PRACTICA N° 1

Fundamentos de Medición y Teoría de Errores

Objetivos:

1. Comprender los fundamentos teóricos del proceso de medición.
2. Llevar a cabo lecturas directas con los instrumentos de medidas de longitud y masa para su posterior manipulación y elaboración de cálculos.
3. Determinar los tipos de errores que pueden estar presente en todo proceso de medición.
4. Propagar errores experimentales.

Fundamento teórico:

1. Introducción.

Medir es la comparación de la magnitud que se está estudiando con un patrón de medida. El sistema internacional se apoya en seis magnitudes básicas: la longitud, la masa, el tiempo, la intensidad de corriente, la temperatura y la intensidad luminosa. Las tres magnitudes primarias: longitud, masa y tiempo poseen las unidades del sistema MKS: metro, kilogramo y segundo.

Toda medida debe ir seguida por la unidad, obligatoriamente del Sistema Internacional de Unidades de medida.

Además, todas las medidas están afectadas en algún grado por un error experimental debido a las imperfecciones inevitables del instrumento de medida, o las limitaciones impuestas por nuestros sentidos que deben de registrar la información. Por ello, todo resultado experimental o medida hecha en el laboratorio debe de ir acompañada del valor estimado del error de la medida y a continuación, las unidades empleadas.

1.1. Errores en las mediciones.

El error en una medida se define como la diferencia entre el valor real y el valor medido. Aunque en la práctica el valor real nunca es conocido (y por ende tampoco el error), es posible establecer un intervalo en el que se encuentre el valor real. Se distinguen tres grandes tipos de imprecisiones en el momento de llevar a cabo el registro de datos experimentales.

1.1.1. Errores del observador.

Los errores cometidos por el observador son generalmente lecturas incorrectas de datos, dada la imprecisión natural de los sentidos de éste. Cuando se hacen medidas con instrumentos que poseen escalas finas es muy probable la aparición de este tipo de errores.

1.1.2. Errores sistemáticos.

Los aparatos de medida utilizados en la toma de datos tienen como limitante la precisión y la exactitud; tales factores hacen aparecer los llamados errores sistemáticos. Además la imposibilidad de considerar todas las variables que intervienen en un fenómeno o en una medida es otra forma en la que se introducen estos errores.

1.1.3. Errores aleatorios.

Otra clase común de error es producida por variaciones impredecibles y desconocidas en un montaje, aún cuando se tengan todos los cuidados humanamente posibles. Fluctuaciones en la temperatura es un ejemplo típico de error aleatorio.

1.2. Registro de las medidas.

Existen representaciones numéricas relacionadas con el grado de confiabilidad que tenga una cierta medida. Por ejemplo, si se mide la longitud de un objeto con una regla común, el resultado podría ser 5.5 cm, queriendo indicar que la precisión llega hasta las décimas de centímetro. Si el mismo objeto se mide con un aparato más sofisticado (calibrador, micrómetro, etc.), se puede obtener 5.50 cm ó 5.500 cm. Generalmente, la última cifra es dudosa, ya que es en ésta donde suelen introducirse los errores del observador y los errores aleatorios. Se acostumbra entonces escribir la lectura directa seguida de la precisión del aparato así: 5.5 ± 0.1 cm, 5.50 ± 0.01 cm, 5.500 ± 0.002 cm; de esta forma se da un intervalo de valores entre los que se encontraría la longitud del objeto en este caso.

1.3. Cifras significativas

El número de cifras significativas de una cantidad establece el orden de magnitud de la incertidumbre de un resultado. Por ejemplo, un dato de masa expresado como 13.68 g nos dice que la cifra dudosa es el 8 y que la incertidumbre de esta medida pudiera ser de una centésima de gramo. Podría expresarse este mismo dato con tres, dos o inclusive una cifra significativa atendiendo a las reglas en el redondeo de números. Para el conteo de cifras significativas se tienen las siguientes normas:

a) Cualquier dígito diferente de cero es significativo.

1234.56 tiene 6 cifras significativas

b) Ceros entre dígitos distintos de cero son significativos.

1002.5 tiene 5 cifras significativas

c) Ceros a la izquierda del primer dígito distinto de cero no son significativos.

000456 tiene 3 cifras significativas
0.0056 tiene 2 cifras significativas

d) Si el número es mayor que (1), todos los ceros a la derecha del punto decimal son significativos.

457.12 tiene 5 cifras significativas
400.00 tiene 5 cifras significativas

e) Si el número es menor que uno, entonces únicamente los ceros que están al final del número y entre los dígitos distintos de cero son significativos.

0.01020 tiene 4 cifras significativas

f) Para los números expresados en notación científica se siguen las reglas anteriores en su parte numérica. La potencia no se tiene en cuenta para el número de cifras significativas.

3.092×10^4 tiene 4 cifras significativas

g) Los ceros finales de un dato entero (3<u>00</u>) no son significativos; si se desea expresar que son significativos debe escribirse en notación científica (3.00×10^2).

1.4. Redondeo de números.

Las reglas que se emplean en el redondeo de números son:

a) Si la cifra que se omite es menor que 5, se elimina sin más.

b) Si la cifra eliminada es mayor que 5, se aumenta en una unidad la última cifra retenida.

c) Si la cifra eliminada es 5, se toma como última cifra el número par más próximo; es decir, si la cifra retenida es par se deja, y si es impar se toma la cifra superior.

1.5. Operaciones de números con cifras significativas.

1.5.1. Suma y resta.

Se suman los números normalmente y el resultado se escribe con el número de cifras decimales del sumando que tenga el menor número de cifras decimales.

2212.342 + 5.6 = 2217.942 se redondea a 2217.9

1.5.2. Multiplicaciones y divisiones.

Se multiplican los números normalmente y el número de cifras significativas del resultado es el del dato de menor número de cifras significativas.

$2.51 \times 2.30 = 5.773$ se redondea 5.77 (3 cifras significativas)

Nota 1: si la multiplicación involucra un entero, éste adopta el número de cifras significativas del factor que tenga menos.

$5 \times 4.2 \times 13.56 = 5.0 \times 4.2 \times 13.56 = 284.76$ se redondea a 2.8×10^2

Nota 2: si la multiplicación es con un irracional, se aplica la regla para enteros.

$4.123 \times \pi \times 2.17 = 4.123 \times 3.14 \times 2.17 = 28.0932974$ se redondea a 28.1

1.6. Cantidades expresadas con error

La forma correcta de escribir el resultado de una medición es dar la mejor estimación del valor de la cantidad medida y el rango dentro del cual se puede asegurar que se encuentra este valor. Dado que no existe tal cosa como el valor *real* de una cantidad a medir, es suficiente saber dentro de qué intervalo estamos seguros que se encuentra la cantidad a medir.

Una cantidad con error se expresa de la forma **A'=A± ΔA** donde **A+ΔA** es el límite superior del intervalo de medida y **A-ΔA** el inferior. En esta representación ***A*** corresponde al valor medido con el instrumento y **Δ*A*** sería el error o la incertidumbre en la medida. Existen varias reglas usadas para expresar el error que vale la pena enfatizar. En primer lugar, debido a que la cantidad **ΔA** es una estimación del error, obviamente no debe establecerse con demasiada precisión.

La regla general es esta: la última cifra significativa del resultado debe ser del mismo orden de magnitud (estar en la misma posición decimal) que el error. Por ejemplo, la respuesta 92.81 con una incertidumbre de 0.3 debiera redondearse a 92.8 ± 0.3. Si la incertidumbre es 3, la misma respuesta debiera redondearse a 93 ± 3, y si la incertidumbre es 30, la respuesta debiera ser 90 ± 30. Téngase en cuenta que esto se refiere a cómo expresar el resultado final.

1.7. Error relativo y error absoluto.

El error relativo de una medida corresponde al cociente entre el error de la medida y el valor medido

$$\text{Error relativo} = \frac{\Delta A}{A}$$

De esta expresión se obtiene directamente el error absoluto como

$$\text{Error absoluto } (\Delta A) = A \times \text{error relativo}$$

El error porcentual de una medida corresponde al error relativo multiplicada por cien. A este error, se le da el nombre de **precisión de la medida**.

$$\%\varepsilon = \text{Error relativox}100 = \frac{\Delta A}{A} \text{ x } 100$$

1.8. Apreciación del Instrumento.

La menor división en la escala de cualquier instrumento se llama apreciación. Cuando se lee en un instrumento con escala única, se aproxima la lectura a la división más cercana. Por esto, el máximo error que se puede cometer en dicha medición es de más o menos la apreciación.

La determinación de la apreciación de un instrumento, se realiza mediante la siguiente fórmula:

$$\text{Apreciación} = \frac{\text{Lectura mayor} - \text{Lectura menor}}{\text{N° de divisiones entre las dos lecturas}}$$

La precisión de un Calibrador o vernier está dada por la expresión

$$C = \frac{d}{n}$$

donde ***d*** es la apreciación de la parte fija del aparato y ***n*** es el número de subdivisiones de la parte móvil.

La precisión de un tornillo micrométrico está dada por la expresión:

$$C = \frac{p}{n}$$

donde ***p*** es la apreciación de la parte fija del aparato (paso de rosca) y ***n*** es el número de subdivisiones del tambor.

1.9. **Propagación de errores en medidas directas e indirectas**

1.9.1 Medidas directas

Un experimentador que haga la misma medida varias veces no obtendrá, en general, el mismo resultado, no sólo por causas imponderables como variaciones imprevistas de las condiciones de medida: temperatura, presión, humedad, etc., sino también, por las variaciones en las condiciones de observación del experimentador.

Si al tratar de determinar una magnitud por medida directa realizamos varias medidas con el fin de corregir los errores aleatorios, los resultados obtenidos son x_1, x_2, ... x_n se adopta como mejor estimación del valor verdadero, el valor medio $\langle x \rangle$, que viene dado por

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}$$

El valor medio, se aproximará tanto más al valor verdadero de la magnitud cuanto mayor sea el número de medidas, ya que los errores aleatorios de cada medida se va compensando unos con otros. Sin embargo, en la práctica, no debe pasarse de un cierto número de medidas. En general, es suficiente con 10, e incluso podría bastar 4 ó 5.

Cuando la sensibilidad del método o de los aparatos utilizados es pequeña comparada con la magnitud de los errores aleatorios, puede ocurrir que la repetición de la medida nos lleve siempre al mismo resultado; en este caso, está claro que el valor medio coincidirá con el valor medido en una sola medida, y no se obtiene nada nuevo en la repetición de la medida y del cálculo del valor medio, por lo que **solamente será necesario en este caso hacer una sola medida**.

De acuerdo con la teoría de Gauss de los errores, que supone que estos se producen por causas aleatorias, se toma como la mejor estimación del error, el llamado **error cuadrático** definido por

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}}$$

El resultado del experimento se expresa como

<x>±Δx y la unidad de medida

La identificación del error de un valor experimental con el error cuadrático obtenido de *n* medidas directas consecutivas, solamente es válido en el caso de que el error cuadrático sea mayor que el error instrumental, es decir, que aquél que viene definido por la apreciación del aparato o instrumento de medida.

Es evidente, por ejemplo, tomando el caso más extremo, que si el resultado de las *n* medidas ha sido el mismo, el error cuadrático, de acuerdo con la formula será cero, pero eso no quiere decir que el error de la medida sea nulo. Sino, que el error instrumental es tan grande, que no permite observar diferencias entre las diferentes medidas, y por tanto, el error instrumental será el error de la medida.

1.9.2 Medidas indirectas

En muchos casos el valor experimental de una magnitud se obtiene, de acuerdo a una determinada expresión matemática, a partir de la medida de otras magnitudes de las que depende. Se trata de conocer el error en la magnitud derivada a partir de los errores de las magnitudes medidas directamente.

1.9.2.1 Casos particulares

Sean A’= A±ΔA y B’= B±ΔB dos cantidades expresadas con sus respectivos errores y C’ =C±ΔC el resultado de realizar alguna operación con una de ellas o con ambas. Para expresar apropiadamente el resultado de dicha operación se tienen en cuenta las siguientes reglas:

1.9.2.1.1 El error absoluto para la suma o la diferencia de dos cantidades es la raíz cuadrada de la suma cuadrática de sus errores.

$$(A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B) = C \pm \Delta C$$

donde $C = A + B$ y $\Delta C = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}$

1.9.2.1.2 El error relativo para el producto o el cociente de dos cantidades es la raíz cuadrada de la suma cuadrática de los errores relativos.

$$\frac{\Delta C}{C} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2} \Rightarrow \Delta C = C \times \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$$

De esta forma

- $(A \pm \Delta A) \times (B \pm \Delta B) = C \pm \Delta C$ donde $C = A \times B$ y $\Delta C = C \times \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$

- $\frac{(A \pm \Delta A)}{(B \pm \Delta B)} = C \pm \Delta C$ donde $C = \frac{A}{B}$ y $\Delta C = C \times \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$

1.9.2.1.3 El error relativo de *C'*=(*A'*)^n es $\frac{\Delta C}{C} = n\left(\frac{\Delta A}{A}\right)$.

$$(A \pm \Delta A)^n = C \pm \Delta C$$

donde $C = A^n$ y

$$\Delta C = C \times n\left(\frac{\Delta A}{A}\right)$$

1.9.2.1.4 El error absoluto en la multiplicación de una constante (*K*) por una cantidad con error es

$$\Delta C = K \times \Delta A$$

1.9.2.2 **Funciones de una sola variable**

Supongamos que la magnitud *y*, cuyo valor queremos hallar, depende solamente de otra magnitud *x*, mediante la relación funcional *y=f(x)*. El error de *y* cuando se conoce el error de *x* viene dado por la expresión.

$$\Delta y = |f'(x)|\,\Delta x$$

donde $f'(x)$ es la derivada ordinaria de la función y Δx el error absoluto de x.

1.9.2.2 **Funciones de varias variables**

Método de las derivadas parciales

Supongamos que la magnitud *y*, cuyo valor queremos hallar, viene determinada por la medida de varias magnitudes *p,q,r*, mediante la relación funcional *y=f(p,r,r,..)*. El error en *y* es producido por cada uno de los errores de las magnitudes *p,q,r*,....,independientemente uno de los otros. A estos errores se les denomina errores parciales y la suma de ellos será el error en *y*.

$$\Delta y = \sqrt{\left(<\frac{\partial f}{\partial p}>\Delta p\right)^2 + \left(<\frac{\partial f}{\partial q}>\Delta q\right)^2 + \left(<\frac{\partial f}{\partial r}>\Delta r\right)^2 + \ldots}$$

donde los términos Δp, Δq, Δr,.... son los errores de las magnitudes *p, q, r*,... y los términos $|\partial y/\partial p|$, $|\partial y/\partial q|$, $|\partial y/\partial r|$,.... son las derivadas de *y* con respecto a *p, q, r*,... respectivamente. Ellas se determinan derivando la función y con respecto a cada una de las variables en forma separada *y* considerando constantes las demás. Es decir, al derivar *y* con respecto a *p* se consideran a las variables *q, r*,.... como constantes, y así sucesivamente cuando se deriva respecto a *q, r*,.

Actividades de Laboratorio

2.1. Instrumentos y Materiales.

- Regla, Vernier, tornillo micrométrico, balanza, cronómetro.
- Cubo, cilindro, mesón.

2.2 Determinar la apreciación y tolerancia de los instrumentos de medición que se les suministran.

Instrumento	**Apreciación**	**Tolerancia**
Balanza		
Vernier		
Tornillo micrométrico.		
Regla		
Cronómetro		

2.2.1 Tomar medidas directas de:

- Masa, diámetro y altura de un cilindro.
- Masa y longitud de un cubo
- Longitud largo y ancho del mesón del laboratorio.

Obtenga los datos de la tabla que se da a continuación.

Objeto	**Cantidad a medir**	**Medidas**			**Resultado**	
		1	2	3	Promedio	Error absoluto
Cilindro	Masa					
	Diámetro					
	Altura					
Cubo	Masa					
	Longitud					
Mesón	Ancho					
	Largo					

2.2.2 A partir de las medidas anteriores, se pueden obtener los siguientes resultados, teniendo en cuenta las reglas para la manipulación de cantidades con error. **Para la propagación de errores, utilice el método de derivadas parciales.**

Volumen y densidad del cilindro $V \pm \Delta V$ $D \pm \Delta D$	
Volumen y densidad del cubo $V \pm \Delta V$ $D \pm \Delta D$	
Área del mesón. $A \pm \Delta A$	

Anote observaciones, conclusiones, dificultades, etc.