac{m}{s}$$

$$\bar{a} = \frac{v_f - v_0}{\Delta t} = \frac{0\,m/s - \frac{\pi}{2}\frac{m}{s}}{3s - 0s} = -\frac{\pi}{6}\frac{m}{s^2}$$

c) La aceleración instantánea en t= 2 s

Para calcular la aceleración instantánea se deriva la velocidad $v(t) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\frac{m}{s}$ con respecto al tiempo

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

La aceleración instantánea en t = 2s

$$a_{(2s)} = -\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}2\right) = 0\,\frac{m}{s^2}$$

14.- La aceleración de un objeto viene dada por la función: $a(t) = 1 + 2t(\frac{m}{s^2})$ y sus condiciones iniciales en un determinado Sistema de Referencia son: x_0=3 m, y V_{0x} = 5(m/s). ¿Dónde se encontrará el objeto 1 segundo después de comenzado el movimiento?

Datos:

X_0 = 3m

V_{0x} = 5 m/s

$X_{(1s)}$ = ?

$$a = \frac{dv}{dt}\,; \quad v = \int a dt$$

$$v = \int (1+2t)dt = t + \frac{2t^2}{2} + c_0$$

$$v = (t + t^2 - 5)\frac{m}{s} = (t^2 + t - 5)\frac{m}{s}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = vdt \rightarrow x = \int vdt$$

$$x = \int (t^2 + t - 5)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 5t + c_1$$

$$x = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 5t + 3m$$

$$x_{(1s)} = \frac{(1s)^3}{3} + \frac{(1s)^2}{2} - 5(1s) + 3m$$

$$x_{(1s)} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 5 + 3\right)m$$

$$x_{(1s)} = \left(\frac{2+3}{6} - 2\right)m = \frac{5}{6} - 2$$

$$x_{(1s)} = \frac{-7}{6}m$$

DOS PARTÍCULAS

17.- Un auto y una moto parten del reposo al mismo tiempo en una pista recta, pero la moto está 125m detrás del auto. El auto acelera a razón de (3,80 m/s^2 , 0º) y la moto a (4,70 m/s^2 ,0º). Efectúa el diagrama del movimiento. A) ¿Cuánto tiempo pasa hasta que se encuentran? B) ¿Qué tan lejos viajó cada vehículo durante ese tiempo? C) ¿A qué distancia están uno del otro 5s después del encuentro? D) Repetir este ejercicio pero suponiendo que la aceleración del auto es (3,80 2 s m , 180º)

<u>DATOS:</u>

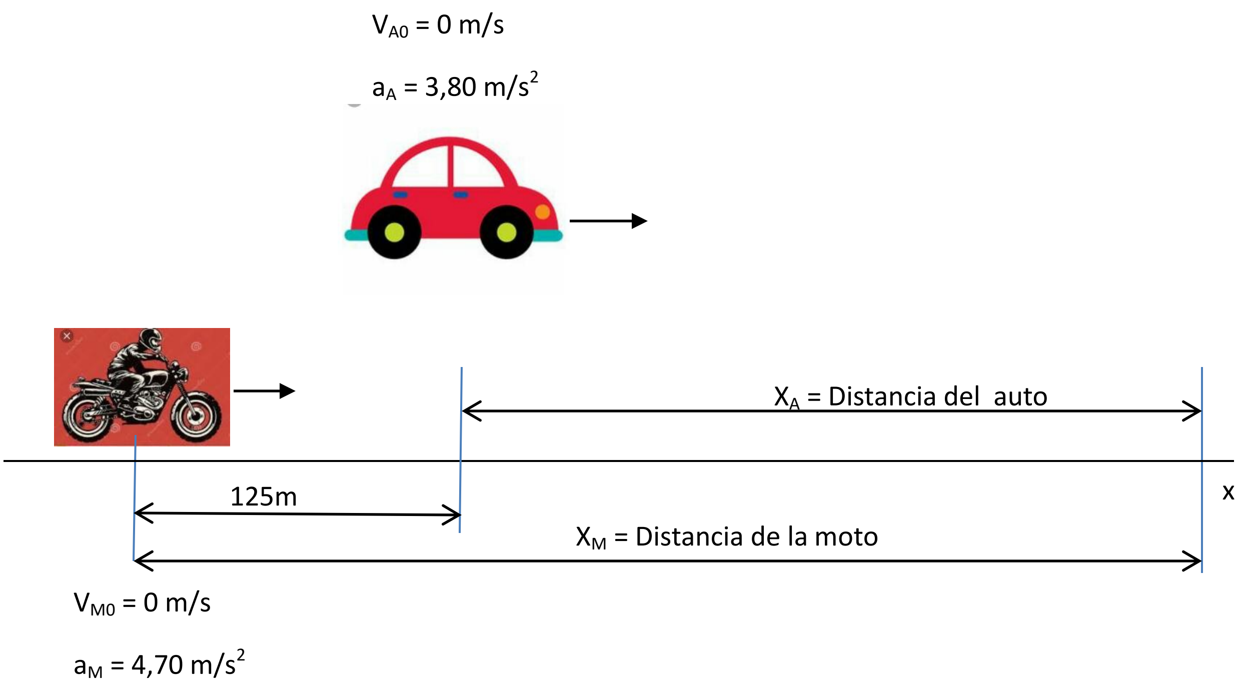
$V_{M0} = 0$

$V_{A0} = 0$

$X_M = X_A - 125m$

$a_A = (3{,}80\ m/s^2, 0°)$

$a_M = (4{,}70\ m/s^2, 0°)$



a) ¿Cuánto tiempo pasa hasta que se encuentran?

$$x_M = \frac{1}{2} a_M t^2 \quad (\boldsymbol{ec.1})$$

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + 125m \;\; (\boldsymbol{ec.2})$$

Para que la moto alcance al auto, igualamos la ecuación 1 con la ecuación 2

$$x_M = x_A$$

$$\frac{1}{2} a_M t^2 = \frac{1}{2} a_A t^2 + 125m$$

Sustituimos la aceleración, agrupamos término, despejamos tiempo y calculamos t

$$\frac{(4{,}70\, m/s^2)}{2} t^2 = \frac{3{,}80\, m/s^2}{2} t^2 + 125m$$

$$2{,}35\, m/s^2\, t^2 - 1{,}9\, m/s^2\, t^2 = 125m$$

$$0{,}45\, m/s^2\, t^2 = 125m$$

$$t^2 = \frac{125m}{0{,}45\, m/s^2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{125m}{0{,}45\, m/s^2}} \rightarrow t = 16{,}7s$$

b) ¿Qué tan lejos viajó cada vehículo durante ese tiempo?

$$x_M = \tfrac{1}{2}(4{,}70\, m/s^2)\,(16{,}7s)^2 \rightarrow x_M = 655m$$

$$x_A = \tfrac{1}{2}(3{,}8\, m/s^2)\,(16{,}7s)^2 + 125m \rightarrow x_A = 530m$$

c)) ¿A qué distancia están uno del otro 5s después del encuentro?

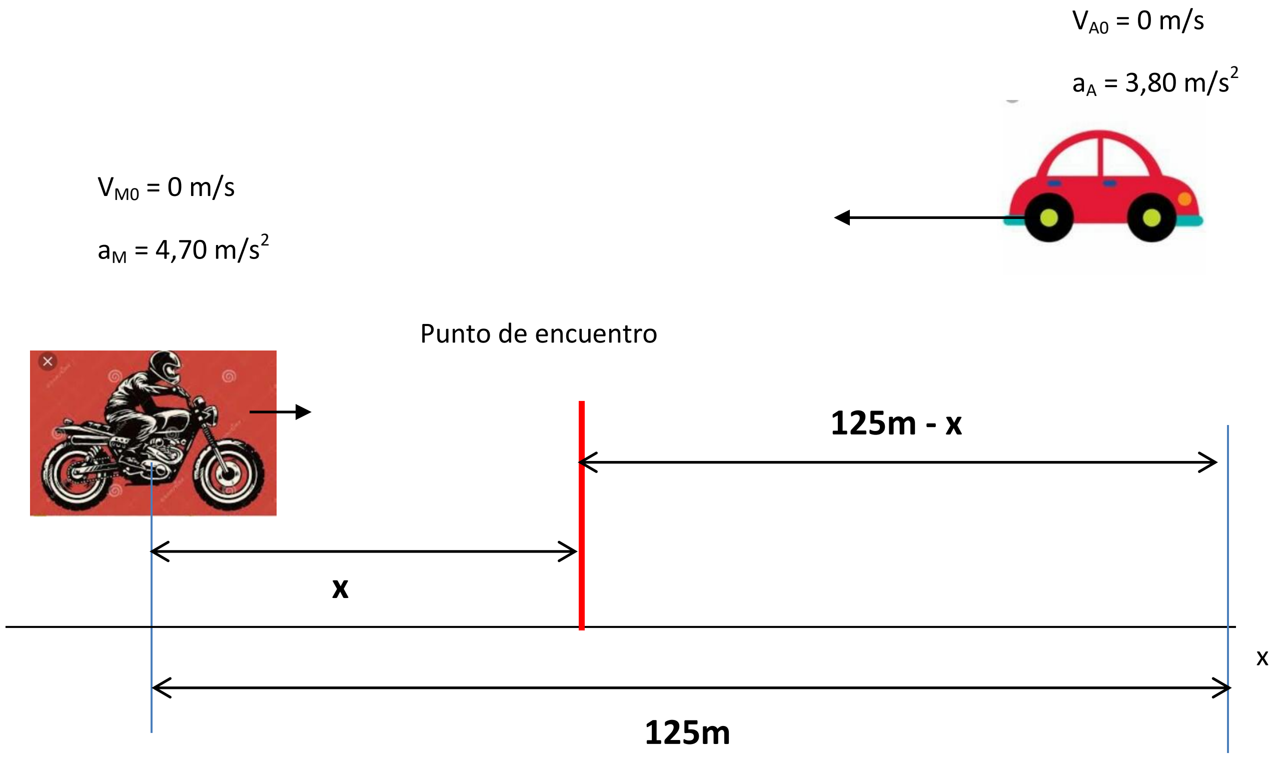
16,7 s + 5 s = 21,7 s

$$x_M = \frac{1}{2}(4{,}70\, m/s^2)\,(21{,}7s)^2 \rightarrow x_M = 1107m$$

$$x_A = \frac{1}{2}(3{,}8\,m/s^2)\,(21{,}7s)^2 + 125m \rightarrow x_A = 1020m$$

1107 – 1020 = 87m de separación

d) Repetir este ejercicio pero suponiendo que la aceleración del auto es (3,80 m/s^2 , 180º)



Tiempo de encuentro

<u>Moto</u>

$$x = \frac{1}{2}a_M t^2 = \frac{1}{2}4{,}70\,m/s^2 t^2 \rightarrow x = 2{,}35\,m/s^2\,t^2 \quad \boldsymbol{ec.1}$$

<u>Auto</u>

$$125m - x = \frac{1}{2}a_A t^2$$

$$125m - x = \frac{1}{2}(3{,}8\,m/s^2)t^2$$

$$125m - x = 1{,}9\, m/s^2\, t^2 \quad \boldsymbol{ec.2}$$

Resolviendo (1) y (2)

$$\begin{array}{rl} \cancel{x} & = 2{,}35\, m/s^2\, t^2 \\ 125m - \cancel{x} & = 1{,}9\, m/s^2\, t^2 \\ \hline 125m \quad & = 4{,}25\, m/s^2\, t^2 \end{array}$$

$$t = \sqrt{\frac{125m}{4{,}25\, m/s^2}} \rightarrow t = 5{,}4s$$

Distancia para cada móvil

$$x_M = \frac{(4{,}70\, m/s^2)}{2} t^2 = 2{,}35\ m/s^2 (5{,}4s)^2 = 68{,}5m$$

$$x_A = \frac{(3{,}80\, m/s^2)}{2} t^2 = 1{,}9\ m/s^2 (5{,}4s)^2 = 55{,}4m$$

¿A qué distancia están uno del otro 5s después del encuentro?

5,4 s + 5 s = 10,4 s

$$x_M = \frac{1}{2}(4{,}70\, m/s^2)\,(10{,}4s)^2 \rightarrow x_M = 254m$$

$$x_A = \frac{1}{2}(3{,}8\, m/s^2)\,(10{,}4s)^2 \rightarrow x_A = 205m$$

254m – 205 = 49m de separación